Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
COLEGIO MEXICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA A.C.
• VOL. 26 » AÑO 2013 • ISBN: 978-607-95306-6-2

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa

2013

26

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Volumen 26

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
VOLUMEN 26

Edición:

©2013. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.
CMM 040505 IC7
Paseo de las Lomas 67. Parque Residencial Coacalco, CP 55720
Coacalco, Estado de México
México

www.cmmedu.com

ISBN: 978-607-95306-6-2

Flores R. (Ed.). (2013). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 26. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
(CLAME)
www.clame.org.mx

Consejo Directivo

2012 - 2016

Claudia M. Lara Galo

Presidente

presidencia@clame.org.mx

Elizabeth Mariscal Vallarta

Tesorera

tesoreria@clame.org.mx

Cecilia R. Crespo Crespo

Secretaria

secretaria@clame.org.mx

Ángela M. Martín

Vocal Caribe

vocal_caribe@clame.org.mx

Edison de Faria

Vocal Centroamérica

vocal_centroamerica@clame.org.mx

Marcela Ferrari Escolá

Vocal Norteamérica

vocal_norteamerica@clame.org.mx

Patricia Lestón

Vocal Sudamérica

vocal_sudamerica@clame.org.mx

Comité
Científico de Evaluación

Acuña Soto Claudia	*(México)*
Alberto de Toso, Malva	*(Argentina)*
Alves Dias , Marlene	*(Brasil)*
Arantes Sad, Ligia	*(Brasil)*
Arcos Quezada, Ismael	*(México)*
Arrieche Alvarado Mario	*(Venezuela)*
Ávila Godoy, Ramiro	*(México)*
B. Alvarenga, Karly	*(Brasil)*
Barros Nunes, Célia	*(Brasil)*
Beyer, Walter	*(Venezuela)*
Blanco, Haydeé	*(Argentina)*
Borello, Mariangela	*(Italia)*
Buendía Abalos, Gabriela	*(México)*
Cabañas Sánchez, Guadalupe	*(México)*
Calvillo Guevara, Nancy Janeth	*(México)*
Camacho, Alberto	*(México)*
Cantoral, Ricardo	*(México)*
Carlos Rodríguez, Eugenio	*(Cuba)*
Carrasco Escobar, José Paúl	*(México)*
Ciancio, María Inés	*(Argentina)*
Córdoba Gómez, Francisco	*(Colombia)*
Crespo Crespo, Cecilia	*(Argentina)*
Criberio Díaz, Josefina	*(México)*
Cruz Hernández, Javier	*(México)*
Dalcín, Mario	*(Uruguay)*
De Faria, Edison	*(Costa Rica)*
de la Cruz Oliva, Allan Takeshi	*(México)*
Delgado, César Augusto	*(Colombia)*
Elguero, Cecilia	*(Argentina)*
Engler, Adriana	*(Argentina)*
Escorza Morales , Alfonso	*(México)*
Flores Estrada, Claudia	*(México)*
Flores García, Rebeca	*(México)*
Fonseca, Laerte	*(Brasil)*
Gaita Ipaguirre, Rosa Cecilia	*(Perú)*
Gómez Otero, Enrique Javier	*(México)*
González, Marcelino	*(Cuba)*
Gutiérrez Rodríguez, Norma	*(México)*
Hernández Sánchez, Judith A.	*(México)*
Homilka, Liliana	*(Argentina)*
Ibarra Olmos, Silvia Elena	*(México)*
Jiménez Abud, Amalia Ysabel	*(México)*
Kistemann Jr., Marco Aurélio	*(Brasil)*
Larios Osorio, Víctor	*(México)*
Lerman, Nora Inés	*(Argentina)*
Lestón, Patricia	*(Argentina)*
Lezama Andalón, Javier	*(México)*
López Vera, Lilia	*(México)*
López, Elpidio	*(Cuba)*
Marmolejo Vega, Efren	*(México)*
Martínez Vázquez, Miriam	*(México)*
Micelli, Mónica	*(Argentina)*

Comité
Científico de Evaluación

TABLA DE CONTENIDOS

CAPITULO 1: ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

CAPITULO 2: PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

CAPITULO 3: ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLSIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

CAPITULO 4: EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

CAPITULO 5: USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTACIÓN

Las personas que participan en las RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) o que forman parte de CLAME (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa), y aquellos colegas y profesionales que asisten a las diferentes actividades de formación y divulgación relacionadas, constantemente aportan al conocimiento de la Matemática Educativa. La publicación de sus trabajos en medios escritos o digitales como la ALME 26 (Vigesimosexta Acta Latinoamericana de Matemática Educativa), o la RELIME (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa), se constituyen en espacios importantes de divulgación que permiten no solo hacer una recopilación de trabajos para ser consultados por diversos profesionales interesados en la Matemática Educativa, sino que registran los aportes para que sean accesibles para consultas en cualquier momento.

El trabajo que lleva preparar una Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa –RELME- es exhaustivo en organización y logística, y aún más exhaustivo en exigencias de calidad. Año con año, desde la convocatoria, se procura que los productos sean cada vez mejores, revisando los tipos de trabajos y categorías, y modificándolos de manera que se ajusten a criterios cada vez más estrictos, globales, actualizados y que aporten valor. La publicación en ALME, fruto de los trabajos presentados en RELME, proporciona, por tanto, productos depurados y revisados que permiten asegurar que los trabajos publicados son una contribución valiosa al acervo cultural y educativo a nivel regional y mundial.

La comunidad CLAME se forma de la interrelación entre sus miembros y otros colegas que buscan fomentar la investigación de calidad y el perfeccionamiento y profesionalización de los docentes. Es un referente regional en Matemática Educativa, en el que un grupo de estudiosos, unidos por valores académicos y profesionales, trabajan con responsabilidad, dedicación y calidad. El compartir sus esfuerzos y trabajos, con fines comunes, los ha constituido en un singular grupo que, además, comparte la alegría del trabajo, una sensibilidad particular por la mejora en la enseñanza de la Matemática, y un sentimiento de amistad estrecha. Por ello, presentar y publicar trabajos en la comunidad CLAME es un experiencia personal y profesional muy enriquecedora.

En ALME 26 se incluyen trabajos que han sido revisados con disciplina y rigurosidad y que provienen de la RELME 26 que se llevó a cabo en Belo Horizonte, Brasil en julio de 2012.

Dichos trabajos se han organizado en los siguientes capítulos, las cuales incluyen la introducción de un profesional invitado especial:

Capítulo 1: Análisis del discurso matemático escolar

Capítulo 2: Propuestas para la enseñanza de las matemáticas

Capítulo 3: Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

Capítulo 4: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional

Capítulo 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Debido a que uno de los propósitos de CLAME es tener un impacto regional y también global, observarán que nuevamente en esta edición se incluye un abstract (en inglés), que es un requisito para que los trabajos puedan ser considerados como referencia en algunos índices internacionales. De esta forma se logra ampliar aún más la divulgación de nuestros trabajos de RELME.

Esperamos que esta Vigesimosexta Acta se utilice como carta de presentación de los aportes que, como profesionales de la matemática educativa, hacemos a la sociedad.

Aprovecho para agradecerle a los árbitros y, especialmente, a los editores de trabajos de ALME por su esfuerzo concienzudo y eficaz y, sobre todo, comprometido y muy responsable. Ellos son testimonio de la entrega desinteresada y valiosa que caracteriza a nuestra comunidad educativa, y se constituyen en ejemplos dignos de imitar por la importante labor que realizan.

Claudia María Lara Galo M.A.
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2012-2016)

Junio 2013

CAPITULO 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo de Análisis del Discurso Matemático Escolar

Gabriela Buendía Abalos

CICATA-IPN. (México)
gbuendia@ipn.mx

¿Por qué estudiar el discurso matemático escolar? Plantear esta pregunta al seno de una comunidad de Matemáticos Educativos, como el Clame, podría implicar preguntarse en primera instancia qué es el discurso matemático escolar (dme). Los extensos contenidos en esta sección del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa proponen sus propias definiciones o mejor dicho caracterizaciones y es que precisamente las características particulares de tal discurso es lo que lo hace valioso a la luz de una investigación en Matemática Educativa.

Como componentes, podemos identificar claramente los libros de textos, la oralidad del profesor, las argumentaciones del alumno y otros elementos entendidos todos como una manifestación del conocimiento matemático, normada por creencias del profesor y los estudiantes sobre lo que es la enseñanza y lo que es la matemática, por lo que dicta el currículo y por las necesidades e intereses de todos los actores de la noósfera. Es justo esta diversidad de elementos la que junto con la de las investigaciones mostradas en los extensos, hace que una definición o incluso una sola caracterización, no permitan responder qué es el discurso matemático escolar. De ahí que la pregunta inicial se vuelve prioritaria y mucho más signitiva: ¿por qué -e incluso para qué- estudiarlo?

Algunas investigaciones han dado cuenta de fenómenos y problemáticas didácticas cuyo origen pueden rastrearse hacia el discurso matemático escolar vigente; otras, han proporcionado instrumentos metodológicos para estudiar dicho discurso no sólo en su estructuración sino hacia evidenciar su rol en las prácticas del docente o de toda una comunidad educativa. Hay un gran grupo de investigaciones que han analizado el discurso de los alumnos hacia dar cuenta de la resignificación de un saber matemático. Intencionalmente no he puesto referencias en estos estudios que abordan aspectos y matices del discurso matemático escolar porque cada rubro se está volviendo un campo de estudio por sí mismo: esa es la importancia del dme en las investigaciones.

El dme sólo se puede entender situacionalmente, pero partir de situaciones y contextos particulares se convierte en el punto basal para discutir problemáticas, proponer alternativas didácticas, significar y resignificar aspectos del saber matemático; incluso podemos partir de la perspectiva del profesor, del alumno o de otros aspectos institucionales como el currículo.

Así, podremos encontrar en esta sección investigaciones centradas en matemáticas de un nivel educativo -básica o universitaria, por ejemplo- pero también investigaciones donde el foco está en una rama del conocimiento matemático, digamos álgebra o geometría. Reconocer el dme en estos casos particulares y usarlo significativamente en nuestras investigaciones, deriva en resultados y aportes a la Matemática Educativa y sus diferentes campos de estudio.

ETNOMATEMÁTICA E MODELAGEM: OPORTUNIDADES E DESAFIOS PARA A AÇÃO PEDAGÓGICA

Milton Rosa
Universidade Federal de Ouro Preto Brasil
milton@cead.ufop.br

Resumo. Neste artigo, o autor tece algumas reflexões sobre a possibilidade da utilização harmoniosa do programa etnomatemática e da metodologia da modelagem matemática na educação matemática para o ensino e aprendizagem em matemática. A modelagem atua como uma ponte entre a etnomatemática e a matemática acadêmica para a ação pedagógica que será requerida nas atividades presentes na sociedade contemporânea. Deve-se ter consciência de que cada grupo cultural desenvolveu um conjunto de ideias matemáticas próprias; dentre as quais se destacam algumas ferramentas básicas que são utilizadas no processo da modelagem.

Palavras chave: etnomatemática, modelagem matemática, ação pedagógica

Abstract. In this article, the author reflects upon the possibility of harmonious use of an ethnomathematics program and methodology of mathematical modeling in mathematics education for teaching and learning in mathematics. The model presents pedagogical action required in the activities found in contemporary society and serves as a bridge between ethnomathematics and academic mathematics, where each cultural group has developed a set of mathematical ideas themselves. Here the author highlights basic tools that are used in the modeling process.

Key words: ethnomathematics, mathematical modeling, pedagogical action

Introdução

Partindo do ponto de vista de que a educação matemática busca a formação de alunos que tenham poder sócio-político-econômico e que sejam capazes de realizar a transformação social, existe a necessidade de que o *saber-fazer* matemático acumulado pelos diferentes grupos culturais seja traduzido para o conhecimento da matemática acadêmica. Essa ação pedagógica visa facilitar a luta dos integrantes de grupos sociais distintos pelo direito à cidadania (Knijnik, 1993). Nesse sentido, os educadores têm como responsabilidade favorecer o estabelecimento de relações entre a matemática acadêmica e o conhecimento adquirido informalmente pelos alunos para auxiliá-los a perceberem a presença da matemática nas atividades e tarefas realizadas diariamente. Esse objetivo pode ser alcançado com a utilização da modelagem matemática como uma ação pedagógica para o programa etnomatemática (Rosa e Orey, 2006).

Etnomatemática e modelagem

Cada grupo cultural desenvolveu um conjunto de ideias, procedimentos e práticas matemáticas próprias, dentre as quais se destacam algumas ferramentas básicas, como por exemplo, a medida, a comparação, a quantificação, a classificação e a inferência, que são utilizadas no processo da modelagem (Rosa e Orey, 2006). Essas ferramentas são técnicas que cada grupo cultural desenvolveu para lidar, matematizar e modelar a própria realidade. Um aspecto primordial desse processo é auxiliar os alunos a perceberem o próprio potencial matemático através do reconhecimento da importância da cultura para a valorização da própria identidade. Contudo, para que essa abordagem seja bem sucedida, existe a necessidade de auxiliar os alunos a valorizarem, entenderem e compreenderem a influência que as culturas exercem sobre o desenvolvimento da matemática.

Entretanto, alguns pesquisadores argumentam que os educadores que utilizam as técnicas da modelagem "tentam entender a realidade para pensar em um modelo de resolução do problema que o sistema escolar valida" (Scandiuzzi, 2002, p. 54) enquanto que os educadores que utilizam a perspectiva etnomatemática "validam o modelo que determinado [grupo cultural] construiu para a resolução do problema que aparece, procurando entender o modelo apresentado" (Scandiuzzi, 2002, p. 54).

Porém, discordamos do ponto de vista desse autor, pois entendemos que por meio do diálogo direto com os criadores do conhecimento matemático, os educadores podem compreender, com a utilização do processo da modelagem, como ocorre a incorporação desse conhecimento nas práticas matemáticas utilizadas na academia. Nesse sentido, concordamos com Eglash (2002) que existe a necessidade de que os educadores utilizem a modelagem como uma ferramenta para traduzir o conhecimento matemático produzido nos grupos culturais para a matemática acadêmica.

Etnomatemática, modelagem e modelos

Existe a necessidade de valorizarmos os modelos elaborados por um determinado grupo cultural. Porém, esse fato não invalida os modelos utilizados pela matemática acadêmica, pois esses podem ser aprimorados com a utilização das ideias e procedimentos matemáticos que foram desenvolvidos no grupo cultural (Rosa e Orey, 2003) e que estão relacionados com as "tradições matemáticas que sobreviveram à colonização e às atividades matemáticas na vida diária das populações, analisando as possibilidades de incorporá-las ao currículo" (Ferreira, 1993, p. 18).

Essa é uma consequência natural da evolução do conhecimento matemático, pois o congelamento temporal e espacial das ideias, dos procedimentos e das práticas matemáticas, acumuladas por esses grupos, pode acarretar o desaparecimento dessas tradições culturais. Assim, é de suma importância que os grupos culturais optem pela aceitação do novo, sem perder, nesse processo, o elo com as tradições que estão relacionadas com as práticas matemáticas que foram adquiridas, acumuladas, difundidas e transmitidas, de geração em geração (Rosa e Orey, 2003).

Porém, enfatizamos que não devemos abandonar um modelo etnomatemático em detrimento de um modelo acadêmico e vice-versa, pois esses modelos podem ser utilizados harmoniosamente na prática pedagógica do ensino e aprendizagem em matemática. Com relação a esses modelos, o que existem são diferenças culturais que estão vinculadas a uma realidade específica, que chega "de maneira natural e através de um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural, a ação pedagógica" (Ferreira, 1993, p. 18).

Assim, o programa etnomatemática utiliza a modelagem para que os seus objetivos educacionais sejam alcançados, pois a etnomatemática e a modelagem se interagem durante essa ação pedagógica (D'Ambrosio, 1993; Rosa, 2000). Dessa maneira, os modelos devem ser elaborados com a utilização das matematizações desenvolvidas pelos membros do grupo cultural por meio do respeito e da valorização do conhecimento matemático acumulado por essas culturas. Nessa abordagem, as técnicas da modelagem são utilizadas no processo de elaboração dos modelos, pois traduzem as práticas matemáticas presentes no conhecimento desenvolvido pelos membros desse grupo (D'Ambrosio, 1993; Rosa e Orey, 2003).

Contudo, salientamos que esse processo deve ser realizado dialogicamente, com a discussão crítica e reflexiva sobre o modelo proposto, para que os membros do grupo não percam a identidade cultural e nem a autonomia nas maneiras distintas de matematizarem e de se relacionarem com a sociedade. Contribuindo para essa abordagem, é preciso:

> Conhecer, entender e explicar um modelo ou mesmo como determinadas pessoas ou grupos sociais utilizaram ou utilizam-no, pode ser significativo, principalmente, porque nos oferece uma oportunidade de "penetrar no pensamento" de uma cultura e obter uma melhor compreensão de seus valores, sua base material e social. (Biembengut, 2000, p. 137)

Nessa perspectiva, o conhecimento etnomatemático de um determinado grupo cultural pode ser utilizado por meio da observação, interpretação ou descrição de uma ação, que originou uma prática matemática necessária para resolver uma situação-problema enfrentada no cotidiano (Rosa e Orey, 2006). Dessa maneira, quando descrevemos uma ação praticada por indivíduos pertencentes a grupos culturais distintos, utilizamos símbolos e códigos que podem ser próprios da matemática desenvolvida no grupo cultural ou originados na matemática acadêmica. Nesse sentido, concebemos a etnomatemática como uma linguagem utilizada para comunicar, descrever, mediar, traduzir e modelar uma ação.

A etnomatemática é um programa que tem como objetivo a organização intelectual e social do conhecimento matemático para a sua difusão a partir das relações interculturais que ocorrem no decorrer da história (D'Ambrosio, 1990). Então, a elaboração de modelos pode auxiliar a tradução de práticas matemáticas da linguagem cotidiana para a linguagem acadêmica por meio de um processo dialógico entre educadores e alunos.

A ação pedagógica da etnomatemática e da modelagem em salas de aula

O desenvolvimento do programa etnomatemática nas salas de aula depende muito das situações que são interessantes para os alunos, pois a motivação é um componente chave para esse programa (Rosa, 2000). É importante que os professores selecionem situações-problema que apresentem aspectos etnomatemáticos relacionados com o ambiente sociocultural da comunidade escolar, rompendo dessa maneira, com a linearidade do currículo matemático. Em nosso ponto de vista, esse rompimento “se constitui em mais um ponto de proximidade entre as duas tendências” (Klüber, 2007, p. 100) pedagógicas. No entanto, é importante salientar que “na Modelagem, os problemas determinam os conteúdos, e na Etnomatemática, as necessidades do cotidiano precisam ser resolvidas para garantir a continuidade e a melhoria da situação de uma comunidade, fazendo surgir conteúdos” (Klüber, 2007, p. 100) que são necessários para o desenvolvimento do currículo matemático.

Nessa perspectiva, Powell e Frankenstein (1997) propuseram a elaboração de um currículo matemático, baseado no conhecimento adquirido pelos alunos na comunidade, que permite aos educadores serem mais criativos na escolha dos tópicos da matemática acadêmica a serem ensinados. Esses autores sugerem que, por meio de diálogos com os alunos, os educadores possam descobrir temas que podem auxiliá-los a redirecionar o currículo matemático para uma perspectiva etnomatemática, pois “essa concepção educacional possibilita que os participantes de uma atividade de Modelagem possam valer-se de vários procedimentos não estruturados, de acordo com o tema ou problema a ser estudado, constituindo-se em mais um ponto de concordância da Modelagem com a Etnomatemática” (Klüber, 2007, p.105).

Essa abordagem educacional favorece o engajamento dos alunos na análise reflexiva e crítica da cultura dominante e da própria cultura por meio da linguagem matemática, em uma perspectiva social, política e cultural (Rosa e Orey, 2003). Então, o importante é que:

> (...) a ideia venha do aluno para escolher o problema a ser analisado, e o professor deve ser apenas um parceiro, evitando a interferência excessiva em alguma ideia do aluno. Deve, desta maneira ensinar os alunos a refletir, encontrar hipóteses, procurar caminhos para possíveis soluções, quer seja através de uma música, um poema, qualquer receita de comida, uma história infantil, seja de gibi ou livro e entrevistas. (Scandiuzzi e Miranda, 2000, p. 251)

De acordo com essa asserção, o ato de contextualizar também aproxima a modelagem da "etnomatemática que procura a contextualização do saber de diferentes culturas" (Klüber, 2007, p. 98). Nessa perspectiva, um elemento essencial do programa etnomatemática é a incorporação dos aspectos culturais no currículo matemático com a utilização de atividades curriculares contextualizadas (D'Ambrosio, 2002). Nesse direcionamento, a contextualização do:

> (...) saber pode ser entendida a partir do reconhecimento das atividades do cotidiano dos sujeitos. A cotidianidade do sujeito não pode ser desconsiderada nem na Modelagem nem na Etnomatemática, pois tanto a contextualização como a cotidianidade são aspectos que atribuem significados aos saberes e fazeres dos indivíduos em uma determinada comunidade. (Klüber, 2007, p. 98)

Ferreira (1997) também propôs a elaboração de uma ação pedagógica para o programa etnomatemática baseada na utilização da modelagem, na qual a contextualização é de fundamental importância para o ensino e aprendizagem da matemática. A figura 1 mostra o modelo pedagógico proposto por esse autor para o programa etnomatemática.

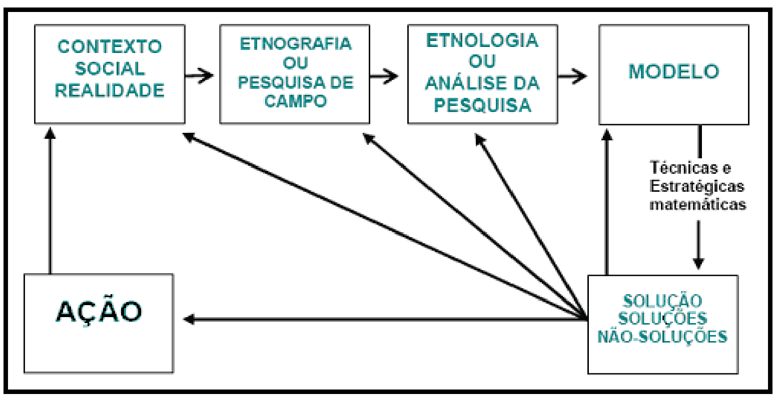


Figura 1: Modelo pedagógico proposto por Ferreira (1997) para o Programa Etnomatemática

Então, a metodologia mais adequada para o ensino e aprendizagem da matemática, em uma perspectiva etnomatemática, é a modelagem, pois a escolha dos temas, retirados da realidade, pode ser direcionada para cobrir tópicos específicos da matemática acadêmica (Rosa e Orey, 2006), facilitando, dessa maneira, o desenvolvimento de "atividades provenientes da realidade" (Klüber, 2007, p. 103). Assim, a utilização de atividades originadas na realidade dos alunos é outro fator que pode aproximar a etnomatemática da modelagem. Nesse direcionamento, é importante que se investigue as concepções, tradições e práticas matemáticas desenvolvida pelos membros de um determinado grupo cultural, com a intenção de incorporá-las ao currículo matemático como um conhecimento escolar (Knijnik, 1996).

Por exemplo, Gerdes (1997) e um grupo de alunos investigaram um método comumente utilizado para a fundação das casas em Moçambique ao estudarem como os construtores utilizam cordas e varetas de bambus para construir a base retangular de suas moradias. Nesse procedimento, os construtores colocam no chão duas varetas de bambu que possuem o mesmo comprimento. Em seguida, duas varetas mais curtas do que as anteriores e com comprimentos iguais também são colocadas no chão. Posteriormente, as varetas são movidas até que se consiga determinar um quadrilátero. Finalmente, com o auxílio de uma corda, a figura construída é ajustada, para que as diagonais tenham comprimentos iguais. Com a utilização dessa figura, algumas linhas são desenhadas no chão para a determinação da base retangular da casa. A figura 2 mostra esse processo de construção da base da casa.

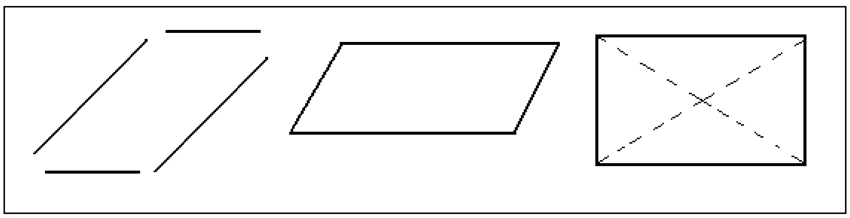


Figura 2: O processo de construção da base retangular da casa

Podemos observar que, nessa construção, os ângulos retos somente aparecem quando a base retangular da casa é finalizada. O conhecimento matemático escondido nessa prática é equivalente a dois teoremas da geometria euclidiana:

1) Se os lados opostos de um quadrilátero possuem o mesmo comprimento, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

2) Se o paralelogramo possui diagonais congruentes, então o quadrilátero é um retângulo.

A elaboração de modelos matemáticos, baseados nessa prática, possibilitou a valorização de um conhecimento matemático escondido, que auxiliou os alunos a tornarem-se conscientes dos valores educacionais e científicos da própria cultura por meio da redescoberta e exploração desse conhecimento etnomatemático, que estava presente na própria comunidade. Então, "quando se assume a visão de matemática como algo presente na realidade concreta, sendo uma estratégia de ação ou interpretação desta realidade, se está adotando o que caracterizamos como uma postura de modelagem" (Bassanezi, 2002, p. 208).

Dessa maneira, existe a necessidade de que o ensino e aprendizagem em matemática considerem o conhecimento matemático que foi construído nas práticas culturais da comunidade com a utilização dos pressupostos da modelagem como um instrumento para se alcançarem os objetivos propostos (Caldeira, 2007). Essa perspectiva possibilita a caracterização de ações pedagógicas desenvolvidas por meio da modelagem, que são originadas no contexto sociocultural dos alunos, possibilitando a exploração das ideias, procedimentos e práticas matemáticas locais, respeitando os valores culturais dos alunos e os conhecimentos adquiridos por meio da vivência em comunidade e em sociedade. De acordo com esse contexto, cada grupo cultural tem as suas:

> (...) maneiras próprias de matematizar a realidade. Não há como ignorar isso e não respeitar essas particularidades quando do ingresso da criança na escola. Todo passado cultural do estudante deve ser respeitado, dando-lhe confiança no seu próprio conhecimento e dando-lhe também, uma certa dignidade cultural ao ver suas origens sendo aceitas pelo professor. (D'Ambrosio, 1990, p. 27)

Nessa ação pedagógica, os alunos são orientados a criarem o conhecimento matemático por meio da problematização de situações vivenciadas no cotidiano, oportunizando o desenvolvimento de habilidades e competências gerais cujos objetivos visam à contextualização do aprendizado e a ampliação de significados do conteúdo matemático estabelecido nos programas curriculares.

Considerações finais

Em uma concepção mais abrangente, existe um relacionamento entre a etnomatemática e a modelagem, pois quando se pretende entender e compreender as maneiras próprias que os membros de um determinado grupo cultural desenvolveram para quantificar, medir, classificar, modelar e resolver problemas cotidianos, é necessário considerarmos as práticas socioculturais da matemática por meio da etnomatemática e, também, as práticas da matemática acadêmica por meio da modelagem (Rosa e Orey, 2007).

Concordamos com o ponto de vista de D'Ambrosio (2000) de que não existe uma situação conflitante entre a etnomatemática e a modelagem, pois por meio da utilização das técnicas da modelagem, as ideias etnomatemáticas e os conceitos da matemática acadêmica se misturam durante a prática pedagógica desencadeada nesse processo. Dessa maneira, os alunos praticam a matemática acadêmica ao modelar situações-problema geradas na perspectiva da etnomatemática. Então, a modelagem pode atuar como uma ponte entre as ideias etnomatemáticas e os conceitos propostos pela matemática acadêmica, que são requeridos nas atividades presentes na sociedade contemporânea e no mundo globalizado.

Referências bibliográficas

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo, SP, Brasil: Editora Contexto.

Biembengut, M. S. (2000). Modelagem e etnomatemática: pontos (In) comuns. In: M. C. S. Domite (Ed.), *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática - CBEm1* (pp. 132-141), São Paulo, SP, Brasil: Faculdade de Educação-Universidade de São Paulo.

Caldeira, A. D. (2007). *Modelagem matemática* e *formação de professores:* o que isto tem a ver com as licenciaturas? V Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. Ouro Preto, MG, Brasil: Universidade Federal de Ouro Preto.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*. São Paulo, SP, Brasil: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática: um programa. *A Educação Matemática em Revista 1*(1), 5-11.

D'Ambrosio, U. (2000). Etnomatemática: uma proposta pedagógica para uma civilização em mudança. In: M. C. S. Domite (Ed.), *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática - CBEm1* (pp. 143-152), São Paulo, SP, Brasil: Faculdade de Educação-Universidade de São Paulo.

D'Ambrosio, U. *Etnomatemática:* elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte, MG, Brasil: Editora Autêntica, 2002.

Eglash, R. (2002). Computation, complexity and coding in Native American knowledge systems. In: J. E. Hanks e G. R. Fast (Eds.), *Changing the Faces of Mathematics*: Perspectives on Indigenous People of North America (pp. 251-262). Reston, VA, United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.

Ferreira, E. S. (1993). Cidadania e educação matemática. *A Educação Matemática em Revista 1*(1), 12-18.

Ferreira, E. S. (1997). *Etnomatemática*: uma proposta metodológica. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: MEM/USU.

Gerdes, P. (1997). On culture, geometrical thinking and mathematics education. In: A. B. Powell e M. Frankenstein (Eds.), *Challenging Eurocentrism in Mathematics Education* (pp. 223-247). New York, NY, United States of America: SUNY.

Klüber, T. E. (2007). *Modelagem matemática e etnomatemática no contexto da educação matemática*: *aspectos filosóficos e epistemológicos*. Dissertação de mestrado. Faculdade de Educação. Ponta Grossa, PR, Brasil: Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Knijnik, G. (1993). O saber popular e o saber acadêmico na luta pela terra. A *Educação Matemática em Revista* 1(1), 28-42.

Knijnik, G. (1996). *Exclusão e resistência: educação matemática e legitimidade cultural*. Porto Alegre, RS, Brasil: Artes Médicas.

Powell, A. B. e Frankenstein, M. (1997). Ethnomathematics praxis in the curriculum. In: A. B. Powell e M. Frankenstein (Eds.), *Challenging Eurocentrism in Mathematics Education* (pp. 249-259). New York, NY, United States of America: SUNY.

Rosa, M. (2000). From reality to mathematical modeling: a proposal for using ethnomathematical knowledge. Dissertação de Mestrado. College of Education. Sacramento, California, United States of America: California State University.

Rosa, M. e Orey, D. C. (2003). Vinho e queijo: etnomatemática e modelagem! *BOLEMA 16*(20), 1–16.

Rosa, M. e Orey, D. C. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: Delineando-se um caminho para a ação pedagógica. *BOLEMA 19*(26), 19–48.

Rosa, M. e Orey, D. C. (2007). Cultural assertions and challenges towards pedagogical action of an ethnomathematics program. *For the Learning of Mathematics* 27(1), 10-16.

Scandiuzzi, P. P. (2002). Água e óleo: modelagem e etnomatemática? *BOLEMA 15*(17), 52-58.

Scandiuzzi, P. P. e Miranda, N. (2000). Resolução de problema matemático através da etnomatemática. In M. C. S. Domite (Ed.), *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática - CBEm1* (pp. 251-254). São Paulo, SP, Brasil: FE/USP.

EPISTEMOLOGÍAS DE LA FUNCIÓN DERIVADA

Eliseo Ramírez Rincón
Universidad Libre Colombia
eliseo.ramirezr@unilibrebog.edu.co, elmatematis@gmail.com

Resumen. En el presente escrito se hace una somera revisión histórica de los orígenes de lo que hoy se conoce como función derivada, centrando la atención en la complejidad de algunos cambios epistemológicos, a partir de los cuales se pueden beneficiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de ésta. Dichos cambios van desde lo que Canul, Dolores y Martínez (2011) llaman las transiciones que le dieron evolución a la idea de derivada: tangente global – tangente local; métodos particulares de trazo- a métodos generales, de un problema geométrico a un problema analítico; de la matemática de las constantes a la matemática de las variables; de la aproximación a la idea de límite; de los diferenciales al límite; fundamentación con el límite; la fundamentación del cálculo sobre la base de los infinitesimales. A partir de lo cual se consolidó como conocimiento matemático en aproximadamente veinte siglos. Ramírez (2012).

Palabras clave: epistemología, historia, derivada, función, didáctica

Abstract. In this paper a brief historical review of the origins of what is now known as derivative function is presented, focusing on the complexity of some epistemological changes, from which benefits on the teaching and learning of this subject can be obtained. These changes range from what Canul, Dolores and Martinez (2011) called transitions that evolution gave the idea of derivative: global tangent - local tangent; stroke-specific methods to general methods, geometric problem to an analytical problem, from the mathematics of constant to the mathematic of variables, the approach to the idea of limits, the limit differentials; foundation with the limit, the validity of the calculation on the basis of the infinitesimal. From this, it was consolidated as mathematical knowledge in about twenty centuries. Ramírez (2012).

Key words: epistemology, history, derivative, function, didactic

Introducción

En Colombia, a través de los resultados de la prueba de estado, realizada a estudiantes (16-19 años) anualmente por el ICFES (instituto Colombiano de Fomento a la Educación Superior), se puede deducir el deficiente nivel con el que "pasan" los estudiantes del colegio a la universidad en cuanto a las ideas previas de la función como estabilidad del cambio y como proceso variacional. También se corrobora este aspecto con el estudio hecho por el MEN (Ministerio de Educación Nacional) en 2011, sobre el perfil nacional del área en pruebas SABER de 5° y 9° de la básica, en el que se refleja el pobre desempeño en los procesos de variación tanto en 5° (10-13 años) como en 9° (14-16 años) grados de la básica. Los resultados anteriores, reflejan dificultades en la comunidad educativa (instituciones, profesores y estudiantes,…) en la enseñanza y aprendizaje del pensamiento variacional y los procesos generales emanados de los Estándares Básicos de Competencias (2006) del MEN. Dada la complejidad de la problemática, se presenta esta síntesis como reflexión desde lo curricular, en el sentido de revisar que el lenguaje matemático incorporado en el área esté en correspondencia desde lo cultural (entorno social del que aprende) con los conocimientos matemáticos en cuestión (rigor y formalismo). Ramírez (2012).

Síntesis histórica de la derivada-función derivada

A partir de la importancia de la matemática griega y su gran influencia en el desarrollo del cálculo, se plantea la discusión desde el pensamiento e influencia de la escuela pitagórica en las medidas conmensurables e inconmensurables, el continuo y el razonamiento deductivo, en los procesos de síntesis y de análisis; aspectos que marcaron el posterior desarrollo de las matemáticas. El cálculo o análisis tuvo su origen en las dificultades lógicas y de lenguaje de los matemáticos griegos, al esforzarse por expresar sus ideas intuitivas en razones o segmentos proporcionales, que ellos vagamente reconocieron como continuo geométrico, porque en lo numérico, más bien, lo consideraron como continuo discreto. Boyer (1986), Muñoz y Román (1999).

Pitágoras vivió en el siglo VI a C. y su legendaria escuela fue una mezcla de filosofía, religión y matemáticas. A la escuela pitagórica se le atribuyen numerosos descubrimientos matemáticos, entre ellos la demostración del teorema que lleva su nombre, el descubrimiento de los números irracionales, que no los pudieron explicar y menos demostrar, sin embargo es considerado como uno de los acontecimientos más profundos en la historia de las matemáticas, porque determinó la relación de lo conmensurable a través del número y lo inconmensurable con lo geométrico. En general, para los griegos los números se reducían a los enteros (a partir del uno) y a los fraccionarios positivos, consideraban a la unidad indivisible y por ello, el proceso de división numérica era conmensurable, lo cual corresponde a un continuo discreto, dado que los enteros son un conjunto discreto. En ese sentido no pudieron percibir lo que en cálculo se llama el paso al límite, a pesar de que los desarrollos de los griegos fueron muy notorios e importantes en lo geométrico, en este campo tenían cabida las mediciones inconmensurables como un continuo estático Bagni (1996), Boyer (1986). A ellos, se debe la búsqueda del rigor matemático, de estudiar todos los resultados, principios, teoremas, en demostraciones y razonamientos lógicos. A partir de Pitágoras, la matemática se independiza de una base empírica, convirtiéndose en una ciencia abstracta que existe más allá de la realidad cotidiana del ser humano, a ellos se debe el método deductivo. Bagni (1996), González (1992).

No obstante lo anterior, los integrantes de la escuela de los Eleáticos (s. VI a C.), cuestionaron los fundamentos pitagóricos del materialismo y consideraron que el universo era una unidad inmutable (indivisible). A partir de esta escuela el pensamiento matemático de los griegos cambió y se fortaleció con el pensamiento inductivo de Platón y el mundo de las ideas (la matemática existe, hay que descubrirla) y el pensamiento deductivo Aristotélico (influencia que aún existe); ambos estuvieron permeados por el trabajo de Euclides. La demostración en las matemáticas de esa época, se impuso con regla y compás como método riguroso euclidiano. La tecnología con la que contaron se basó en artefactos construidos por ellos mismos, para entender una situación, para modelar un problema o para comprobar su solución; se ayudaron más con la intuición como forma de razonar sobre un fenómeno. En esta etapa, salvo por Arquímedes (s. III a C.), quien trabajó el método de exhaución de Eudoxio, para resolver problemas de áreas y volúmenes que luego demostraba por reducción al absurdo y con su método mecánico, no se perciben vestigios de procesos de variación en el pensamiento griego y según Bagni (1996) y Boyer (1986) hubo que esperar hasta la matemática del renacimiento de Europa para ello.

En el s. XVI al ser retomado el trabajo de los matemáticos griegos en Europa, fue cuestionado su rigor, el cual se fue refinando paulatinamente hasta llegar al actual. Entre los trabajos destacados en Europa, se pueden mencionar el de Kepler (1571-1630), quien estudió la forma de hallar el volumen de cuerpos de revolución, descomponiéndolos en partes indivisibles. Galileo (1564-1642) determinó, que el espacio recorrido por un cuerpo era igual al área comprendida entre la velocidad y el tiempo. A su vez Cavallieri (1598-1647), alumno de Galileo, usó sistemáticamente técnicas infinitesimalistas para resolver problemas de áreas y volúmenes de cuerpos; no estuvo interesado en el rigor, sino en la practicidad de los hallazgos. Otros matemáticos importantes en este período son: Luca Valerio (1552-1618), Huygens (1596-1695), Descartes (1596-1650), y Fermat (1601-1665) quien en el año 1629 hizo dos importantes descubrimientos que están relacionados con sus trabajos sobre geometría. En el más importante de ellos, titulado *"Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum"* (Métodos para hallar máximos y mínimos a una línea tangente en una curva), Fermat expone un método, eminentemente algebraico y desprovisto de fundamentos demostrativos para hallar los puntos en los cuales una función polinómica, toma un valor máximo o mínimo. Roberval (1602-1675), Torricelli (1608-1647), Wallis (1616-1703), Pascal (1623-1662), Hudde (1628-1704) y Barrow (1630-1677) entre otros. Cantoral y Resendiz (2003).

En el Renacimiento, el rigor matemático cambió respecto del usado por los griegos (Geométrico), se hizo entonces necesario buscar nuevas formas de demostrar los procesos distintos a los de la geometría griega y del álgebra árabe; es decir, los problemas de variación de la mecánica clásica. En este período, la intuición como razonamiento matemático fue importante. Se encuentran diferencias en el rigor utilizado por los matemáticos de esta época y en ese sentido por ejemplo se destacan los trabajos de Descartes y Barrow. En general los trabajos de estos matemáticos en el cálculo, antecedieron al de Newton (1643-1727), con la teoría de fluxiones y a la de Leibniz (1646-1716) con la teoría infinitesimal; los dos, a por caminos distintos con lenguajes también diferentes, lograron darle sentido a lo que hoy se conoce como cálculo diferencial e integral. Tanto Newton como Leibniz, usaron los infinitésimos e intentaron dejarlos de lado por las críticas que algunos pensadores como Berkeley (1685-1753) les hicieron; este hecho marca otra etapa más en el avance del rigor matemático, en el cual se tuvo que esperar hasta los trabajos de Bolzano (1741-1848), Cauchy (1789-1857) y Weierstrass (1815-1897). Bagni (1996), Boyer (1986).

Síntesis y reflexiones

Según los registros históricos, este trabajo encuentra seis momentos epistemológicos distintos con tres formas distintas de rigor, en el desarrollo de lo que hoy se conoce como *función derivada*. Ramírez (2012), son ellos:

Arquímedes (287-212 a. C.), quien a través de sus trabajos y sus métodos: heurístico mecánico, Exhaustion y reducción al absurdo, estudia fenómenos de variación tanto en la mecánica como en los fenómenos naturales y el universo. Presenta un rigor diferente al de regla y compás, predominante en esa época en Grecia, logra demostrar sus mediciones de áreas y volúmenes de cuerpos y figuras en forma parecida a la realizada por Riemann (1826-1886). Con Arquímedes aparece un segundo momento en el desarrollo del rigor en matemáticas, el cual abarca hasta el s. XVIII, con Cauchy. La tecnología desarrollada y usada por Arquímedes, es ampliamente detallada en sus trabajos a través de la mecánica y por ellos, se le considera como el pionero de la ingeniería entre otros. Durán (2002).

Galileo (1564-1642), quien estudió la aceleración de los cuerpos en caída libre, logró encontrar que ésta, era independiente de la masa y además que era constante, es decir que si en el primer intervalo de tiempo (t) el espacio (s) recorrido por un cuerpo era C, encontró que: $s(t) = C\,t^{2}$, pero no logró demostrarlo, sin embargo está comprobado que él tenía razón, que el valor de la aceleración (a) de los cuerpos que caen es constante de valor, $a= 2C$. Esta etapa del desarrollo de la función derivada, presenta indicios epistemológicos que corresponden a la intuición, a la observación y a la experimentación como referentes importantes, no existía la matemática con la cual se podía demostrar este hecho y por lo tanto fue un impedimento en el trabajo de Galileo, que debió esperar a dos grandes de las matemáticas.

Newton (1642-1727**)** **–***Leibniz* (1646-1716)**,** quienes continuaron con el trabajo de sus predecesores como Arquímedes, Galileo, Descartes, Barrow y otros que dejaron el camino listo para que ellos dieran solución a los problemas planteados desde la mecánica y a los cuatro problemas que hasta entonces o no les hallaron solución o ella fue parcial, como lo fueron; el de la recta tangente, el del movimiento, el de las áreas y el de máximos y mínimos. Ellos son considerados los "padres del cálculo", a ellos se debe el nacimiento del cálculo como dominio matemático diferente de la aritmética, la geometría o el álgebra de ese entonces. Sin embargo, como se ha reseñado, fue un trabajo de varios siglos y de innumerables personas, con ellos se da paso a un nuevo rigor, no fueron ellos los que lo formularon, pero dejaron la base lista para hacerlo, porque les hizo falta la construcción de los números reales para ello, sin embargo la intuyeron.

Los tres momentos anteriores de las epistemologías del cálculo, tienen en común que sus trabajos sobre los procesos de variación estaban basados en los infinitesimales como cantidades numéricas o geométricas y que no se pudieron explicar con el rigor matemático existente hasta entonces, que la intuición fue importante en sus respectivos trabajos, así como los problemas de la mecánica, sin embargo mientras que Arquímedes trabajó en el "cálculo de áreas" con infinitésimos; Newton y Leibniz lograron presentar la derivación y la integración como procesos inversos, con lo cual sentaron las bases del teorema fundamental del cálculo. Grabiner (1983).

Lagrange (1736-1813): El símbolo $f'(x)$, para las derivadas, fue introducido en 1797 en Théorie des fonctions analytiques. Cantoral (1995), realizó un estudio Socioepistemológico, en el que evidenció que la derivada en el sentido de Cauchy es entendida como el Límite del cociente incremental, mientras que la derivada Lagrangiana es, entendida como el coeficiente lineal del desarrollo en serie de potencias de una función en torno a un punto dado. En este sentido dice también Cantoral, que esta doble apariencia no debe entenderse como formas diferentes de escribir a la función derivada, sino más bien como dos epistemologías diferentes, que en épocas diferentes aparecen, porque dice él los "*usos hacen al objeto"* y no al contrario. Cantoral y Mirón (2000).

Desarrollando a f, entorno del punto x, con incrementos h, se tiene que: $f(x+h)= a_0(x)/0! + a_1(x)h/1! + a_2(x)h^2/2! +\ldots+\ldots +a_n(x)h^n/n!$ Reescribiendo esta expresión en términos de las derivadas de f, se tiene que:

$f(x+h) =f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2! \ldots+\ldots$ Y, si se desarrolla esta serie en torno al punto $x=a$ se tiene que: $f(x+h) =f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2! \ldots+\ldots$

Cauchy (1789-1857): quien logra construir a partir de su trabajo sobre series convergentes, la definición de la función derivada en 1823, con el rigor y formalismo actual. A partir de los trabajos de Bolzano y de Weierstrass (quien construye los números irracionales y es quien elimina los infinitésimos de los escritos matemáticos), Cantor (conjuntos) y Dedekind (cortaduras) quienes logran la construcción de los números reales. Estos aportes junto con lo hecho por Cauchy, permitieron definir la función derivada como un límite.

Con Cauchy se alcanza la tercera etapa del rigor matemático, tal como se concibe en la actualidad. A partir de este rigor se han generado la mayor parte de propuestas en Didáctica de la Matemática. La tecnología en esta etapa del rigor matemático se ha desarrollado vertiginosamente y en comparación con las dos etapas anteriores ha pasado de la calculadora de Pascal a las calculadoras graficadoras y programables, al pc portátil, a la internet, y al software matemático, entre otras. Grabiner (1983).

Robinson (1918-1974), quien en la década de 1960, con la teoría de modelos creó una extensión de los reales, el cual corresponde al conjunto de los reales no estándar (R*). En este conjunto se cumple:

Axioma de extensión. Existe una extensión ordenada y propia *R**, del cuerpo *R*. En esta extensión *R**, se define *x, como:*

1. Un *infinitesimal* en *R*,* si |x|<*r,* para todo real positivo *r.*
2. *Finito*, si |x|<*r*, para algún real positivo *r.*
3. *Infinito*, si |x|>*r*, para todo real $r \in R$.

Luego en *R** hay infinitesimales y números infinitamente grandes, más grandes que cualquier número real, además de los números reales. (Keisler, 2007).

Ciertos procesos en el cálculo se simplifican, usando el análisis no estándar. Este es el caso de la definición de derivada. Específicamente, f es una función diferenciable en $a \in R$, siempre que el cociente $\left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right)$ sea finito y tenga la misma parte estándar para cada infinitesimal no nulo, $\Delta x \cong 0$ su derivada es:

Sin embargo las propuestas en Didáctica de la Matemática que se generaron a partir de este enfoque fueron abandonadas en la década de 2000, porque se encontró que este enfoque es más complejo que el de Cauchy.

El rigor y el formalismo de las matemáticas como se conocen hoy es producto del refinamiento y avance a través de los trabajos de cientos de matemáticos en distintas épocas y lugares como un producto multicultural.

El proceso de desarrollo histórico del conocimiento matemático conocido hoy como función derivada ha sido complejo, demorado y tortuoso. La historia da cuenta que su desarrollo, no fue lineal, ni acumulativo, así como tampoco fue producto de la genialidad de dos personas. En el proceso de desarrollo histórico del paso de derivada a función derivada se usaron los infinitésimos (como números), los cuales fueron eliminados en el s. XIX con los trabajos de Bolzano y Weierstrass al definirlos éste último como variables y además porque los infinitesimales no están definidos en el conjunto numérico de los reales, cabe preguntarse entonces ¿Por qué todavía algunos textos de cálculo se titulan como cálculo diferencial e integral, calculo con infinitésimos, cálculo infinitesimalista,…?

La Didáctica de la Matemática reporta trabajos e investigaciones en su mayor parte en la epistemología de Cauchy, siendo la más rigurosa y difícil de aprender por parte de estudiantes de último año del colegio o primeros semestres de universidad. Cantoral (1995), Ramírez (2012). Uno de los ejemplos clásicos del cálculo diferencial corresponde a la función valor absoluto: $f(x)=|x|$, cuyos significados como métrica fueron conflictos epistemológicos para los matemáticos hasta antes del s. XIX. Por lo tanto es normal que este tipo de funciones también generen en los estudiantes conflictos al leerla, estudiarla y tratar de representarla. Por ejemplo, es complejo para ellos aceptar que f, es continua en (0, 0), pero no es diferenciable allí; porque es usual que confundan el hecho de que toda función diferenciable en un punto dado, es continua allí también, con su recíproco: toda función continua en un punto es diferenciable en ese punto también, lo cual como en este caso no se cumple. Es evidente entonces que el lenguaje de la función derivada cambia de acuerdo con la epistemología usada.

La intuición como razonamiento de las matemáticas, contribuye en la comprensión de los conocimientos matemáticos de los estudiantes.

El rigor y el formalismo actual de las matemáticas son muy importantes, pero ese debe ser el estado final, la meta a lograr con los estudiantes, por lo tanto las anteriores epistemologías pueden servir para ambientar, motivar y orientar el trabajo de los estudiantes hacia la epistemología de Cauchy.

Referencias bibliográficas

Bagni, G., T. (1996). *Storia delle Matematiche* (1), Bologna, Italia: Edizioni Pitagora.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis,* 11 (1*),* 55 –101.

Cantoral, R., Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6 (2), 133 – 154.

Cantoral, R. y Miron, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica, *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa,* 3 (3), 265-292.

Canul, E., Dolores, C. y Martínez, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 14 (2), 173-202.

Durán G., A. (2002). *Los manuscritos griegos de Arquímedes en la Biblioteca del Real Monasterio del Escorial*. Resumen recuperado el 10 de 0ctubre de 2012 de http:// www.mpiwgberlin.mpg.de.

González, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Madrid: Alianza Editorial.

Grabiner, J. (1983). The Changing Concept of Change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine* 56 (4), 195-206.

Keisler, J. (1976). *Elementary Calculus, and infinitesimal approach,* (2a.) *Edition.* Recuperado el 25 de enero de 2007 de http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html

Colombia, Ministerio de Educación Nacional, (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, Colombia: MEN.

Muñoz, L. y Roman, R. (1999). *Origen y desarrollo histórico del Cálculo infinitesimal*, Departamento de Matemática Aplicada y Telemática, Barcelona, España: ediciones UPC.

Colombia, Perfil Nacional en Matemáticas. (2011). *Análisis de resultados de pruebas externas nacionales e internacionales. Ministerio de Educación Nacional; viceministerio de educación preescolar, básica y media. Dirección de calidad para la educación preescolar básica y media. Subdirección de referentes y evaluación de la calidad educativa. Análisis realizado por la subdirección de referentes y evaluación de la calidad educativa*. Bogotá, Colombia: MEN.

Ramírez, E. (2012). *Enseñanza de la función derivada con el uso de infinitesimales como alternativa para reducir los conflictos semióticos de los estudiantes*. Disertación doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Nacional, UPN., Bogotá, Colombia.

COLECCIÓN BICENTENARIO: UNA MIRADA DESDE LOS LIBROS DE MATEMÁTICA

Ana Duarte Castillo, Keelin Bustamante Paricaguan
Universidad Nacional Abierta Venezuela
aduarte@una.edu.ve, kbustamante@una.edu.ve

Resumen. El presente trabajo tiene como finalidad describir, desde una visión de autor, la experiencia vivida en la elaboración de los libros de matemática. La Colección Bicentenario son libros de texto (Matemática, Lengua, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales) editados por el gobierno de la República Bolivariana de Venezuela. Estos libros están dirigidos a estudiantes de Educación Primaria (7 años – 12años). Los mismos obedecen a una concepción de la Educación Matemática Crítica (Skovsmose, 1999; Mora, 2005; Becerra, 2005; Frankenstein, 2006). El modelo adoptado para construir las lecciones fue discutido en el seno de la comisión de libros de texto de matemática, con una base teórica sustentada en la corriente antes mencionada. Se seleccionó como estructura: Área temática; Bloque y sub-bloque; contenido; actividades y procesos a desarrollar. Una vez seleccionado el objeto matemático a desarrollar, se procedió a elegir el área temática, la cual debía estar contextualizada o relacionada al Plan Nacional Simón Bolívar 2007-2013 o cualquiera de los programas sociales que se llevan a cabo en Venezuela. Se obtuvieron libros de matemática cónsonos con los cambios sociales y con el enfoque descrito en la actual Ley Orgánica de Educación (2009), contribución importante a la sociedad venezolana.

Palabras clave: educación crítica de la matemática, libros de texto

Abstract. In order to describe, from author perspective, the mathematic books elaboration lived experience, this work was performed. The Bicentenary Collection is a set of text books (mathematic, nature science, and social science) edited by the Government of República Bolivariana de Venezuela, destined to elementary school and middle school students (7 and 12 year old). Each one was written under the approach of critical mathematics educations, Skovsmose, 1999; Mora, 2005; Becerra, 2005; Frankenstein, 2006. In the lessons construction the adopted model was discussed by text book commission of critical mathematical. From those gatherings a structure was selected: Subject area, block and sub-block, content, activities and processes to develop. Once we selected how to develop a mathematical object, we proceeded to choose the subject area, which should be contextualized or related to “Plan Nacional Simón Bolívar 2007-2013”, or other social program being carried out in Venezuela. We obtained mathematical books in harmony with social changes, with the current approach described of the Venezuelan organic law of education (2009). This is an important contribution in the Venezuelan society.

Key words: critical mathematical Education, textbooks

Introducción

La colección Bicentenario es el nombre que recibe el grupo de libros de texto (Matemática, Lengua, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales) editados por el gobierno venezolano, a través del Ministerio del Poder Popular para la Educación como uno de los muchos programas sociales que han sido impulsados en la República Bolivariana de Venezuela en los últimos trece años. Estos Libros de texto están dirigidos a estudiantes de Educación Primaria (7 años – 12años) y son cónsonos con el proceso de transformación social descrito en la Ley Orgánica de Educación (1999). Este tipo de material curricular representa uno de los elementos del currículo que posee mayor incidencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto de las matemáticas como de otras disciplinas escolares. (Serrano, 2009; Parcerisa, 1996).

En cualquier libro de texto, en este caso de matemáticas, no solo encontramos informaciones referidas a ideas matemáticas, sino que se pone en evidencia la concepción pedagógica y didáctica del autor, es decir el modelo docente del autor. (Gascón, 2001). El presente escrito pretende describir, desde una visión de autor, la experiencia vivida en la elaboración de los libros de matemática.

Para lo cual, comenzaremos describiendo como han sido entendidos los libros de texto, después la necesidad de los libros de matemática de la colección Bicentenario, seguida de la concepción pedagógica y didáctica que estuvo presente a lo largo de la elaboración de este tipo de material curricular. Continuando con los referentes teóricos que sustentan este proyecto y finalmente las conclusiones y recomendaciones; junto con algunos modelos de lecciones presentes en los libros.

Libros de texto: Como han sido entendidos

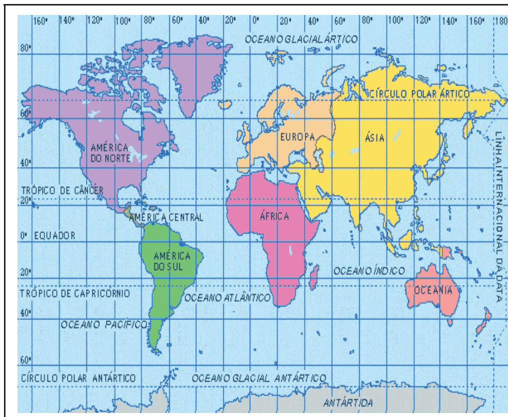
A lo largo de la historia el concepto de libro de texto ha ido variando (Libro enciclopédico, programado, etc.). Las características de lo que en los últimos años se ha entendido como un libro de texto son las siguientes: se trata de un libro que en un número determinado de páginas desarrolla el contenido de un área o asignatura para un grado o curso escolar, distribuyendo los contenidos en lecciones o unidades; generalmente está pensado para un uso centrado en la comunicación por parte del docente y el estudio individual sobre el propio libro, mediante la lectura y la realización de las actividades propuestas. En las últimas décadas los libros de texto se han caracterizado por presentar una serie de contenidos que se convierten en predescriptivos; por platear una serie de actividades cerradas, homogéneas y en muchas ocasiones autosuficientes (Parcerisa, 1996; 36). Adicionalmente este tipo de material curricular junto con recursos didácticos funcionan como filtro de selección de aquellos conocimientos y verdades que coinciden con los interesen de las clases y grupos sociales dominantes (Torres, 1991).

Torres (1991) señala cinco mecanismos principales para distorsionar la realidad en los libros de texto:

- Suprimiendo información: omitiéndola o negándola
- Añadiendo información: inventándola

- ❖ Deformando la información: cuantitativamente (exagerando o minimizando los datos); cualitativamente (con mentiras sobre la identidad, las características, los motivos… de unos personajes, hechos, etc.); o inventando la realidad)
- ❖ Desviando la atención: llamándola sobre otro personaje

Un ejemplo de lo descrito por Torres (1991) es que en 1569 se publicó el primer mapamundi que se conoce como la proyección de Mercator. Este mapa es el que se ha utilizado desde entonces, y esta presente en diversos libros de texto. En la proyección de Mercator se presentan los países desarrollados (Europa, Estados Unidos, Rusia….) mucho más grandes que los subdesarrollados o en vías de desarrollo (China, África…). Un detalle que se aprecia muy bien es el tamaño de Alaska en el mapa, mucho mayor que México. En la realidad Alaska tiene una superficie de 1'7 millones de Km cuadrados y México tiene más de 1'9 millones. Este mapa fomenta una visión Euro centrista. Mientras que en 1974 Arno Peters (citado en Torres, op.cit) publicó el conocido como mapa de Peters, en el que se presentaban los países en proporción real de acuerdo con sus dimensiones. También se aprecia que este mapa es mucho más real comparándolo con fotos tomadas por los satélites, en las que inevitablemente se ven los continentes en su tamaño real. (Ver figura 1)



Mapa Mercartor

Mapa de Peters

Figura 1. Mapas

Libros de matemática de la Colección Bicentenario

Uno de los fines de la educación establecidos en la Ley Orgánica de Educación (2009), de la República Bolivariana de Venezuela, establece "Desarrollar la capacidad de abstracción y el pensamiento crítico mediante la formación en filosofía, lógica y matemáticas, con métodos innovadores que privilegien el aprendizaje desde la cotidianidad y la experiencia". Para cristalizar este fin, específicamente en el área de matemática, son necesarios algunos medios para su enseñanza, como por ejemplo los descritos en el informe Cockofort (1985) que se presentan a continuación:

Medios para la enseñanza de las matemáticas	**Breve descripción**
Aulas	Las matemáticas deben enseñarse en aulas especiales, debidamente equipadas para la realización de prácticas adecuadas. Debido a que "la observación demostró y el análisis estadístico confirmó, que en las aulas en que se disponía de un aula especial de matemáticas, se hacia un uso más amplio de los materiales de presentación, de trabajos experimentales y prácticos, de materiales realistas y de rompecabezas y juegos"
Equipo	Es necesario experiencias prácticas en todas las etapas del curso de matemáticas. Para ofrecer estas experiencias es necesario disponer de equipos. Muchas de las cosas que se precisan no son complicadas ni costosas, pero deben existir en cantidades suficientes y ser fácilmente accesibles. Por ejemplo: todos los niños de primaria necesitan usar gran variedad de figuras bidimensionales y tridimensionales.
Material de consulta para los profesores	Tanto las escuelas primarias como las secundarias deben poseer libros de consulta para los profesores, relacionados con la enseñanza de las matemáticas. Además han de mantenerse ejemplares de todas las "guías del profesor", de los libros de texto utilizados en la escuela, así como una selección de manuales de matemática que puedan servir de ayuda como recurso suplementario
Mecanismos Financieros	Es esencial que se disponga de fondos suficientes para mantener existencia adecuadas de libros y de equipos.

Cuadro 1. Medios para la Enseñanza. Tomado de Cockofort, (1985, pp. 222-223)

Como se muestra en el cuadro 1 los libros de texto son uno de los elementos que deben estar presentes en la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas. Por lo cual, estos siempre han desempeñando un papel destacado. Pero a pesar del papel que han jugado los libros de texto de matemática, es sorprendente constatar que solo unos cuantos estudios se han ocupado de la forma en que son utilizados (Rojas y Alarga, 2009; Serrano, 2009).

El libro de texto tiene un papel relevante, el cual constituye el recurso por excelencia para muchos profesores y profesoras. Se estima que los libros de texto llegan a condicionar de manera importante el tipo de enseñanza que se realiza (Parcerisa, 1996; 35). El docente asume el modelo de enseñanza que está presente en el libro de texto. Por lo cual, a partir de los cambios curriculares en la Educación primaria y en la educación media general (por ejemplo, lo concerniente a la escuela y Liceo Bolivariano, en el marco de la Educación Bolivariana) (Serrano, 2009, p.32) surge el material curricular, en este caso los libros de texto de la colección Bicentenario, que corresponde con los cambios antes descritos.

Ahora bien, en los libros de matemática de la colección bicentenario existe un énfasis en valores como la libertad, la justicia social, la democracia participativa, la igualdad, el pluriculturalismo y la defensa del ambiente. Además se invita a los niños y niñas a ser lectores críticos, a investigar la realidad y a sacar sus propias conclusiones. Se destacan personajes relevantes (Lacuela, 2011). Son libros dirigidos a estudiantes de primero a sexto grado.

Concepción pedagógica y didáctica que acompañan a los libros de matemática de la Colección Bicentenario

La concepción, tanto pedagógica como didáctica que acompañan los libros de matemática hace referencia a una educación productiva, intercultural e intracultural, disciplinaria, intradisciplinaria e interdisciplinaria, liberadora, emancipadora, revolucionaria, comunitaria, antiimperialista, participativa, colaborativa, investigativa, activa. Esto con el fin de romper con la educación matemática tradicional ubicada en el paradigma del ejercicio (Skosvmose, 2000). En donde, los ejercicios matemáticos que se resuelven en la clase carece de relevancia y de contexto.

Skosvmose (2011) hace referencia a que la matemática en la escuela debe ser ofrecida como un saber útil, pertinente, deseable, conveniente, provechoso, importante, necesario y adecuado para dar respuestas a los problemas actuales, cercanos e interesantes que confrontan los estudiantes, en su cotidianidad. Debe hacerse una oferta posible, que haga creíble la afirmación de que la matemática ciertamente puede ayudar al individuo a lograr una mayor comprensión de la realidad y constituye una herramienta útil en situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

Todo esto con la finalidad de presentar a la matemática como una herramienta para interpretar y comprender diversas situaciones ocurridas en el mundo. La matemática, obviamente, ayuda considerablemente a explicar y aclarar fenómenos difusos y complejos del mundo cotidiano, especialmente en el ámbito social, sustituyendo con ello prejuicios por juicios argumentados y bien justificados, sustituyendo la alienación por la formación política, sustituyendo la educación bancaria por la liberadora (Freire, 1973)

Modelo para construir las lecciones

El modelo para construir las lecciones fue discutido en el seno de la comisión de libros de texto de matemática, con una base teórica sustentada en la Educación Matemática Crítica (Skovsmose, 1999; Mora, 2005; Becerra, 2005; Frankestein, 2006). En donde, se fomento escenarios de investigación caracterizados por alfabetización matemática como una competencia similar a la de la alfabetización descrita por Freire (1973). Esta alfabetización matemática no sólo se refiere a unas destrezas matemáticas, sino también a la competencia para interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas (Skosvmose, 2000). A continuación describimos las fases y presentamos un ejemplo (Parte de la lección N° 2/Libro de tercer grado):

a) *Fase 1:* Planteamiento y selección del Tema Generador de Aprendizaje y Enseñanza. Este se constituye en el inicio de la lección, para la elección del tema generador, una vez seleccionado el objeto matemático, se tomo en cuenta lo descrito en el proyecto Nacional Simon Bolívar, la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela. Este momento incluyo varias propuestas, discusiones, debates, decisiones y acuerdos.

b) *Fase 2:* Trabajo investigativo extradisciplinario (extramatemáticos, por ejemplo). En las lecciones se desarrollan un conjunto de actividades para realizar en el aula, el hogar y en la comunidad a partir de una situación problemática relacionada al tema generador. Este trabajo de investigación es sociocrítico, productivo, comunitario y transformador. Al final se obtendrán productos tangibles e intangibles. Aquí la acción participativa, cooperativa y colaborativa es altamente fomentada y significativa. Durante el desarrollo de este momento incentiva la incorporación directa y automáticamente a las comunidades, al mundo exterior de la escuela, a las familias, a los contextos, al mundo de las fuerzas productivas en la educación de nuestros jóvenes.

c) *Fase 3:* Análisis, Formalización conceptual. En este momento iniciamos con la formalización conceptual. Para el proceso de presentación se puede seguir el conocido modelo de escalera, ampliamente conocido en el mundo de la didáctica investigativa y contextualizada

d) *Fase 4:* Desarrollo de actividades dentro y fuera de las disciplinas, por ejemplo las matemáticas y las ciencias naturales. Estas actividades pueden ser realizadas en el aula y en el hogar con la ayuda de los/as docentes y la familia respectivamente. Las mismas se diferencian de las del segundo momento puesto que están focalizadas más en situaciones específicas que permitan comprender hechos y relaciones de las respectivas disciplinas.

e) *Fase 5*: Trabajo intramatemático (conceptualización y formalización). Esta formalización y conceptualización disciplinaria (matemática) permitirá el desarrollo de ideas, conceptos y procedimientos intradisciplinarios (matemáticos) básicos necesarios para la formación integral de cada sujeto. Por supuesto que los/as docentes, harán uso de estrategias didácticas intradisciplinarias acordes con los contenidos y con el avance actual de la didáctica y la pedagogía en términos generales.

f) *Fase 6:* Trabajo de consolidación, ejercitación, ejemplificación y ampliación. Después de la elaboración y comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos, o de otras disciplinas, trabajados didácticamente, se procederá a la profundización y consolidación de los mismos, así como al tratamiento de situaciones problemáticas similares a la inicial

Algunos resultados

- Se elaboraron libros de matemática cónsonos con los cambios políticos y sociales que están ocurriendo en la República Bolivariana de Venezuela descritos en la Constitución vigente.
- En los libros se desarrollaron conceptos matemáticas vinculados al contexto de las niñas y niños venezolanos.
- Se proponen actividades que propician la comprensión de conceptos y procedimientos, reconociendo la importancia de los algoritmos unidos con la reflexión.
- En los libros se fomenta valores como democracia y ciudadanía.
- Se incita en la construcción de modelos matemáticos, exploración con números, resolución de problemas, entre otras habilidades.

Discusiones y conclusiones

La elaboración de estos materiales curriculares propicia un cambio en la enseñanza de la matemática en las aulas venezolanas.

Los libros en Venezuela se han caracterizado por presentar el siguiente modelo de enseñanza: Definiciones del objeto matemático, ejemplo y ejercicios. Fomentando el paradigma del ejercicio (Skosvmose, 2000). Los libros de la Colección Bicentenario en el área de matemática, presentan el siguiente modelo de enseñanza, sustentado en la Educación Matemática Crítica: Tema generador (relacionado al objeto matemático a desarrollar y vinculado con un tema social actual), proceso de indagación a través de "algo para investigar", formalización conceptual del objeto matemático, actividades intra y extramatemáticas y trabajo de consolidación (ejercicios y problemas).Modelo que abre camino a escenarios de investigación en la clase de matemáticas

Referencias bibliográficas

Becerra, R. (2005). La Educación matemática Critica-Orígenes y perspectiva.En David Mora (Eds.). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas* *para la transformación de la educación matemática en América Latina* (pp. 165-203), Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris

Cockcroft, W.H. (1985). *Las Matemáticas si Cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Frankestein, M. (2006). Reading the World with Maths: Goals for a Criticalmathematical Literacy Curriculum. En E. Gustein y B Peterson (Ed.), *Rethinking Mathematics*. (pp. 19-30). Wisconsin: Rethinking Schools

Freire, P. (1973). *Pedagogía del Oprimido*. Siglo Veintiuno: Montevideo

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 4 (2), 129-159.

Lacueva, A. (2011). Textos valiosos y Gratuitos. *Ultimas Noticias.* Recuperado de http://www.ultimasnoticias.com.ve/opinion/firmas/aurora-lacueva/textos-valiosos-y-gratuitos.aspx

Ley Orgánica de Educación, 5929, Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela (2009)

Mora, D. (2005). Didáctica Crítica y Educación Crítica de las Matemáticas. En David Mora (Eds.). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina*. (pp. 17-164) Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.

Parcerisa, A. (1996). *Materiales Curriculares: como elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona: Graó.

Rojas, A. y Alarga, A. (2009). *Matemática y Realidad*. Caracas: Fondo Editorial Ipasme.

Serrano, W. (2009). *Las Actividades Matemáticas, el saber y los libros de textos.* Bolivia-Venezuela: Fondo Editorial Ipasme.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una empresa docente.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6 (1), 3-26.

Skovsmose, O. (2011). *Educação Matemática Crítica a questão da Democracia* (6ta edición). Campiñas: Papirus.

Torres, J. (1991). *El Curriculum Oculto*. Morata: Madrid.

TORRE DE HANÓI VIRTUAL E A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL NO ENSINO MÉDIO: UM PROCESSO QUE PARTE DA INTUIÇÃO A CAMINHO DA FORMALIZAÇÃO

Adriana Breda, Viviane Beatriz Hummes
Universidade Federal do Rio Grande do Sul Brasil
adriana.breda@gmail.com, vivihummes@gmail.com

Resumo. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma reflexão sobre o processo de aprendizagem do conceito de Função Exponencial no Ensino Médio, a partir da utilização do jogo Torre de Hanói virtual, através do uso de laptops educacionais. Os dados foram coletados por meio de um questionário inicial, para identificação das ideias prévias dos estudantes e por meio de registros em um diário de campo. Em seguida, os dados foram analisados conforme a metodologia Análise Textual Discursiva. A partir da análise, emergiram duas categorias: a primeira indica que a ideia inicial apresentada pelos alunos em relação à Função Exponencial está associada a uma caracterização da linguagem ligada à Função Quadrática. Já, a segunda categoria aponta uma transformação da linguagem natural do entendimento da Função Exponencial para a linguagem formal, isto é, a formalização escolarizada do conceito de Função Exponencial.

Palavras chave: função exponencial, jogo, linguagem, conceitos

Abstract. This paper aims to present a reflection about the learning process of Exponential Function in High School, from the employment of the virtual game Tower of Hanoi through the use of educational laptops. The data were collected by an initial questionnaire, in order to identify the preliminary ideas and to register in a field journal. After the data were analyzed according to the Discursive Textual Analysis. From this analysis two categories emerged: the first indicates that the initial idea which the students presented in relation to the Exponential Function is associated to a characterization of the language to the Quadratic Function. The second category points a transformation of the natural language understanding of Exponential Function to the formal language, that is to say, the formal school concept of Exponential Function.

Key words: exponential function, game, language, concepts

O limiar da pesquisa: a questão inicial como regra do jogo

Devido às transformações da sociedade, principalmente com os avanços tecnológicos, muitos trabalhos realizados nas escolas, em especial, nas aulas de matemática, têm como preocupação a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem, de forma que estes aconteçam de maneira adequada à realidade do alunado do século XXI. Nesse sentido, procuram-se estratégias didáticas que atentem à utilização das tecnologias da informação e comunicação nas aulas de matemática para trabalhar diferentes conteúdos e construir, juntamente com os alunos, os diferentes conceitos matemáticos contemplados na educação matemática básica. Um conteúdo bastante problematizado nas pesquisas em Educação Matemática é o estudo da Função Exponencial, seja porque é de difícil compreensão por parte dos alunos, seja porque é um conteúdo que antecede o estudo dos logaritmos, ou, até mesmo, porque é um conteúdo que apresenta diversas aplicações tanto nas áreas das outras ciências exatas, como nas ciências da saúde e nas ciências sociais.

Desta maneira, algumas pesquisas vêm sendo feitas abordando o estudo da Função Exponencial e o uso da tecnologia, seja para a constituição do conceito de função ou para a construção da função em sua forma gráfica. Um exemplo é o trabalho de Silva (2012) que, a partir de um estudo que possibilitou a identificação das dificuldades dos alunos na compreensão do estudo de Funções Exponenciais e de Funções Logarítmicas, o autor criou uma sequência de atividades que envolviam a resolução de problemas do aspecto cotidiano dos alunos. Este trabalho foi realizado sob o enfoque de Vergnaud e Duval, e propiciou aos alunos a identificação das variáveis dependentes e independentes e das questões de crescimento e decrescimento em gráficos, a partir do uso *software Winplot.* Assim, os alunos construíram o conceito de Função Exponencial e Logarítmica. Outro exemplo é a dissertação de Berleze (2007), que a partir do uso da Engenharia Didática e utilizando o *software Winplot*, elaborou uma sequência de ensino de diferentes tipos de funções, inclusive a exponencial, analisando as transformações gráficas e a interatividade que os alunos estabeleciam com o programa e com os colegas, de modo a se tornarem autônomos, críticos e criativos. Já, o trabalho de Barroso (2009), aponta para o uso do *software Geogebra* e o uso do objeto de aprendizagem Torre de Hanói para promover a construção do conceito de Função Exponencial no terceiro ano do Ensino Médio, onde os alunos preencheram uma tabela relacionando o número de discos e número de jogadas. Os estudos apontam que a utilização das tecnologias serviram para a motivação, iniciativa e colaboração entre os estudantes.

A partir dos estudos apresentados e da problemática envolvida nessa investigação, este trabalho pretende responder a questão: de que maneira é constituído o conceito de Função Exponencial no Ensino Médio a partir do uso do jogo Torre de Hanói virtual? Nesse sentido, a pesquisa demonstra que, a partir dos conhecimentos prévios dos alunos, seguido de uma interação destes com o jogo denominado Torre de Hanói, por meio do uso de *laptops* educacionais, pode-se estabelecer uma introdução ao conceito de Função Exponencial. Além disso, os próprios alunos chegaram à transformação desse conceito constituído, inicialmente, em uma linguagem natural, para uma linguagem formal, revelando um conhecimento formal adquirido durante o processo de trabalho, que, para fins educacionais, segundo Bicudo & Garnica (2006), o ato de formalizar consiste na elaboração a partir de um discurso natural centrado na intuição da presença do objeto.

No capítulo a seguir, apresentamos um pouco do referencial teórico que utilizamos para contextualização da pesquisa. Já, no capítulo 3 apresentamos os aspectos metodológicos que utilizamos para a realização da mesma. Os capítulos 4 e 5 apresentam as categorias que emergiram no momento da análise dos dados. No capítulo 6 finalizamos a nossa discussão apresentando novos caminhos que podem ser trilhados a partir deste estudo.

Sustentando a ideia: o que já se tem dito sobre jogos, tecnologia e formação conceitual

A intenção de utilizarmos a tecnologia associada ao estudo de funções está diretamente relacionado com a ideia de que, segundo Portanova *et. al.* (2005), as tecnologias em sala de aula são utilizadas para a construção do conhecimento e, conforme a intervenção do professor, podem apresentar soluções para determinados problemas, de forma que se efetive uma transformação da realidade.

Utilizamos como instrumento de aprendizagem a Torre de Hanói, pois esta é considerada um jogo didático, devido ao fato de apresentar regras e servir para fins educacionais. Segundo Dante (2002), o jogo é um ótimo instrumento didático, pois durante a realização do mesmo, o aluno é desafiado a pensar, estabelecer estratégias, desenvolvendo, dessa maneira, sua autonomia. Para D'Ambrosio (1994), o jogo nas aulas de matemática é uma ótima estratégia para a produção do conhecimento, pois apresenta uma característica da ação comum, esta, gera a capacidade de explicar, conviver e lidar com a realidade, na qual será acumulada e transmitida para com os pares. Paulo Freire (2006) aponta que o ensinar em um ambiente educacional implica em respeitar os saberes dos educandos, além disso, exige criticidade e autonomia por parte dos mesmos. Nesta perspectiva, acreditamos que trabalhar o jogo associado à tecnologia beneficia o aluno, pois além de possibilitarmos a reconstrução de conceitos matemáticos, podemos promover uma sala de aula criativa, harmoniosa e solidária.

Trabalhar a constituição de um novo conceito através de um ambiente desafiador, é não restringi-lo à sua definição, mas sim assumí-lo como um elemento em que é atribuído sentido e significado pela criança ou adolescente, ou seja, um conceito é algo constituído através de possibilidade de resolução de situações-problema, (Vergnaud, 1996).

Já para Vygotsky (1987), os conceitos propriamente ditos são construídos pela capacidade que a criança e o adolescente têm de abstração e generalização "O conceito surge quando uma série de atributos abstraídos torna a sintetizar-se, e quando a síntese abstrata assim obtida se torna forma basilar de pensamento com o qual a criança percebe e toma conhecimento da realidade que a cerca." (Vygotsky, 1987, p.226). Nesse sentido, a partir de situações vivenciadas pelos alunos, são construídos por eles modelos e teorias sobre determinado assunto. Cabe ao professor estabelecer estratégias para transformar tais concepções em outras mais rebuscas e formais, (Sztajn, 1997).

Estratégias do jogo: os caminhos percorridos na investigação

Para a realização deste trabalho, fizemos um estudo de caso com uma turma de segundo ano do Ensino Médio composta por, aproximadamente, trinta alunos, em uma escola da rede pública de Porto Alegre (RS/Brasil). Para Ponte (1994), um estudo de caso se refere a um estudo de uma entidade definida e, nesse sentido, caracteriza-se a uma análise muito particular, uma situação específica e única em diversos aspectos. Para início da análise elaboramos um questionário inicial para fazermos um levantamento das ideias prévias apresentadas pelos alunos em relação ao que seria e como se delineava uma função do tipo Exponencial. As perguntas propostas foram: O que você entende por função? O que você entende por Função Exponencial? Faça um esboço "grosseiro" de um gráfico que representa uma Função Exponencial. Na sequência, apresentamos aos alunos a Torre de Hanói virtual, que é constituída com um mínimo de três discos e um máximo de oito, de tal forma que quanto maior o número de discos, maior o número de movimentos mínimos realizados para vencer o jogo.

Em seguida, os alunos responderam a uma atividade guiada, que consistia em jogar e escrever o número de movimentos obtidos quando escolhido determinado número de discos. Ao final da atividade, solicitamos aos alunos que escrevessem quantos movimentos se teria ao manipular um disco, dois discos, dez discos ou *n* discos. Além disso, sugerimos a eles que esboçassem o gráfico que representaria tal situação. Após a realização da atividade, os resultados foram socializados, discutidos em sala de aula com o grande grupo e registrados em um diário de campo (Bogdan & Biklen, 1994), de modo que se pudesse estabelecer uma relação comparativa entre o que os alunos responderam no questionário inicial e os resultados discutidos no momento pós-atividade.

Os dados foram analisados por meio da metodologia, Análise Textual Discursiva, de Moraes & Galiazzi (2007), que consistiu no desmembramento das respostas dos questionários iniciais e dos registros efetuados no diário de campo, na categorização dos mesmos e a constituição de um metatexto como categorias finais de análise. A seguir, apresentamo-las.

A Função Exponencial como uma Função Quadrática: uma questão de linguagem

Ao iniciarmos a apresentação dos resultados, entendemos que algumas respostas proferidas pelos alunos a partir do questionário inicial, que consistia em saber o que os alunos entendiam por Função Exponencial e qual seria sua forma gráfica, merecem uma atenção especial. Dentre as respostas apresentadas destacamos que para o aluno R, por exemplo, uma função exponencial "É algo que está elevado em alguma potência" (aluno R). Este mesmo aluno representou o esboço do gráfico de uma função exponencial como se fosse uma parábola com concavidade voltada para baixo. Ao mesmo tempo, o aluno L proferiu: "Pra mim função é a conta que soluciona a reta, curvatura e etc." "Eu entendo que função exponencial é quando a fórmula do gráfico tem o expoente (x^2) sobre um número. Ex: $a^2 + b - c$", (aluno L). Abaixo seguem a Figura 1 e a Figura 2, as quais expressam a representação gráfica feita pelo aluno R e pelo aluno L, respectivamente, de como seria o comportamento gráfico de uma função do tipo Exponencial.

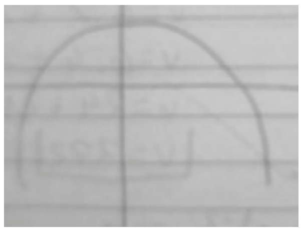


Figura 1. Representação do aluno R

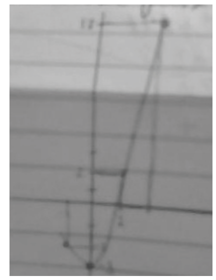


Figura 2. Representação do aluno L

Os alunos expressaram a Função Exponencial, seja em palavras ou em construção gráfica como se fosse uma Função Quadrática, pois em suas concepções "ao quadrado" é expoente, ou seja, associa o nome exponencial a expoente. Para Vygotsky (1987), esta é uma questão que está diretamente relacionada à linguagem. É através da linguagem que são expressados e internalizados os significados constituídos através da vivência e das interações sociais que a criança ou o adolescente estabelece durante sua trajetória. As preferências, concordâncias e os antagonismos são expressões dos significados sociais que eles estabelecem.

Nesse sentido, compreendemos que o entendimento que os alunos trouxeram do que seria uma Função Exponencial, em um primeiro momento, remete à ideia de Função Quadrática, seja na forma verbal, gráfica, ou até mesmo na tentativa de formalização genérica, constituída pelo aluno L, por exemplo. Essas associações nada mais são que questões relacionadas à linguagem. Em algum outro momento, em algum outro espaço de socialização escolar os alunos internalizaram ou associaram a ideia de expoente à x^2 e quando escutaram a palavra exponencial, já se remeteram à ideia de expoente, isto é, de x^2.

García (1998) apóia-se em Pozo (1994), para apontar que o conhecimento que entendemos por intuitivo, muito dificilmente é abandonado, pois apresenta raízes fortes em função de ser constituído, muitas vezes historicamente e socialmente. A partir do exposto, se torna interessante a intervenção do professor enquanto mediador e promotor da aprendizagem, pois desconstruir o que já está previamente construído/internalizado pelos alunos não é tarefa simples e talvez nem seja necessário. O importante é encontrar estratégias que motivem e promovam a capacidade do aluno de resolver problemas e enfrentar desafios, de forma que este possa atribuir significado ao que está realizando.

Dessa forma, a partir do jogo Torre de Hanói virtual, os alunos puderam realizar uma transformação dos seus conhecimentos prévios sobre Função Exponencial, o que, segundo Moreira (2006), vai ao encontro do "[...] processo de interação pelo qual conceitos mais relevantes e inclusivos interagem com o novo material servindo de ancoradouro, incorporando-o e assimilando-o, porém, ao mesmo tempo, modificando-se em função dessa ancoragem" (MOREIRA, 2006, p. 15). Nesse sentido, os alunos puderam ir além da manipulação dos discos ofertados pelo jogo, que eram de no mínimo três e no máximo oito, e assim, puderam estabelecer relações para um maior número de discos. É o que apresentaremos no capítulo a seguir.

Da linguagem natural à linguagem formal: o entendimento do conceito de Função Exponencial e a formalização da situação estudada

Durante a aplicação do jogo e da realização do estudo dirigido, os alunos conseguiram formar uma tabela relacionando o número de discos com o número mínimo de jogadas necessárias para vencer o jogo. Nesse processo, os alunos foram questionados sobre qual a relação que poderia se estabelecer entre o número de discos e o número mínimo de jogadas quando tivéssemos nove discos, dez discos e n discos. Um dos alunos comentou "Se para três discos são sete e para quatro discos são quinze, então só pode ser sempre o dobro acrescentado de um" (aluno R). Assim, os alunos demonstraram estar desafiados a encontrar uma relação genérica que valesse para qualquer número de discos.

Conforme Martins (1999), a partir do momento em que o educando está em contato com jogo virtual Torre de Hanói dentro de um espaço escolar, espera-se que o conceito que anteriormente considerado espontâneo, adquira um grau de abstração que tem por objetivo, segundo Vygotsky, definir o conceito científico. "A aprendizagem dos conceitos científicos adquiridos [...] se dá na e pela interação com professores e colegas, apóia-se em um conjunto previamente desenvolvido de conhecimentos originários das experiências diárias da criança. Esse conhecimento, espontaneamente adquirido, passa a ser o mediador da aprendizagem de novos saberes." (Martins, 1999, p.119).

Sob essa perspectiva, no momento de socialização dos resultados em sala de aula, outras relações foram sendo estabelecidas pelos alunos. Alguns exclamaram que era necessário fazer o triplo do número de discos e subtrair duas unidades, outros simplesmente apontaram que não havia uma solução para o problema, até que o aluno L disse "[...] é só fazer o dois elevado no número de discos e diminuir um" (aluno L), em outras palavras, $f(n) = 2^n - 1$. Foi no momento da troca de ideias que os alunos conseguiram transformar uma relação que se apresentava em uma linguagem natural em outra linguagem, na qual denominamos de formal.

Para Gomez-Granell (1998), a linguagem natural, aquela expressada pela fala e escrita, desempenha uma função primordial no estabelecimento de novos símbolos matemáticos e, assim, dificulta a perda do sentido construído através do processo de abstração. Por outro lado, é interessante que esse significado seja devolvido às formas simbólicas da matemática, pois dessa maneira, se possibilita que ela entre nas ciências do mundo exterior, como por exemplo, a biologia, a sociologia, etc. Para García (1998), o conhecimento escolar é um conhecimento construído na escola que conversa com outras formas de conhecimentos, sejam eles científicos, cotidianos, filosóficos, etc.

A partir dessa esteira, verificamos que o conhecimento adquirido pelo aluno ao esquematizar as relações através da Torre de Hanói virtual foi considerado um conhecimento particular adaptado às características do contexto escolar, pois a atividade foi além daquilo que pôde ser observado e manipulado e contemplou aquilo que deveria ser abstraído, isto é, a partir das relações estabelecidas entre o número de discos e o número de jogadas observáveis, possibilitamos aos alunos inferir a mesma relação para as jogadas não observáveis, como se tivéssemos nove discos, dez discos, ou *n* discos.

Diante desse contexto, compreendemos que toda a atividade proporcionada levou, a partir do intuitivo, a uma formação conceitual, melhor dizendo, uma formação e formalização conceitual escolar de cunho muito particular e vamos explicar o por quê. Em primeiro lugar, a formalização e a conceitualização se deu a partir de um caso particular, isto é, de um comportamento exponencial. Em segundo lugar, porque a Função Exponencial é definida nos números reais e neste caso, abordamos somente o universo dos números naturais. Dessa forma, é importante deixar claro para os alunos que Função Exponencial não se restringe à Torre de Hanói, mas nesta, pode-se começar os primeiros passos do pensar exponencialmente.

Finalizando o jogo: algumas considerações

Toda trajetória percorrida até aqui, nos fez refletir sobre alguns aspectos. Um deles é que compreendemos que os "supostos" erros apresentados inicialmente pelos alunos, isto é, caracterizar uma Função Exponencial como uma Função Quadrática, podem estar vinculados a uma questão de linguagem. Outro aspecto importante foi o sucesso dos alunos, quando estes conseguiram estabelecer uma conceitualização significativa de Função Exponencial a partir do uso do jogo Torre de Hanói virtual, pois, ao se sentirem autônomos, os alunos foram capazes de construir seu próprio conhecimento, formalizando que, para tal situação trabalhada, ela é do tipo $f(n) = 2^n - 1, n \in \mathbb{N}$.

Outros caminhos podem ser percorridos ao trabalhar a Função Exponencial combinada com a tecnologia. Uma alternativa de continuidade do estudo seria propor situações-problema de modo que os alunos passassem da situação particular trabalhada, no conjunto dos números naturais, para situações que envolvam os números reais e, assim, trabalhar com diferentes *softwares* de construção gráfica, como *Grapheq, Winplot, Graphmat, Geogebra*, entre outros, no intuito de verificar o comportamento das funções e o estabelecimento das relações entre as variáveis.

Referências bibliográficas

Barroso, D. F. (2009, novembro). Construindo o conceito de função exponencial através dos objetos digitais de aprendizagem Torre de Hanói e GeoGebra. *Anais do V Encontro Mineiro de Educação Matemática* (pp.1-46). Lavras, MG, Brasil.

Berleze, C. S. (2007). *Uma sequência de ensino usando o programa Winplot: em busca de uma aprendizagem autônoma do aluno*. Dissertação de Mestrado, Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, Brasil.

Bicudo, M. A. V., & Garnica, A. V. M. (2006). *Filosofia da educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

D'Ambrósio, U. (1994). *Comportamento e conhecimento*. Brasília: Universidade de Brasília.

Dante, L. R. (2002). *Didática na resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Ática.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia*. São Paulo: Editora Paz e Terra.

García, E. (1998). A natureza do conhecimento escolar: transição do cotidiano para o científico ou do simples para o complexo? In M. J. Rodrigo & J. Arnay (Ed.). *Conhecimento cotidiano, escolar e científico: representação e mudança* (pp. 75-102). São Paulo: Ática.

Gomez-Granell, C. (1998). Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática. In M. J. Rodrigo & J. Arnay (Eds.). *Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores* (pp. 15-42). São Paulo: Ática.

Martins, J. C. (1999). Vygotski e o papel das interações sociais na sala de aula: reconhecer e desvendar o mundo. *Idéias,* 28 (1), 111-122.

Moraes, R., & Galliazzi, M. C. (2007). *Análise textual discursiva*. Ijui: Editora Unijui.

Moreira, M. A. (2006). *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula*. Brasília: Universidade de Brasília.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante,* 3 (1), 3-18.

Portanova, R., DellaNina, C. T., Voos, D., Becker, E. da S., Antoniazzi, H. M., Jelinek, K. R., Soares, L. Q., Schneider, M. R., Silva, M. M. da, Santos, M. B. dos, & Jardim, R. L. (2005). *Um currículo de matemática em movimento*. Porto Alegre: EDIPUCRS.

Silva, R. S. (2012). *O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Sztajn, P. (1997). Resolução de problemas, formação de conceitos matemáticos e outras janelas que se abrem. *Educação em revista,* 20 (25), 109-122.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceptuais. In J. Brun (Ed.). *Didáctica das Matemáticas* (pp. 155-191). Lisboa: Instituto Piaget.

Vygotsky, L. S. (1987). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

UN ESTUDIO DE LA PRESENTACIÓN DE LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Pedro Arteaga, Juan J. Ortiz, Carmen Batanero
Universidad de Granada España
parteaga@ugr.es, jortiz@ugr.es, batanero@ugr.es

Resumen. Los últimos diseños curriculares españoles introducen la estadística en todos los ciclos de la educación primaria. Debido a la novedad del tema es importante para el profesor conocer los contenidos a trabajar en las aulas de primaria y el tipo de tareas que pueden hacer los niños de estas edades. En este trabajo nos centramos en los gráficos estadísticos, analizando dicho contenido en los Decretos de enseñanzas mínimas para la educación primaria y la forma en que estos se interpretan en una serie de libros de educación primaria.

Palabras clave: gráficos, libros texto, educación estadística

Abstract. Spanish curricular guidelines introduce statistics in all the cycles for primary education. Due to the novelty of the topic it is important that the teacher knows which contents can be taught in primary school classrooms and the type of task that can be proposed to the children. In this paper we focus in statistical graphs and analyze this content in the curricular guidelines and a series of textbooks for primary education.

Key words: graphs, textbooks, statistics education

Introducción

En la sociedad actual, se hace necesaria la cultura estadística, entendida como unión de dos competencias: "a) Interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos y b) discutir o comunicar opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante" (Gal, 2002, pp.2-3).

En consecuencia, una persona estadísticamente culta debiera ser capaz de leer críticamente los gráficos que encuentra en su vida diaria, lo que supone no sólo la lectura literal del gráfico, sino poder identificar las tendencias y variabilidad de los datos, así como detectar los posibles errores conscientes o inconscientes que puedan distorsionar la información representada (Schield, 2006). Asimismo debiera conocer los convenios de construcción de los diferentes tipos de gráficos y ser capaz de construir correctamente un gráfico sencillo.

Esta importancia ha quedado patente en las directrices curriculares para la educación primaria en España donde se introducen los gráficos estadísticos desde primer ciclo.

En este trabajo analizamos la presencia del contenido de gráficos estadísticos en las directrices curriculares oficiales españolas (MEC, 2006) y la forma en que se trabaja dicho contenido en una serie de libros de matemáticas de educación primaria, analizando tanto los distintos tipos de gráficos que se proponen como las diferentes actividades a realizar con los gráficos. Finalizamos con unas implicaciones para la formación de profesores.

Los gráficos en las orientaciones curriculares de educación primaria

En los Decretos de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006) las Matemáticas desde primer ciclo incluyen un nuevo Bloque (Bloque 4) llamado Tratamiento de la información, azar y probabilidad, con los siguientes contenidos sobre gráficos estadísticos:

- Primer Ciclo: Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos a los niños.
- Segundo Ciclo: Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.
- Tercer Ciclo: Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos.

Se indica también que:

> Estos contenidos adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Igualmente el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones. Tienen especial importancia los contenidos actitudinales, que favorecen la presentación de los datos de forma ordenada y gráfica, y permiten descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas de la vida diaria. (MEC, 2006, p.43096).

Se observa que, además de los contenidos tradicionales de estadística y de iniciar antes la enseñanza de los gráficos estadísticos, hay también un cambio en el enfoque, recomendándose el desarrollo del razonamiento estadístico de los niños y la presentación de la estadística como un instrumento para resolver problemas y no sólo como un conjunto de técnicas. Se proponen también los siguientes criterios de evaluación:

- Primer Ciclo: Realizar interpretaciones elementales de los datos presentados en gráficas de barras. Formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos. Se trata de valorar la capacidad de interpretar gráficos sencillos de situaciones familiares y habilidad para reconocer gráficamente informaciones cuantificables. (MEC, 2006, p.43098).

- Segundo Ciclo: Recoger datos sobre hechos de la vida cotidiana utilizando técnicas sencillas de recuento, ordenar estos datos atendiendo a un criterio de clasificación y expresar el resultado en forma de tabla o gráfica. Es asimismo motivo de evaluación la capacidad para describir e interpretar gráficos sencillos relativos a situaciones familiares. (MEC, 2006, p. 43100).
- Tercer Ciclo: Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de datos relativos al entorno inmediato. Este criterio trata de comprobar la capacidad de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, de utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales y comprender y comunicar la información así expresada. (MEC 2006, p. 43101).

Análisis de una serie de libros de texto de Educación Primaria

Un siguiente nivel de análisis es el de los libros de texto que, en última instancia, concretizan el currículo y proporcionan a los profesores apoyo en su labor docente. Los nuevos libros de texto tratan de adaptarse a las directrices de los Decretos de Enseñanzas Mínimas y comienzan a incluir actividades relacionadas con los gráficos estadísticos desde el primer ciclo.

A continuación analizaremos una serie completa de textos de primaria (Santillana, colección "Un paso más"), para mostrar un ejemplo de la forma en que los contenidos de los Decretos de Educación Primaria han sido interpretados por los autores. La importancia de este análisis es resaltada por Ragencroft (1992), quien afirma que es muy importante estudiar en el orden en que deben introducirse estos en las aulas. Debido a que se analiza una sola serie, no se pretende generalizar los resultados, sino mostrar un ejemplo del material con que los futuros profesores de Educación Primaria podrían encontrarse en su futuro trabajo profesional, al tratar de explicar el tema de los gráficos estadísticos. Los textos analizados son los correspondientes a los niveles comprendidos desde primero a sexto de Educación Primaria, cuyos autores son Mercedes Garín y Magdalena Rodríguez y fueron publicados en el año 2006.

Contenidos y tipos de actividades

En primer lugar, en la tabla 1 presentamos un resumen del tipo de gráficos y las distintas actividades que se trabajan en cada uno de los cursos. Como podemos comprobar los primeros gráficos que se introducen en la colección de libros analizada son los gráficos de barras y los pictogramas (en primer curso), trabajando dichos gráficos casi a lo largo de todos los cursos, incrementando su complejidad, por ejemplo aumentando el número de variables representadas en los gráficos de barras. Así, ya en segundo curso se inician los gráficos de barras de dos características, es decir gráficos bivariantes, continuando el trabajo con gráficos de barras sencillos y pictogramas a través de actividades de lectura e interpretación y trabajando también el paso de gráficos de barras sencillos a tablas.

En tercer curso se trabaja con gráficos de barras de una o dos característica, gráficos de puntos, que se introducen a partir del trabajo con coordenadas cartesianas. En cuarto se siguen trabajando con gráficos de barras hasta de tres características y pictogramas coordenadas cartesianas y gráficos de puntos más elaborados e introducen los gráficos de líneas, que son extendidos a gráficos de líneas de dos características en quinto. En el último curso se trabajan todos los gráficos anteriores, y se inician los histogramas, pirámides de población y gráficos de sectores.

Sobre cada uno de estos gráficos, dependiendo del curso se proponen diferentes actividades. Para desarrollar una buena comprensión gráfica por parte de los estudiantes, Wu (2004) propone atender a las siguientes componentes: lectura de gráficos, construcción gráfica, interpretación gráfica y evaluación de gráficos estadísticos. Se puede observar que la serie analizada tiene en cuenta todas estas actividades, Así, desde primer curso se incluyen actividades sencillas de lectura de gráficos de barras y pictogramas y también alguna actividad de construcción e interpretación. En segundo curso se incluyen actividades de cambio de representación de gráfico a tabla, este tipo de tareas es importante ya que según Wild & Pfanchuch (1999), el paso de un tipo de representación a otra proporciona nueva información por medio de un proceso de transnumeración. El tipo de actividades se va haciendo más complejo en tercero, a través de actividades tanto de representación o construcción, lectura e interpretación. También se introduce la representación de puntos mediante sus coordenadas cartesianas para así llegar a los gráficos de puntos. En quinto curso se inician actividades en las que el alumno ha de pasar de un gráfico de barras a un pictograma, lo que supone un cambio en relación a las actividades de cursos anteriores en las que los cambios de representación se daban de tablas a gráficos y viceversa. Se continúa con actividades de paso de tabla a distintos gráficos y con ejercicios de construcción, lectura e interpretación de gráficos. Estas actividades se continúan en sexto curso con la diferencia de que se trabajan gráficos de complejidad superior como los histogramas, pirámides de población y diagramas de sectores, cuya complejidad es mayor, de acuerdo a autores como Ragencroft (1992), quien indica que uno de los mayores desafíos es el uso de áreas para representar frecuencias en gráficos como los histogramas y diagramas de sectores. Podemos observar que en la serie de libros analizada se ha tenido en cuenta dicha dificultad dejando para el final de la etapa estos gráficos.

Tipo de gráfico	Actividad	1º	2º	3º	4º	5º	6º
G. Barras	Leer	x	x	x			
	Completar	x	x				
	Interpretar	x	x	x			
	Pasar a tabla		x				
	Construir			x			
	Pasar a gráfico de líneas				x		
G. Barras doble	Leer, interpretar		x	x			
	Construir, Pasarde tabla a gráfico				x		
	Pasar a gráfico de líneas					x	
G. Barras triple	Leer, completar				x		
	Interpretar				x	x	
	Pasar tabla a gráfico					x	
Pictograma	Leer	x	x				
	Interpretar		x				
	Pasar de tabla a gráfico				x		
	Pasar de g. barras a pictograma				x	x	
Pictogramas múltiples	Leer, Interpretar						x
	Pasar tabla a pictograma						x
Coordenadas cartesianas; gráficos puntos	Leer, construir			x	x		
	Escribir las coordenadas			x	x		
Gráficos lineales	Leer, Interpretar				x		
	Construir, pasar a tabla				x		
Gráficos lineales dobles o triples	Leer, interpretar					x	x
	Construir					x	
	Pasar a tabla y viceversa					x	x
Histogramas	Leer						x
	Pasar a tabla y viceversa						x
Pirámides de población	Leer, interpretar						x
	Pasar de tabla a pirámide						x
Gráfico de sectores	Leer e interpretar						x
	Construir						x
	Pasar a tabla y viceversa						x

Tabla 1. Gráficos y actividades incluidos en la serie analizada en cada curso de primaria

Análisis de algunas actividades

Para completar el estudio analizamos con más profundidad algunos ejemplos de tareas propuestas en los textos, todos ellos de la colección Santillana "Un paso más" (por lo que no se repetirá el título y editorial en cada figura). En primer curso los gráficos son muy rudimentarios, aunque se dan tareas muy completas como la mostrada en la Figura 1, donde los alumnos además de realizar recuentos para completar la construcción de un gráfico de barras, han de interpretar la información mostrada en el gráfico comparando los datos representados. Ya en segundo curso, resaltar que se incluyen actividades de lectura e interpretación de gráficos de barras dobles (ver Figura 2); para responder correctamente el niño ha de leer los datos mostrados en el gráfico, sumar los datos para cada clase y realizar una comparación.

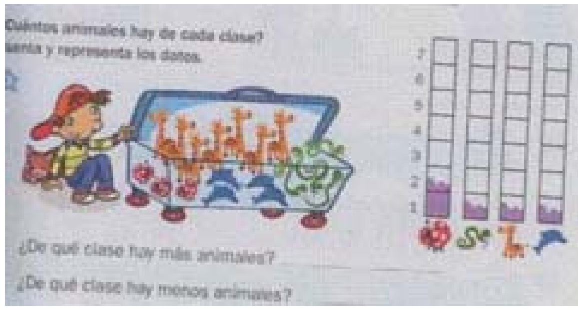


Figura 1. Actividad de construcción, lectura e interpretación de gráficos (1º curso, p.107)

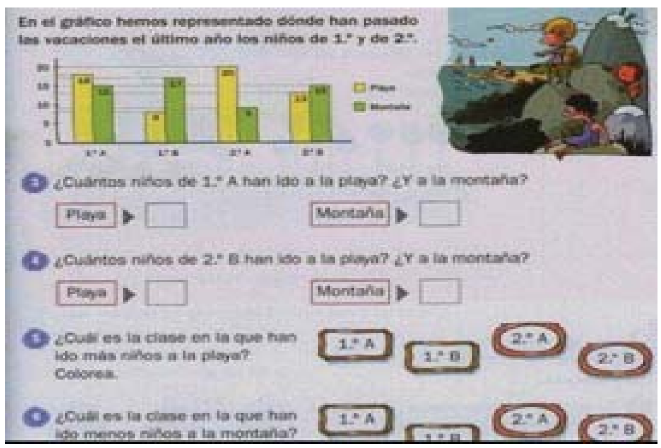


Figura 2. Actividad de lectura e interpretación de gráficos (2º curso, p.28)

En la Figura 3 se muestra una actividad propuesta en 5º curso en la que los estudiantes han de cambiar de representación, en este ejemplo concreto han de pasar de un diagrama de barras dobles a un gráfico de líneas doble, además de tener que responder a preguntas que implican tanto la lectura como la interpretación de ambos gráficos. Este tipo de actividades es también frecuente en sexto curso, incluyendo a las pirámides de población, gráficas notablemente complejas, pues representan dos distribuciones en un mismo gráfico, además de tener la dificultad añadida de que cada categoría se refiere a un intervalo de valores y no a valores aislados.

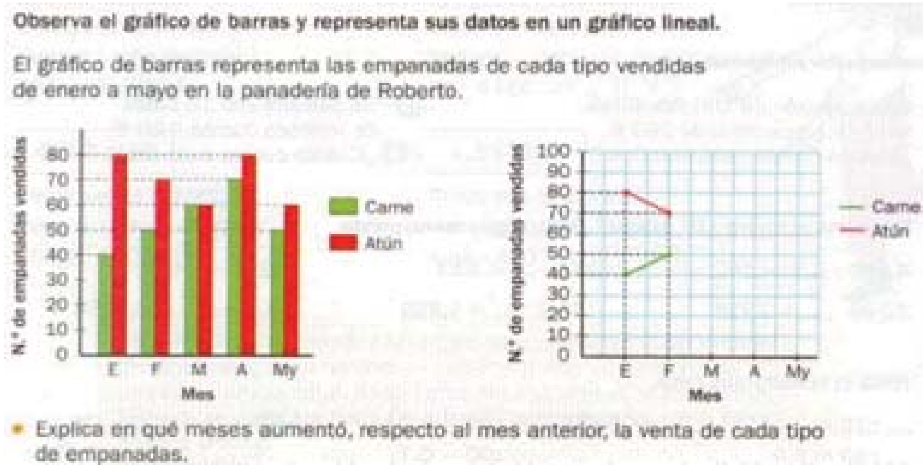


Figura 3. Lectura e interpretación de gráficos y traducción de gráficos (5° curso, p.126)

Destacamos también la introducción en sexto curso de diagramas de sectores (Figura 4), donde los estudiantes han de representar las frecuencias mediante áreas y no mediante longitudes. El cálculo de amplitud de los sectores, además supone un ejercicio en el manejo de las proporciones y pone en relación datos estadísticos, frecuencia, proporcionalidad, amplitud angular, área y sector circular. Ragencroft (1992) indica que el trabajo con gráficos de sectores puede utilizarse en la transición de representar las frecuencias con las alturas de las barras a representarlas con áreas en los histogramas, pero destaca también que muchas veces el trabajo con estos gráficos se aplaza debido a la dificultad que parece tener el calcular y dibujar ángulos.

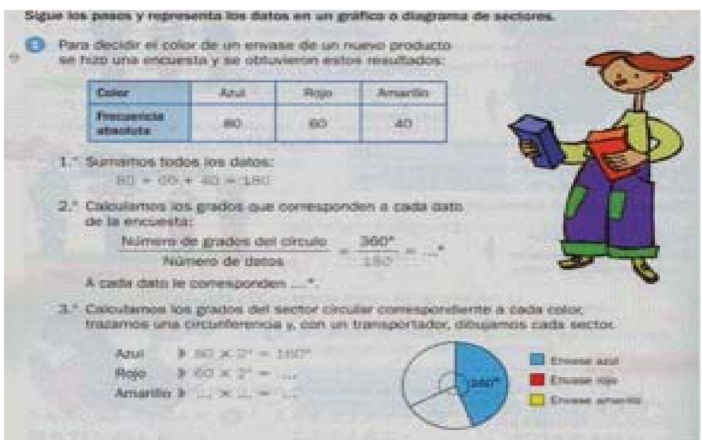


Figura 4. Construcción gráfico sectores (6° curso, p.128)

Implicaciones para la formación de profesores de primaria

Tanto en las directrices curriculares para la Educación Primaria (MEC, 2006), como en la serie de libros analizada se da una gran importancia al trabajo con gráficos. Una vez realizado el análisis de las actividades, se concluye que hay una gran variedad de actividades comprendiendo distintos componentes que son parte esencial para el desarrollo de una buena comprensión gráfica (Wu, 2004), trabajándose su construcción, lectura e interpretación, así como la traducción entre diferentes tipos de gráficos o de tablas a gráficos y viceversa.

Además, el análisis de los libros muestra una gran variedad de gráficos, tanto los adecuados para variables cualitativas (pictogramas, gráficos de sectores o de barras) como numéricas (gráficos de barras, sectores de línea) e incluso para variables agrupadas en el último curso (histograma). Se considera además la representación de más de una variable en el mismo gráfico, a través de los gráficos múltiples de barras y líneas e incluso la pirámide de población, de notable complejidad.

La variedad de actividades y la complejidad de algunos de los gráficos trabajados, hace necesaria una formación específica de los futuros profesores de educación primaria en lo que respecta a los gráficos estadísticos, para que puedan afrontar con éxito la enseñanza de dicho tema en un futuro, ya que algunas investigaciones previas (por ejemplo, Arteaga, 2011) han puesto de manifiesto los errores de los futuros profesores de primaria en la construcción o interpretación de gráficos. Será también necesario preparar a los futuros profesores en el conocimiento didáctico de su enseñanza. Una posible actividad que puede contribuir a esta formación es el análisis por parte de los futuros profesores de los gráficos propuestos en los libros de texto, la resolución por ellos mismos de las tareas propuestas para los niños y la discusión de los posibles errores de sus alumnos.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947 (MCIN) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Granada. España.

Gal, I. (2002). Adult´s statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70 (1), 1-25

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria.*

Ragencroft, M. (1992). Le rappresentazioni grafiche. Sviluppare una progresslone del lavoro. *Induzioni, 4* (1), 1-3.

Schield, M. (2006). Statistical literacy survey analysis: Reading graphs and tables of rates percentages. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/iase.

Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). *International Statistical Review*, 67 (3), 223-265.

Wu, Y. (2004). Singapore secondary school student´s understanding of statistical graphs. Trabajo presentado en el *10th International Congress on Mathematics Education*. Copenhagen, Dinamarca.

PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS POR NIÑOS TEE SAVI DE PRIMARIA AL RESOLVER PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Javier García García, Catalina Navarro Sandoval, Flor M. Rodríguez Vásquez
Universidad Intercultural del Estado de Guerrero; México
Centro de Investigación en Matemática Educativa, UAGro
heartfelt_01@hotmail.com, nasacamx@yahoo.com.mx, flormonr@hotmail.com

Resumen. El escrito describe una investigación de corte descriptiva e interpretativa que responde a la pregunta: ¿cuáles son las estrategias que utilizan los niños Tee Savi (mixtecos) de primaria cuando resuelven problemas aritméticos formales y prácticos? Cuestión que creemos pertinente ante la ausencia de investigaciones con este interés, enfocadas a dicha población étnica del estado de Guerrero, México. Resulta también relevante, por la importancia que cobra la interculturalidad en los planes y programas de estudio en vigor (SEP, 2011). Realizamos un estudio de casos múltiples donde participan alumnos de 4°, 5° y 6° grado de primaria, cuyas edades oscilan entre 9 a 13 años. Como instrumentos de recolección de datos se utilizó: cuestionarios (escrito en castellano) y entrevistas grupales (en la lengua materna del estudiante). Los resultados dan cuenta que existe una diferencia marcada entre las estrategias usadas en ambos tipos de problemas.

Palabras clave: estrategias, niños mixtecos, resolución de problemas

Abstract. This paper describes a descriptive and interpretative research that answers the question: what are the strategies that the Tee Savi's (Mixtecs) children used when solving elementary arithmetic problems, formal and practical? Question that it´s so important by the absence of researches on our camp of interest. The research it's focused on a population ethnic of the Guerrero state, Mexico. It's also relevant, given the "interculturality" into the plans and programs of study in force (SEP, 2011). We make a case study research, where participated students of 4th, 5th and 6th grade, ages between 9-13 years. As data collection instruments we were used: questionnaires (written in Castilian) and interviews group (in the student's native language). The results show that there is a marked difference between the strategies used in both types of problems.

Key words: strategies, mixtec's children, solving problem

Introducción

Las evaluaciones nacionales (ENLACE, 2010), así como la práctica evaluativa del profesor, se centra mayormente en *qué* responde el estudiante, información sin duda valiosa pero no suficiente, ya que se deja de lado el *cómo* y *por qué* procede este, en la resolución de problemas. Este hecho, evita considerar la evaluación como un proceso necesario para mejorar el desempeño de los alumnos y del docente. Quizás esto estimule el bajo rendimiento de los alumnos en Matemáticas, particularmente en primaria, situación que se acentúa más en un contexto de diversidad cultural, por múltiples razones. Esto es preocupante, ya que en México cerca del 10.5% de su población total, integran algunos de los 62 grupos étnicos que existen (López y Tinajero, 2011). Un problema que se suma a esto, es que en las aulas de dichas poblaciones, algunos docentes asumen un discurso en castellano, integrando a los alumnos a una cultura distinta a la suya.

En ese contexto, los procesos educativos giran en torno al currículo de las primarias hispanas monolingües del país, siendo el libro de texto manejado por la SEP (Secretaría de Educación Pública) el principal recurso didáctico (Hamel, 2008a: citado en López y Tinajero, 2011), que plantean situaciones descontextualizadas a la vida de dichos alumnos (que nosotros llamamos problemas aritméticos formales). Por ello, dirigimos este estudio a la población *Ñuu Savi* (Población mixteca, cuyo nombre significa "pueblo o comunidad de la lluvia"). Aunado a que, de la literatura revisada que ha identificado estrategias (Cervera, 1998; Rizo y Campistrous, 1999: Dorantes, 2005; Arteaga y Guzmán, 2005, entre otras), se observa la desatención por estudiar a una población autóctona como la mixteca con este interés, es decir, el estudio de las estrategias. Sin embargo, consideramos no sólo los problemas formales, sino también los prácticos (aquellos emanados del contexto del alumno). Esto cobra relevancia si consideramos que los estudiantes tienen un desempeño diferente cuando se enfrentan a problemas emanados de contextos diferentes: escolares y cotidianos (Carraher, Carraher y Schliemann, 2007; Blanco y Blanco, 2009).

Marco conceptual

Este trabajo adopta un marco conceptual, que además de delinear la investigación, jugó principalmente dos papeles: (1) como apoyo para diseñar los instrumentos para la recolección de datos y (2) como medio para explicar y robustecer los resultados que derivaron de esta última acción. En ese sentido, definimos: estrategia, problemas y problemas aritméticos: formales y prácticos.

Definición de Estrategia

Respecto de este término cuyo origen descansa en el contexto militar, la literatura educativa (Cervera, 1998; Rizo y Campistrous, 1999; Cabañas, 2000; Fonte, 2003; Monereo, Castelló, Clariana, Palma y Pérez, 2009; Barriga y Hernández, 2010) ofrece distintas definiciones, algunas didácticas y otras cognitivistas. Sin embargo, para nuestro caso, tomamos una postura que retoma ideas de los autores anteriores y considera al contexto escolar, la población de estudio y la actividad de la resolución de problemas.

Así, asumimos que una *estrategia* es un conjunto de acciones intencionales, desarrolladas por una persona para resolver cierto problema, permeadas por los conocimientos de que dispone, de su experiencia, de lo afectivo y del contexto social en el que se desenvuelve. De esta manera, la persona podrá llegar o no a la solución del problema, dependiendo o no del análisis que realice para ello. En ese sentido, la estrategia puede ser reflexiva o irreflexiva (Rizo y Campistrous, 1999). Es irreflexiva, si la persona responde a un proceder prácticamente automatizado, sin que pase por un proceso previo de análisis u orientación en el problema, es decir, la vía de solución se asocia a factores puramente externos. En caso contrario, será una estrategia reflexiva.

Definición de problema

La literatura (Rizo y Campistrous, 1999; Cabañas, 2000; Ortiz, 2001; Echenique, 2006; Santos, 2010) ofrece distintas precisiones acerca de problema, sin existir una como la más aceptada. Bajo este estado, se propuso una caracterización de problema: flexible y realista respecto de las condiciones predominantes en el aula y que considera de cierta forma, las particularidades del contexto mixteco. Asumimos que un *problema* es una tarea o situación que tiene los siguientes componentes: (i) existe una demanda o acción a realizar, para la cual existe una persona o grupo de personas que quieren o necesitan cumplimentarla. La demanda será adecuada al nivel de formación de la(s) persona(s); (ii) hay un proceso que hay que poner en juego para cumplir la demanda, pero que en primera instancia parece desconocido, es decir, se necesita realizar cierto proceso de análisis para comprender lo que se le pregunta y la situación en general; y (iii) la situación puede tener varios, uno o ningún resultado final, lo cual deberá determinar la persona haciendo uso de alguna estrategia.

Por resolución de problema, apuntamos a todo el procedimiento que lleva a cabo el alumno para encontrar la respuesta a la situación que se le plantea, en cambio, la solución de problema se refiere sólo al resultado final, donde poco importa cómo se procedió para llegar a ello. Cabe precisar esto, ya que en el escrito hablamos de resolución en detrimento de solución de problemas. Por otra parte, los problemas aritméticos (PA) son aquellos que en su enunciado presentan datos en forma de cantidades y establecen entre ellos relaciones de tipo cuantitativo, cuyas preguntas hacen referencia a la determinación de una o varias cantidades o a sus relaciones, y que necesitan la realización de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación o división) para su resolución (Echenique, 2006). De acuerdo a los planes y programas de estudio (SEP, 2011), los PA que requieren de las cuatro operaciones básicas, se abordan en los grados 4°, 5° y 6° de primaria, que es a donde dirigimos este estudio.

Se adopta la clasificación de los PA dada por Echenique (2006), quien distingue que estos pueden ser: (1) de primer nivel (PN) que requieren de la aplicación de una sola operación para su resolución; (2) de segundo nivel (SN) que exigen el uso de más de una operación básica; o de tercer nivel (TN) que demandan de una o más operación, pero la diferencia que establece con los otros niveles, es que involucran fracciones o números decimales. Finalmente, un problema aritmético lo consideramos formal (PAF), si es una situación planteada en los libros de textos pero es ajena al contexto del estudiante, es decir, descontextualizada. Mientras que es un problema aritmético práctico (PAP), si está en estrecha correspondencia con la vida cotidiana del alumno, es decir, es contextualizada.

Método de investigación

Esta investigación es cualitativa (Vasilachis de Gialdino, 2006) y adopta como método, al estudio de casos múltiples (Castillo, 2007). Es descriptiva porque busca desarrollar una fiel representación (descripción) del fenómeno estudiado a partir de sus características, lo cual pudiera servir para predecir o inferir ciertas hipótesis de lo que sucede con la población de estudio e interpretativa, porque se pretende determinar las relaciones de causa y efecto entre los fenómenos estudiados. Para el estudio, seguimos el siguiente esquema metodológico:

1. Selección de la población de estudio.
2. Diseño de cuestionarios escritos (selección de los PAF y planteamiento de los PAP).
3. Validación de los cuestionarios y análisis de las observaciones.
4. Restructuración de los cuestionarios finales y diseño de la entrevista.
5. Aplicación de los cuestionarios finales y realización de entrevistas.
6. Análisis de resultados finales para identificar y caracterizar las estrategias observadas tanto en los cuestionarios escritos como en las entrevistas.

Los participantes fueron 70 alumnos de escuelas primarias ubicadas en dos comunidades *Ñuu Savi* del municipio de Ayutla de los Libres, Guerrero, México. Esto por razones de disposición y porque en ellas sólo acuden niños que hablan el *Tu'un Savi*. Para el diseño de los cuestionarios escritos, realizamos:

- ❖ Revisión de los libros de texto manejados por la SEP, de cuarto (Castillo *et al*, 2011) quinto (Hernández *et al*, 2011) y sexto (Hernández *et al*, 2011) grado, como apoyo para plantear los PAF. Donde los autores de estos últimos son los mismos.
- ❖ Se diseñó y aplicó un cuestionario a los docentes que laboran en las comunidades donde se ubican las escuelas participantes, para conocer las actividades a las que se dedican los escolares en ellas, para plantear los PAP.

Por tanto, para la recolección de datos se diseñaron 2 cuestionarios de respuestas abiertas (en castellano), uno para los PAF y otro para los PAP, en cada uno se contemplaron 5 PA del tipo PN y SN. Se cuidó que ambos cuestionarios, el nivel de dificultad fuera el mismo, para poder establecer una comparación entre los resultados finales. Así mismo, se realizaron entrevistas grupales que fueron video-grabadas (en *Tu'un Savi*), inmediatamente después de la aplicación de los cuestionarios.

Algunos resultados interesantes

En las pruebas escritas (cuestionarios) se observaron distintas acciones emprendidas por los niños en la resolución de problemas, cuyo análisis se realizó considerando una a una las preguntas de cada alumno. Los resultados permiten ubicar 12 estrategias en total, 9 reflexivas, las cuales se ubicaron algunas en los tres grados, otras en dos y otras más en sólo uno y 3 irreflexivas, que se observaron en los tres grados. A continuación, mostramos algunas de estas:

Estrategia reflexiva que emergió en cuarto y quinto grado

Conteo a partir de un modelo que construye el alumno. Consiste en que el alumno construye un modelo como apoyo para la resolución de la situación descrita en el texto y sobre la base de este, opera mediante conteo. En general, se ubicaron dos modelos: utilizan los dedos como tal (cuarto grado) o establecen un modelo matemático (quinto grado). De este último, mostramos el siguiente caso (*Fig.1*) y el modelo realizado por el niño (*Fig. 2*):

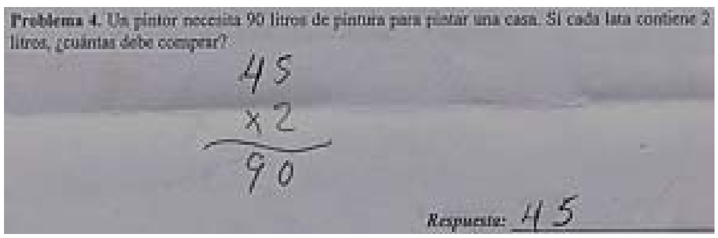


Fig. 1. Problema aritmético formal donde emergió la estrategia en 5° grado y comprobación de la solución hecha por el niño

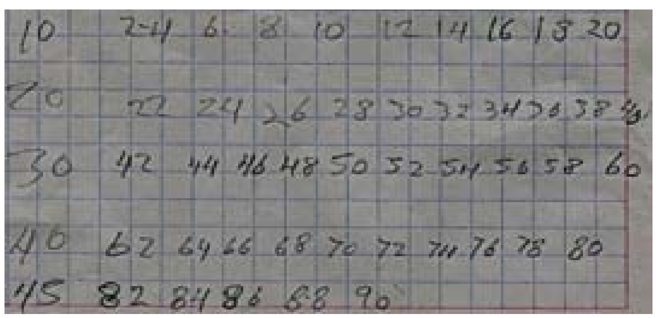
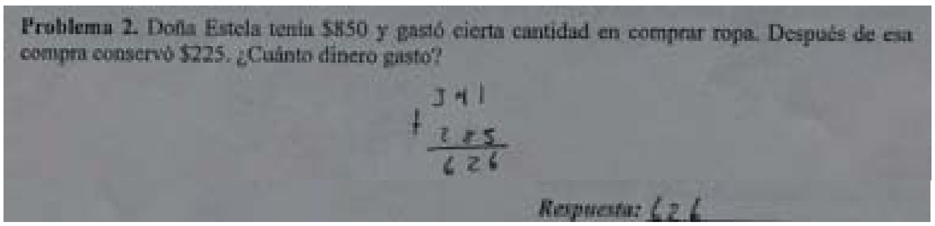


Fig. 2. Modelo matemático empleado por el estudiante. como apoyo

Así, el modelo es formado por la sucesión: $a_n = 2n$, con $n = \{1, 2, 3, \ldots, 45\}$ donde el 2 representa el divisor, a_{45} el dividendo y $n = 45$ el cociente y sobre la base este modelo, conformado por una sucesión de números pares, el niño realiza un conteo para darse cuenta que requiere 45 pares para llegar a 90, que es el último término de la misma y es la cantidad a repartir. Curiosamente, en cada línea coloca de 10 en 10 los términos de la sucesión y se detiene cuando llega a 45, porque en este llega al último término de la misma. Finalmente, es claro que el niño no aplica el algoritmo formal de la división, sin embargo, usa un procedimiento alterno para resolver el problema.

Estrategia irreflexiva que emerge en los tres grados

Contesta sin realizar operaciones o implanta un algoritmo. Se presenta cuando el alumno al no realizar un análisis de la situación que se le propone, o por su falta de experiencia en la actividad, contesta sin efectuar cálculos. Esto se puede deber a que el niño "cree" que como son problemas matemáticos y en matemáticas se efectúan cálculos algorítmicos, implanta uno con el cual opera, pero los datos que considera nada tienen que ver con el problema. En un estudiante de cuarto grado, realizó lo siguiente (*Fig. 3*) en un PAF:


Problema 2. Doña Estela tenía $850 y gastó cierta cantidad en comprar ropa. Después de esa compra conservó $225. ¿Cuánto dinero gastó?

$$\begin{array}{r} 341 \\ +\ 225 \\ \hline 626 \end{array}$$

Respuesta: 626

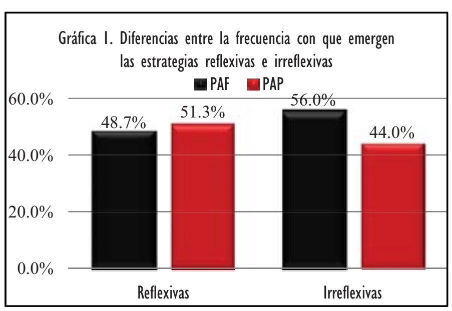
Fig. 3. Ejemplo de la estrategia "contesta sin realizar operaciones o implanta un algoritmo"

Este proceder, también surge por varias razones, entre ellas la incomprensión de un texto dado en castellano o bien, por la dificultad que implica resolver un problema, cuando no se les facilita el algoritmo.

Finalmente, establecemos una distinción entre la frecuencia con que emergieron todas las estrategias reflexivas e irreflexivas (*Tabla 1*), con su respectivo gráfico (1):

	Problemas Aritméticos Formales (PAF)				**Problemas Aritméticos Prácticos (PAP)**			
	E. reflexivas		E. irreflexivas		E. Reflexivas		E. Irreflexivas	
Total	153	48.7%	182	56%	161	51.3%	143	44%

Tabla 1. Estrategias reflexivas e irreflexivas que emergieron en los cuestionarios.



En nuestros resultados, se observa que en los PAF emergen más estrategias irreflexivas que reflexivas, lo cual resulta ser contrario en los PAP puesto que se observa una mayor presencia de las estrategias reflexivas. Una explicación de que aflore un porcentaje alto (44%) de irreflexivas en los problemas prácticos, es que se buscó atender a la diversidad de actividades que se dedica la comunidad *Ñuu Savi*, por lo que no todos los niños estaban familiarizados con todas estas. Pese a ello, es claro que existe una diferencia en cuanto al uso de estrategias reflexivas e irreflexivas en ambos tipos de problemas, de donde inferimos que el contexto social, la lengua y la cultura del estudiante, juegan un papel importante en su desempeño en dichas situaciones.

Por otra parte, en las entrevistas que se realizaron inmediatamente después de aplicar los cuestionarios, emergen sólo estrategias reflexivas en los PAP, posiblemente porque la participación fue grupal y cada niño tenía la oportunidad de expresar su solución en base a su experiencia, no así en los PAF.

Reflexiones finales

Los resultados obtenidos tanto en los cuestionarios como en la entrevista, permiten plantear las siguientes reflexiones. Un paso importante para la comprensión del problema, es precisamente la traducción al *Tu'un Savi* (mixteco) de estos. Es posible que esto influya en el proceso de utilizar alguna estrategia para la resolución de estos, puesto que los niños expresan requerir de ello para entender la situación que se le propone. Si bien, ello ocurre con la mayoría, no lo es para todos, ya que una minoría que no requiere de ello, ha logrado incorporarse a la práctica castellanizadora de los docentes. Así, en algunos casos, las dificultades que tienen los alumnos para resolver los PA, estriba más en lo lingüístico que en cuestiones meramente matemáticas.

Por otra parte, en las entrevistas, observamos que los niños en problemas de compra-venta donde se involucran activamente, son muy hábiles para resolverlos, utilizando estrategias bastante reflexivas, aunque con cierta influencia de la escuela en ellas. Así, en los PAP el alumno tiene un desempeño excelente. De esta manera, la experiencia extraescolar de estos les permite utilizar estrategias bastante ingeniosas, las cuales deberían jugar un papel fundamental en el contexto escolar. Debido a que estas estrategias las construye el niño como producto de su cultura, lo anterior permitiría asumir la interculturalidad como algo que enriquece a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por tanto, se reconocería y se tomaría en cuenta que el contexto social, la cultura y la lengua materna ejercen cierta influencia en el niño, lo cual pasa desapercibido por algunos docentes.

Por tanto, a estos se les recomienda incorporar en su actividad, la resolución de situaciones tanto contextualizadas como descontextualizadas, además de considerar que la comunidad *Ñuu Savi* emplea el sistema vigesimal en su cotidianidad. Por lo que, se deben establecer puentes para que el niño sea capaz de trabajar en el aula con este sistema y el decimal, como medio para significar los conocimientos que aborda en el aula de clases.

Referencias bibliográficas

Arteaga, J. C. y Guzmán, J. (2005). Estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado para resolver problemas verbales de matemáticas. *Revista de Educación Matemática,* 17 (001), 33-53.

Barriga, F. D. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación constructivista.* México: Editorial Mc Graw Hill.

Blanco, B. y Blanco, L. J. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Revista Números, 71,* 75-85.

Cabañas, M. G. (2000). *Los problemas… ¿cómo enseño a resolverlos?* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). En la vida diez, en la escuela cero: Los contextos culturales del aprendizaje de las matemáticas. En Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (Eds.), *En la vida Diez, en la escuela cero* (pp. 25-47). México: Siglo XXI Editores.

Castillo, M. (2007). *Metodología de investigación científica USN: Método de estudio de caso*. Recuperado el 2 de octubre de 2011 de www.itescham.com/Syllabus/Doctos/r1614.DOC

Castillo, P. D, García, V. M., Perrusquia, E., León, M. A., Hernández, D. K., Hernández, J. M., Cantón, A. R. y Arredondo, C. (2011). *Matemáticas Cuarto grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

Cervera, P. (1998). *Algunas estrategias para la resolución de problemas geométricos en duodécimo grado*. Tesis de maestría no publicada, Instituto Superior Politécnico "Julio Antonia Mella". Cuba.

Dorantes, A. (2005). *Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos en quinto y sexto grado de educación primaria: Un estudio de casos*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas.* Navarra: Fondo de publicaciones del gobierno de Navarra.

Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (2010). Recuperado el 10 de Julio de 2011 de http://www.enlace.sep.gob.mx/gr/

Fonte, A. (2003). *Estrategias que utilizan los alumnos de Secundaria Básica para resolver problemas: Un estudio de casos*. Tesis de maestría no publicada, Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona". Ciudad de La Habana, Cuba.

Hernández, D. K., García, V. M., León, M.A., Hernández, J. M., Perrusquía, E., Castillo, P. D. y Arredondo, C. (2011). *Matemáticas Quinto grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

Hernández, D. K., García, V. M., León, M.A., Perrusquía, E., León, M.A., Castillo, P. D, Hernández, J. M. y Arredondo, C. (2011). *Matemáticas Sexto grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

López, G. y Tinajero, G. (2011). Los maestros indígenas ante la diversidad étnica y lingüística en contextos de migración. *Cuadernos de comillas*, 1, 5-21.

Monereo, C., Castelló, M., Clariana, M., Palma, M. y Pérez, M. L. (2009). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje: formación del profesorado y aplicación en la escuela*. Barcelona: Editorial Graó.

Ortiz, F. (2001). *Matemática: estrategias de enseñanza y aprendizaje.* México: Editorial Pax.

Rizo, C. y Campistrous, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 2 (2-3), 31-45.

Santos, L. M. (2010). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Editorial trillas.

Vasilachis de Gialdino, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa.* España: Gedisa Editorial.

SEP (2011). *Plan de estudios 2011*. México.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011: Guía para el maestro Educación básica primaria Cuarto Grado.* México.

BIOLOGIA E MATEMÁTICA: UM ENCONTRO DE POSSIBILIDADES?

Geraldo Bull da Silva Júnior, Eliane Scheid Gazire
Faculdade Espírito Santense de Administração - FAESA Brasil
Pontifícia Universidade Católica - PUC Minas
gbulljr@bol.com.br, egazire@terra.com.br

Resumo. Com o presente trabalho buscou-se articular saberes de Matemática e Biologia presentes no Ensino Médio brasileiro. Na tessitura teórica, destacaram-se Morin (conhecimento como elaboração complexa), Machado (as redes de saberes) e Lévy (metáfora do hipertexto). Consideramos como eixos para a pesquisa: 1) Possibilitar ações didáticas envolvendo de forma complexa Biologia e Matemática; 2) Biologia e Matemática como objetos de atuação do professor e instrumentos para o estudante elaborar conhecimento. A análise dos resultados permitiu a identificação de duas categorias de integração entre Biologia e Matemática no Ensino Médio: 1) instrumentos matemáticos utilizados para descrever fenômenos biológicos; 2) a Matemática utilizada para a resolução de problemas da Biologia. O trabalho apresenta-se como estudo teórico que apontou temas dos ensinos de Biologia e Matemática no Ensino Médio favorecedores de articulações e ampliação do alcance didático dessas disciplinas no Nível Médio de ensino..

Palavras chave: biologia, ensino médio, matemática, práticas, redes de saberes

Abstract. The present study articulates knowledge of Mathematics and Biology in High School in Brazil. In theoretical context, we can point Morin (knowledge as complex elaboration), Machado (knowledge networks) and Lévy (hypertext metaphor). We consider the following research axes: 1) To enable didactic actions involving complex Biology and Mathematics; 2) Biology and Mathematics as subjects for teacher performance and student tools to develop knowledge. The analysis of results allowed the identification of two categories of integration between Biology and Mathematics in High School: 1) mathematical tools used to describe biological phenomena; 2) Mathematics used to solve problems in Biology. The work presents itself as a theoretical study. It pointed out that some aspects in the teaching of Biology and Mathematics in High School facilitates the articulation and improve the teaching of these disciplines in High School education.

Key words: biology, high school, mathematics, practices, knowledge networks

Introdução

Nos primórdios da humanidade, segundo Miorim (1998), no mesmo tempo e lugar em que o conhecimento matemático era desenvolvido, os resultados desse desenvolvimento eram disseminados. O afastamento entre a produção e o ensino da Matemática ocorreu posteriormente, devido ao crescimento da quantidade e da complexidade de saberes. Também contribuíram para esse afastamento as mudanças nas condições sociais, econômicas e políticas em determinados lugares e períodos históricos. A ruptura entre a produção e o ensino dos saberes matemáticos levou à necessidade de criar técnicas para comunicar os temas da Matemática aos aprendizes, sem que, entretanto, estes últimos participassem ativamente da elaboração de novos conhecimentos. Em relação à elaboração de conhecimento matemático, de acordo com Davis e Hersh (1985), na Grécia Antiga o conhecimento existente no Egito e Mesopotâmia foi reorganizado, criando e aprofundando teorias impregnadas pela dialética. O conhecimento matemático da época da Grécia Antiga tornou-se, dessa forma, eminentemente teórico e não se voltava para atividades práticas: era utilizado apenas como instrumento de desenvolvimento da capacidade de raciocinar abstratamente.

De acordo com Henry (1998), o conhecimento que existia na fase anterior à revolução científica, antes do surgimento daquilo que hoje é chamado de Ciência, é denominado "filosofia natural". Os "filósofos naturais" eram pessoas que buscavam explicações abrangentes para os fenômenos do mundo. O conhecimento proveniente da filosofia natural passou por uma série de modificações que resultaram, progressivamente, em uma nova forma de ver o mundo, chamada de Ciência. A partir da revolução científica, a Matemática se fortalece como instrumento de representação do mundo, passando a ser tratada como Ciência precisa e neutra diante dos fatos que descreve, saindo da condição de elemento secundário a campo de saber relevante.

Dentro do que hoje é conhecida como Ciência moderna, a Matemática tem sido como elemento centralizador do discurso científico e, sob o ponto de vista de Santos (2004) é elemento de reducionismo, servindo ao discurso científico moderno como instrumento de simplificação das "leis da natureza", levando o conhecimento científico moderno a ser um instrumento de procura de regras fixas. A Biologia, a Física e a Química, principalmente a partir da segunda metade do século XIX, desenvolveram-se em meio a aplicações da Matemática, principalmente no que se refere à organização, à expressão e à análise de resultados das pesquisas nessas áreas. É possível refletir que a importância de tal aproximação entre a Matemática e as demais Ciências também deva ocorrer na prática dos professores no Ensino Médio.

Referencial teórico e importância do tema

Com o presente trabalho, buscou-se articular saberes dos currículos de Matemática e Biologia no Ensino Médio brasileiro. A pesquisa foi realizada tendo como principais marcos teóricos as redes hipertextuais apresentadas por Lévy (2006) e as ideias de Morin (2004) sobre o conhecimento como elaboração complexa. Também foram explorados pontos de vista de Machado (2005), que discute aspectos do ensino disciplinarizado e da articulação de saberes em rede.

Na tessitura teórica, Morin (2004) destacou-se pela ideia da elaboração do conhecimento nas relações entre diferentes campos de saberes. Como forma de entender a realidade, Morin aponta a aptidão para contextualizar e integrar como uma característica da mente humana a ser desenvolvida. Morin (2004) considera fundamental fazer com que a Educação rume para novos horizontes que permitam o engajamento de estudantes em estudos capazes de articular cada vez mais as disciplinas entre si, de modo a diminuir a rigidez entre as fronteiras que demarcam diferentes campos de saberes. Isso possibilitaria travessias mais suaves e aumentaria os intercâmbios entre as disciplinas. A visão de Morin (2004) foi complementada pela de Machado (2005), a partir da sua ideia da rede de saberes como possibilidade de abertura em relação aos sentidos de uma palavra ou à amplitude e possibilidades de determinado saber a ser desenvolvido. De acordo com Machado (2005), compreender, conhecer, significar e reelaborar são aspectos importantes da rede e não devem ser esquecidos. Cada ponto em uma rede tanto pode ser um tema em si como também outro feixe de significados obtido com o caminhar na rede. Em uma linha de raciocínio que se aproxima às de Morin (2004) e Machado (2005), configura-se a rede apresentada por Lévy (2006). Para este autor, a rede de significados tem a forma de um hipertexto, pois quando as significações estão em jogo, acessar os significados é ato que ocorre como nos hipertextos, pois o cérebro não busca linearmente as informações e os significados que armazena.

A importância global de buscar um ensino segundo redes consiste no fato de que os saberes provenientes de teorias consagradas e suas formas de elaboração podem exercer influências mútuas e, quando tais modificações e influências acontecem, já não se dão dentro de campos bem delimitados e ocorrem de forma a relacionar as teorias existentes. Na busca de possibilidades para elaborar ações conjuntas no ensino de Biologia e Matemática no Ensino Médio, foram considerados alguns eixos para a pesquisa: 1) Possibilidades de realizar ações didáticas envolvendo, de forma complexa, a Biologia e a Matemática. 2) Verificação de maneiras de articular temas de Biologia e Matemática, apontando relações complexas entre essas duas Ciências no Ensino Médio. Devido à complexa teia de relações entre temas de Biologia e Matemática, foi adotado um método de pesquisa que, de acordo com Flick (2004), fosse consoante com a complexidade do objeto de estudo. O objeto não foi reduzido e simplificado até que se chegasse a variáveis únicas, mas foi estudado em sua complexidade e totalidade em seu contexto.

Neste trabalho, a Biologia e a Matemática foram vistas como objetos de atuação do professor e instrumentos da elaboração de conhecimento do estudante. Respeitadas as peculiaridades de cada campo, foram buscados vínculos entre Biologia e Matemática. A figura 1 a seguir ilustra uma forma de aproximação entre estas duas Ciências e a estratégia adotada para identificar, categorizar e tratar temas articuladores entre ambas no Ensino Médio, desde a identificação até a formulação de sugestões para aplicações em sala de aula. A Matemática, com suas teorias e metodologias próprias, aproxima-se da Biologia na elaboração de modelos para solucionar problemas e interpretar situações. Isso pode favorecer articulações no tratamento de temas que momentaneamente sejam comuns às duas Ciências.

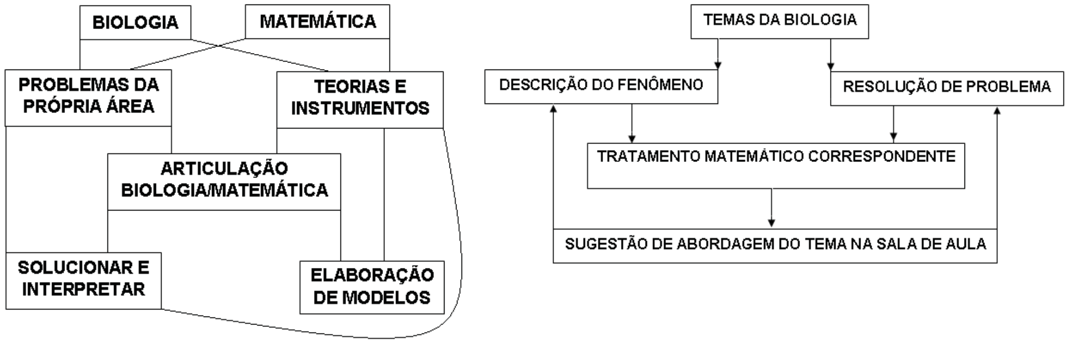


Figura 1: Aproximação que pode ocorrer entre a Biologia e a Matemática, quando esta última serve de instrumento de análise da primeira e a descrição do processo de identificação, categorização e abordagem dos temas de articulação entre Biologia e Matemática.

Desenvolvimento do trabalho e busca de dados

Os dados da pesquisa foram obtidos a partir de livros didáticos de Biologia e a coleta de dados deu-se na biblioteca de uma instituição da rede privada de ensino da cidade de Vitória, Espírito Santo. A seleção dos livros de Biologia recaiu sobre temas que originalmente pertencem à Biologia e cujas metodologias de descrição dos fenômenos ou cujos problemas a resolver recebem tratamento matemático.

Em função dos dados identificados, foram fixadas duas categorias: 1) A presença da Matemática na descrição dos fenômenos biológicos; 2) A utilização de conhecimento matemático na resolução de problemas oriundos da Biologia. As categorias surgiram durante a organização e interpretação dos dados, sendo, portanto, tidas como emergentes, de acordo com o critério apresentado por Fiorentini e Lorenzato (2006). Durante a elaboração da pesquisa, procurou-se valorizar saberes das duas áreas, a princípio consideradas campos distintos em relação às suas teorias e métodos de estudo. A articulação entre as duas disciplinas não foi feita apenas para encadear conteúdos ou associar significados, mas também visando compartilhar saberes de dois campos científicos e enriquecer o ensino de ambas. Também é importante compreender como é possível ligar saberes de uma disciplina aos de outras, modificando redes em que eles inicialmente se encontram.

Foram encontrados os temas de Biologia em associação aos conteúdos matemáticos presentes na tabela a seguir.

Temas da biologia	Temas da matemática
Cinética enzimática. Respiração e fotossíntese. Crescimento vegetal e animal.	Funções: crescimento e decrescimento de uma função em um intervalo. Ponto de máximo. Valor máximo. Função com a variável dependente nula. Função constante. Fenômeno em duas etapas. Função descrita por mais de uma sentença. Interseção de curvas.

Pressão osmótica.	Medidas de segmentos de reta.
Transpiração vegetal.	Proporcionalidade.
Crescimento vegetal e Genética.	Porcentagem.
pH e curva de crescimento.	Função exponencial e logaritmo.
Genética: árvore genealógica; Primeira e Segunda lei de Mendel; Polialelia; Monoibridismo e codominância: determinação da possibilidade de ocorrer um genótipo.	Análise combinatória: Apresentação de dados sob a forma de diagrama de árvore. Trabalho a partir de combinações com repetição de elementos. Probabilidade: Espaços amostrais, cálculos de probabilidades simples, de eventos mutuamente exclusivos, eventos complementares, de probabilidade condicional. Determinação de espaços amostrais sujeitos a condições dadas. Princípio multiplicativo e produto de probabilidades.
Genética de populações. Herança quantitativa.	Estatística Porcentagem Probabilidades Binômio de Newton Triângulo de Pascal Frequência Aplicações da função afim e estudo de proporções.

Tabela 1: Temas de Biologia do Ensino Médio e os de Matemática a eles associados

A partir da articulação desses temas, a separação e o ordenamento dos tópicos de programas escolares podem ser reavaliados e a possibilidade de ação conjunta entre disciplinas pode ser posta como elemento da ligação de saberes. Entretanto, o enredamento não pode servir de pretexto para destruir a identidade de cada disciplina e empobrecer objetivos didáticos.

Exemplo de Articulação: Descrição de Fenômeno Biológico

Potencial biótico é a capacidade de uma população crescer em condições favoráveis. Quando o crescimento de uma população alcança determinado patamar, esta passa a sofrer pressões do meio, limitando o potencial biótico, o que não ocorre até o ambiente atingir sua capacidade suporte K (K é uma constante real). Um exemplo de como pode ocorrer o processo de crescimento populacional é mostrado na figura 2 a seguir. A curva da figura 2, que descreve a variação do número de indivíduos de uma população, é chamada de sigmóide. A partir de determinado instante, o equilíbrio é estabelecido e a população atinge o número máximo de indivíduos que o ambiente pode suportar. O gráfico da função chega a um valor praticamente constante, podendo ocorrer pequenas oscilações no total de indivíduos. A curva do potencial biótico é de tipo exponencial e a do crescimento real, até determinado estágio, representa uma função crescente.

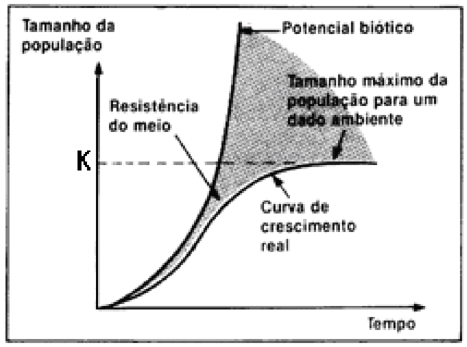


Figura 2: Comparação entre potencial biótico, resistência do meio e crescimento populacional, processo que resulta em num total de indivíduos com poucas oscilações em torno de um valor máximo, que o meio pode suportar (ponto K, correspondente ao máximo de indivíduos em determinado ambiente (Lopes, 2001)

No exemplo apresentado, existe o conceito de crescimento (ou decrescimento populacional) da Biologia, que é descrito por meio da Matemática, associando os conceitos de crescimento (ou decrescimento) de uma função e de função constante. Tal descrição é uma possibilidade para o aluno observar elementos matemáticos diante de uma situação característica do trabalho de outro campo científico, apresentando um novo contexto e o uso de temas usualmente estudados em Matemática.

Considerações finais

Como objetivo principal do presente trabalho, propôs-se justificar e fundamentar a articulação do ensino de Biologia e de Matemática no nível médio. Os dados da pesquisa apontam para a possibilidade de usar temas de ambas as disciplinas no ensino (tabela 1), favorecendo aproximações e ampliações do alcance educacional desses temas, viabilizando os objetivos específicos de aproximar os trabalhos de professores de diferentes campos a partir de articulações de saberes. O mesmo se deu com a busca de contribuições para organizar redes de conhecimentos para ampliação da capacidade crítica do estudante.

O exemplo apresentado no item anterior pode ser usado para a discussão de um tema não exclusivo de área alguma do conhecimento: os ambientes terrestres têm limites para suportar o crescimento populacional. Essa é uma forma de, utilizando conteúdos de disciplinas escolares, aplicar a ideia de Morin (2004) sobre o desenvolvimento da capacidade de contextualizar e integrar.

A articulação de saberes pode ajudar o estudante a perceber-se capaz de lidar simultaneamente com duas ciências cujos objetivos e metodologias são diferentes, ligando saberes e percebendo novas relações, aspecto que tem a emergência prejudicada em um ensino fragmentado. Enredando temas de diferentes disciplinas, são abertas possibilidades de diálogos nos quais ocorrem mútuas influências, sem recorrer a perda de identidades. Cada elemento estudado é tão importante quanto os demais, devido ao fato de terem seus diversos aspectos percebidos dentro de relações não hierarquizadas, o que se alinha às ideias de Machado (2005).

Sugere-se, ao iniciar esse tipo de trabalho, buscar aproximações locais entre diferentes disciplinas, atendendo aos princípios da rede propostos por Lévy (2006). Ao colocar temas de diferentes campos de saber na mesma arena de discussões, pode-se iniciar uma negociação de significados que deixa de ter um ponto definido para terminar, pelo fato de não centrar o estudo em uma disciplina específica.

O pensamento complexo apoiado em redes de significados pode encaminhar novas possibilidades para o ensino, gerando novas formas de pensar e agir em Educação. Tanto as disciplinas científicas quanto as escolares possuem autonomia. É vital conhecer seus temas e conhecer diferentes formas de ligá-los, ampliando, assim, as redes nas quais os saberes de diversos campos inicialmente se encontram.

A Biologia e a Matemática constituem campos de exploração delimitados, o que é em si um motivo para respeitar domínios de saberes, sistematizações específicas, metodologias próprias, instrumentos de análise, aplicações práticas e contingências históricas do desenvolvimento. A pesquisa apontou a existência de elementos comuns na prática do ensino de Biologia e de Matemática no nível médio, podendo favorecer articulações e ampliação do alcance didático dessas disciplinas por todo o Ensino Médio. Um exemplo de utilização de elementos comuns é que, a partir do gráfico de uma função, é possível tirar conclusões a respeito do comportamento de um fenômeno biológico, pois a dependência entre duas variáveis pode implicar na descrição de fenômenos naturais. Entre essas dependências estão a proporcionalidade direta e a inversa. Tanto o professor de Matemática quanto o de Biologia pode utilizar os gráficos para analisar o desenvolvimento de um fenômeno natural sob a visão da sua área de atuação.

No diálogo entre saberes de diferentes disciplinas, a comunicação deve se concretizar de modo a ocorrerem influências mútuas, sem a recorrência a excessivas formalizações das partes envolvidas, nem a perda de identidades. A articulação de saberes pode contribuir para contextualizar e a integrar temas. O pensamento complexo apoiado na elaboração das redes de significados pode encaminhar novas possibilidades e gerar formas inovadoras de pensar e agir no ensino de Ciências e Matemática. Por fim, cada professor deve assumir que seu campo de saberes não é capaz de explicar os fenômenos sob todos os aspectos e de forma simultânea. A Matemática, seus temas específicos, sua linguagem e formas de raciocínio devem servir para reforçar os diálogos desta disciplina com outras.

Referências bibliográficas

Davis, P. J. y Hersh, R. (1985). *A experiência matemática*. São Paulo: Francisco Alves.

Fiorentini, D. y Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores associados.

Flick, U. (2004). *Uma introdução à pesquisa qualitativa*. Porto Alegre: Bookman.

Henry, J. (1998). *A Revolução Científica e as Origens da Ciência Moderna*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Lévy, P. (2006). *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. São Paulo: 34.

Lopes, S. G. B. C. (2001). *Bio: volume único*. 3 ed. São Paulo: Saraiva.

Machado, N. J. (2005). *Epistemologia e didática.* 6 ed. São Paulo: Cortez.

Miorim, M. A. (1998). *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo: Atual.

Morin, E. (2004). *A Cabeça bem feita*. Rio de Janeiro: Bertrand.

Santos, B. S. (2004). *Um discurso sobre as ciências*. 2 ed. São Paulo: Cortez.

TEMAS DE INTERESSE NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Clarissa de Assis Olgin, Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil Brasil
clarissa_olgin@yahoo.com.br, claudiag@ulbra.br

Resumo. Este artigo apresenta resultados parciais de uma investigação de doutorado referente à busca de temas adequados aos interesses dos alunos, que estejam em sintonia com a vida moderna e que possibilitem desenvolver conteúdos matemáticos para o Currículo de Matemática, no Ensino Médio. Apresenta-se a história desta etapa da Educação Básica, no Brasil, visando uma compreensão do todo que possibilite identificar temas já trabalhados ou desenvolvidos no Currículo de Matemática. O objetivo desta pesquisa é investigar quais seriam os possíveis temas a serem trabalhados, no Ensino Médio, que alie conteúdos matemáticos e temas de interesse. A metodologia de pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, pois permite que o pesquisador valide a pesquisa através da análise e descrição dos dados coletados pelo pesquisador. Um exemplo de tema a ser explorado, é a Criptografia, pois permite desenvolver conceitos matemáticos em atividades de codificação e decodificação, proporcionando o trabalho em grupo, a criação de estratégias de resolução de situações problemas e a recontextualização dos conteúdos envolvidos no tema abordado.

Palavras chave: currículo de matemática, tmas de interesse, ensino médio

Abstract. This article presents partial results of a doctoral research regarding the search for suitable subjects to the interests of students, who are in tune with modern life and to enable developing mathematical content for the Curriculum of Mathematics in High School. It presents the history of this stage of education in Brazil, seeking an understanding of the whole that allows to identify themes already developed or worked on Math Curriculum. The objective of this research is to investigate what are the possible issues to be worked in high school, which combines mathematical content and topics of interest. The research methodology presents a qualitative approach because it allows the researcher to validate research through analysis and description of the data collected by the researcher. An example of a topic to be explored is the encryption, it allows to develop mathematical concepts in encoding and decoding activities, providing the group work, the creation of strategies for solving problems and situations involved in the recontextualization of content theme.

Key words: mathematics curriculum, themes of interest, high school

Introdução

Este artigo apresenta uma parte da investigação de doutorado sobre temas para o Currículo de Matemática, no Ensino Médio, que estejam relacionados à vida moderna, que sejam do interesse dos alunos e que abarquem os conteúdos matemáticos, verificando as possibilidades e desafios para sua implementação no currículo da disciplina de Matemática. Tais temas devem possibilitar ao estudante revisar, aprofundar e construir conceitos matemáticos. Encontra-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999) a necessidade de contextualizar os conteúdos matemáticos do Ensino Médio, de forma a propiciar ao estudante o aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver e aprender a ser. Para isso, acredita-se que, desenvolvendo os conteúdos matemáticos através de temas geradores que envolvam aspectos relevantes da vida em sociedade, os estudantes desta etapa do Ensino Básico conseguirão estabelecer relações entre a teoria e a prática.

O objetivo deste trabalho é investigar quais temas podem ser desenvolvidos no Currículo de Matemática do Ensino Médio, considerando o que ensinar, como ensinar e por que ensinar os conteúdos de Matemática, utilizando temas atuais, da realidade, que tenham significado e sejam do interesse do estudante do Ensino Médio.

A metodologia de pesquisa terá uma abordagem qualitativa, por entender que essa metodologia permite que o pesquisador valide os dados através da análise e descrição dos mesmos (Garnica, 2004).

No ano de 2011, foi aprovado o projeto de lei referente ao Plano Nacional de Educação do decênio 2011-2020, que salienta a importância e necessidade da utilização de temas geradores no desenvolvimento dos conteúdos no Currículo, o mesmo enfatiza a importância das abordagens interdisciplinares relacionando teoria e prática. Nesse sentido, entende-se que atualmente a sociedade moderna exige um Currículo que dê significado ao conhecimento escolar, buscando contextualizar os conteúdos. Uma forma de desenvolver os conteúdos matemáticos relacionando teoria e prática é através de temas geradores, que sejam do interesse dos estudantes nesta etapa do Ensino Básico. Assim, essa pesquisa busca investigar que temas podem ser explorados no Currículo de Matemática, do Ensino Médio, e quais critérios são necessários para seleção dos mesmos. Inicialmente, pesquisou-se a história do Ensino Médio com o objetivo de buscar subsídios para a escolha de tais temas. Como sugestão, apresenta-se o tema Criptografia para o desenvolvimento de conceitos matemáticos relativos aos conteúdos de matrizes, função linear, função quadrática, função exponencial, função logarítmica e suas funções inversas.

Objetivo da investição

Este trabalho possui como objetivo geral investigar temas geradores que possam ser desenvolvidos no Currículo de Matemática do Ensino Médio, considerando o que ensinar, como ensinar e por que ensinar os conteúdos de Matemática, utilizando temas geradores, que sejam atuais.

Para alcançar o objetivo geral deste trabalho apresenta-se a pesquisa bibliográfica referente à história do Ensino Médio, no Brasil; os próximos objetivos específicos a serem abordados seriam: realizar uma ampla pesquisa bibliográfica referente a temas para o Currículo de Matemática do Ensino Médio; investigar quais os critérios para a escolha de temas para o Currículo de Matemática do Ensino Médio; desenvolver uma sequência didática com os temas escolhidos; e aplicar um experimento em uma turma do Ensino Médio com a sequência desenvolvida.

Metodlogia da investigação

A metodologia de pesquisa terá uma abordagem qualitativa, por entender que essa metodologia permite que o pesquisador valide os dados através da análise e descrição dos mesmos, visto que, a pesquisa busca investigar temas de interesse para o Currículo de Matemática, no Ensino Médio, que desenvolvessem os conteúdos matemáticos, possibilitando, aos alunos, revisar, aprofundar e construir conceitos matemáticos.

Primeiramente, buscou-se compreender o Currículo de Matemática na sua totalidade, através de uma ampla pesquisa bibliográfica, procurando compreender a formação do modelo atual do Currículo do Ensino Médio. Na segunda etapa, está sendo realizada uma busca por temas que vêm sendo trabalhados no Currículo de Matemática do Ensino Médio, em revistas, livros didáticos do Ensino Médio, artigos de congresso, periódicos, revistas da área, nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Na fase seguinte, será realizado um aporte teórico que possibilite verificar quais são os critérios para escolha de temas para o Currículo de Matemática do Ensino Médio. Após ter realizado um aporte teórico que fundamente os critérios para escolha e análise dos temas, serão desenvolvidas sequências didáticas com os temas pesquisados. Neste trabalho apresenta-se a história do Ensino Médio e a sugestão de um tema já investigado.

História do ensimo médio 1834 a 2011

Será tratado neste momento questões referente à evolução histórica do Ensino Médio a partir de uma descrição legal. Este estudo tem por objetivo conhecer o enfoque curricular desta etapa do Ensino Básico, buscando, a partir da legislação, subsídios para escolha de temas relevantes para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

O Ensino Secundário, inicialmente era ministrado por professores particulares, em aulas avulsas (aulas que não são ligadas a uma instituição de ensino) e sem fiscalização (Aranha, 1996).

No ano de 1834, teve-se o Ato Adicional, que deu às províncias o direito de legislar a instrução pública e criar estabelecimentos próprios para promovê-la, com exceção das Faculdades de Medicina, dos cursos jurídicos, das academias existentes e outros estabelecimentos que pudessem ser criados por lei geral (Piletti, 1996). A partir desse ato, o ensino primário e secundário tornou-se responsabilidade das províncias e o ensino superior ficou sob a responsabilidade do governo.

Em 1854, o Ministro do Império, Conselheiro Luiz Pedreira do Couto Ferraz, através do decreto imperial 1331-A, estabeleceu que a instrução primária e secundária do Município da

Capital seria inspecionada pelas seguintes pessoas: Ministro e Secretário do Império, Inspetor Geral, componentes do Conselho Diretor e Delegado do Distrito (Almeida, 2000).

O decreto 2006, de 24 de outubro de 1857, aprovou o regulamento para os colégios públicos de Instrução Secundária do Município da Corte e estabeleceu que o Colégio D. Pedro II passaria a ter dois estabelecimentos de Instrução Secundária: internato e externato (Niskier, 1989, p. 145).

Em 19 de abril de 1879, criou-se o decreto 7247, que ficou conhecido como Reforma Leôncio de Carvalho que estabeleceu que os conteúdos do Ensino Secundário fossem interligados as aplicações na indústria e ao uso no cotidiano (Niskier, 1989).

Em 1892, foi estabelecida a reforma da Instrução Secundária, através do decreto 1194, assinada pelo Ministro de Estado Dr. Fernando Lobo (Niskier, 1989), essa reforma pretendia que a Instrução Secundária fosse voltada à preparação para o ingresso no ensino superior e para vida em sociedade.

O decreto 2857, de 30 de março de 1898, aprovou o regulamento para o Ginásio Nacional e o Ensino Secundário nos Estados (Niskier, 1989), que estabeleceu que a finalidade do Ginásio Nacional fosse proporcionar a Instrução Secundária e Fundamental necessária e suficiente para o desempenho dos deveres de cidadão, matrícula no ensino superior e obtenção do grau de bacharel em Ciências e Letras (Brasil, 1898).

Segundo Niskier (1989), foi Epitácio Pessoa, no decreto 3914 de 23 de janeiro de 1901, que aprovou o regulamento para o Ginásio Nacional, que estabeleceu que este tivesse a finalidade de proporcionar a cultura intelectual para a matrícula nos cursos superiores e para a obtenção do grau de bacharel em Ciências e Letras.

Pelo decreto 8659, de 5 de abril de 1911, foi criada a Lei Orgânica do Ensino Superior e do Fundamental, conhecida como Reforma Rivadávia Correia, proporcionou autonomia didática aos institutos, cabendo-lhes a organização dos programas de seus cursos (Niskier, 1989). Entende-se que esse foi o primeiro momento, na história da educação, em que se pensou no Ensino Secundário não apenas voltado ao ensino superior, pois o objetivo não era preparar o estudante somente para progressão nos estudos, mas também para a vida em sociedade.

De acordo com Niskier (1989), o decreto 11530, de 18 de março de 1915, ficou conhecido como Reforma Carlos Maximiliano. Nesse decreto, o Governo Federal comprometeu-se a manter a autonomia didática e administrativa (Brasil, 1915).

O ministro da Justiça, João Luís Alves, elaborou uma nova reforma para o ensino no Brasil, conhecida como Reforma Rocha Vaz, aprovada pelo decreto 16782-A, de 13 de janeiro de

1925, que determinou que o ensino secundário fosse base indispensável para a matrícula nos cursos superiores e deveria dar o preparo fundamental e geral para a vida, além de fornecer a cultura média geral do país.

O decreto 19890, de 18 de abril de 1931, estabeleceu que o Ensino Secundário, oficialmente reconhecido, era ministrado no Colégio Pedro II e seria formado por dois cursos seriados: fundamental e complementar (Aranha, 1996).

A Constituição de 1934 expõe que era de competência da União fixar o plano nacional de educação, que deveria: abarcar o ensino de todos os graus e ramos, comuns e especializados, coordenando e fiscalizando a sua execução, em todo o território do país (Brasil, 1934). No plano nacional de educação (1934), constava que o ensino primário deveria ser gratuito, mas já indicava a necessidade de estender a gratuidade ao Ensino Secundário.

Em 1942, o decreto 4244, referente à Lei Orgânica do Ensino Secundário, determinava que o Ensino Secundário fosse ministrado em dois ciclos: o curso ginasial e o curso clássico e científico (Aranha, 1996).

O decreto 34.638, de 17 de novembro de 1953, estabeleceu a Campanha de aperfeiçoamento e difusão do Ensino Secundário (C.A.D.E.S.), a qual pretendia promover a difusão do Ensino Secundário no país, buscando tornar a educação secundária ajustada aos interesses e possibilidades dos estudantes, levando em consideração as reais condições e necessidades do meio ao qual a escola serve (Brasil, 1953).

Em 1954, foi criada uma lei para fornecer auxílio financeiro por parte da União ao ensino de grau médio, a qual instituiu o Fundo Nacional do Ensino Médio, com a qual se pretendia melhorar e ampliar o sistema escolar do ensino de grau médio (Niskier, 1989).

Em 1961, foi criada a Lei de Diretrizes e Bases, conhecida como lei 4024, a qual estabeleceu, no artigo 34, que “O ensino médio será ministrado em dois ciclos, o ginasial e o colegial, e abrangerá, entre outros, os cursos secundários, técnicos e de formação de professores para o ensino primário e pré-primário” (Brasil, 1961).

Segundo Kuenzer (2009), foram mudanças no mundo do trabalho, ou seja, o crescimento dos setores secundários e terciários que levaram à necessidade de implementar, no Ensino Médio, cursos não acadêmicos, com o objetivo de formar profissionais qualificados para agir no mercado de trabalho, possibilitando a oferta do ensino profissional juntamente com o regular.

A lei 5692/71 determinou as Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2° graus, declarando que o ensino de 2° grau tinha por objetivo proporcionar ao educando a formação necessária para o desenvolvimento de suas potencialidades como elemento de autorrealização, qualificação para o trabalho e preparo para o exercício da cidadania (Brasil, 1971).

Segundo Niskier (1989), em 1985, surgiu o programa "Educação para todos: Caminho para Mudanças", destinado ao ensino de 1º e 2º graus, o qual pretendia combater os problemas que afligiam essa etapa da educação no país, tais como: o centralismo administrativo, as desigualdades regionais, as insuficiências e má distribuição espacial da rede escolar, os currículos inadequados, as deficiências na formação e a baixa remuneração dos professores.

Em 1996, foi criada a nova Lei de Diretrizes e Bases (LDB), nº 9394/96, segundo a qual a Educação Escolar foi dividida em Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) e Educação Superior. Nessa lei, encontra-se que o Ensino Médio é a fase final da Educação Básica e tem por finalidade garantir o desenvolvimento do educando, fornecendo-lhe a formação comum que é indispensável para o exercício da cidadania e continuação dos estudos (Brasil, 1996).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM (1999) consta que o currículo deve conter os conteúdos e as estratégias de aprendizagem que permitam capacitar o estudante para realizar atividades nos três âmbitos da ação humana, ou seja, capacitá-lo para a vida em sociedade, para atividades produtivas e para experiências subjetivas. Os PCNEM (1999) indicam a necessidade de desenvolver os conteúdos de forma interdisciplinar, visto que possibilita ao estudante perceber que os conteúdos não são estanques em cada área do conhecimento, pois desenvolver os conteúdos de forma interdisciplinar e contextualizada pode possibilitar a interação entre as disciplinas e diversos temas que permeiam a sociedade na qual o estudante está inserido, permitindo que ele perceba as relações pertinentes entre os conteúdos abordados (Brasil, 1999).

Através da pesquisa realizada, referente à História do Ensino Médio, pode-se dizer que foi a partir de 1996, com a Lei de Diretrizes e Bases, que surgiu a necessidade de se contextualizar os conteúdos das diversas áreas do conhecimento, para alcançar as finalidades propostas para essa etapa da Educação Básica.

Em 2011, aprova-se o Plano Nacional de Educação referente ao decênio 2011-2020, onde se pretende universalizar, até 2016, está etapa do Ensino Básico (Brasil, 2011). Ainda, de acordo com o Plano Nacional de Educação 2011-2020, percebe-se que existe uma preocupação, no Ensino Médio, no que tange a organização curricular, pois indica a necessidade de abordagens interdisciplinares relacionando teoria e prática, através de temáticas, por exemplo, trabalho, tecnologia e cultura.

Portanto, entende-se há uma preocupação de que se desenvolvam os conteúdos matemáticos através de temas (sociais, culturais, tecnológicos, políticos, etc.), pois podem contribuir para contextualizar os conteúdos do Ensino Médio.

Criptografia: um tema de intersse no currìculo de matemática no ensimo médio

A Criptografia é um exemplo de tema que pode ser abordado no Currículo do Ensino Médio, pois permite: desenvolver atividades didáticas utilizando padrões e regras de codificação e decodificação; trabalhar os conteúdos matemáticos, já desenvolvidos em sala de aula pelos professores, dentro de um contexto que envolve segurança de dados; possibilita recontextualizar um conteúdo dentro de outro tema, produzindo novos significados e relações enriquecedoras.

Entende-se que o tema Criptografia é de interesse para o Currículo de Matemática do Ensino Médio, pois vai ao encontro dos critérios propostos por Silva (2009) referente à escolha e organização de temas para está Etapa da Educação Básica. O tema Criptografia apresenta os critérios: riqueza, relação, recursão e ressignificação (Silva, 2009). Os critérios riqueza e relações podem ser percebidos na figura 1, pois o critério riqueza está relacionado às possibilidades de criação de atividades que podem ser desenvolvidas utilizando este tema e o critério relação refere-se à viabilidade de relacionar diversos conteúdos matemáticos ao tema, em atividades de codificação e decodificação.

ATIVIDADES DIDÁTICAS COM O TEMA CRIPTOGRAFIA	
Atividades	**Conteúdos Matemáticos**
Criptogramas	Aritmética
Código ISBN	Aritmética modular.
Código com Função Linear	Função Linear, cálculo da imagem da função, cálculo de função inversa.
Código com Função Quadrática	Função Quadrática, cálculo da imagem da função, cálculo de função inversa.
Código com Função Exponencial e Logarítmica	Propriedades da potenciação, equações exponenciais, cálculo da imagem de uma função e logaritmo mudança de base.
Código com Matrizes	Matrizes, multiplicação de matrizes, operações com matrizes, matriz transposta e cálculo de matriz inversa.

Figura 1: atividades didáticas envolvendo o tema Criptografia

O critério recursão é percebido no fato deste tema permitir que os conteúdos matemáticos sejam revistos em um novo contexto, que envolve segurança de dados. O critério ressignificação está relacionado à possibilidade de recontextualizar os conteúdos dentro do tema proposto, pois quando se compreende os diferentes contextos e conceitos matemáticos podem-se produzir novos significados e relações enriquecedoras (Silva, 2009). Nesse sentindo, verifica-se que este tema é adequado ao Currículo de Matemática do Ensino Médio, pois pode ser uma estratégia para o desenvolvimento dos conteúdos em sala de aula.

Apresenta-se, a seguir, um exemplo de atividade didática explorando o conteúdo matemático de matrizes, mostrando como se aplica este conteúdo ao tema proposto. Considerando-se que cada letra do alfabeto é associada a um número inteiro de 1 a 26, por exemplo, A=1, B=2, C=3, etc.. Codifique a palavra "FELICIDADE", sabendo que a matriz codificadora é $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Para codificar a mensagem o aluno precisa observar que uma das informações relevantes apresentada é a matriz codificadora $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Em seguida, monta-se a sequência numérica da mensagem: "6 – 5 – 12 – 9 – 3 – 9 – 4 – 1 – 4 – 5". Após, constrói-se a matriz da mensagem: $M=\begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 9 & 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Para codificar, multiplicam-se as matrizes A e M: $AM=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 9 & 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 27 & 51 & 33 & 11 & 23 \\ 26 & 48 & 39 & 8 & 24 \end{pmatrix}$. Os elementos da matriz AM corresponderão à mensagem codificada. Para verificar se a codificação está correta o aluno pode decodificar a mensagem, isto é, multiplicando a matriz (AM) com A^{-1}, ou seja, $(AM).A^{-1} = \begin{pmatrix} 27 & 51 & 33 & 11 & 23 \\ 26 & 48 & 39 & 8 & 24 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = M = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 9 & 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (Olgin, 2011).

Conclusões

Neste artigo, pode-se observar através da história do Ensino Médio e dos pressupostos educacionais que o desenvolvimento do Currículo de Matemática do Ensino Médio envolvendo os conteúdos aliados a temas geradores, que sejam interdisciplinares, de interesse e modernos, pode ser uma metodologia que favoreça o processo de ensino e aprendizagem, permitindo que os alunos estabeleçam ligações pertinentes que possibilitem utilizá-los em sua vida cotidiana, no mundo trabalho e em estudos posteriores.

Para que o Currículo do Ensino Médio atenda as necessidades da vida moderna, entende-se que é importante desenvolver os conteúdos matemáticos através de temas sociais, políticos, contemporâneos, etc.. Para isso, precisa-se pensar em quais são os temas que permitem desenvolver os conceitos matemáticos abordados no Ensino Médio de forma a oportunizar a aquisição de habilidades matemáticas, apropriação de conceitos e participação do aluno na construção de seu conhecimento.

Um exemplo de tema a ser trabalhado, no Ensino Médio, é o tema Criptografia, que possibilita o desenvolvimento de atividades envolvendo codificação e decodificação que permitem trabalhar os conteúdos de Matemática do Ensino Médio aliado ao tema proposto.

Referências bibliográficas

Almeida, J. R. P. (2000). *Instrução pública no Brasil (1500-1889):* História e Legislação. Tradução Antonio Chizzotti. 2 ed. São Paulo: EDUC.

Aranha, M. L. A. (1996). *História da Educação.* São Paulo: Moderna.

Decreto 2857, de 30 de março de 1898 (1898). Aprova o regulamento para o Ginásio Nacional e o Ensino Secundário nos Estados. Capital Federal. Recuperado em 29 de setembro de 2011, de http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-2857-30-marco-1898-506934-publicacaooriginal-1-pe.html

Decreto 11530, de 18 de março de 1915 (1915). Reorganiza o Ensino Secundário e o Superior na República. Rio de Janeiro. Recuperado em 29 de setembro de 2011, de http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1910-1919/decreto-11530-18-marco-1915-522019-republicacao-97760-pe.html

Constituição da República dos Estados Unidos do Brasil de 1934 (1934). Rio de Janeiro. Recuperado em 29 de setembro de 2011, de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constitui%C3%A7ao34.htm

Decreto 34638, de 17 de novembro de 1953 (1953). Institui a Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário. Rio de Janeiro. Recuperado em 29 de setembro de 2011, de http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1950-1959/decreto-34638-17-novembro-1953-329109-publicacaooriginal-1-pe.html

Lei n. 4024, de 20 de dezembro de 1961 (1961). Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, DF. Recuperado em 29 de setembro de 2011, de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L4024.htm

Lei n. 5692, de 11 de agosto de 1971 (1971). Fixa Diretrizes e Bases para o Ensino de 1° e 2° graus, e da outras providências. Recuperado em 29 de setembro de 2011 de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L5692.htm

Lei n. 9394, de 20 de dezembro de 1996 (1996). Estabelece as diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, DF. Recuperado em 12 de agosto de 2011, de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm

Garnica, A. V. M. (2004). *História Oral e educação Matemática.* In: Borba, M. C.; Araújo, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

Kuenzer, A. Z. (2009). *Ensino Médio:* Construindo uma proposta para os que vivem do trabalho. 6. ed. São Paulo: Cortez.

Niskier, A. (1989). *Educação Brasileira*: 500 anos de História. São Paulo: Melhoramentos.

Olgin, C. A. (2011). *Currículo no Ensino Médio*: uma experiência com o tema Criptografia. Dissertação de Mestrado. Universidade

Luterana do Brasil. Canoas, Brasil.

Piletti, C. y Piletti, N. (1996). *História da Educação.* São Paulo: Ática.

Projeto de Lei. (2011). Plano Nacional da Educação Nacional 2011-2020. Recuperado em 12 de agosto de 2011, de http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=16478&Itemid=1107

Secretária de Educação Média e Tecnológica. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Ensino Médio: ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

Silva, M. A. (2009). *Currículo de Matemática no Ensino Médio*: em busca de critério para escolha e organização dos conteúdos.Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, Brasil.

SIGNOS Y MATEMÁTICA: UN POCO DE HISTORIA

Patricia Sastre Vázquez, Carolina Boubée, Viviana Scempio
Facultad de Agronomía. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires Argentina
psastre@faa.unicen.edu.ar, cboubee@faa.unicen.edu.ar, vivianas@faa.unicen.edu.ar

Resumen. El presente trabajo forma parte de la primera etapa del Proyecto de Investigación *Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería*, que se realiza de manera conjunta entre la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Azul, Argentina), y la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Argentina (Rosario, Argentina). Desde el punto de vista de la comunicación, la característica más importante de la Matemática es su lenguaje riguroso, el cual está ligado al hecho de que sus conceptos son entes abstractos, cuyas representaciones están determinadas tanto por la semiótica como por la noética (Duval, 2000). Se hace fundamental, entonces, explorar y clarificar los distintos significados que se le pueden asignar a los símbolos matemáticos, tanto desde la semiótica como desde la propia Historia de la Matemática, lo cual constituye el objetivo central de este artículo.

Palabras clave: lenguaje matemático, historia, semiótica

Abstract. This paper is part of the first phase of Research Project Analysis of mathematical language and its influence on the processes of Validation Engineering college students, conducted jointly by the Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Azul, Argentina), and the Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Argentina (Rosario, Argentina). From the point of view of communication, the most important feature of mathematics is its rigorous language, which is linked to the fact that their concepts are abstract entities whose representations are determined by both semiotics as the noetic (Duval, 2000). It is therefore essential to explore and clarify the different meanings that can be assigned to mathematical symbols, both semiotics and from the History of Mathematics, which is the focus of this paper.

Key words: mathematical language, history, semiotics

Introducción

La tradicional clasificación de las ciencias en fácticas y formales (Bunge, 1980) se basa en la diferencia entre los objetos de estudio de las distintas ciencias. La Matemática y la Lógica, constituyen las denominadas ciencias formales, ya que tratan con entes ideales, abstractos. Las ciencias fácticas –Física, Química, Biología, Economía, Psicología, entre otras– recurren a la Matemática, empleándola como herramienta para abordar sus objetos de estudio, naturales o sociales, y reconstruir las complejas relaciones que se dan entre distintos hechos y procesos. Así, estas ciencias son usuarias de la Matemática, pero también contextualizan y dan sentido a los objetos matemáticos. Este nexo entre ciencias fácticas y formales, entre entes reales e ideales, se establece a través del puente del lenguaje.

La Matemática utiliza distintos tipos de lenguajes para representar los objetos abstractos que le son propios. En el caso de esta ciencia, y también de la Lógica, el lenguaje requerido para su comunicación es formal o simbólico. Duval (1993, p. 1) reconoce que "existe una palabra a la vez importante y marginal en Matemáticas, [que] es la palabra `representar´. Una escritura, una notación, un símbolo, representan un objeto matemático: un número, una función, un vector…".

El lenguaje riguroso de la Matemática es una de sus características más importantes para su comunicación y aprendizaje. Sus conceptos son entes abstractos cuyas representaciones están determinadas tanto por la semiótica como por la noética (Duval, 2000) y por lo tanto las relaciones de los símbolos y signos dependen del dominio conceptual en el que se encuentren. Las expresiones matemáticas son registros semióticos que determinan significados (semántica), más allá de su representación (sintáxis). Estos significados están mediados por conceptos fundamentales que son la base de la construcción del saber matemático.

Estas singularidades de la Matemática y su lenguaje impactan fuertemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia. En general, al comenzar sus estudios universitarios los alumnos presentan numerosas dificultades. Uno de los problemas más notables que muestran los estudiantes al abordar asignaturas con contenidos matemáticos es la falta de apropiación de su lenguaje simbólico.

Lo antes mencionado fundamenta, en parte, el Proyecto de Investigación en que se enmarca este trabajo, cuyo título es *Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería*, que se realiza de manera conjunta entre la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Azul, Argentina), y la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Argentina (Rosario, Argentina). Con el desarrollo del proyecto se pretende, entre otros objetivos, explorar qué idea tienen los docentes de Matemática de carreras universitarias de Ingeniería sobre el lenguaje matemático y la epistemología de esta ciencia; estudiar la utilización que hacen los docentes del lenguaje matemático en el ámbito áulico; y analizar el nivel de conocimiento del lenguaje matemático con el que acceden los estudiantes a la Universidad. Para cumplimentar estas metas se plantea en el proyecto una etapa inicial abocada principalmente a la revisión bibliográfica y a la construcción de un corpus teórico sobre los conceptos de *concepciones, creencias, nociones implícitas, y explícitas, lenguaje, historia y epistemología de la Matemática* y cuyos resultados parciales, vinculados fundamentalmente a los últimos conceptos mencionados, se presentan en este artículo.

Qué se entiende por símbolo matemático y cómo ha evolucionado su interpretación, requiere un análisis semiótico y también histórico. Debemos entender que el progreso de las ideas no se da en el tiempo de manera lineal, a través de una trayectoria perfectamente delineada y preconcebida; existen muchos elementos que en el camino son descartados, reformulados o añadidos, incluyendo por supuesto la adopción o rechazo de un sistema simbólico.

Signos y matemática

Podemos decir que lo que se denomina "lenguaje matemático" está compuesto tanto por lenguaje natural como por un sistema simbólico, que puede descomponerse en escrituras simbólicas y representaciones compuestas (que incluyen escrituras simbólicas, dibujos, lenguaje natural, relacionados entre sí). Para discutir al respecto, debemos clarificar ciertos términos e intentar precisar los significados que se les atribuyen.

La semiótica estudia los procesos de significación y de comunicación de los sistemas de signos, más que los signos propiamente dichos. Esto queda claro en la semiótica tal como la desarrolló Charles Sanders Peirce, quien dio un sinnúmero de definiciones de 'signo' a lo largo de su extensa obra. Su definición más breve y compacta de signo data de 1873: "Un signo es un objeto que está en el lugar de otro para alguna mente" (Puig, 2003, p.175). En otra definición, posterior a la citada, expresa que signo "es cualquier cosa que determina alguna otra (su interpretante) para que se refiera a un objeto al cual él mismo se refiere (su objeto); de la misma manera el interpretante se convierte en un signo, y así *ad infinitum*" (Peirce, 1987, p. 274). Así, podemos decir que el signo fuerza al interpretante a referirse al mismo objeto al que él se refiere, y además de la misma manera que él se refiere. Todo signo forma parte de una relación triádica, junto con su objeto y una mente en la que se produce la cognición o *interpretante.*

Peirce clasifica los signos en tres tipos: íconos, índices y símbolos:

> Existe una triple conexión del *signo*, la *cosa significada* y la *cognición producida por la mente*. Puede haber una simple relación racional entre el signo y la cosa; en este caso, el signo es un *ícono*. O bien puede haber una conexión física directa; en ese caso, el signo es un *índice*. O bien puede haber una relación que consiste en que la mente asocia el signo con su objeto; en ese caso el signo es un *nombre* (o *símbolo*). (Peirce, 1987, p. 175)

Dentro del estudio de la semiótica, que aborda el análisis de los signos en general, no sólo los lingüísticos, se encuadran los procesos de significación y comunicación, esenciales en el campo de la Matemática.

Es muy común que se haga referencia a las expresiones algebraicas como "lenguaje simbólico"; por ejemplo, cuando se pide plantear un problema en término de ecuaciones, se describe usualmente como "paso del lenguaje natural al lenguaje simbólico". Sin embargo, si usamos la terminología de Peirce, las expresiones algebraicas no son símbolos, sino que son íconos.

En términos de Peirce (1987):

> (…) Una fórmula algebraica es un ícono, que ha sido convertido en tal mediante las reglas de conmutación, asociación y distribución de los símbolos. (…) Porque una gran propiedad distintiva de los íconos es que mediante su observación directa se pueden descubrir otras verdades concernientes a su objeto que no son las que bastan para determinar su construcción. (…) Esta capacidad de revelar una verdad inesperada es precisamente aquello en que consiste la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo cual el carácter icónico es el predominante. (Peirce, 1987, p.263)

Las expresiones algebraicas son, entonces, íconos y esto es lo que precisamente las hace poderosas, ya que como signos tienen las propiedades que tienen sus objetos. De todos modos, los signos que se usan en Matemática no son todos ellos de naturaleza lingüística, por lo tanto no es recomendable utilizar solamente la terminología ni la concepción del *signo* propia de la lingüística, o al menos, no de manera excluyente. Es por esto que se suele utilizar el término "expresión" del par expresión/contenido, empleado también por la semiótica, que además resulta conveniente ya que en Matemática es común hablar de "expresiones algebraicas" o de "expresiones aritméticas" al referirse a las escrituras correspondientes.

Ciertamente, en Matemática, los signos poseen un carácter relativo, ya que un signo no es siempre un ícono, un símbolo o un índice. Más bien, un signo es *utilizado* como ícono, símbolo o índice (Panizza y Drouhard, 2001). Poner el acento en los signos individuales nos puede ocultar el hecho crucial de que en ningún texto (matemático o de otro tipo) hay signos aislados. Por esto, lo que es esencial es el sistema de signos tomado en su conjunto y lo que hay que calificar de matemático es el sistema y no los signos, porque es el sistema el responsable del significado de los textos. "Hay que hablar pues de sistemas matemáticos de signos y no de sistemas de signos matemáticos, subrayando con la colocación del adjetivo 'matemáticos' que lo que tiene el carácter matemático es el sistema y no meramente los signos individuales" (Puig, 2003, p.181).

No debemos olvidar que el "lenguaje" matemático se compone de lenguaje natural, lenguaje formal y representaciones no lingüísticas. Los signos abstractos residen dentro de un sistema complejo de reglas y relaciones internas que hacen posible la comunicación, y también la creación, de ideas matemáticas poderosas. Para Duval la habilidad para cambiar de registro de cualquier representación semiótica ocupa un lugar central en el aprendizaje de la Matemática. Entiende por representaciones semióticas a las "producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento" (Duval, 1993, p.1). Estas representaciones no son sólo útiles para fines de comunicación, sino que también son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Para este autor, el aprendizaje de la Matemática consiste en la producción de representaciones mentales como internalización de representaciones semióticas, evidenciando así el papel fundamental de las representaciones en la Matemática. La aprehensión conceptual de un objeto depende del acceso a la diversidad de sistemas semióticos para describirlo, y a la articulación entre los mismos. Pero, los signos o símbolos utilizados por la Matemática, no siempre han sido como hoy los conocemos. Como toda producción humana, evoluciona, se transforma, se adapta. A medida que las diferentes civilizaciones avanzaron en la utilización de la Matemática, los simbolismos utilizados se hicieron cada vez más avanzados. Esto justifica y requiere una breve reseña histórica del surgimiento de algunos signos matemáticos utilizados en la actualidad.

Haciendo un poco de Historia

La adopción de los símbolos matemáticos, se basa en una adquisición paulatina de un mayor pragmatismo, según las distintas culturas. El desarrollo de la notación matemática, asociado a la evolución del Álgebra –rama de la Matemática cuyo lenguaje privilegiado es el simbólico–, puede dividirse en tres etapas. Florian Cajori, uno de los historiadores de la Matemática más reconocido, distingue en su obra *A History of Mathematical Notations* (1928), los siguientes períodos.

- La primera etapa se denomina "Álgebra Retórica". No se utilizan abreviaturas, ni símbolos especiales; se usa el mismo lenguaje escrito. Los cálculos se realizan por medio de palabras y símbolos de uso común. Corresponde a la época paleobabilónica, entre 2000 y 1600 a. C., y la mayoría de los matemáticos islámicos medievales pertenecían a esta etapa.
- El segundo período corresponde al "Álgebra Sincopada". Este término lo ideó Nesselman en 1842. Para representar cantidades y operaciones se emplean abreviaturas simbólicas. Se utilizan ya algunos términos técnicos y abreviaturas. Un ejemplo de esta etapa está dado por la *Aritmética* de Diofanto, que data del siglo III, pero se extiende también a los trabajos árabes tardíos y de algunos europeos hasta el XVII.
- Finalmente, la tercera etapa es el "Álgebra Simbólica". Involucra un sistema completo de notación, todo se expresa a través de símbolos, y es un Álgebra mucho más parecida a la actual. Su mayor representante es Viète o Vieta (1540-1603), quien la denominó "Nueva Álgebra".

En las siguientes tablas presentamos sucintamente la historia del surgimiento y adopción de algunos símbolos matemáticos. Cabe aclarar que numerosos autores (Alfonso García, 2009; Dávila Rascón, 2002; Méndez Pérez, 2003; Ríbnikov, 1987) abordan esta temática, motivo por el cual aquí presentamos una breve selección, de manera ilustrativa, no exhaustiva del tema. El recorte lo hemos realizado en función de los signos más utilizados en las asignaturas en que se contextualiza la investigación que da marco al presente trabajo.

Igual =
Este signo se debe a Robert Recorde (1510-1558), que empezó a utilizarlo en 1557. Es probable que ningún otro signo matemático haya tenido, a lo largo de la historia, tantos competidores como éste. Antes de la implantación del signo “igual” tal y como lo conocemos actualmente se utilizaron palabras como *aequales*, *esgale* o *faciunt*, para indicar la igualdad entre dos cosas. Para escribir A = B, Viète escribía *A aequale B*, y algunos autores lo escribían de forma abreviada *A aeq. B*. El autor afirma que eligió ese símbolo porque dos cosas no pueden ser más iguales que dos rectas paralelas. Su uso se generalizó hacia finales del siglo XVII.
Menor, Mayor, Incluido, Pertenece $<$ $>$ $\subset$ $\in$
Se deben a Thomas Harriot (1560-1621). Los utilizó en su libro póstumo *Artis Analyticae Praxis ad aequationes Algebraicas Resolvendas* (1631). Una variante del signo $<$ (“menor que”), es el signo $\subset$ (“incluido en”) que, a diferencia del primero que indica relación entre números, se utiliza para indicar la inclusión entre conjuntos. Fue introducido por Ernst Schröder, en 1890. En una fecha cercana, 1895, Peano utiliza la letra griega épsilon estilizada, $\in$, para indicar la pertenencia de un elemento a un conjunto. Los símbolos actuales para representar, no igual, no mayor que, no menor que, se deben a Euler (1707-1783).

Tabla 1: Símbolos de relaciones

Conjunción disyuntiva $\vee$
Este símbolo es utilizado en Lógica para indicar la conjunción disyuntiva 'o'. Se usa por ser 'v' la inicial de la conjunción disyuntiva latina *vel*. El primer uso se remonta a los *Principia Mathematica* (1910) de Whitehead y Russell, aunque ya Peano, en su *Formulaire de Mathématiques* (1895), usaba el signo $\cup$, de manera semejante.
Conjunción copulativa $\wedge$
Este símbolo es utilizado en lógica para indicar la conjunción copulativa 'y'. No es claro su origen, pero se considera que se eligió por ser la inversión del signo empleado para la disyunción. También es de señalar que Peano, en su *Formulaire de Mathématiques* (1895), usaba el signo $\cap$.

Tabla 2: Símbolos de Lógica

Suma y resta + –
El texto más antiguo que se conoce en el que aparecen estos signos con el sentido de suma y resta es un tratado de Aritmética Mercantil del alemán Johannes Widmann (1489-1526). De todos modos, el signo “más” ya fue utilizado por Nicole Oresme (1325-1382) en *Proportionum Algorismus*, aproximadamente en el año 1360, posiblemente como una abreviatura de "et", que equivale a nuestro "y" (conjunción copulativa).

Producto $\times \cdot$
El símbolo $\times$ para la multiplicación parece ser original de Oughtred (1574-1660), y data del 1631, aunque es uno de los signos que ha ido perdiendo su uso. El símbolo $\cdot$ para la multiplicación fue utilizado por Thomas Harriot (1560-1621), pero quien lo popularizó fue Leibniz (1646-1716). Este matemático era muy reacio a la utilización de este símbolo para denotar el producto, ya que decía que sería muy fácil confundirlo con la letra x (que ya se utilizaba para representar incógnitas).
División $\div$ /
Se utilizan varios signos para indicar la división. La barra horizontal, de origen árabe, ya era usada por Fibonacci en el Siglo XIII, aunque no se generalizó hasta el Siglo XVI. La barra oblicua, /, variante de la anterior para escribir en una sola línea, fue introducida por De Morgan (1806-1871), en 1845. En 1659 el suizo Johann Heinrich Rahn (1622-1676) creó para la división el signo $\div$, que resulta bastante gráfico, una vez que la barra de fracción ha sido adoptada. Los dos puntos se deben a Leibniz (1684), que los aconsejaba para aquellos casos en los que se quisiese escribir la división en una sola línea y la notación con raya de fracción no fuese por tanto adecuada. Este signo mantiene el parentesco de la división con la multiplicación, para la que Leibniz usaba un punto.
Exponente de una potencia x^n
El primero que colocó el exponente en una posición elevada con respecto a la línea base fue Chuquet en el siglo XV. Sin embargo, se lo colocaba directamente al coeficiente, de modo que $5x^2$, lo escribía como 5^2. En 1636 James Hume publicó una edición del álgebra de Viète en la que utilizó una notación prácticamente igual a la actual, excepto que para los exponentes utilizó números romanos. Así, $5x^2$ lo escribía como $5x^{ii}$. Sería Descartes (1596-1650) quien sustituyó en su obra *Geometrie* los incómodos numerales romanos por los indoarábigos, aunque para la potencia cuadrada no utilizó la notación elevada, sino que escribía, como muchos hasta entonces, x^2 como *xx*.
Raíz $\sqrt{}$
Este signo lo introdujo el matemático alemán Christoph Rudolff (1500-1545), en 1525. Euler conjeturó en 1775 que se trataba de una forma estilizada de la letra ***r***, inicial del término latino *radix,* "radical".

Tabla 3: Símbolos de operaciones

Incógnita o Variable ***x***
Los símbolos *x, y, z* (las últimas letras del alfabeto) para representar incógnitas y las primeras para valores conocidos, fueron introducidos por Descartes, en su libro la *Geometrie.* Los árabes, para representar la incógnita, utilizaban el término *shay*, que quiere decir "cosa". En los textos españoles se escribió *xay*, que con el tiempo quedó sólo como *x*. Los egipcios le llamaban *aha*, literalmente "montón". Durante los siglos XV y XVI se le llamó *res* en latín, *chose* en francés, *cosa* en italiano o *coss* en alemán.
Notación funcional f(x)
Fue Johann Bernoulli (1667-1748) quien a finales del siglo XVII empezó a utilizar símbolos especiales para representar funciones. Más tarde, en 1718, simplificaría las cosas utilizando la letra griega φ ("fi"), precursora de nuestra "*f*", de modo que si φ era una función de *x* escribía φ*x*. Sería Euler, una vez más, quien en sus *Commentari* de San Petersburgo de 1734 utilizaría, como nombre genérico para las funciones, la letra "f" e indicar la variable entre paréntesis, logrando la expresión

f(x) que utilizamos en la actualidad.	
Infinito matemático ∞	
Este signo fue introducido por el matemático inglés John Wallis (1616-1703) en 1655, asociándolo a una sucesión de números que no tenía fin. Tiene forma de Lemniscata de Bernoulli (curva descripta por primera vez en 1694 por Jakob Bernoulli, como modificación de una elipse), y no se sabe qué guió a Wallis a adoptar esta forma, aunque puede considerarse una variante de uno de los símbolos que los romanos utilizaban para simbolizar el número mil.	
Derivada *dy/dx* *f´(x)*	
Los símbolos *dx*, *dy* y *dx/dy*, para derivadas, fueron introducidos por Leibniz. Reconocida es la creación del Cálculo Infinitesimal, de manera contemporánea, por Isaac Newton (1642-1727) y por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), pero primó la notación de este último, por sobre la del primero, que utilizaba los siguientes signos para las "fluxiones" $\dot{y}, \ddot{y},\ldots$. Los símbolos *f´(x)*, *f´´(x)*, etc., para las derivadas, fueron introducidos por Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), en 1797 en su *Théorie des fonctions analytiques*.	
Sumatorio $\sum$	
El uso de la sigma griega mayúscula se debe a Euler, que empezó a usarla en 1755 con estas palabras "summam indicabimus signo Σ". Parece claro que su elección se justifica en que sigma es la letra griega equivalente a la 's' de suma.	
Integral $\int$	
Este símbolo representa una S alargada, inicial de la palabra latina *summa*, que significa suma, lo cual hace referencia al hecho de que el concepto de integral, en principio, se desprende de la suma de las áreas de un conjunto de rectángulos cuyas alturas corresponden a valores de una función y cuyas bases tienen longitudes *infinitesimales*. Este símbolo fue usado por primera vez por Leibniz, en 1675.	

Tabla 4: Símbolos de Cálculo

Conclusiones

Del análisis precedente podemos afirmar que la creación de los símbolos matemáticos se debe a necesidades concretas, y que éstos establecen con otros símbolos una fuerte competencia por la subsistencia. Incluso aquellos símbolos que acabaron por mostrar una indiscutible eficacia a lo largo del tiempo no fueron aceptados de manera espontánea ni inicialmente, sino que se incorporaron en el lenguaje matemático luego de años o siglos de conjeturas. El lenguaje matemático comprende una simbología y estructura que les son propias. La semiótica resulta útil para el estudio del lenguaje simbólico, propio de las ciencias formales, ya que aborda el análisis de los signos en general. De todos modos, este estudio no debe hacerse, únicamente, con las mismas estructuras de la semiótica, ya que los signos utilizados en Matemática no son todos de naturaleza lingüística. En Matemática, los signos poseen un carácter relativo, ya que un signo no es siempre un ícono, un símbolo o un índice, sino que es utilizado como tal. Es por esto que se debería hablar de sistema matemático de signos, y no de sistema de signos matemáticos.

El análisis semiótico e histórico de los signos matemáticos es necesario y útil para un conocimiento más profundo de las representaciones matemáticas. Consideramos deseable completar y continuar este estudio con análisis didácticos y cognitivos, en distintos contextos de enseñanza y aprendizaje para lograr un abordaje integral y complejo de esta temática.

Referencias bibliográficas

Alfonso García, M. J. (2009). *Álgebra: Notación, historia y aplicaciones. Innovación y Experiencias Educativas. Revista Digital*, 21.

Bunge, M. (1980). *La ciencia, su método y su filosofía*. Buenos Aires: Ed. Siglo Veinte.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations*. Chicago: Reimpresión de Dover, (1993).

Dávila Rascón, G. (2002). *Apuntes de Historia de las Matemáticas. Parte I: El álgebra en la antigüedad.* Recuperado el 05 de marzo de 2012 de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-3-1-algebra.pdf

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (2000). *Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático*. Lille: Université du Littoral Côte-d'Opale, Boulogne, et Centre IUFM Nord Pas-de Calais.

Méndez Pérez, J. M. (2003). *Las Matemáticas: su historia, evolución y aplicaciones*. Lección inaugural del Curso Académico 2003-04 en la Universidad de La Laguna. Recuperado el 05 de marzo de 2012 de: http://divulgamat2.ehu.es/.

Panizza, M. y Drouhard, J, PH. (2001). Producciones escritas y tratamientos de control en álgebra: algunas evidencias para pensar en interacciones posibles para guiar su evolución. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 15 (1), 207-212. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Peirce, C. S. (1987). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy, (Ed.). *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual*, 174-186. México, DF.: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV.

FACTORES AFECTIVOS E IDENTIDAD EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Claudia Rodríguez Muñoz, Inés María Gómez-Chacón
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN — México
Universidad Complutense de Madrid — España
claurom65@yahoo.com, igomezchacon@mat.ucm.es

Resumen. En este trabajo se presentan los resultados parciales de una investigación longitudinal desde una perspectiva identitaria sociocultural y afectiva de los sujetos. Se busca comprender mejor los factores que afectan al rendimiento matemático en estudiantes de Secundaria (mujeres) en la ciudad de México. Mediante una metodología cualitativa y de estudio de casos se trata de establecer y describir relaciones significativas entre cognición-afecto y las interacciones sociales como posibles elementos constitutivos de las identidades sociales y culturales de las estudiantes en el aula de matemáticas. Los resultados del estudio ponen de manifiesto que las reacciones emocionales de las estudiantes dependen de las tareas matemáticas propuestas y de la dinámica de interacción que se establece entre pares y docentes. La identidad sociocultural de las estudiantes está fuertemente anclada al contexto sociocultural más amplio, algunas han interiorizado marcajes culturales que influyen en su autopercepción como estudiantes de matemáticas.

Palabras clave: mujeres, identidad, cognición y afectos en matemáticas

Abstract. This paper presents some partial results from the sociocultural and affective identity perspective of the subjects to better understand the issues that affect the mathematical performance of Junior High School women students in Mexico City. Through a qualitative methodology and case study the researchers will try to establish and describe meaning relationships between cognition-affection (emotions, beliefs, attitudes and values) and the social interactions as possible constitutive elements of the students' social and cultural identities in the mathematics class. The emotional reactions of students depend on the mathematics assignments proposed, besides the interaction that is established between peers and teachers. The students' social and cultural identity is strongly tide up to a wider social and cultural context; some students have interiorized cultural marks that are influencing their self-perception as mathematics students.

Key words: women, identity, cognition and affections in mathematics

Introducción

Los estudios de género en Educación Matemática han señalado que existen diferencias en el desempeño matemático entre estudiantes de distintos niveles, destacando una gran variedad de factores a los que se atribuyen estas diferencias de género (véase por ejemplo, Fennema y Leder, 1990; Burton, 1995; Vale, 2008). Sin embargo, hasta el momento son escasos los estudios que permiten visibilizar que está detrás de la diversidad de desempeños en Matemáticas de estudiantes (mujeres), en los que se analicen factores socioculturales, identitarios y afectivos asociados a las diferencias intragénero.

Investigaciones previas (INMUJERES, 2009 y 2010), en las que se han explorado las actitudes, creencias, afectividad y logro académico de las y los estudiantes de Secundaria en la asignatura de Matemáticas nos han permitido mirar, las distintas formas que las mujeres construyen y negocian su *"ser estudiantes de Matemáticas"*, y diversas formas que tienen de relacionarse con la comunidad escolar. Estos estudios revelan que las estudiantes viven bajo condiciones de posible desventaja simbólica, cultural o social y además, están sujetas a una red de significados que se manifiestan en el aprendizaje de las Matemáticas (Cervini, 2004; INMUJERES, 2009, 2010).

El estudio explora y analiza la identidad sociocultural, prestando especial atención a los procesos afectivos. Los objetivos de la investigación se precisaron como siguen:

- Describir las relaciones entre la dimensión afectiva y el conocimiento matemático en las estudiantes.
- Analizar la posibilidad de interpretar la dimensión afectiva y las interacciones en el aula matemática desde una perspectiva de identidad socio-cultural que se negocia y se actualiza en ese contexto.

Marco teórico

Este trabajo se plantea desde dos áreas de la investigación en Educación Matemática que están interrelacionadas, una es la identidad sociocultural (de género) de las estudiantes de Matemáticas y la otra es la dimensión afectiva en relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Autoras como Abreu y Cline (1998) y Gómez-Chacón (2000) plantean que la estructura de autoconcepto como aprendiz de Matemáticas está relacionada con las actitudes, creencias, valores y emociones de las personas en situaciones de aprendizaje y con la visión real o simbólica que tienen del mundo matemático. Aspecto clave que nos permite reconocer la identidad sociocultural.

La identidad sociocultural se entiende como el resultado de procesos cognitivos, evaluativos y emocionales. Su surgimiento, estabilidad y cambio están implicados en diversos procesos psicosociales, de naturaleza grupal, individual y colectiva. La identidad sociocultural contribuye a organizar la experiencia de las personas en su mundo social, ya que influye en la regulación de la autoimagen y en la conducta de los seres humanos dentro de los grupos de pertenencia. Se considera que cada estudiante está, al mismo tiempo, como persona y como integrante de un aula y de un grupo sociocultural más amplio. La comunidad de aula la consideramos como un contexto privilegiado en el que se deconstruyen y reconstruyen continuamente los significados.

En la categoría afectiva contemplamos dos estructuras significativas en la dimensión afectiva de la persona: *afecto local y afecto global* (Gómez-Chacón, 2000; Gómez-Chacón y Figueiral, 2007). Siguiendo a esta autora consideramos el afecto como uno de los sistemas internos interactivos de representación junto a la cognición que codifican significados para el individuo y que pueden ser externalizados mediante la comunicación a los otros. El afecto incluye cambios de estados de sentimientos y reacciones emocionales durante la resolución de problemas matemáticos (*afecto local*). Y también integra una estructura más estable que se establece en el contexto social y cultural del individuo y que puede estar influenciada por el afecto local. Esta estructura es conocida como *afecto global* e incluye actitudes, creencias y valores y contribuye a la construcción de las estructuras constitutivas del autoconcepto como estudiante de matemáticas.

En este estudio el afecto local se indaga a través del análisis interpretativo de los discursos de las estudiantes sobre la actividad matemática en el aula y las asociaciones libres sobre tareas matemáticas específicas, estableciendo la estructura local afecto-cognición. Y el afecto global se pone de manifiesto en las interacciones en el aula, las expectativas de éxito o fracaso en el recorrido que se hace en la actividad matemática, la identidad sociocultural de la estudiante, las creencias acerca de las Matemáticas y su aprendizaje. El afecto global sólo es posible interpretarlo a través de los escenarios complejos, que consideran a la persona en su contexto sociocultural y a la interacción con las y los otros.

Consideraciones metodológicas

Los datos forman parte de un estudio longitudinal de 20 estudiantes mujeres con las que se ha trabajado durante los dos primeros años de Secundaria y se les ha dado seguimiento hasta tercero. La zona escolar es de clase media baja, ubicada al sur del Distrito Federal en México. Los resultados de pruebas nacionales estandarizadas ubican a esta escuela en un nivel por encima de la media estatal y nacional en la asignatura de Matemáticas. De estas alumnas se ha realizado un seguimiento micro etnográfico y psicosocial en aula de medios electrónicos en 16 ocasiones por lapsos de 2:30 horas cada ocasión y en aula regular con una frecuencia de tres veces en distintos momentos.

Las técnicas e instrumentos para la toma de datos fueron: cuestionario de Matemáticas asociaciones libres, escala AMMEC (versión abreviada) (Ursini, Sánchez y Orendai, 2004), grupos focales y entrevistas en profundidad.

El enfoque metodológico es cualitativo interpretativo, fundamentado en el análisis de la subjetividad de las participantes, donde se combina técnicas propias de la antropología y psicológica social con el estudio de casos. Para identificar la interacción entre cognición y afecto se ha seguido la metodología planteada por Gómez-Chacón (Gómez-Chacón ,2000 y Gómez-Chacón y Figueiral, 2007) donde se estructuran elementos de análisis que permiten interpretar las emociones, las creencias individuales y colectivas, las interacciones del aula de cara a la relación afecto-cognición y construir un campo analítico en torno al surgimiento de estabilidad o cambio de los procesos de construcción del *"ser estudiantes de Matemáticas"*. Desde esta aproximación nos acercarnos metodológicamente al estudio de los factores afectivos en la interacción en el aula desde tres categorías de análisis (Gómez-Chacón y Figueiral, 2007, p.126):

Categoría cultural: caracterizada por las interacciones en el aula durante el período de participación de las estudiantes en los grupos focales y las entrevistas. Interacciones que pueden o no afectar las formas en que las estudiantes conciben el trabajo en el aula de Matemáticas, sea porque son diferentes de las esperadas por ellas o distantes de la cultura de origen; concepciones sobre contenidos matemáticos que incluyen información que proviene de la cultura de origen.

Categoría social: datos biográficos y familiares de aspectos relacionados con su experiencia y situación de aprendizaje en cuanto "ser mujer". Valoraciones recibidas en el contexto escolar, marcadores respecto al grupo social de pertenencia y tipo de personas y formas de negociación de su identidad social. Los sistemas de creencias compartidas que sustentan las personas de un grupo sobre sí misma y sobre otros y cómo contribuyen al aprendizaje de la Matemática.

Categoría afectiva: creencias y respuestas emocionales manifestadas por las estudiantes en las asociaciones libres sobre el cuestionario de Matemáticas o al hablar respecto al quehacer matemático.

Resultados

Se combina el análisis de resultados de las 20 estudiantes y se presentan cuatro casos de estudiantes que han sido entrevistadas en profundidad. Estas estudiantes son relevantes por sus trayectorias académicas (promedios de 9.5, 9, 6.5 y 6.5) y por la participación en todas las sesiones de recogida de datos. Además, los análisis previos a esta elección revelaron la significatividad y representatividad, muestra de la heterogeneidad que se puede compartir en el aula de Matemáticas (estructuras socioculturales).

Dimensión cultural

La cultura del aula de Matemáticas se describe en los grupos focales. En esto ellas expresan sus experiencias y emociones respecto a las distintas formas de enseñanza de los docentes que fueron titulares de esta asignatura en el primer y segundo grado de Secundaria.

El profesor que compartió el primer curso de Matemáticas ejercía un liderazgo basado en el *"dejar ser"*. Las actividades y tareas matemáticas que proponía seguían un patrón tradicional, basado en la transmisión de conocimientos, en ejemplificar en el pizarrón y proponer una serie de ejercicios o problemas para que las y los estudiantes los resolvieran. Sin embargo, en el segundo grado tuvieron una profesora que diseña actividades propias, problematiza situaciones frente al grupo, trabajaban en equipo, discutiendo y argumentando los resultados. Todos participaban de la validación del conocimiento, siendo la experiencia para las estudiantes más satisfactoria y produciéndose una mayor comprensión de los contenidos matemáticos.

Desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática y en relación con la identidad cultural de estas estudiantes los datos nos permiten afirmar que:

- Las actividades realizadas por el profesor en clase carecían de significado para las estudiantes. Los esfuerzos del profesor eran estériles por falta de receptores de sus discursos; salvo estudiantes que su motivación individual les mantenía atentas al trabajo matemático (incluidas Alejandra y Ana).
- Las actividades y dinámicas evocadas en los discursos de las estudiantes durante los grupos focales no nos permiten saber si los contenidos abordados por ambos profesores eran integradores de la visión de la Matemática como un constructo socio cultural. Sin embargo, por las observaciones se constató que la profesora desarrollaba actividades que crean la idea de una Matemática dinámica, donde se problematizaba y se posibilitaba que las alumnas construyeran caminos para resolver problemas matemáticos.

Dimensión social

Las cuatro estudiantes tienen actualmente 14 años de edad, tres son originarias de la ciudad de México, una es originaria de Michoacán, todas cursan tercero de Secundaria, en una escuela pública ubicada al sur de la capital mexicana.

Alejandra proviene de una familia integrada por ambos padres y un hermano mayor a ella, tiene promoción y acceso a la cultura, convive bajo un esquema de compresión y dialogo amoroso, es educada bajo principios de equidad. Se autodefine como *"bonita, simpática, estudiosa, trabajadora, inteligente, amable y buena"*.

Ana vive en un esquema tradicional donde la madre es cuidadora y proveedora de servicios y el padre proporciona los recursos económicos. Son originarios del estado de Michoacán. Tiene un hermano con retraso en el desarrollo. La madre dedica mucho tiempo a las necesidades sanitarias de este hijo. La distribución del trabajo domestico recae mayormente en la madre, el padre nunca participa de estas actividades, comparten pocos espacios recreativas o culturales, fomentan el orden y la responsabilidad. Su Autodefinición: *"alegre, nerviosa, miedosa, dicen que* *soy bonita, la mayoría de las veces tímida, soy buena en la escuela, porque me esfuerzo mucho, mis papás me dicen que yo debo ser el ejemplo para mi hermano".*

Adriana convive con los abuelos y su madre. La dinámica familiar no favorece el desarrollo afectivo, cultural y académico de la estudiante. Tiene poca promoción y acceso a la cultura, está bajo un esquema de conflicto constante, es educada con criterios distintos. Su autodefinición *"buena persona, alegre, bromista, simpática".*

Berenice: su familia la integran su padre, su madre y una hermana menor. La dinámica familiar no favorece el desarrollo afectivo, cultural y académico de esta estudiante, tiene poca promoción y acceso a la cultura. La presencia del padre es sólo los fines de semana por trabajar en otra ciudad. Esta estudiante cuida a su hermana, la madre se dedica al comercio informal, enuncia ser *"buena persona y desordenada".*

A continuación, siguiendo el contenido de las categorías establecidas en el apartado metodología describimos en estos casos los sentimientos y las actitudes que refuerzan la estructura de creencia y el origen de los mismos, dando cuerpo al afecto global, estrechamente ligado con la dimensión emocional.

En primer lugar, hacemos notar que en este estudio no se confirman tan claramente los resultados obtenidos en otras investigaciones que hacen referencia al marcador social y rendimiento académico inferior en las mujeres, manifestado en una baja autoconfianza. En nuestro caso, en dos de las cuatro estudiantes, estas dos variables no han sido definitorias, ya que ellas muestran una identidad matemática exitosa. Esta afirmación viene sostenida por los datos de la escala AMMEC y del cuestionario de asociación libre. Sin embargo, al contrastar estos datos con los discursos de los grupos focales y las entrevistas en profundidad, encontramos, huellas y rastros culturales que siguen marcando en lo profundo una condición de subordinación frente a las Matemáticas y frente a su condición de mujer.

En las entrevistas, tres de estas estudiantes reproducen discursos que la cultura escolar y social ha interiorizado y anclado respecto a las matemáticas y las mujeres como aprendices de Matemáticas. Adjudican una importancia superior a la matemática. Refrendan la creencia de que la Matemática escolar es difícil y que sólo los muy inteligentes pueden acceder a ella. Una de las estudiantes tiene la idea de ser exitosa porque se esfuerza mucho.

Dimensión afectiva

Para comprender la conformación de los afectos hacia las Matemáticas es necesario identificar los procesos cognitivos que tienen un carácter individual, y los procesos de interacción y contextualización que son de carácter social.

Escenarios simples de afecto local

Se dio seguimiento a las emociones expresadas por las estudiantes en diversos momentos del estudio y bajo diversas situaciones en las que están implicados los procesos cognitivos y las dimensiones emocionales de ellas. Las estudiantes sienten impotencia, malestar, incomodidad, aburrimiento en cursos de Matemáticas donde la metodología del profesor no cubre sus expectativas educativas y de convivencia. Los datos indican que las cuatro estudiantes han mejorado su actitud hacia las Matemáticas, sus creencias, valoraciones y sobre todo sus emociones con la profesora, el trabajo de esta docente generó interés, entusiasmo en las estudiantes. En algunos casos provocó menos rechazo hacia las Matemáticas.

A continuación, se explicita la interacción afecto-cognición que observamos en los diferentes instrumentos que reportamos.

Actitudes y autoconfianza

Las respuestas dadas a la escala AMMEC indican que la gran mayoría de las estudiantes tienden de lo neutral a lo positivo. Las actitudes y la autoconfianza de las estudiantes son más positivas cuando cursan 2° grado.

Tabla 1 Frecuencias de la Escala AMMEC el ciclo escolar 2009-2010 y 2010-2011

Puntos de la escala[1]	Actitudes hacia las Matemáticas 2009-2010	Actitudes hacia las Matemáticas 2010-2011	Auto-confianza para trabajar en Matemáticas 2009-2010	Auto-confianza para trabajar en Matemáticas 2010-2011
1	0	0	2	0
2	4	3	3	3
3	15	16	13	15
4	1	1	2	2

La correspondencia es: 0= totalmente en desacuerdo, 1= en desacuerdo; 2= indeciso; 3= de acuerdo; 4= totalmente de acuerdo.

En las asociaciones libres también se develan interacciones entre el afecto y la cognición. Al analizar la actitud y la autoconfianza de las estudiantes por área del conocimiento matemático observamos asociaciones positivas frente a problemas relacionados con probabilidad y azar, estadística y geometría, destacable el caso de geometría porque la literatura la reporta como una área de dificultad para las estudiantes (Ben-Chaim, Lappand, y Houang, 1985 y González, 2003). Es probable que este grupo haya desarrollado mejores habilidades para visualizar, analizar e interpretar los problemas planteados.

Escenarios complejos y expresión del afecto global

Esta categoría aglutina los escenarios donde los episodios emocionales producidos por resistencias o interrupciones en el aprendizaje trasciende un proceso cognitivo del problema matemático que está resolviendo. Se genera una reacción emocional que tiene que ver con el tipo de persona que es en su grupo sociocultural. Ésta es una posición afectiva que asume todas sus dimensiones y las integra, negociando en este fenómeno social su identidad.

En nuestro estudio hay diferentes momentos a señalar, momentos en los que se ponen en juego las identidades y se generan los conflictos cognitivos en relación a problemas matemáticos y, momentos o situaciones de aula que generan largas discusiones y debates para dejar definida la posición con que asumen los cuestionamientos. Se observó que las formas de reaccionar tienden a ser más favorable para todas las estudiantes cuando cambian de docente. Como hemos descrito, las estrategias didácticas de la profesora y su tendencia a legitimar a las estudiantes como comunicadores matemáticos conducen a interacciones en el aula que modifican la participación, la autopercepción y la autoconfianza como aprendices de Matemáticas.

Por último y para concluir indicar que los datos muestran que las tareas matemáticas influyen en la relación cognición y la afectividad lo que tiene consecuencias para la construcción de identidades matemáticas más sólidas. Se pone de relieve que en los casos en que la actividad matemática es empobrecida por las prácticas, sólo se produce cansancio y hastió, en cambio ambientes didácticos más dinámicos, pueden promover rutas positivas entre el afecto y la cognición**.** Se confirma que la construcción del conocimiento en el aula de Matemáticas no está limitada a la interacción del profesor y sus estudiantes, sino que abarca una serie de redes de interacción social que toca al entorno sociocultural de la clase. El estudio deja abierto la profundización en la estabilidad de las relaciones entre las variables marcadores sociales negativos y rendimiento académico y dimensiones de autoconfianza.

Referencias bibliográficas

Abreu, G. y Cline, T. (1998). Studying Social Representations of Mathematics Learning in Multiethnic Primary Schools: Work in Progress. *Papers on Social Representations,* 7 (1-2), 1-20.

Ben-Chain, D., Lappand, G. y Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analizing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics.*16, 389-409.

Burton, L. (1995). Moving towards a feminist epistemology of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 28, 275,291.

Cervini, R. (2004). Factores asociados al aprendizaje del lenguaje y las matemáticas en trece estados de México. *Cuadernos de investigación* 7, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, México. Recuperado 19 de enero de 2012 de <http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Cuadernos_investigacion/siete/Completo/factores13edos.pdf >.

Fennema, E. y Leder, G. (1990). *Mathematics and gender: influences on teachers and students,* Nueva York. Teachers College Press.

Gómez-Chacón, I. Ma. & Figueiral, L. (2007). Identité et facteur affectifs dans l´apprentissage des mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* IREM Strasbourg, 12, 117- 146.

Gómez-Chacón, I. Ma. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* España, Narcea.

Gonzalez, R.M. (2003). Diferencias de Género en el Desempeño matemático. *Educación Matemática*. 15 (2), 129-161.

INMUJERES -Instituto Nacional de las Mujeres- (2009). *Aspectos educativos y género. Modelos de intervención para el mejoramiento de las capacidades de aprendizaje en matemáticas.* http://www.inmujeres.gob.mx/index.php/biblioteca-digital/cuadernosgenero.

INMUJERES -Instituto Nacional de las Mujeres- (2010). *Actitudes y creencias acerca de las matemáticas. Intervención con perspectiva de género en escuelas secundarias.* Recuperado 12 enero 2012 de http://www.inmujeres.gob.mx/index.php/biblioteca-digital/cuadernosgenero

Ursini S., Sánchez G. y Orendai, M. (2004). Validación y Confiabilidad de una Escala de Actitudes hacia las Matemáticas y hacia las Matemáticas Enseñada con Computadora. *Educación Matemática*, 16 (3).

Vale, C. (2008). *Trends and factors concerning gender and mathematics in Australasia, ICME (2008), TSG 32: Gender and mathematics education*, Recuperado 10 de enero 2012 de http://tsg.icme11.org/document/get/169.

LAS NOCIONES DE LINEALIDAD Y PROMEDIACIÓN COMO ELEMENTOS ARTICULADORES EN LA DIDÁCTICA

Juan Alberto Acosta Hernández, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
acostah@uaeh.edu.mx, crondero6@hotmail.com, anataras@uaeh.edu.mx

Resumen. Se considera que las nociones matemáticas tienen su origen en las ideas germinales que han surgido en diferentes momentos histórico-epistemológicos de la matemática. En la didáctica de la matemática las nociones tienen un papel preponderante como elementos articuladores de los saberes matemáticos que están en juego. En este trabajo se dan algunas evidencias del comportamiento epistemológico acerca de dos nociones: la promediación y la linealidad, las cuales no se perciben en la escuela en su estatus metamatemático. Aparecen en prácticamente todas las etapas escolares y su conceptualización en los diferentes niveles educativos es abordada de forma desarticulada, lo que propicia aprendizajes poco significativos.

Palabras clave: epistemología, cognición, nociones, linealidad, promediación

Abstract. It is considered that the mathematical notions have their origin in the germinal ideas that have emerged in different historical-epistemology moments of mathematics. In the didactic of mathematics the notions have a role as articulating elements of mathematical knowledge at stake. In this paper we give some evidences about epistemological behavior of two notions: the averaging and linearity, which are not seen in the school metamathematical status. They appear in practically every school and conceptualization stages at different educational levels and they are addressed in a disarticulated way, which fosters poorly significative learnings.

Key words: epistemology, cognition, notions, linearity, averaging

Introducción

Las nociones matemáticas han surgido de las *ideas germinales* desde distintos momentos históricos de la propia matemática. Algunas de las nociones que se han identificado son: *Linealidad* (Acosta, 2011) *Promediación* (Rondero, 2001), *Variación* (Cantoral, 1990), *Acumulación* (Cordero, 1994), entre otras. Se consideran a tales nociones como elementos fundamentales en la construcción de saber matemático. En particular el propósito de este trabajo es mostrar y caracterizar algunos significados de las nociones de *linealidad* y *promediación*.

En Acosta, (2011) se considera que la noción de *linealidad,* es un elemento básico en la construcción de saber matemático, partiendo de su antecedente conceptual la noción de *proporcionalidad*.

Por otra parte, se han proporcionado evidencias de que el antecedente de la noción de *linealidad* es la idea germinal, *ratio mutabilitas constant*, la cual denota una tasa de variación constante, lo que otorga significado intrínseco a objetos y conceptos matemáticos como: proporción directa, recta, dependencia e independencia lineal, transformación lineal.

En Rondero (2001), se identifican y resaltan las ideas germinales que se denominan *Ponderatio* y *Æquilibrium*, cuya interacción ha resultado importante en la constitución del conocimiento fisicomatemático. Y precisamente son ideas germinales porque en su propia génesis el conocimiento propiamente físico ha recurrido para su constitución al estudio del equilibrio como fenómeno y en la equilibración como ejecución de la acción de equilibrar, mientras que la génesis del conocimiento matemático se basa para su constitución en el estudio del promedio, entendido como la matematización del equilibrio y a la promediación como ejecución de la acción de promediar.

Las nociones en cuestión cumplen la función de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada, al aportar elementos en general para su aprendizaje, lo cual es dado precisamente por sus características de ser nociones metamatemáticas.

Marco conceptual

El fundamento teórico está constituido por las interpretaciones acerca del término *noción* (un saber susceptible de ser enseñado en ámbito escolar), y de las *nociones didácticas* (Chevallard, 1997). Y desde una perspectiva teórica amplia, los ejes sobre los que ha girado la investigación son la Epistemología, la Cognición y la Didáctica. Se ha buscado, transitar dialécticamente entre estos tres ejes, es decir, uno a otro se han sustentado, complementado y apoyado, todo lo cual ha propiciado un enriquecimiento de la propia investigación y algunos de los resultados se muestran en este reporte.

Por otra parte, las nociones forman distintos estratos del funcionamiento del conocimiento matemático escolar las cuales se dividen en dos grupos (Chevallard, 1997): las nociones explícitas que están conformadas por las nociones matemáticas (Son objeto de estudio y evaluación en si mismas, además sirven como instrumento para el estudio de otros objetos.); y las nociones implícitas conformadas por las nociones paramatemáticas (son las que se utilizan conscientemente, esto es que son reconocidas y designadas como instrumentos para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en si mismas, y por lo tanto no son objetos de evaluación directa.) y las nociones protomatemáticas (Son las nociones que se emplean en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos.) (Martínez, 2002).

En este reporte de investigación se sostiene que las nociones de *Linealidad* y *Promediación* en la didáctica del nivel superior no son explícitas desde los distintos estadios según Chevallard (1997) acordes al papel que juegan en ambiente escolar, a través de sus diferentes representaciones. Como cuando se aborda el tema de la recta en el plano en bachillerato, generalmente no se toman en cuenta la noción de proporción directa, ni posteriormente para el concepto de *linealidad*. Por otra parte cuando se estudia el Teorema Fundamental del Cálculo Integral en los primeros semestres de algunas licenciaturas, a menudo no se hace explícita la *promediación*.

La forma científica de conducir este trabajo, está sustentada en el enfoque sistémico, además de tomar en cuenta, como elemento metodológico, el *rescate epistemológico de los significados* (recuperación de significados que subyacen al conocimiento, lo cual se realiza en diferentes momentos de la evolución del mismo (Acosta, 2011)) de la noción de linealidad.

Resignificación de la noción de Linealidad

La proporción directa se empleaba con frecuencia (Filloy, 1998) en las antiguas civilizaciones, alcanzando un gran desarrollo de la habilidad operatoria. Ya en las culturas: griega, babilónica y egipcia, afrontaban cierto tipo de problemas de la vida cotidiana, desde la distribución de una herencia, hasta el cálculo de interés compuesto. La aritmética babilónica funcionaba para hacer cálculos astronómicos, mercantiles, y mediciones de áreas y volúmenes; en tales estimaciones.

En la cultura egipcia, no sólo se resuelven problemas aritméticos, sino se dieron elementos de solución a ecuaciones lineales, que escritas en simbología moderna son de la forma $x+ax=b$ o $x+ax+bx=c$. En el *Papiro de Rhind,* se muestra la solución de este tipo de ecuaciones, empleando un método que en nuestros días se conoce como el *método de la falsa posición* (Boyer, 1991).

En *Los Elementos* de Euclides, escrito hacia el año 300 a. C., los postulados, *Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto y toda recta se puede prolongar indefinidamente.* Dichas proposiciones se refieren a la recta, no sólo en el sentido de que por dos puntos pasa una recta, sino además de que ésta es única.

En el primer postulado del primer libro, *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes, da la definición más empleada de la recta hasta nuestros días: *La recta es la línea más corta que une sus puntos extremos.*

Hacia el año 370 a. C. Eudoxio de Cnido (408? – 355?) profundizando en las ideas de Anaxágoras, define indirectamente la igualdad de dos razones *a: b* y *c: d,* lo que en la actualidad es una proporción (Hofmann, 2002). Este hecho importante es un antecedente epistemológico, y elemento articulador para con la ecuación de la recta *y= mx*, donde por supuesto está implícita la noción de linealidad, cuya perspectiva geométrica en el plano se inicia desde los trabajos de Descartes (1596 – 1650), y la cual en la actualidad se estudia en el nivel medio superior. Descartes determina la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las *x*. Propone la forma ***b x = a y*** para la recta que pasa por el origen, y considera *a x + b y = c* como la ecuación de una recta en su forma general (Hofmann, 2002*). La linealidad* adopta representaciones analítico-geométricas, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico.

El nacimiento incipiente del Álgebra lineal se propicia desde la intención del análisis de la solución de sistemas de ecuaciones lineales por parte de Euler y Cramer durante el siglo XVIII. Posteriormente se fueron desarrollando los conceptos como matrices, determinantes, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales y espacios vectoriales. Sin embargo en este desarrollo histórico epistemológico del Álgebra Lineal, no es manifiesta la importancia conceptual y articuladora de la proporcionalidad cuando se estudia la ecuación de la recta en R^2. Una circunstancia similar se presenta cuando se analiza la noción de linealidad en licenciatura lo cual ha repercutido en los ambientes didácticos modernos.

Usualmente la enseñanza de la recta se aborda en bachillerato estudiándola a través de la ecuación *y=mx+b*, donde *m* es la pendiente y *b* la ordenada al origen, llamándola función lineal. Tales saberes representan un obstáculo posterior, en licenciatura, ya que cuando *b≠0* no es una transformación lineal de acuerdo a la definición: *L(a**u**+b**v**)=aL(**u**)+bL(**v**)*, siendo que según Golubitsky y Dellnitz (2001) sostienen que: *la idea central en álgebra lineal es la linealidad*. La forma *ay=bx*, la cual es herencia epistemológica de la igualdad de dos razones *a:b* como *x:y* planteada por los griegos de la antigüedad, representa una transformación lineal, sin embargo *la ecuación pendiente ordenada al origen* no lo es (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008). Ello no se aclara en el nivel medio superior, en el sentido del estatus didáctico que tiene en la escena escolar, ni por ser un antecedente histórico epistemológico y articulador, y como consecuencia, esta vaguedad sobrevive hasta los cursos iniciales de licenciatura.

En el tema de dependencia lineal no es común que sea abordado, partiendo de la proporcionalidad, siendo que juega un papel protomatemático, pero podría ser paramatemático. En la escuela se menciona: *Dos vectores v_1 y v_2 definidos en R^n, con $n > 1$, se dice que son linealmente dependientes sí y sólo si la combinación lineal $c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} = 0$, se cumple cuando $c_1 \neq 0$ ó $c_2 \neq 0$. Un aspecto didáctico rescatable es el que refiere a cómo se relacionan conceptualmente la dependencia lineal y la proporcionalidad directa. Se puede ver de la definición anterior, que se cumplen las proporcionalidades directas, $\overrightarrow{v_1} = -(\frac{c_2}{c_1})\overrightarrow{v_2}$, siempre y cuando $c_1 \neq 0$, o* *bien* $\overrightarrow{v_2} = -(\frac{c_1}{c_2})\overrightarrow{v_1}$, *si* $c_2 \neq 0$ (Rondero, Tarasenko, Acosta, 2009). El que dos vectores sean linealmente dependientes implica que geométricamente sean paralelos, y ello está relacionado conceptualmente con la idea de paralelismo entre rectas en el plano cartesiano. Tales significados tendrían que ser resaltados en la didáctica para una articulación apropiada de saberes en el curso inicial Álgebra Lineal. Sin embargo en la didáctica escolar no se agregan dichos elementos, privilegiando lo algorítmico y memorístico.

La noción de Promediación

Ahora por lo que respecta a la noción de *promediación*, uno de los saberes matemáticos que tiene un papel relevante en la construcción del conocimiento matemático es precisamente el de la media aritmética, que como se sabe es una de las formas de promedio más conocida. Existen otros promedios como la media geométrica y la media armónica, entre otros muchos, cada uno de los cuales requiere de estudio aparte. En este trabajo se muestra cómo es que la media aritmética resulta tener un estatus protomatemático al abordar otros temas, y por tanto fungir como un eje de articulación conceptual entre las diferentes asignaturas de matemáticas que se enseñan en secundaria y bachillerato, aunque también se puede hacer evidente su articulación con otros cursos de matemáticas superiores como el Análisis Matemático y la Estadística.

Es por tanto un propósito de este trabajo el mostrar algunos contextos metamatemáticos en los que aparece la media aritmética en la secundaria. En tal caso se muestra su evidente participación tanto en el cálculo de áreas de triángulos y trapecios, como en cálculo de integrales definidas de *f(x)=x*. Respecto al contexto de lo numérico, la media aritmética aparece en el cálculo de sumas de progresiones aritméticas y en el cálculo de raíces, como: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, entre otras, usando el método de Herón de Alejandría. Asimismo en el cálculo numérico de integrales definidas de funciones de la forma $f(x) = x^k$, con *k=1, 2, 3, …, n*.. Lo cual está referido a un *estatus protomatemático y paramatemático*.

En lo que corresponde a la estadística descriptiva, la media aritmética (paramatemático) tiene participación como una medida de tendencia central y en la medición de errores. Mientras que en la estadística inferencial su participación relevante es el cálculo de valores esperados y en la varianza de variables aleatorias con funciones de distribución de tipo discreto o continuo. Es de remarcarse que la media aritmética vista como un promedio en lo discreto o en lo continuo, es un elemento de articulación entre las partes descriptiva e inferencial de la estadística.

Sobre la articulación de saberes matemáticos

La articulación de saberes permite religar lo que se presenta en forma disjunta, lo que parece no tener relación por omisión, obviedad o ignorancia. Posibilita presentar los saberes para su aprendizaje en forma coherente y consistente, además de explicitar las relaciones conceptuales entre ellos. Uno de los sustentos de la articulación es precisamente el que corresponde a un rescate epistemológico para la didáctica, de ciertos saberes matemáticos, como la media aritmética y la proporción directa, lo que puede permitir el diseño de tareas de aprendizaje. Además posibilita el dar elementos para el diseño curricular y por supuesto para la formación de profesores con una visión de pensamiento amplia y consistente.

La articulación de saberes conlleva diseñar propuestas didácticas innovadoras que permitan atender algunos de los problemas que se desprenden del fenómeno de enseñanza no atendido y es el que corresponde a la presentación desarticulada de los saberes, cuando por ejemplo se presenta la media como una simple fórmula, $x=\frac{a+b}{2}$, para el caso de dos números reales positivos, *a, b*, sin atender a su desarrollo histórico, sus significados y representaciones según sea su estatus protomatemático o paramatemático en la didáctica. Además de no atender a las diferentes formas en que este concepto se relaciona con muchos otros en la matemática y a su trascendencia epistemológica en la construcción de conocimiento no sólo matemático.

La participación epistemológica de los promedios

Los fenómenos naturales tienen un comportamiento que desde la perspectiva de lo variacional siempre los lleva a transitar al menos una vez por lo que suele llamarse *promedio*, etimológicamente interpretado como *pro*, hacia y el *medieu*, esto es un valor intermedio entre dos o más valores de aquello que varía.

Como suele ocurrir con diferentes conceptos, el hombre ha usado el promedio en sus construcciones, en sus agrimensuras y de muchas otras formas, mucho antes de aprender a calcularlo. Millones de años después Arquímedes aprende a calcular el centro de gravedad de diferentes cuerpos geométricos, y todavía más, aprende a estudiar el equilibrio de los cuerpos. Es decir, Arquímedes tomó como un elemento epistemológico fundamental en la construcción de su conocimiento al cálculo del centro de gravedad que es una forma de promedio.

Ahora bien, la noción fundamental que sustenta al promedio la denominamos *promediación*, en el sentido de ella se desprenden todas las diferentes formas de promedio, en particular la media aritmética. Una consideración interesante de carácter epistemológico, se da cuando nos preguntamos para dos valores dados, a >0 y b>0, qué miden cada una de las medias aritmética, $x = \frac{a+b}{2}$, geométrica $G = \sqrt{ab}$, y armónica $H = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$, pero además qué las distingue y cómo se relacionan estos tres diferentes tipos de promedio.

Sin embargo, "el mundo" de los promedios no queda restringido a los tres mencionados, se amplía considerablemente en diferentes contextos metamatemáticos, al grado tal que se tienen métodos de cálculo en donde se combinan dos o más diferentes tipos de promedios, dos de los más conocidos son el aritmético-armónico y el geométrico armónico. El llamado método babilónico es de tipo aritmético-armónico y se usa para calcular raíces de números enteros positivos como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

Desde la participación de Arquímedes, se hace un rescate epistemológico *del exceso y el defecto,* entendido de la siguiente forma, dados dos números reales a>0 y b>0, si se quiere encontrar un valor intermedio que equipare o equilibre a estos dos valores dado, entonces podemos calcular el exceso dado como x-a, el cual es un valor positivo y el defecto, x-b, que es de igual valor pero negativo, de manera que: $x - a + x - b = 0$,

Conclusiones y reflexiones

La caracterización de las ideas germinales, siendo estas consideradas como categorías teóricas a las que se recurre como elemento explicativo de orden eminentemente epistemológico, tienen en sí mismas la cualidad de que a través de ellas se generan teorías completas, para lo cual se van estructurando definiciones, propiedades, teoremas, principios y todos aquellos resultados previos a los que haya lugar. Es posible resaltar algunas de las aportaciones hechas acerca de la cognición de las ideas germinales de: *Ponderatio* y *Ratio Mutabilitas Constant* dado que se ha observado que efectivamente son ideas muy cercanas a la intuición de los estudiantes. Precisamente son ideas germinales porque en su propia génesis histórica el conocimiento propiamente ha recurrido para su constitución el desarrollo de las ideas desde contextos surgidos de necesidades específicas.

Las nociones de linealidad y promediación son elementos de articulación en la matemática escolar y se puede apreciar su característica de transversalidad conceptual de ambas, entre la matemática elemental y la matemática avanzada, en el entendido de que estas nociones adoptan distintos estadios didácticos, que se expresan en diferentes objetos matemáticos, como en el caso de la linealidad las propias ecuaciones de la recta, y de la promediación la media aritmética, entre otros promedios que a su vez aportan nuevos significados a las mismas.

Un obstáculo importante que tiene repercusión en la didáctica, es por la desarticulación manifiesta entre la igualdad de dos razones *a: b* y *c: d* con la recta que pasa por el origen, *bx* =

ay, y con la función lineal *f(x)*= *ax* +*b*. Se cree que esto sucede porque la noción de linealidad presentan distintos significados que se entrevén por las ecuaciones.

Es de resaltarse el hecho de que los significados de la noción de linealidad rescatados de las ecuaciones de la recta en el plano, representan un andamiaje fundamental de articulación conceptual en la matemática escolar y se distingue su importancia transversal entre la matemática elemental y la matemática avanzada, esto es debido a la condición metamatemática de la noción de *linealidad*. En tal caso, la adecuada instalación de los elementos conceptuales antes señalados, propiciaría un aprendizaje matemático bien articulado con diversos conceptos del Álgebra Lineal.

Por lo que se refiere a la noción de promediación es conveniente resaltar su papel epistemológico en la construcción del conocimiento matemático referido a los diferentes tipos de promedio, cuya aparición se da en todo el currículum escolar, y lo cual debe ser un elemento en los aprendizajes de los estudiantes y en la formación de profesores.

Se hace un rescate epistemológico de la trascendencia que tienen las ideas germinales: *Ponderatio* y *Ratio Mutabilitas Constant* para la didáctica, dado carácter metamatemático, manifiesto en transversalidad de los saberes en el currículum escolar, sin embargo, esto no hubiera sido posible sin antes haber ejercido una vigilancia epistemológica de los saberes, entendida en el sentido de seguirle la pista a la modificación de los mismos. Se cree conveniente incorporar las ideas germinales a la didáctica de las matemáticas en general y en particular a la didáctica de la matemática.

Referencias bibliográficas

Acosta, J. (2011). *Análisis epistemológico, cognitivo y sociocultural de la noción de linealidad.* Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2008). Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. *Memoria HPM*, 301-308. México: CINVESTAV-IPN.

Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2010). La resignificación de la noción de linealidad. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 65-73. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Boyer, C. (1991). *A History of Mathematics*. New York, USA: John Wiley.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de la Funciones Analíticas. Simbiosis y*

Predación entre las nociones de "el Praediciere y lo Analítico". Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Editorial* Aique. Buenos Aires: Argentina.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados. Un estudio del discurso matemático escolar,* Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Filloy, E. (1998). *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Golubitsky, M. y Dellnitz M. B (2001). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de MATLAB.* México: Thomson Editores.

Hofmann, J. (2002). *Historia de la matemática.* México: Limusa.

Kolman, B. y Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal.* (8ª ed.). México: PEARSON Educación.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 5, (Núm. 1),* 45-78. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rondero, C. (2001). *Epistemología y cognición de las ideas germinales Ponderatio y Aequilbrium en la constitución del saber físico matemático.* Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Rondero, C., Tarasenko, A. y Acosta, J. (2009). Algunas incongruencias conceptuales sobre la noción de linealidad. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 535-543. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* (2ª ed.) [La matemática en sus personajes]. España: NIVOLA.

LENGUAJE MATEMÁTICO: ANÁLISIS DIAGNÓSTICO EN ESTUDIANTES QUE INGRESAN A LA UNIVERSIDAD

Graciela Rey, Rodolfo D'Andrea, Patricia Sastre Vázquez
Facultad de Agronomía Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires Argentina
Facultad de Química e Ingeniería Universidad Católica Argentina
psastre@faa.unicen.edu.ar

Resumen. El presente trabajo forma parte de la primera etapa del Proyecto de Investigación "Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería" realizado en forma conjunta por la Facultad de Agronomía UNCPBA (Azul-Argentina), y la Facultad de Química e Ingeniería UCA (Rosario-Argentina). Aquí se presentan y analizan los resultados de una encuesta piloto en pos de caracterizar las dificultades y obstáculos para la comprensión y traducción entre los registros de expresiones verbales o escritas (lenguaje proposicional) y su representación en lenguaje algebraico (uso de símbolos matemáticos) en los estudiantes que ingresan a la Universidad.

Palabras clave: lenguaje matemático, lenguaje natural, comprensión, dificultades

Abstract. This paper is part of the first stage of the research project "Analysis of mathematical language and its influence on the processes of validation Engineering college students" held jointly by the Faculty of Agronomy UNCPBA (Azul, Argentina), and Faculty of Chemistry and Engineering UCA Campus Rosario (Argentina). Here we present and analyze the results of a pilot survey towards characterizing the difficulties and obstacles to understanding and translation between records of verbal or written (propositional language) and their representation in algebraic language (mathematical symbols) in the students entering the University.

Key words: mathematical language, natural language, understanding, difficulties

Introducción

El presente trabajo relata una etapa del Proyecto de Investigación "Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería" realizado en forma conjunta por la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Azul, Argentina), y la Facultad de Química e Ingeniería de la Universidad Católica Argentina, Campus Rosario (Argentina). El objetivo de este Proyecto está ligado a la caracterización de las dificultades y obstáculos en la comprensión de los lenguajes matemático y natural, y su influencia en los procesos de validación, en los estudiantes que ingresan a la Universidad, pretendiéndose además la generación de propuestas alternativas de solución. En ese marco, con el presente trabajo se busca determinar el nivel de comprensión que sobre los símbolos y signos matemáticos tienen los estudiantes en el momento de ingresar a la Universidad y establecer las dificultades que tienen al leer una expresión matemática, y asociadas las representaciones de un concepto, los significados de los símbolos y signos matemáticos. Es de destacar la importancia que representa el lenguaje para la educación en general y, más específicamente en el área de Matemática, debido a que la comprensión del mismo le permite al estudiante entender e interpretar el código utilizado por el docente, en el desarrollo de una clase, en un texto o cualquier otro material educativo. El lenguaje, que le es propio a la Ciencia Matemática, se manifiesta como un instrumento esencial en la formación de estructuras conceptuales y desarrollos de algoritmos. Éste no sólo cumple la función comunicativa cuya única finalidad es llevar a buen término el entendimiento entre profesor y estudiante, sino que debe pensarse como un entorno de análisis y optimización de la actividad matemática.

El lenguaje que utiliza Matemática se presenta de modos diferentes, es decir como un Lenguaje Coloquial con el que puede expresarse en forma oral o escrita; un Lenguaje Simbólico que ofrece la ventaja de ser más sintético y más claro para las demostraciones y razonamientos y como un Lenguaje gráfico que sirve para aclarar o interpretar conceptos o proposiciones a través de la visualización. Debe destacarse que en los tres casos se trata del mismo lenguaje, pero expresado de modo diferente. Pero la clave del lenguaje matemático es el lenguaje simbólico que es la esencia de la Matemática misma, aunque a diferencia de los otros dos requiere específicamente que quién se inicie en el mismo deba recorrer un largo y complejo camino hacia la abstracción. (D´Andrea, Curia y Lavalle, 2012). El pensamiento matemático requiere entonces del lenguaje simbólico esencialmente en conjugación con el visual y el coloquial permitiendo la decodificación de los mismos en la comprensión, generando así el proceso de abstracción. Este permite concentrarse en ciertas características de los objetos, además de que evita la necesidad de guardar continuamente otras en su mente. Desde el punto de vista de la comunicación, la característica más importante de la Matemática es su lenguaje riguroso, el cual está ligado al hecho de que sus conceptos son entes abstractos cuyas representaciones están determinadas tanto por la semiótica como por la noética (Duval, 1998) y por lo tanto las relaciones de los símbolos y signos dependen del dominio conceptual en el que se encuentren. Las expresiones matemáticas por sencillas que sean, son registros semióticos que determinan significados (semántica), sin importar la forma en la que están representados (sintaxis). Éstos significados están mediados por conceptos fundamentales que son la base de la construcción del saber matemático.

Metodología

Para obtener la información necesaria, se aplicó una encuesta-diagnóstico, sobre el dominio del lenguaje algebraico que consistió en un cuestionario, donde uno de los objetivos fue conocer los antecedentes académicos de los estudiantes inscriptos, así como la habilidad para extrapolar expresiones verbales ordinarias al lenguaje algebraico. El test empleado está inspirado en la propuesta de Ortega y Ortega (2001) con las modificaciones y adaptaciones que se consideraron necesarias para esta investigación. Se aplicó a un total de 171 estudiantes ingresantes, de los cuales 71 pertenecen a UCA y 100 a UNCPBA.

La primera parte de la encuesta recolectó información sobre: datos personales del estudiante, la calidad de la enseñanza matemática recibida, grado de utilidad que le asigna a la Matemática, y su predisposición y gusto por la misma. En la segunda parte, se averiguó sobre cuestiones concretas relativas al conocimiento previo que el estudiante conoce acerca del lenguaje matemático: el grado de conocimiento del significado de los símbolos más usuales y de los enunciados que suelen aparecer en textos matemáticos.

Las preguntas de la segunda parte estaban referidas al:

1) Conocimiento de símbolos matemáticos: Se solicitó a los estudiantes que indicaran el significado de diez símbolos matemáticos o logogramas (Pimm, 1990): $\forall \exists \in \subset \notin \Rightarrow \Leftarrow \sum \cup \cap$ Además se les preguntó si éstos les resultaban familiares y si alguna vez los habían utilizado.
2) Conocimiento de las diferencias entre distintas definiciones matemáticas: Se pidió relacionar diez conceptos: definición, teorema, hipótesis, contraejemplo, tesis, proposición, demostración, ejemplo, axioma silogismo, con la descripción más adecuada.
3) Escribir en lenguaje natural una expresión matemática dada.
4) Escribir en lenguaje matemático una expresión, relacionada con conceptos matemáticos, y proporcionada en lenguaje natural.

El procedimiento de categorización de las respuestas consistió en clasificar las respuestas en tres categorías: Mal, Regular y Bien, para la segunda parte de la encuesta y en seis categorías para de los ítems de la primera parte. Estas categorías se presentan porcentualmente en tablas y en forma de gráfica. Se destacan que los porcentajes de estudiantes que no respondieron fueron nulos en todos los casos.

Resultados

1) Resultados sobre la calidad de la enseñanza matemática recibida en el nivel educativo anterior, gusto por la Matemática, interés y dificultad en su aprendizaje y consideración de su utilidad:

a) Algo más de la mitad de los estudiantes encuestados considera que la enseñanza matemática recibida en el nivel educativo anterior ha sido buena.
b) Solo una minoría de los encuestados manifiesta sentir poco o nada de gusto por la Matemática.

c) Más de la mitad de los estudiantes refiere tener bastante interés por el estudio de la Matemática. Para ningún estudiante, resulta "nada interesante".

d) Ningún estudiante considera a la Matemática como muy difícil; la mayoría de las respuestas se distribuyen entre los niveles intermedios de dificultad.

e) Entre los estudiantes que creen que la Matemática es muy o bastante útil, se supera el 90% de encuestados.

2) Resultados sobre grado de conocimiento de los diferentes tipos de símbolos y enunciados que conforman el lenguaje matemático, considerados éstos como elementos independientes (Gráficos Nº 1, Nº 2 y Nº 3)

f) Los símbolos que resultaron más familiares, entre los presentados, son: "pertenece" y "no pertenece", siendo a la vez los más utilizados junto a: "unión" e "intersección".

g) Los mismos símbolos son, además, los que obtienen mayor porcentaje respecto al conocimiento de su significado y los que han resultado con mayor cantidad de interpretaciones correctas sobre sus significados.

h) La mayoría de los encuestados no fue capaz de reconocer las definiciones de los conceptos presentados.

i) El concepto menos reconocido es el de "demostración".

j) Resulta llamativo el relativamente bajo porcentaje obtenido en el reconocimiento del concepto de "ejemplo", partiendo del supuesto de que se trata de un término que resulta familiar y es utilizado en la vida cotidiana.

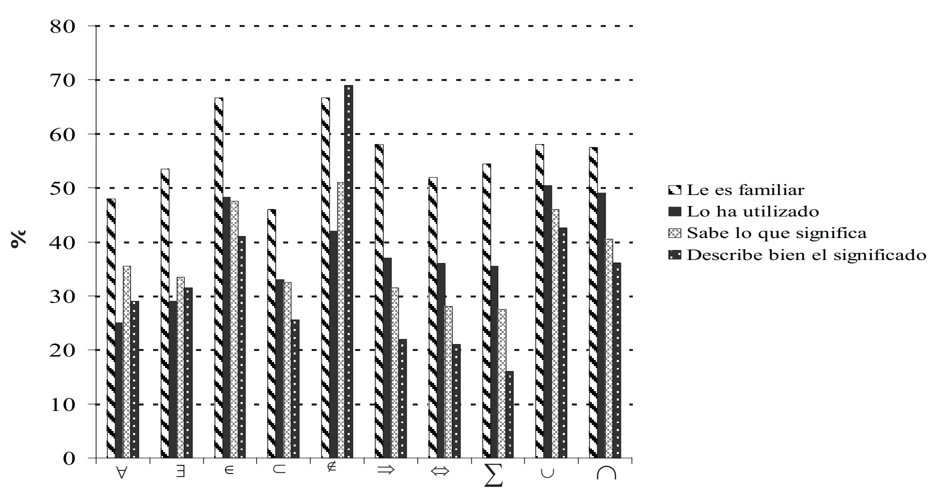


Gráfico N° 1: Algunos resultados obtenidos

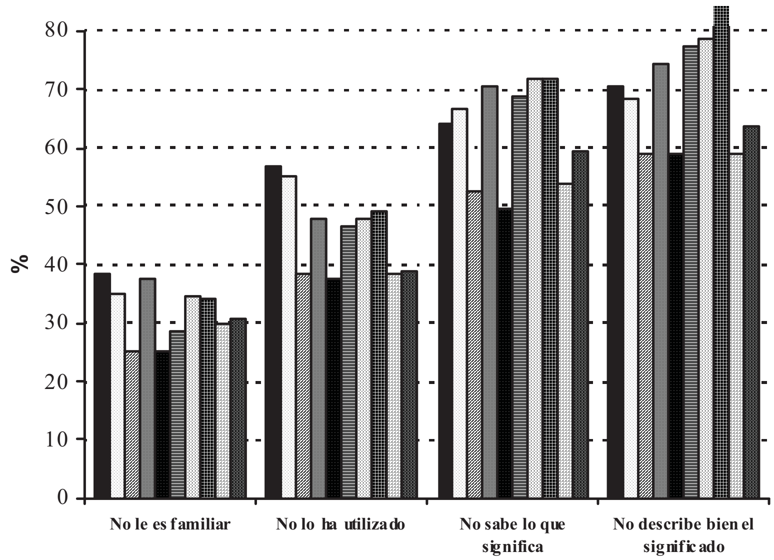


Gráfico Nº 2: Grado de conocimiento de algunos símbolos matemáticos

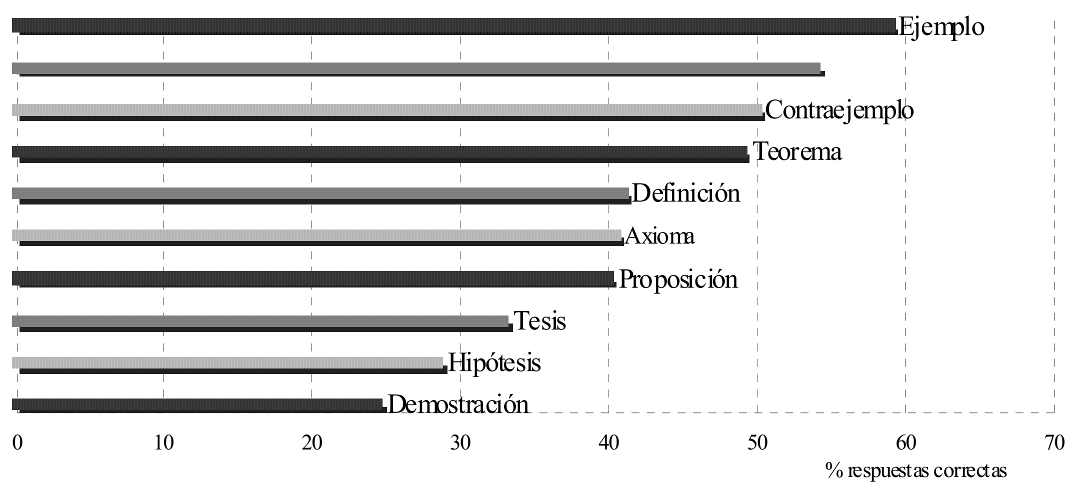


Gráfico N°3: Conceptos epistemológicos que hacen a la deducción matemática

3) *Resultados sobre la interpretación de expresiones simbólicas (comprensión y explicación de su significado) (Gráficos Nº 4, Nº 5, Nº 6, Nº 7 y Nº 8)*

k) La mayoría de los estudiantes ha sido incapaz de realizar alguna interpretación de las expresiones matemáticas presentadas, sean éstas correctas o no.

l) Casi la totalidad de los encuestados no fue capaz de presentar ejemplos apropiados.

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 12$$

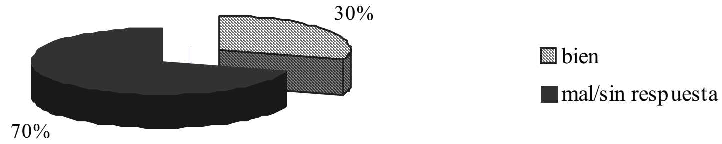


Gráfico Nº 4: Resultados propuesta sumatoria

$$\exists\, x \in R \,/\, (x-1)(x-2)(x-3)(x^5-9)=0$$

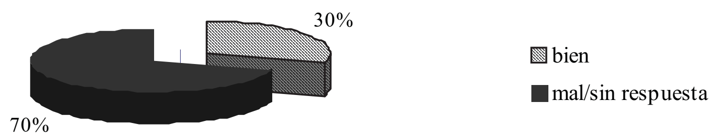


Gráfico Nº 5

$$\forall\, x \in R : \forall\, y \in R : x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$

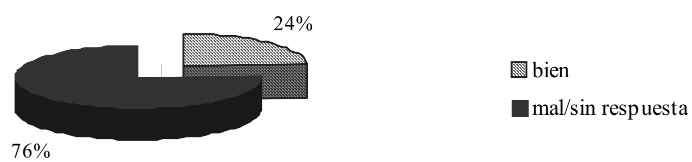


Gráfico Nº 6

$$R = Q \cup Z$$

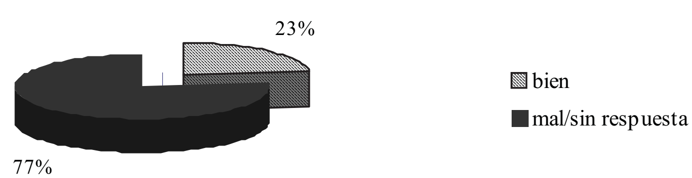


Gráfico Nº 7

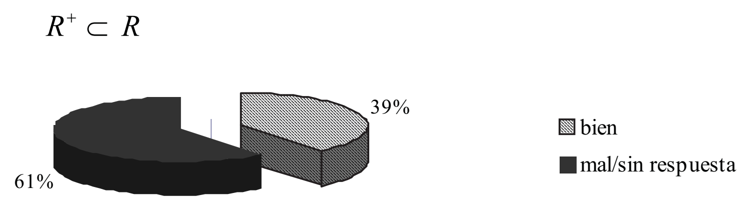


Gráfico Nº 8

4) Resultados sobre conocimientos referidos a la traducción de expresiones que involucran conceptos matemáticos, del lenguaje natural o coloquial al lenguaje simbólico.

m) Una amplia mayoría de los alumnos encuestados (90% en UCA y 75% en UNCPBA) no fue capaz de realizar las traducciones del lenguaje natural al simbólico.

n) El mejor desempeño, aunque con porcentajes exiguos, se obtuvo en los casos en los que intervenían conceptos derivados de la teoría de conjuntos (ejemplo: "Dos conjuntos A y B son iguales si y solo si el primer conjunto está incluido en el primero y el segundo conjunto está incluido en el primero.")

Conclusiones

En términos generales, la mayoría de los estudiantes ingresantes expresa su conformidad respecto a la enseñanza matemática recibida previamente, reconociendo la utilidad de esta ciencia y manifestando interés por ella, considerándola con un nivel de dificultad intermedio. Con los resultados de esta encuesta piloto es posible confirmar un escaso nivel de comprensión de los símbolos matemáticos que tienen los estudiantes en el momento de ingresar a la Universidad. Se observa una alta ausencia de respuestas por parte de los estudiantes en las actividades referidas a la identificación de conceptos matemáticos, interpretación de expresiones simbólicas y traducciones y articulaciones entre distintos lenguajes (natural y simbólico). Esta realidad dificulta la posibilidad de arribar a conclusiones que permitan establecer y caracterizar las falencias que tienen los estudiantes respecto de estas capacidades. A través de los resultados parciales obtenidos en el presente trabajo se concluye sobre la necesidad de que los estudiantes logren superar las dificultades descriptas, en pos de un desempeño exitoso en el tránsito de los estudios universitarios. En síntesis, los resultados indican que los estudiantes desconocen los principales elementos del lenguaje matemático, causando esto numerosos errores de construcción y de interpretación. Estos no pueden asociar los conceptos con sus definiciones y menos aún pueden dar ejemplos, generando dificultades a la hora de resolver desde simples ejercicios de aplicación de algoritmos, pasando por la resolución de problemas y la comprensión y reproducción del sustento teórico que permite el desarrollo de la práctica. Enfocando concretamente en la resolución de los problemas, esta depende en principio de la comprensión del enunciado y luego de la conversión de las informaciones que se presentan: se debe pasar de una descripción discursiva de los objetos a una escritura simbólica (numérica o literal) de sus relaciones, es decir, a un modelo simbólico de la situación. No debe pensarse que este pasaje es automático y directo y que el estudiante, incluso pudiendo trabajar eficazmente en los registros de partida y de llegada efectuando tratamientos de las representaciones, por separado, pueda lograr la conversión entre registros. Una parte importante de las dificultades de los estudiantes ante la resolución de problemas se debe a que estos no pueden dar 'el primer paso', el que se considera básico y fundamental, que es la lectura comprensiva del enunciado del problema, su interpretación acabada, que es la base sobre la cual deberá construirse la posterior resolución, que también puede presentar problemas, pero de otro tipo. (Sastre Vázquez, Boubée y Delorenzi, 2008). Considerando a la Matemática como una manifestación semiótica entonces sus elementos generan significados sintácticos y semánticos en un lenguaje simbólico, el cual podría considerarse equivalente al lenguaje natural de un individuo. (Radford, 1997). Sin embargo los estudiantes no transponen automáticamente el lenguaje natural que utilizan habitualmente al sistema de escritura matemática. La adecuada utilización del lenguaje es un camino fundamental para el aprendizaje de la Ciencia Matemática. El estudiante no dimensiona la importancia que tiene este, que es equiparable a la acción de pensar. Y precisamente en esta falta de dimensionamiento, radica la cuestión, ya que el entorno no le permite al estudiante diferenciar la comunicación que se produce a través del lenguaje natural, de la comunicación que le es propia de la Matemática a través de su propio lenguaje código, de forma entonces que la comprensión de los problemas pasa por adecuada utilización del lenguaje específico de esta Ciencia. (Mariscal Antezana, 2003)

Referencias bibliográficas

D´Andrea, R.E., Curia, L. y Lavalle, L. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Mariscal Antezana, G. (2003). *Una aproximación a la Didáctica en el Proceso del Aprendizaje de las Matemáticas.* Disponible en http://www.revistaciencias.com/

Ortega. J. F. y Ortega J. A. (2001). Matemáticas: ¿un problema de lenguaje? *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA, Rect@,* 9 (1), 2-12.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ediciones Morata, S. L.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the teaching of Mathematics: *Toward a Socio-Cultural History of Mathematics. For the learning of Mathematics,*17 (1), 26-33.

Sastre Vázquez, P., Boubée, C., Rey, G. y Delorenzi, O. (2008). La comprensión: proceso lingüístico y matemático. *Revista Iberoamericana de Educación* 46, 8–15.

PERCEPÇÕES DOS ALUNOS DO 1º ANO DA LICENCIATURA EM ENSINO DE MATEMÁTICA NA BEIRA – MOÇAMBIQUE – DA PROVA E DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA PLANA

Jacinto Ordem, Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo Brasil
jc.ordem@gmail.com, saddoag@gmail.com

Resumo. Apresentamos neste trabalho resultados de uma pesquisa de natureza diagnóstica quanto ao desempenho dos estudantes do 1º ano da Licenciatura em Ensino de Matemática na Beira – Moçambique. A coleta de dados aconteceu no âmbito das aulas da disciplina "Geometria Plana". A pesquisa decorreu em duas fases. As reflexões tecidas fundamentam-se nos Paradigmas Geométricos de Houdement e Kuzniak (2003) e abordagem semiótica de Duval (2004). Os resultados mostram que esses alunos têm dificuldades em organizar uma estrutura dedutiva e usar argumentos matemáticos para validar propriedades geométricas, enquadrando-se, desse modo, na Geomtria Natural.

Palavras chave: provas e demonstrações, futuros profesores, geometria plana

Abstract. This paper presents results of a survey regarding the nature diagnostic performance of students of 1st year of Bachelor in Mathematics Teaching in Beira - Mozambique. Data collection took place within the school discipline "Plane Geometry". The study was conducted in two phases. The reflections made are based on the paradigms' Geometric of Houdement and Kuzniak (2003) and semiotic approach of Duval (2004). The results show that these students have difficulties in organizing a deductive structure and use mathematical arguments to validate geometric properties, therefore, find that they fit in Natural Geometry.

Key words: proofs and proving, prospective teachers, plane geometry

Introdução

A finalidade do presente artigo é apresentar os resultados preliminares de um levantamento diagnóstico do desempenho dos alunos do primeiro ano do curso de Licenciatura em Ensino de Matemática na Universidade Pedagógica – na Delegação da Beira – em Moçambique na produção de demonstrações em geometria do ensino Básico, no âmbito de um projeto de estudo para o doutorado em Educação Matemática.

Nos últimos 30 anos, há um grande esforço de investigação em educação matemática na área de justificação e prova, desde a construção da prova, a natureza epistemológica da prova, até sua implementação em sala de aula, etc., (Weber & Ramos, 2011, p. 329). Contudo, alguns pesquisadores afirmam que dentro da comunidade não há um consenso sobre o que constitui prova, ou o que deveria ser objeto de pesquisa acerca de provas (Balacheff, 2008), apontando como testemunho os diversos enfoques nas pesquisas: uns enfatizam os tipos de raciocínios utilizados em argumentos matemáticos, outros a percepção dos alunos sobre a prova, outros examinam as funções da prova na matemática e, ainda, o uso indiferenciado dos termos prova e demonstração. Neste artigo diferenciamos os termos prova e demonstrção segundo Balacheff (1987), isto é,

> Chama-se *prova* uma explicação aceita por uma certa comunidade em um dado momento. Essa decissão pode ser objeto de um debate em que a significação é exigência para determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
>
> (…) No seio da comunidade matemática, elas devem ser sequência de enunciados organizados segundo regras determinadas: um enunciado é considerado verdadeiro ou é deduzido dos que lhe precedem segundo uma regra de dedução tomada num conjunto de regras bem definidas. Nós chamamos *demonstração* a essas provas (Balacheff 1987, p. 147-148, tradução nossa).

Apesar dessa diversidade de enfoques todos consideram que a reavaliação do papel da prova no ensino deve constituir um dos desafios da Educação Matemática na atualidade. É no contexto dessa problemática que o presente artigo se insere.

Quadro teórico e revisão da literatura

Segundo Retamal (2009) as figuras desempenham um papel essencial no desenvolvimento de geometria. Porém, a autora afirma que é necessário considerar diferentes níveis de exigência em relação à validação de conjecturas ou propriedades de uma figura que levam a dois tipos de provas: as provas não formais fundamentadas em propriedades das figuras (por visualização ou instrumentos de construção) e as provas formais fundamentadas em uma axiomática formal. Os dois tipos de prova exigem duas maneiras distintas de raciocínio e, para deixá-las em evidência, Houdement e Kuzniak (2003) propuseram um quadro teórico que classifica a geometria elementar em três paradigmas diferentes: Geometria Natural (Geometria I); Geometria natural axiomática (Geometria II) e Geometria axiomática formal (Geometria III), que se diferenciam na forma como as propriedades são validadas.

Na Geometria I (*Geometria natural*) a fonte de validação é de natureza sensível (ações e manipulação de instrumentos – régua graduada, compasso, transferidor ou outros materiais). Esta geometria está intimamente relacionada com a realidade; o ato de agir e dedução é com objetos materiais. A medição é uma estratégia padrão, assim como a utilização de modelos, dobras entre outros. Enquadram-se neste paradigma as provas pragmáticas, segundo Balacheff (1987).

Na Geometria II (*Geometria axiomática natural*), as leis hipotéticas de dedução são a fonte de validação; o conjunto de axiomas está próximo a intuição e pode ser incompleto; contudo, a certeza é garantida por demonstrações. Seus objetos são teóricos, mas são representações de objetos reais e concretos. A validação das relações é feita usando definições e teoremas, ou seja, se recorre a instrumentos que pertencem a um quadro teórico. Faz parte dessa geometria, a Geometria Euclidiana.

E na Geometria III (*Geometria axiomática formal*): o cordão umbilical entre a realidade e o axiomático é cortado, isto é, trabalha-se com objetos teóricos sem qualquer referência à realidade e seu sistema de validação é bastante formal. O tipo de raciocínio é similar ao da geometria II, mas o sistema de axiomas está completo e independente de suas aplicações possíveis para o mundo. Segundo Houdement e Kuzniak, "o único critério de validade é a coerência (ou seja, ausência de contradições)."

Segundo os autores uma experiência de Geometria I (em que a dedução está ligada muitas vezes a manipulação de instrumentos), pode contribuir para dar sentido a axiomas em Geometria II, e dai levar a interpretações oferecidas em Geometria III na qual o critério de validade aceite é a coerência (ou seja, ausência de contradições).

Utilizamos este quadro teórico para nosso trabalho porque concordamos com Kuzniak, Elia, Hattermann, e Roubicek, (2009) quando defendem que a classificação propostas em relação a Paradigmas geométricas e espaço de trabalho geométrico é útil para a classificação dos tipos de argumentos utilizados e compreender as dificuldades dos alunos e os erros (abordagem epistemológica).

Duval (2004) ao discutir sobre as funções de uma figura em geometria, distingue quatro tipos de apreensões, e salienta que a figura deve ser vista de acordo com uma descrição verbal que determina explicitamente algumas de suas propriedades. Para o autor em geometria não há desenho "sem legenda"; toda a introdução a uma figura geométrica deve ser discursiva. Dorier, Gutiérrez e Strässer (2003, p. 3) afirmam que

> Na verdade, nenhuma propriedade geométrica é, em sentido estrito, visível em um desenho (pode-se medir se duas linhas são paralelos, mas a incerteza sobre a precisão da medição é inevitável), tem que ser dada na hipótese ou codificada ou provada por deduções.

Método, sujeitos e problema da pesquisa

Foram sujeitos da pesquisa estudantes do 1º Ano em formação para o magistério do ensino secundário e decorreu no âmbito das aulas da disciplina "Geometria Euclidiana" uma das das disciplinas que se oferece no primeiro ano do curso. É uma pesquisa de natureza qualitativa e o objetivo da pesquisa foi investigar as capacidades dos estudantes em formação para o magistério de produzir uma demonstração envolvendo conceitos da geometria plana. Especificamente, incluiu dois aspectos: (i) compreensão de uma organização dedutiva correta;

e, (ii) levantamento de uma conjectura e sua validação por meio de uma demonstração. Os dois aspectos – foco de nosso problema – visavam responder à seguinte questão: *Que aspectos os estudantes do primeiro ano do curso de licenciatura em ensino de matemática na Beira, consideram relevantes no processo da organização e/ou produção de uma cadeia dedutiva de uma propriedade geométrica.* Ao levantarmos essa questão para o nosso problema, entendemos que ela é pertinente para o proposito que se quer desenhar para o projeto de doutorado, pois segundo Dorier, Gutiérrez e Strässer (2003, p. 8) uma das questões críticas quanto à formação de professores de matemática dos níveis primário e secundário é decidir sobre a extensão do conhecimento matemático que os professores devem dominar e a qualidade do raciocínio matemático que eles devem ser capazes de mostrar.

A coleta dos dados baseou-se nos trabalhos de casa; notas em sala da aula e teste diagnóstico. A pesquisa decorreu na Universidade Pedagógica, Delegação da Beira, em Moçambique e a amostra incluiu alunos que concluiram a 12ª classe e sem experiência de ensino; professores em exercício e sujeito vindos de outros segmentos sociais em formação para o magistério. Os dados apresentados neste trabalho resultam da análise do material recolhido. A coleta aconteceu em duas fases distintas: em 2010, com a participação de 23 alunos e, em 2011 com 36 alunos. Nos dois anos, a coleta de dados decorreu no segundo semestre, entre os messes de setembro e outubro, pelo fato de ser esse o período em que se leciona essa disciplina.

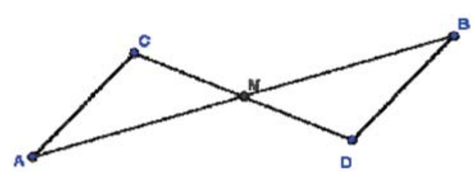
Atividades e resultados

Em 2010, aos estudantes foi pedido que, usando o software Geogebra, conjecturassem primeiro o objeto geométrico que se obtém unindo os pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero e, em seguida, validassem-na por meio de uma prova. Foi-lhes estimulado que explorassem a ferramenta "arrastar" que o ambiente dinâmico de Geogebra propicia. Os estudantes poderiam trabalhar individualmente ou em grupos de 3 ou 4 pessoas.

Em 2011 a atividade consistiu de um teste que pedia aos sujeitos que organizassem os passos de uma demonstração, que se supunha que tinha sido feita corretamente por um aluno mas que ao transcrever os passos da resolução baralhou tudo, conforme o *Quadro 1*.

Hipótese: M é ponto médio de AB e de CD.

Tese: angulo (CAM) ≅ angulo(DBM)



Quadro 1: Quadro dos dados.

Demonstração:

- $\angle AMC \cong \angle BMD$ – porque ângulos verticalmente opostos são congruentes
- $\angle CAM \cong \angle DBM$ – porque em triângulos congruentes a lados congruentes opoem-se ângulos congruentes
- $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ – porque M é ponto médio de $\overline{AB}$
- $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ – porque têm, de um para outro, dois lados e o ângulo por eles formado congruentes.
- $\overline{CM} \cong \overline{MD}$ – porque M é ponto médio de $\overline{CD}$.

Reescreva todos os passos por ordem correta. (Fonte: Próprio autor adaptado de: Lopes, et al, 1992).

Dos 23 envolvidos em 2010, 10 realizaram a tarefa individualmente e os restantes em grupo. A análise das resoluções mostra que os alunos chegaram à conjectura de que unindo os pontos médios de qualquer quadrilátero, obtem-se um paralelogramo. Contudo, a tentativa de validar a conjectura baseou-se apenas nas hipóteses dos pontos médios obtidos, com o paralelismo dos lados opostos do quadrilátero especial argumentado-se com base na evidência da figura por meio da expressão "como mostra a figura, logo [….] é um paralelogramo." Isso observou-se em todas as resoluções.

Dos 36 estudantes que participaram do teste de 2011, 11 colocaram bem os passos da demonstração, e 25 não. Das soluções não corretas, 14 não conseguiram reunir as três condições mínimas que satisfazem a congruência dos dois triângulos dados, condição sem a qual não se consegue deduzir a conclusão da demonstração e, 11 dipuseram primeiro as condições que garantem a congruência dos triângulos, mas antes de formalizarem isso, apresentaram a conclusão que deviam deduzir (tese) e depois, no último passo afirmaram que os dois triângulos eram congruentes. A Figura 1 apresenta os dois tipos de erros mais comuns.

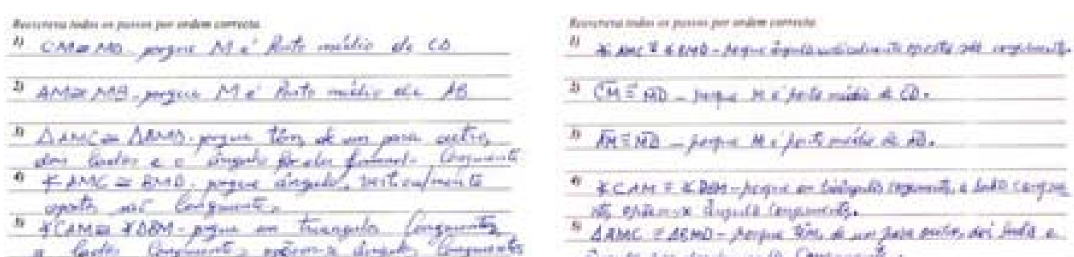


Figura 1: Uma ilustração dos erros mais comuns cometidos na organização dos passos da dedução

Fonte: Próprio autor

Discussão dos resultados

A interpretação dos resultados na base das teorias que fundamentaram o estudo, leva-nos a concluir que: (i) os alunos envolvidos no estudo enquadram-se na Geometria I (Geometria natural) na qual a fonte primária de validação das propriedades geométricas são açoes e manipulação de instrumentos: para validar a propriedade dos pontos médios de um quadrilátero basearam-se apenas nas "evidências no desenho". Fetissov (1994, p.29) salienta que uma demonstração bem estruturada deve basear-se apenas em proposições já estabelecidas, sendo inadmissível qualquer alegação de evidência; nenhuma propriedade geométrica é visível em um desenho, devendo ser dada na hipótese ou codificada ou provada por deduções (Duval, 2004; Dorier, Gutiérrez e Strässer, 2003). Os resultados de 2011mostram que os erros mais frequentes foram (i) ou apresentar nos passos iniciais conclusões que careciam inicialmente de outros passos; (ii) ou usar a tese (conclusão) como um dos dados a usar na argumentação. Estes resultados indicam que esses estudantes não entendem as regras de dedução para a produção de uma demonstração. Embora a atividade se possa enquadrar na Geometria II (Geometria natural axiomática), também foram incapazes de ir além da Geometrai I (Geometria natural). Os erros parecem revelar que eles não veem a demonstração como um discurso em que as definições e os teoremas são regras de substituição como defende Duval (2004), o que mais uma vez dá mais indício de muitos deles situam-se em Geometria I, Natural.

Retomando o nosso problema em que questionamos sobre "Que aspectos os estudantes do primeiro ano do curso de Licenciatura em Ensino da Matemática na Beira, consideram relevantes no processo da organização e/ou produção de uma cadeia dedutiva de uma propriedade geométrica", podemos responder que os resultados parecem indicar que eles não entendem o processo da construção de uma demonstração, isto é, não entendem que numa demonstração é preciso observar certos critérios - cada enunciado deve ser considerado verdadeiro ou deduzido dos que lhe precedem - como destaca Balacheff (1987) na definição de demonstração.

Referências bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Processus de prevuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* 18*,* 147-176.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. In *ZDM Mathematics Education*, *40,* 501–512.

Dorier, J. L., Gutiérrez, Á. e Strässer, R. (2003). Thematic working group 7. *European Research in Mthematics Education III*, Bellaria, Italy. Acesso em 23-06-2008. Disponível em http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/ groups.html.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuais.* Universidad Del Valle, Instituto de Educacion e pedagogia.

Fetissov, A. I. (1994). *A demonstração em geometria*; Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual. Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando.

Houdement, C. e Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. *CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* Bellaria, Italy. Acesso em 23-06-2008. Disponível em <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/groups.html..

Kuzniak, A., Elia, I., Hattermann, M. e Roubicek, F. (2009). Introduction Geometrical Thinking. *Proceedings of CERME 6* (pp. 671-675). Lyon, France.

Lopes, A. V., Bernardes, A., Loureiro, C. Varandas, J. M., Oliveira, M. J. C. e Delgado, M.G. (1992). *Actividades Matemáticas na sala de aula.* Portugal: Texto editores.

Retamal, I. G. (2009). Actividades geométricas en la ensiñanza. Análisis desde El punto de vista cognitivo. In: *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 22-33.

Weber, K. e Meja-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: an exploratory study. Educational *Studies in Mathematics, 76* (3), 329-344.

LA ARGUMENTACIÓN EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Alma Alicia Benítez Pérez, Martha Leticia García Rodríguez
CECyT 11 "Wilfrido Massieu del Instituto Politécnico Nacional México
ESIME-Zacatenco del Instituto Politécnico Nacional
mail albenper@gmail.com, martha.garcia@gmail.com

Resumen. El interés del presente trabajo es identificar y analizar los recursos explicativos y argumentativos que el alumno del nivel medio superior (cuarto semestre de la carrera de electrónica) emplea cuando enfrenta situaciones contextualizadas en el aula. El estudio centra su atención en las características que presenta la producción de razones para justificar sus afirmaciones durante la solución de la situación. Los hallazgos muestran la inclinación de los estudiantes por explicaciones descriptivas, mientras que los argumentos presentan elementos teóricos con concatenación parcial en sus razonamientos. Los registros y las transcripciones de las clases son analizados considerando un modelo particular de investigación cualitativa, la etnografía.

Palabras clave: argumentación, explicación, validez, discurso

Abstract. The interest of this work is to identify and analyze explanatory and argumentative resources used by the students from high school (fourth semester of electronics) when he faces contextualized situations at class. The study focuses on the features found in the production of reasons to justify their assertions during the situation solving. The findings show the inclination of students by descriptive explanations, while the arguments presented theoretical elements with a partial concatenation in the reasoning. The records and transcripts of the classes are analyzed considering a particular model of qualitative research, the ethnography.

Key words: argument, explanation, validity, discourse

Introducción y marco teórico

El aprendizaje de las matemáticas se logra cuando el alumno desarrolla una disposición y apreciación para participar en actividades propias del quehacer matemático, en cuyo escenario es importante que el alumno desarrolle un pensamiento creativo y crítico para la formulación de conjeturas y argumentos, la exploración de caminos alternos de solución y la discusión sobre la validez de las conclusiones, durante el proceso de resolución de problemas. Por lo tanto, la argumentación es una tarea fundamental para el aprendizaje de la matemática porque genera conocimiento explicado, se puede decir entonces que el objetivo de la argumentación es la construcción de una explicación del por qué la información de diferentes datos necesita ser justificada para sustentar la conclusión.

Marmolejo y Solano (2005) consideran que los objetivos de una Argumentación son la deliberación, la justificación y la transmisión de una convicción, y sus reglas se basan en la experimentación, los procedimientos y las intuiciones, pero también menciona los saberes científicos del alumno, en tanto que las reglas de la argumentación formal son los de la lógica.

Por su parte Polya (1990) considera que el objetivo de la argumentación es la deliberación, justificación y transmisión de una convicción y que el proceso de construcción y maduración de las argumentaciones conlleva a la formulación de conjeturas.

Para Duval (1999) la argumentación se haya estrechamente ligado a la justificación de una afirmación. Considera que la justificación de una afirmación tiene dos operaciones:

1. Producción de razonamiento o de argumentos.
2. Examinar la aceptabilidad de los argumentos producidos

La aceptabilidad se infiere a partir de los argumentos producidos y requiere de razones expuestas. Las argumentaciones están ligadas con las explicaciones; Duval (1999) se refiere a ellas como producciones de razones dado que proporcionan una o más razones para volver comprensible un dato y por tener una función casi descriptiva. La argumentación busca la pertinencia de las razones teniendo su valor epistémico en el contenido (aspecto semántico).

Dentro de este proceso de producción de razonamientos o argumentos, las *representaciones* (Duval, 2000, 2002, Parnafes & diSessa, 2004) juegan un papel fundamental, ya que los recursos argumentativos matemáticos estarán conformados por procesos, representaciones y registros que darán cuenta del nivel de elaboración matemática en la situación. Al respecto, el estudiante empleará las representaciones para dar sentido a la información que le brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo. Duval (1999), considera la existencia de *sistemas semióticos*, los cuales proveen nuevos significados a la *representación*, es decir, cualquier *objeto matemático* tiene diferentes *representaciones* producidas por diferentes *sistemas semióticos*, por lo cual expone la necesidad de enfocar la atención a tres aspectos básicos para lograr la *aprehensión conceptual*: el objeto, uno de los varios *sistemas semióticos* y la composición de signos.

Además enfatiza la importancia de manejar varios sistemas semióticos para lograr la *aprehensión del objeto*, pero advierte los problemas que origina la coordinación de estos sistemas. Los *objetos matemáticos* no pueden ser identificados con cualquiera de sus representaciones, esta actividad ocasiona que muchos estudiantes no puedan identificar el contenido de la *representación* y el *objeto* representado.

El proceso de la argumentación en el aula

Hablar de argumentación en el aula (Perelman et al. 1988) se refiere a intentar convencer de manera razonada a otro de las afirmaciones que se tienen como verdaderas, por lo cual se considera la importancia del carácter dialógico de sus interacciones verbales; el carácter razonado de sus procesos discursivos y el nivel de aceptabilidad frente a lo argumentado, como menciona Duval (1999).

La práctica argumentativa es, entonces, una situación de comunicación, en la que se presenta la diversidad de valores, pero también las discusiones "razonadas" con la finalidad de lograr acuerdos coherentes, pertinentes y consensuados.

Para el presente trabajo, la argumentación se ha caracterizado como un proceso desarrollado de manera individual y colectiva. Así, se determinaron 2 fases para el desarrollo argumentativo en el aula: a) de formulación de argumentos, b) de confrontación de argumentos y de conclusión de argumentos. La primera fase se presentó en la discusión que se produjo en el equipo de trabajo a través de las explicaciones emitidas para justificar las afirmaciones expuestas, con el propósito ser aceptadas, exponiendo para ello al menos una razón que las justificara. La segunda fase es la consolidación de las conclusiones a nivel grupal para obtener acuerdos consensuados, con la finalidad de exponer la solución más adecuada para el problema.

El presente artículo se derivó de los proyectos de investigación registrados en la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP), del IPN (20111060 y 20120794), *La importancia de la Argumentación en la Resolución de Problemas Contextualizados para el Nivel Medio Superior*, que permitió identificar los argumentos matemáticos que el alumno empleó para justificar sus afirmaciones, siendo los tratamientos desarrollados en las diferentes representaciones los que permitieron mostrar el nivel de elaboración matemática de la solución.

Metodología

El objetivo del presente trabajo fue identificar la producción de razones o argumentos que el alumno del nivel medio superior de cuarto semestre (cálculo diferencial) expone para explicar la justificación de sus afirmaciones. Esta investigación, se ubica en un paradigma de investigación cualitativo de corte etnográfico. El enfoque etnográfico permitió obtener información relevante en el contexto del aula. Las ideas desarrolladas en los referentes teóricos, sirvieron como ejes para diseñar y aplicar actividades, en las que los estudiantes argumentaron cada una de sus afirmaciones considerando la explicaron para justificarlas en problemas contextualizados, así como su aceptabilidad. La observación del estudio se llevó a cabo durante un semestre escolar para detectar las cualidades del fenómeno de estudios. Las observaciones se desarrollaron en dos niveles: global y específico. El primer nivel se orientó a registrar los siguientes eventos:

- Bitácora del curso. Al término de cada clase el investigador anotaba los hechos más relevantes durante la sesión, posteriormente la información era analizada para la siguiente sesión, en particular, se tenía especial atención a las actividades que presentaron dificultad durante su desarrollo, las cuales se utilizaban como base para la discusión con el grupo.
- Grabaciones de las clases, específicamente cuando los equipos exponían su trabajo ante el grupo, para validar sus procedimientos y resultados.
- Reportes escritos y tareas extramuro.

A nivel específico, la observación se dirigió a examinar con mayor detalle los procesos que se llevaron a cabo cuando se les solicitó enfrentar una situación contextualizada, para ello se aplicó una situación común de esa característica a ambos grupos (álgebra y cálculo diferencial), posteriormente se invitó a un equipo de cada grupo para que expusieran sus argumentos, permitiendo la discusión y el debate para explicar cada una de sus afirmaciones y examinar la aceptabilidad de las razones expuestas.

La triangulación de la información se llevó a cabo desde distintas perspectivas para fortalecer la credibilidad en los resultados e interpretación del estudio. Lo anterior se llevó a cabo mediante la identificación de los hallazgos que se encontraron en la fuente A (reporte escrito individuales), fuente B (discusión grupal), fuente C (reportes escrito de cada equipos), fuente D (tareas extraclase) y también pudo corroborarse con la fuente E (observaciones en clase), permitiendo comparar información proveniente de diferentes escenarios.

Población: La experiencia educativa se desarrolló en el CECyT 11 "Wilfrido Massieu" con 45 alumnos de cuarto semestre del nivel medio superior cuyas edades fluctuaban entre los 16 y 17 años en la unidad de aprendizaje denominada "Cálculo Diferencial". Se proporcionó a los estudiantes el siguiente problema:

Una escalera de 26 metros está apoyada en un edificio alcanzando una altura de 24 metros.

a) *¿Cuánto se tiene que separar el extremo inferior de la escalera para que el extremo superior descienda un metro?*

b) *¿Cuánto tiene que disminuir el ángulo que forma la escalera con el piso para que la escalera descienda un metro?*

c) *¿Cuánto se tiene que separar el extremo inferior de la escalera para que el extremo superior descienda la misma distancia?*

d) *Escribe una función que relacione la distancia del extremo inferior de la escalera al pie edificio con la distancia que desciende el extremo superior. Determina el dominio y el rango. Traza la gráfica.*

Se seleccionó este problema por el contenido de las representaciones: textual, numéricas, algebraicas y gráficas, así como el empleo de posibles estrategias de resolución como: la organización de la información en una tabla, la búsqueda de un patrón, el tanteo sistemático y la búsqueda de diversas representaciones.

La dinámica de trabajo en el aula consistió en la organización de equipos (4 a 5 integrantes), formando un total de 6 equipos en el grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionando que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución, mientras el profesor participaría con los equipos como espectador y para proporcionar información. Una vez terminada la tarea, los equipos presentarían un reporte escrito. Seguidamente, el profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, iba a seleccionar un equipo para exponer su trabajo al grupo.

Análisis de datos

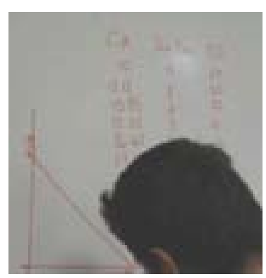
Los alumnos participantes, mostraron disposición durante la sesión desarrollada exponiendo sus razones para justificar cada una de sus afirmaciones. Los hallazgos identificados en la experiencia se basaron en las características que se consideraron representativas de la argumentación y la explicación; la Tabla 1 expone lo antes mencionado.

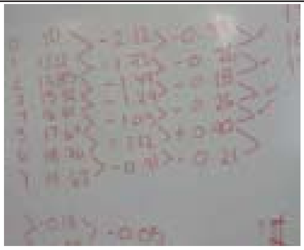
Características	**Argumentación**	**Explicación**
1- Focalización	Un enunciado objetivo	Respuesta a la pregunta ¿por qué?
2- Resultados en el discurso	Modificar el valor epistémico	Conexión del hecho con otros.
3- Aspectos de las proposiciones	Los términos que constituyen el contenido	El contenido conceptual es determinado por las proposiciones
4- Relaciones entre las proposiciones	Relaciones de razones en pro o en contra	
5- Indicaciones de las relaciones	Conectivos argumentativos	Conectivos de Organización
6- Continuidad	Se presenta en forma global las proposiciones	Se presenta por la coherencia cognitiva de la descripción

Tabla 1. Características de la Argumentación y de la Explicación.

Fuente: Duval, (1999)

La tabla 2 muestra la sistematización de las características identificadas en relación con las explicaciones y argumentos que los alumnos exponen durante la solución del inciso d; Escribe una función que relacione la distancia del extremo inferior de la escalera al pie edificio con la distancia que desciende el extremo superior. Determina el dominio y el rango. Traza la gráfica. Para realizar el análisis expuesto por los estudiantes *H1, M y H2*, el investigador (*Obs.)* emite sus comentarios en cada una de las participaciones.

Caracte-rísticas	**Explicación**	**Argumentación**
1	*H1:* Hay que dibujar…, bueno ya, hay que analizar bien lo que nos piden, cuánto se tiene que separar el extremo inferior de la escalera para que el extremo superior descienda 1 metro exactamente. *Obs.: La solución se basa en representaciones textuales e icónicas que se asocian a las relaciones numéricas encontradas, pero aún no está presente la habilidad para anticipar o predecir resultados*	*M.* Que a 24 no ha descendido nada, que a 10... *H2.* Más bien sería la relación edificio-piso. *M.* ¿Edifico-piso? *Obs.: El enunciado permite establecer el objetivo del proceso apoyándose en procedimientos, para establecer relaciones matemáticas*
2	*M.* Pero, ya la habíamos sacado así, y lo que estás diciendo tú es que saquemos los catetos, como vamos cambiando y, eso ya lo habíamos sacado una vez en clase. *Obs.: La solución se basa en imágenes mentales relacionadas con actividades realizadas con antelación y las conecta con relaciones numéricas identificadas.*	*H2.* Vamos hacer una relación de lo que hay aquí, tomando, suponiendo más bien, como máximo que es nuestro 24 y aquí sí es una relación de edificio-piso, porque la escalera nunca va a cambiar. *H1.* Sí. *Obs.: La solución se basa en relaciones procedimentales asociadas a las relaciones numéricas.*
3	*H1.* Habíamos quedado que c es igual a 10 porque c = 0 y 10 es también= 0 en nuestra tabulación, cuando nuestro cateto adyacente vale 10 entonces c es = 10. *M.* Tomando otra ecuación por ejemplo a+b +c=$\sqrt{147}$ a que vale 5-3$\sqrt{3}$ + b? +10 que es c =$\sqrt{147}$ dejamos b y tenemos que b =$\sqrt{147}$ -5 + (3 $\sqrt{3}$) – 10. b=-15+10$\sqrt{3}$ ahora sí ya podemos hacer nuestra ecuación cuadrática de segundo grado porque ya tenemos a, b y c.	*M.* Pero, ya la habíamos sacado así, y lo que estás diciendo tú es que saquemos los catetos, como vamos cambiando y eso ya lo habíamos sacado una vez. *H1.* Hay que sacar cuánto baja el cateto opuesto y cuánto cambia el valor real  *Obs.: La solución se basa en relaciones matemáticas que se asocian a las relaciones numéricas.*

	 *Obs.: Determinación del proceso que se muestra ante el equipo basada en la afirmación de sus proposiciones*	
4		*M.* ¿Cómo? Ok, bueno, entonces tenemos que a 10 metros es igual a cero ¿no? *H2.* Pero por ejemplo sería, 24 para 10 ¿no?, eso no lo habíamos sacado, nosotros lo que sacamos, como si fuera 23. *M.* No, si lo habíamos sacado así, la vez pasada cuando nos dio que subía y que bajaba. Hicimos eso y esa fue la que no daba. *H2.* Entonces. *M.* El extremo inferior es de 10 y la distancia es de 0 ¿no?, ok cuando el extremo inferior sea 11 ¿Qué va a pasar *Obs.: Es un recurso que consiste en determinar una pluralidad que simultáneamente puede generar contradicciones.*
5	*H2***.** La diferencia que hay de aquí-acá. *H1.* Ahorita vemos. A ver? es 10, 11, 12, 13, 14 y 15, está bien, entonces, bueno nos queda que… En la primera, entonces… que es 10, el cateto adyacente va a valer 0, la disminución, cuando nos da 11 en el cateto adyacente va a valer raíz de 555. *M.* Vale 24 menos la raíz de 555. *H2.* Pero ¿por qué? *H1.* Porque hay que contar la diferencia, que es lo que va a ir cambiando, no va a dar el total del cateto opuesto. *Obs.: Presentación de la conclusión que permite reconocer su pertinencia ante el equipo.*	*H1***.** Sí. *M.* Pero si sacamos los catetos, como tú dices como sabemos ¿cuánto baja el cateto opuesto y cuánto cambia el valor real? *Obs.: El conectivo argumentativo "pero" orienta al que expone el discurso en dirección opuesta.*
6	*H1.* Ahorita, ponemos los valores del cateto adyacente ¿estás de acuerdo? *M.* Correcto.	*M.* El extremo inferior es de 10 y la distancia es de 0 ¿no?, ok, cuando el extremo inferior sea 11 ¿Qué va a pasar? *H1.* El extremo superior va a descender,

	H1. Porque la vez pasada pusimos valores exactos. *M*. Es lo que estaba pensando, dije no nos salió primero esto, nos salió otra cosa. *H1*. Cabe aclarar aquí que la diferencia principal en estos distintos, que de poner los valores primero de lo que va a cambiar en el cateto opuesto, vamos a poner al contrario los valores del cateto adyacente, para obtener así lo que va a ir cambiando del cateto opuesto. *M*. Con relación a la distancia que ahora sí va descendiendo de 24 menos lo que nos haya salido de cuánto haya descendido. *Obs.: La producción discursiva analiza la solución que se presenta, con el fin de hacer comprensible a los miembros del equipo dicha solución.*	bueno lo que, la cantidad que queremos va a aumentar. Tenemos primero que la cantidad que queremos, del cateto opuesto es 0, por que no ha disminuido nada. *M***.** Cuando el extremo inferior es 10. *H1*. Exactamente. *M*. Ok *Obs.: Determinación de pertinencia y validez del proceso de la situación argumentada.*

Tabla 2. Episodios de la argumentación y explicación de los estudiantes

El análisis de las grabaciones y de acuerdo con la información expuesta en la tabla 2, muestran la producción de diversas razones, para demostrar o refutar la veracidad de conjeturas, asimismo se identificaron las explicaciones emitidas por los estudiantes y la argumentación que justifica cada una de sus afirmaciones. Los hallazgos muestran la inclinación de los mismos por explicaciones descriptivas, mientras que los argumentos presentan elementos teóricos con concatenación argumental parcial.

Conclusiones

Los estudiantes con frecuencia promueven las explicaciones para justificar sus afirmaciones, así como para apoyar una versión o para rechazar otra.

La riqueza de la construcción de significados en la interacción, permitió fortalecer un proceso donde se negocian y articulan significados pero también se abren alternativas explicativas y argumentativas, para llegar a una conclusión.

La argumentación responde a la necesidad de comunicar y de obtener la aceptabilidad del equipo con respecto a su pertinencia o rechazo, asimismo, surge la necesidad de la veracidad de la solución propuesta como resultado de un análisis razonado de tipo colectivo.

Agradecimiento. Las autoras agradecen el apoyo otorgado por la Secretaría de Investigación y Posgrado.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar y explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* I, (pp. 55-69). Japan.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, I*, (pp.311-335). México: Cinvestav-IPN.

Polya, G. (1990). Mathematical and plausible reasoning. *Volume II: Patterns of plausible inference*. EEUU: Princeton Paperbacks.

Marmolejo E. y Solano M. (2005). Convención Didáctica sobre la Demostración Geométrica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 139-145, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Parnafes, O. y diSessa, A. (2004). Relations between patterns of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for the Mathematics Learning,* 9, 251-280.

Perelman, Ch. y Olbrech-Tyteca, L. (1988). *Tratado de la argumentación*. Barcelona, España: Gredos.

REPRESENTACIONES SOCIALES EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Oswaldo Jesús Martínez Padrón
Universidad Pedagógica Experimental Libertador Venezuela
ommadail@gmail.com

Resumen. Este documento reporta una investigación desarrollada a través de un estudio etnográfico, apoyado en observaciones directas y entrevistas, en profundidad, cuyo objetivo fue determinar las conexiones funcionales existentes entre el aprendizaje de la Matemática y las representaciones sociales que poseen los sujetos en cuanto a lo que acontece en el aula donde se enseña esta asignatura, acotando que dichas representaciones forman parte de un conocimiento catalogado como cotidiano, ordinario y natural. Entre los hallazgos se destaca que las representaciones sociales logran guiar los pensamientos y se construyen a partir de materiales de diversas procedencia que constituyen un sedimento sociocultural acumulado durante muchos años en relación con el aprendizaje de la Matemática, pudiendo decirse que son generadas a la luz de una comunidad que suele comulgar con la idea de que dicha asignatura es difícil, complicada, aburrida, temible y llena de complejidades, lo cual no favorece el afecto hacia la asignatura.

Palabras clave: educación matemática; representaciones sociales

Abstract. This paper reports an investigation developed through an ethnographic study, supported by direct observations and interviews, in depth, the objective was to determine the functional connections between mathematics learning and social representations held by individuals regarding to what happens in the classroom where this subject is taught, remarking that such representations are part of a codified knowledge catalogued as daily, ordinary and natural. Among the findings it is emphasized that social representations are able to guide thoughts and these are constructed from several source materials which constitute a sociocultural sediment gathered through many years in relation to the mathematics learning process, it could be said that these are generated by the light of a community that agree with the idea that this subject is difficult, complicated, boring, scary and full of complications, which do not support the affection towards the subject.

Key words: mathematics education; social representations

Introducción

Desde el ámbito de la Educación Matemática, las representaciones sociales pueden verse como un producto colectivo generado por la suma de construcciones individuales que aporta cada sujeto al momento de interactuar en el proceso de producción de conocimientos y de construcción de saberes que se genera durante el desarrollo de la clase de Matemática. Son distinguidas como conocimientos cotidianos y su origen social se concreta al momento de ser elaboradas por sus miembros durante las interacciones que ocurren durante la clase (Casado, 2001; Martínez Padrón, 2008). Es decir, no se desarrollan de manera individual sino en relación con otras personas, por lo que su análisis debe hacerse tanto desde el plano cognitivo como el sociocultural (Sánchez, Camacho, Montoya, Hernández y Martínez, 2012). Además, por ser un compendio de conocimientos y saberes sustentados en tradiciones compartidas (Moscovici y Hewstone, 1986), tienen un carácter activo y regulador de los comportamientos y acciones presentes en la dinámica del aula. En tal sentido, su revisión "muestra una realidad común que designa una forma de pensamiento social y es a la vez la comprensión y el dominio del entorno" (Sánchez y Camacho, 2011, p.14).

A partir de lo anterior, se elaboró este documento producto de un estudio etnográfico sustentado en una observación directa y entrevistas, en profundidad, realizada a un grupo de docentes que estudian la carrera de Educación Integral en una Universidad Pedagógica venezolana. Tales docentes no poseen el título correspondiente, pero tienen la particularidad de enseñar contenidos matemáticos en las escuelas de Educación Primaria que conforman el área de influencia de esta Universidad.

Lo etnográfico permitió concretar una descripción, densa, garantizada por una focalización externa, pero intensa e inmersa en el contexto, la cual fue posible a través de una observación no participante que permitió explorar lo que acontece cotidianamente en las aulas de clase de Matemática. La observación directa de las interacciones que acontecieron entre los protagonistas de la clase permitió describir la realidad presente, sin menospreciar las diferentes interpretaciones sobre las que opera la comprensión más profunda de los datos significativos. De allí emergieron actividades, creencias y representaciones sociales que sirvieron de aliadas para develar tanto las teorizaciones implícitas como sus impactos en el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación de los contenidos matemáticos. Pero esta observación no resultó suficiente ya que obligó al uso de entrevistas, en profundidad, guiadas por interrogantes que, sobre la marcha, permitían la emergencia de otras debido a que las primeras no eran una camisa de fuerza sino que intuían sobre la marcha, según fueron apareciendo episodios críticos cargados de significados.

Como la investigación giró en torno a las representaciones sociales, se tomaron en cuenta las prácticas compartidas y funcionales que, en sus experiencias e historias de vida, orientan y organizan las acciones de los sujetos que enseñan o aprenden Matemática. Eso obligó a considerar la condensación de múltiples significados que impactan hasta en la definición de la identidad de los sujetos. Es ese sentido, se tomó en cuenta el papel preponderante que tienen dichas representaciones en el establecimiento de una visión de la realidad común al grupo social, el cual está conformado no sólo por los que están interaccionando en el aula de Matemática, sino por aquellos otros que de alguna manera perfilan, nutren y comparten, con ellos, una cultura que establece un orden capaz de orientarlos para manejar su mundo material y social y, en consecuencia, impactar en la dinámica que se desarrolla en el salón de clase.

El documento inicia con un esbozo general sobre las representaciones sociales donde se destaca que estas son una forma de adquirir y de comunicar conocimientos, llegando a guiar los pensamientos de los sujetos. Luego, se concretan algunas conexiones entre dichas representaciones y el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación de la Matemática, a la luz de algunos hallazgos que sustentan que tales representaciones provienen de experiencias cotidianas que acontecen en los sujetos y de diversos materiales que, en este caso, constituyen un fondo de matiz cultural que ha sido acumulado en torno al aprendizaje de la Matemática, incluyendo creencias y actitudes que llegan a arraigarse hasta tal punto que los miembros de la comunidad no las ponen en duda. Finalmente, se presenta un cierre que advierte sobre la necesidad de enfrentar el impacto que puede causar el hecho de descuidarlas en lo concerniente a la dinámica de la clase de Matemática.

Las representaciones sociales

Sea cual sea la cultura, sus miembros se ven confrontados a construir conocimientos que le permiten interactuar con sus semejantes, configurando así el sustento conceptual que soporta sus acciones. Una forma de adquirirlos viene dada por las representaciones sociales, las cuales también sirven para comunicarlos (Moscovici, 1983). Moscovici sostiene que las representaciones sociales guían los pensamientos, y no al contrario, y se imponen como producto de un encadenamiento global de elaboraciones que se producen durante las interacciones que acontecen y se concretan durante varias generaciones. Sobre la base de esta premisa, afirma que hay primacía de lo social ante lo individual.

Las representaciones sociales constituyen una modalidad particular de un conocimiento del sentido común, quizás por ello es considerado como ordinario y natural, permitiendo entender la cotidianidad y actuar en consecuencia (Moscovici y Hewstone, 1986). Entre los contenidos que definen a las representaciones sociales se encuentran: "información, imágenes, opiniones, actitudes, etc." (Jodelet, 1986, p. 475), en tanto estos contenidos se relacionan con objetos. También incorporan creencias, normas y valores producidos y compartidos por los miembros de un mismo grupo (Guimelli, citado en Martínez Sierra, 2011). Como conocimiento cotidiano representan algo o a alguien (Jodelet, 1986), permitiendo restituir, simbólicamente, algo que esté ausente. Además, funcionan como un sistema de interpretación de la realidad y aunque afectan juicios, percepciones, acciones, comportamientos y comunicaciones que se producen entre los miembros de cualquier grupo social, no poseen los mecanismos de validación que si posee el conocimiento científico con el que suele coexistir en los mismos contextos (Martínez Sierra, 2011). Se destaca que aunque provengan de una "epistemología profana no… han de considerarse falsos, inferiores o sin valor" (Casado, 2001, p. 61). En todo caso, integran elementos de un objeto, y que son generadas por prácticas sociales (Sánchez y Camacho, 2011, p. 6).

Jodelet (1986) indica que las representaciones sociales suelen presentarse en varias formas: (a) imágenes que condensan significados; (b) sistemas de referencia que permiten interpretar y darle sentido a lo que acontece; (c) categorías que sirven para clasificar circunstancias, fenómenos y sujetos; y (d) teorías que permiten establecer hechos sobre ello.

El interés por este tipo de conocimiento no es sólo por lo cotidiano, también suele importar la negociación de las significaciones y la construcción de visiones e interpretaciones del mundo social, donde lo social viene dado por: (a) el contexto concreto en el cual están situadas las personas y los grupos que conforman, (b) la interacción que se establece entre ellos, (c) la aprehensión que les proporciona su cultura; y (d) los códigos, valores e ideologías, ligados a las posiciones o pertenencias sociales específicas (Jodelet, 1986).

Esta última sostiene que el conocimiento que surge de las representaciones sociales es producto de las experiencias. Rodríguez, Rodrigo y Marrero (1993) reportan que dicho conocimiento "no es un producto de los sentidos ni de la experiencia de un individuo, sino que se construye a partir de materiales de muy diversa procedencia" (p. 44). Agregan que tales materiales constituyen un sedimento cultural acumulado durante varios siglos de historia, lo cual es manifiesto a través de aspectos tales como valores y hábitos de vida que, como se sabe, moldean la mentalidad de los sujetos y, por ende, proporcionan categorías a partir de las cuales se conforman las representaciones sociales. En todo caso, son socialmente elaboradas y compartidas, y se constituyen a partir "de las informaciones, conocimientos, y modelos de pensamiento que recibimos y transmitimos a través de la tradición, la educación y la comunicación social" (Jodelet, 1986, p. 473).

En vista de que los sujetos suelen pertenecer, simultáneamente, a múltiples grupos y categorías sociales, dependiendo del rol que en ellos realicen, cada uno de ellos puede tener diferentes huellas distintivas, según el marco institucional o cultural al que se haga referencia. Así, es posible tener representaciones compartidas con varios grupos de filiación. Sí bien los sujetos actúan de acuerdo con sus representaciones, también éstos las cambian en función de sus comportamientos y prácticas (Rodríguez, 2003).

En consecuencia, las representaciones sociales tienen un carácter compartido y consensuado, aunque es posible que puedan presentarse en formas diferenciadas debido a la existencia de diversas visiones o aprehensiones de la realidad y su dinámica. En todo caso, son una modalidad particular de conocimiento y su función es guiar los comportamientos y la comunicación entre los individuos. Por tanto, son una forma de pensamiento natural, común y práctico, pudiendo catalogarse como un saber empírico capaz de guiar la acción social de los sujetos, en alianza con otras representaciones, pues, al igual que las creencias, constituyen sistemas intrincados no aislables donde la experiencia de vida de cada persona, y la del grupo al cual pertenece, juega un papel preponderante. Eso quiere decir que están inscritas en todos los ámbitos y siempre son la representación de un objeto, teniendo un carácter simbólico, significante, constructivo, autónomo y creativo.

Hallazgos

Comprender los comportamientos y las acciones que acontecen en cualquier clase de Matemática obliga a considerar diferentes factores que se ponen en escena durante su desarrollo. Variedad de expresiones orales o gestos describen, explican y permiten comprender el porqué de los significados que emergen cuando se está aprendiendo, enseñando o evaluando contenidos matemáticos ya puestos en escena durante el desarrollo de la clase de Matemática (Martínez Padrón, 2012). No obstante, hay que centrar la mirada hacia algunas de ellas a fin de obtener insumos capaces de sustentar una descripción densa sobre lo acontece alrededor de los protagonistas de dicha clase.

Para ilustrar lo planteado se citan fragmentos de algunos episodios relevantes. Por ejemplo, lo dicho por algunos estudiantes de la clase observada: <<*Siempre me dio mucha rabia con lo que me ocurría en Matemática… Nunca aprobaba… ¡nunca! ¡nunca!... es muy difícil… y cuando la aprobaba, la pasaba con diez… después que me explicaban todo eso en los cursos que tenía que agarrar, ¡la odio, sí, la odio profesor*!>> (Caridad) [la escala de calificaciones de niveles anteriores a la Universidad, en este contexto, es del 1 al 20, con 10 puntos como mínima aprobatoria]; <<*la Matemática es importante para resolver problemas de la vida cotidiana pero nadie la "pasa" ni en el bachillerato ni en la Universidad, eso lo sabe todo el mundo… es muy compleja*>> *(Manuel)* <<*si, si, terminaba odiándolos a todos ustedes* [a los profesores de Matemática]… *es que no se por qué inventaron esa Matemática,… ¡es horrible! ¿Ustedes no tienen nada qué hacer?* >> (Ana).

En estos tres segmentos se vislumbran representaciones sociales sobre la Matemática, particularmente sobre cómo es y su por qué. En este caso se observa a través de creencias y actitudes que no favorecen el afecto hacia la Matemática, pues, la consideran difícil, compleja, horrible y compleja, aunque declaran su importancia para la resolución de problemas. Esa visión, que se produce en el seno de la clase de Matemática, también trasciende al aula e impacta a otros sujetos de la sociedad que no necesariamente tienen contacto con la clase; es decir, circula entre los grupos de donde provienen los estudiantes o en otras instancias que no necesariamente forman parte de su entorno inmediato. En este sentido, se observa la existencia de un constructo que forma parte de un conocimiento cotidiano, en relación con lo que piensan ellos y otros miembros que, incluso, no confluyen en el aula de clase de Matemática. Ese conocimiento común puede ser visto como genérico en relación con la

Matemática, como un todo, y suele no depender de algún objeto matemático particular que haya sido puesto en escena o que esté sujeto a construcción en esas aulas de clase. A saber, conforma representaciones sociales sustentadas en la creencia de que la Matemática es difícil, complicada o aburrida, lo cual puede provenir de experiencias cotidianas que acontecen o acontecieron en ellos o en otras personas que los precedieron en la experiencia de recibir clases de Matemática.

La situación anterior indica que muchos de estos conocimientos son inducidos entre los mismos participantes y por sus allegados: familiares, amigos y otros medios, pero gran parte son construidas en el aula donde se enseña y se aprenden contenidos matemáticos. Se destaca que una estudiante llamada Luisa dijo que <<*A mi me parece que la Matemática desarrolla muchas habilidades… que son necesarias para resolver problemas con números y esas cosas, aunque…toda la vida han "raspado" un "gentío" (sic) en Matemática y eso lo sabe todo el mundo… fíjese que en mi casa se sorprenden cuando alguien pasa esa materia sin ir a reparaciones*>>.

Otros participantes emitieron juicios equivalentes y lo más preocupante es que son pronunciados por estudiantes de la carrera docente que ya tienen la condición de enseñar tanto contenidos matemáticos como otros correspondientes a otras áreas del saber, pues, son docentes en servicio en escuelas primarias en Venezuela (primeros seis grados). Lamentablemente, cuando en esos grupos sociales se tiene aversión por la Matemática se generan representaciones sociales que no favorecen el afecto ni en quienes la enseñan ni en quienes la aprenden, cerrando espacios para su entendimiento, comunicación y éxito en esta área del saber.

Queda develado que entre unos y otros estudiantes, y eso no excluye a sus docentes, se crean formas de comprensión cargadas de imágenes y significados que forman parte del sentido común de la clase y para poder accederlo es necesario valerse de las representaciones sociales.

También fue posible encontrar situaciones con opiniones diferentes: <<*a casi nadie le gusta la Matemática ¿…y no sé por qué?… ¡siempre me ha resultado fácil!...!me encanta resolver curiosidades con números!*>> (Betty). Esta estudiante agregó que <<*desde primaria, ¡siempre he recibido clases de la misma manera!*>>. Se observa que Betty es amante de la Matemática pero lamenta decir que no le gusta la manera como le dan la clase, pues, manifestó que no son dinámicas y tenía la expectativa de incorporar nuevas estrategias para mejorar su enseñanza.

Analizando estos segmentos y otros que se omitieron por cuestiones de extensión del documento, se pudo determinar que la representación social que tiene este grupo en relación con la Matemática es que sirve para resolver problemas numéricos, así como también se determinó que se aprende para hacer cálculos y operaciones, aunque abundan las declaraciones que muestran aversión hacia la misma y hacia quienes la enseñan.

Conclusión

Lo anteriormente descrito permite aseverar que existen grupos sociales que elaboran y comparten constructos que orientan y organizan las acciones de sus miembros, en relación con la Matemática. Tales conocimientos, que se producen tanto en el aula de clase como en otros espacios, no son más que representaciones sociales de los sujetos que resultan elaboraciones del sentido común, afectando a todo el grupo, casi de la misma manera. En tal sentido, lo que piensan, dicen o hacen los estudiantes, y también sus docentes, sobre la Matemática, vista como un todo, o sobre la manera de enseñarla, aprenderla o evaluarla, puede ser producto de una construcción de la realidad común a todo el grupo observado.

Se concluye que las representaciones sociales son pensadas como conocimientos cotidianos, producto de la interacción que se da en el día a día entre los sujetos que conforman determinados grupos sociales. Tales conocimientos son internalizados por los sujetos y les crean estructuras capaces de afectar sus juicios, percepciones, comportamientos y la comunicación entre ellos. Esta vinculación hace que tengan un carácter compartido y consensuado que engloba, además de imágenes y estereotipos, factores tales como las actitudes, las opiniones, y las creencias que forman parte del dominio afectivo de los sujetos; pero este consenso no es restrictivo, aunque es funcional y sirve para mantener la identidad social del grupo.

También se concluye que las representaciones sociales son productos colectivos y son vistas como la suma de las construcciones individuales que aporta cada sujeto. Además, tienen un carácter dinámico y su función es la de elaborar y regular los comportamientos y la comunicación entre los sujetos que conforman determinados grupos sociales. En consecuencia, sirven para orientar o guiar la acción.

Finalmente, se pudo observar la existencia de creencias y actitudes que llegan a arraigarse a tal punto que los miembros de la comunidad no las ponen en duda, aflorando de allí representaciones sociales que provienen de las experiencias cotidianas y, por ende, de elaboraciones del sentido común. Este tipo de representaciones donde se ve a la Matemática como algo complicado o difícil, no han favorecido el afecto hacia ella, y, por ende, abre espacios para la construcción de una visión negativa y adversa hacia esta área del saber. Lo más lamentable es que aún existen docentes que repiten sus esquemas de enseñanza en todas las clases, a la luz de representaciones sociales consideradas como verdades que en nada favorecen el mejoramiento del proceso enseñanza-aprendizaje-evaluación de la Matemática.

Por tanto, se concluye que las representaciones sociales son conocimientos socialmente elaborados y compartidos que se construyen y nutren de las experiencias vividas por el sujeto y por los demás, pudiendo ser recibidas o trasmitidas a través de la tradición o por medio de las interacciones que se producen en las aulas de clase. En consecuencia, se advierte sobre la necesidad de enfrentar el impacto que puede causar el hecho de descuidar lo concerniente a las representaciones sociales en la dinámica del aula, pues, estando ancladas en el estudiantado pueden convertirse en obstáculos que limitan el aprendizaje de la Matemática.

Referencias bibliográficas

Casado, E. (2001). La teoría de las representaciones sociales. En E. Casado y S. Calonge (Comps.). *Conocimiento social y sentido común* (pp. 57-106). Caracas: Fondo Editorial de Humanidades y Educación, Universidad Central de Venezuela.

Jodelet, D. (1986). Representaciones sociales: fenómenos, conceptos y teoría. En S. Moscovici (Ed.). *Psicología social, II: Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales.* (D. Rosenbaum, Trad.). España: Paidós

Martínez Padrón, O. (2008). *Creencias y concepciones en encuentros edumáticos*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas, Venezuela.

Martínez Padrón, O. (2012). La cadena explanans-explanandum como recurso para elaborar explicaciones funcionales del accionar en la clase de matemática. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 247-257. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Martínez Sierra, G. (2011). *Representaciones sociales que poseen estudiantes de nivel medio superior acerca del aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas*. Recuperado el 30 de Junio de 2012 de http://www.redalyc.org/src/ inicio/ ArtPdfRed. jsp?iCve =13218510006

Moscovici, S. (1983). The fenomenon of social representations. En R. Farr y S. Moscovici (Eds). *Social representations*. London: Cambridge University Press.

Moscovici, S. y Hewstone, M. (1986). De la ciencia al sentido común. En S. Moscovici, (Ed). *Psicología Social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales*. (D. Rosenbaum, Trad.), España: Paidós.

Rodríguez M., Rodrigo, A. y Marrero, J. (1993). *Las teorías implícitas. Una aproximación al conocimiento cotidiano*. Madrid: Visor distribuciones, S. A.

Rodríguez, T. (2003). *El debate en las representaciones sociales de la psicología social*. Recuperado el 20 de Octubre de 2007 de http://www.taniars.wordpress. com/2007/06/21/textos.

Sánchez N., Camacho, A., Montoya, J., Hernández, D. y Martínez, N. (2012, Abril). *Ecuaciones diferenciales y sus concepciones entre los Profesores*. Ponencia presentada en el 5to Congreso Internacional CIPITECH 2012, Ciudad Juárez, México.

Sánchez, B. I. y Camacho, A. (2011). *Función matemática, su concepto entre los docentes a través de representaciones sociales,* Saarbrücken, Germany: Editorial Académica Española.

ESTUDIO SOBRE PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA EN MÉXICO

Lucía Mendoza von der Borch, Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora México
luciamendoza@hotmail.com, sibarra@gauss.mat.uson.mx

Resumen. Se presentan algunos avances de una investigación cualitativa que tiene como objetivo describir e interpretar las prácticas de enseñanza de las matemáticas de profesores de nivel básico (secundaria mexicana (12-15 años), los cuales han cursado un programa de formación centrado en la reflexión sobre la práctica. Para la identificación de las prácticas y su análisis se utilizan herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Metodológicamente se trata de un estudio descriptivo interpretativo en el cual fueron utilizadas entrevistas y observación no participante en el aula para la obtención de la información. Los contenidos matemáticos observados en aula corresponden al apartado de "Proporcionalidad y funciones" del programa de estudios vigente para matemáticas de segundo grado de secundaria (13 años) en México.

Palabras clave: práctica docente, enfoque ontosemiótico

Abstract. This paper presents some advances of our qualitative research on teaching practices of mathematics in Mexican secondary school (12-15 years old). The objective was to describe and to interpret some of the teaching practices employed by teachers who had received a training program focused on the examination of their practices. Our theoretical tools to identify and analyze those practices are taken from the Onto-semiotic Approach to Knowledge and Math Instruction. As far as method is concerned, our research is descriptive and interpretative, based on interviews and non participating observation in classroom. The mathematical contents belong to the chapter dedicated to Proportionality and Functions, which is part of the official program for second grade in secondary schools (13 years old).

Key words: didactical practices, onto-semiotic approach

Introducción

Los resultados poco satisfactorios que los alumnos mexicanos de educación secundaria obtienen en distintas evaluaciones tanto nacionales como internacionales del aprendizaje de matemáticas, son un factor que influye de manera muy importante en la preocupación e intención de diferentes instancias de gobierno y del ámbito académico, de poner atención a las prácticas de los profesores en las aulas docentes y a la creación de diferentes programas de formación y actualización del profesorado.

Autores como Ávila (2001) y Mena (2005) han señalado que los planteamientos en cuanto al enfoque y la metodología de enseñanza de las distintas reformas curriculares que se han venido promoviendo en la educación básica en México, frecuentemente no son incorporados por los profesores en las aulas. Estas investigaciones reportan que incluso después de más de una década de haber entrado en vigor las propuestas curriculares, el enfoque y la metodología por ellas formuladas no eran llevados a los salones de clase, y que los profesores continuaban, en ciertos aspectos, arraigados al sistema "tradicional" de enseñanza; éste se caracteriza por formas metodológicas expositivas y alumnos mayoritariamente pasivos y está centrado en la enseñanza de una matemática formal, sin un contexto de uso extramatemático.

Esta necesidad de modificación de las prácticas ha llevado a investigadores en matemática educativa a plantearse cuestionamientos sobre cómo diseñar programas de formación que realmente incidan sobre la calidad de la práctica docente. Si se pretende que los profesores desarrollen habilidades que les permitan conducir más eficazmente el proceso de aprendizaje de los alumnos, entonces ¿qué características deberían tener los programas de formación para que sean de utilidad para el mejoramiento efectivo de las prácticas de los profesores?

En este contexto, nos hemos planteado como *objetivo de esta investigación analizar y describir algunos aspectos centrales de las prácticas de enseñanza de profesores de matemáticas de secundaria que cursaron un programa de formación específico, el Diplomado "Prácticas docentes en las matemáticas de secundaria", centrado en la reflexión sobre la práctica.* El programa, con una duración de 150 horas, estuvo dirigido a profesores de matemáticas de escuelas secundarias públicas del Estado de Sonora, México y su objetivo general fue: "Apoyar al personal docente de la escuela secundaria en la comprensión y desarrollo de las competencias profesionales que lo hagan más eficaz para conducir el proceso de aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos" (Ibarra et al, 2011, p. 2). Fue ofrecido por la Secretaría de Educación y Cultura del Estado de Sonora, México, en colaboración con un grupo de investigadores en Matemática Educativa que labora en una institución de educación superior con sede en el mismo Estado.

El enfoque y la metodología de trabajo de este Diplomado concuerdan con las reflexiones realizadas por Godino, Font y Wilhelmi, (2006), respecto a la importancia que tiene para los programas de formación de profesores el proporcionar herramientas a los maestros para que éstos logren realizar un análisis crítico de su propia práctica docente y de los textos escolares y materiales didácticos en cuanto a la evaluación de su pertinencia, idoneidad y adecuación.

Consideramos que la información generada por esta investigación podrá contribuir en dos direcciones: por un lado se podrán aportar sugerencias para modificación y mejora en el diseño de los programas de formación que el grupo de investigadores mencionado realiza; por otro lado, vemos factible que se pueda apoyar a los profesores de aula con acciones de seguimiento y soporte para que sean capaces de analizar su propia práctica docente y los textos y materiales didácticos que utilizan, con el fin de evaluar la pertinencia, idoneidad y adecuación de estos materiales al proyecto educativo en el que se insertan.

Herramientas teóricas

El marco teórico que sustenta nuestra investigación es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), (Godino, Batanero & Font, 2009).

Las principales herramientas teóricas que utilizamos son: las nociones de práctica y objeto matemático, la tipología de objetos primarios, las nociones de problemas, prácticas, objetos didácticos; configuración y trayectoria epistémica; y configuración y trayectoria docente. Además, empleamos algunas herramientas de los tres primeros niveles de análisis didáctico:

Nivel uno. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.

Nivel dos. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.

Nivel tres. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.

Las prácticas a las que se refiere el primer nivel de análisis ya no son únicamente las prácticas matemáticas, sino que incluyen también a las prácticas didácticas, que son el tema de estudio en nuestra investigación. En las herramientas de análisis didáctico que propone el Enfoque Ontosemiótico, se consideran las nociones de problema, práctica, proceso y objeto ya no sólo matemáticos, sino que se habla también de problemas, prácticas, procesos y objetos didácticos.

A continuación exponemos, de manera resumida, en qué consisten cada una de las herramientas teóricas utilizadas.

Al ser el EOS un enfoque ontológico y semiótico, asigna un papel central a los tipos de objetos matemáticos y su naturaleza, al lenguaje y a los procesos de comunicación e interpretación. Así pues, un objeto matemático es todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. Otro elemento básico de las construcciones teóricas del EOS es la noción de práctica, pues es de los sistemas de prácticas de donde emergen los objetos matemáticos.

La práctica matemática se refiere a "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas". (Godino, Batanero y Font, 2009, p.4).

Para la realización de una práctica matemática (en torno a la resolución de una determinada situación-problema) y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Dentro de estos conocimientos, se observa el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva (perceptible por alguno de los sentidos) de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella, en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. Entonces, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por los seis tipos de objetos anteriores: situaciones–problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, los cuales componen la tipología de objetos matemáticos primarios propuesta por el Enfoque Ontosemiótico:

Los objetos se relacionan entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, y las relaciones que se establecen entre ellos.

Entonces, en el EOS, la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas (lo que se hace) y discursivas (lo que se dice o declara). De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos primarios, que están relacionados entre sí formando configuraciones. La identificación de los objetos primarios y de las redes presentes en las configuraciones, serán herramientas clave para realizar la interpretación de la información generada en la investigación cuyos avances son reportados en este documento.

Las nociones teóricas explicadas hasta aquí, son herramientas básicas del modelo propuesto por el Enfoque Ontosemiótico para explicar las distintas componentes que intervienen en la cognición matemática. Pero este enfoque teórico propone, a su vez, que el modelo para explicar la cognición matemática puede ser aplicado también a los problemas de su didáctica.

Es decir, podemos hablar ya no solo de problemas, objetos, prácticas y procesos matemáticos, sino también de problemas, objetos y prácticas didácticas. Cuando se abordan problemas didácticos, las acciones (prácticas didácticas) que se ponen en juego, y los objetos emergentes de tales sistemas de prácticas (objetos didácticos) serán diferentes respecto del caso de la solución de problemas matemáticos.

Para el análisis de los procesos instruccionales, el EOS introduce las nociones de configuración y trayectoria didáctica. De acuerdo a esta perspectiva teórica, la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático se modeliza como "un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales" (Godino et al, 2009, p.12).

Se propone como unidad primaria de análisis didáctico la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno con relación a un objeto o contenido matemático, usando unos recursos materiales específicos. El proceso de instrucción sobre un contenido matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas. Una configuración didáctica lleva asociada una configuración epistémica, es decir, una tarea, los procedimientos requeridos para su solución, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones, que pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos.

Una configuración epistémica tiene asociada, a su vez, una configuración instruccional, constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema o tarea matemática abordada. Las distintas configuraciones didácticas, epistémicas e instruccionales que se presentan a lo largo de un proceso de instrucción, conforman, respectivamente, las trayectorias didáctica, epistémica e instruccional.

Metodología y contexto de investigación

La metodología de investigación que empleamos es de carácter cualitativo. Se trata de un estudio descriptivo interpretativo de las prácticas docentes. Para alcanzar el objetivo general, asumimos que debemos responder las dos preguntas de investigación siguientes:

1) ¿Cómo interpretan los profesores de matemáticas de secundaria el enfoque y la metodología promovidos por el Diplomado? Con lo cual pretendemos identificar lo que aparece al respecto en el discurso de los profesores; es decir, nos estamos enfocando en el nivel declarativo. Por tal razón utilizamos como instrumento de generación de información una entrevista semiestructurada, la cual fue diseñada buscando obtener información respecto de tres aspectos: el nivel de conocimiento que tienen los profesores sobre los planes y programas de estudio; los planteamientos presentes en los planes o programas oficiales que los docentes reconocen y que son promovidos en el Diplomado; así como sus concepciones personales sobre lo que es la matemática, su enseñanza y aprendizaje.

2) ¿Cómo llevan al aula los profesores de matemáticas de secundaria el enfoque y la metodología promovidos por el Diplomado mencionado? Pregunta que aborda, por su parte, las acciones concretas que lleva a cabo el profesor en su salón de clase.

En este caso, utilizando las construcciones teóricas seleccionadas, consideramos pertinente plantearnos las siguientes acciones para responder la segunda pregunta:

a) Identificar los *objetos matemáticos primarios* (situaciones problema, lenguaje, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentaciones) que promueve el profesor en su práctica docente.

b) Explicar las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas de los profesores, y las relaciones que se establecen entre ellos. Es decir, construir las configuraciones y trayectorias epistémicas que aparecen en el trabajo de aula de los profesores.

c) Describir las acciones sucesivas que va realizando el profesor en el aula a lo largo de las sucesivas sesiones de clase, y cómo se van relacionado entre sí, las cuales se conocen en el EOS como *configuraciones* y *trayectorias docentes*.

Para la selección de los sujetos de estudio con los que trabajamos, se tomó en cuenta que los docentes seleccionados hubiesen asistido a todas las sesiones de trabajo con una participación constante y que hubiesen realizado todas las actividades propuestas.

Bajo estos criterios, seleccionamos a dos profesores de segundo año de una escuela secundaria pública de Hermosillo, Sonora, México. Se observaron 21 sesiones de 45 minutos, en las cuales se abordaron contenidos del apartado "*Proporcionalidad y funciones*" del programa de matemáticas vigente para la escuela secundaria (SEP, 2011).

Resultados preliminares

Hasta el momento tenemos resultados parciales producto de la organización y análisis preliminar de la información. Mostraremos dichos avances en dos rubros, atendiendo a cada una de las preguntas de investigación:

I. Concepciones personales sobre la enseñanza y aprendizaje, conocimiento de la propuesta curricular e interpretación del enfoque y metodología del Diplomado que presentan los profesores a nivel de discurso.- Presentamos una síntesis de algunos de los elementos importantes que aparecen en el discurso de los sujetos de estudio:

a) Consideran que los problemas de matemáticas son situaciones contextualizadas fuera de la matemática, no se consideran los contextos intra-matemáticos.

b) Rescatan como elemento importante del Diplomado el promover el trabajo colaborativo, entendiendo éste no sólo como el promover que los alumnos trabajen en equipo las situaciones- problema que se les plantean en el aula, sino también como el compartir entre el colegiado de profesores de su comunidad, las opiniones, dudas y sugerencias que existan respecto a su quehacer docente.

c) Exponen su dificultad para trabajar con los alumnos diferentes métodos de resolución de alguna clase de situaciones-problema.

II. Las prácticas docentes observadas en el aula.- Para cada uno de los profesores observados elaboramos las trayectorias epistémicas y docentes desarrolladas a lo largo del periodo de observación. Con las primeras tenemos una visión organizada de los objetos matemáticos primarios presentes y los que se espera emergerán a partir de la actividad de los estudiantes conducidos por el profesor. Con las segundas, tendremos la visión de cada una de las acciones docentes planeadas y emergentes vividas en el devenir de la clase.

Ejemplificamos con una sección de una trayectoria epistémica y con una sección de una trayectoria docente de uno de los profesores estudiados, al cual llamaremos profesor A, cómo es que organizamos y analizamos la información.

<table>
<tr><th colspan="2">Trayectoria epistémica 1</th></tr>
<tr><th colspan="2">Configuración epistémica 1 (sesión de clase 1)</th></tr>
<tr><td>El profesor, después de unos minutos de iniciada la clase, entrega a los estudiantes, los cuales están organizados en equipos, una hoja con una actividad didáctica. La que sigue es una de las secciones de ella.</td><td>Objetos matemáticos primarios presentes y emergentes.</td></tr>
<tr><td>La siguiente tabla muestra algunas conversiones que se hicieron en una casa de cambio de diferentes países con respecto al peso:
<table>
<tr><td>País</td><td>Nombre de la moneda</td><td>Cantidad en la moneda correspondiente</td><td>Cantidad recibida en pesos mexicanos</td></tr>
<tr><td>Estados Unidos</td><td>Dólar americano</td><td>10</td><td>129.40</td></tr>
<tr><td>España</td><td>Euro</td><td>100</td><td>1705.73</td></tr>
<tr><td>Costa Rica</td><td>Colones</td><td>200</td><td>5.12</td></tr>
<tr><td>Brasil</td><td>Reales</td><td>120</td><td>890</td></tr>
<tr><td>Japón</td><td>Yen</td><td>150</td><td>25.30</td></tr>
</table>
María fue de viaje a Estados Unidos y de ahí viajó a Brasil, a su regreso cambió las monedas que le sobraron, 13 dólares americanos y 39 reales brasileños, ¿Cuántos pesos mexicanos recibió por los dólares americanos? ¿Y por los reales?</td><td>Situación problema:
A partir de información presentada en una tabla, responder dos cuestionamientos.
Lenguajes: verbal y tabular.
Procedimientos: división para conseguir el valor unitario y multiplicación posterior, redondeo de cifras con decimales.</td></tr>
</table>

Tabla 1. Configuración epistémica 1 de la Trayectoria epistémica 1.

<table>
<tr><th colspan="2">Trayectoria docente 1</th></tr>
<tr><th colspan="2">Configuración docente 1 (sesión de clase 1)</th></tr>
<tr><th>Descripción de las acciones del docente</th><th>Estado</th></tr>
<tr><td>Escribe en el pizarrón el tema “Relación proporcional”. Pide que se formen equipos y reparte a cada uno dos hojas de trabajo con situaciones-problema a resolver. No da ninguna introducción al contexto en el que se insertan las situaciones-problema.</td><td>Asignación</td></tr>
<tr><td>Deja a los equipos trabajar de manera libre en las situaciones-problema. Da vueltas por algunos equipos para ver la manera en que están abordando los problemas y para resolver dudas. No se acerca a todos los equipos, acude principalmente a los que lo llaman para hacerle alguna pregunta.</td><td>Asignación</td></tr>
</table>

Se percata de las confusiones de algunos alumnos, principalmente en relación a los objetos “cantidades directamente proporcionales” y “constante de proporcionalidad”. Aclara a todo el grupo que más adelante, en la puesta en común, posiblemente se resolverán sus dudas.	Asignación
Después de aproximadamente 30 minutos de iniciado el trabajo por equipos, el profesor lo interrumpe y solicita la atención del grupo para hacer una breve puesta en común que atienda las dudas generales que se han presentado.	Asignación
Indaga si hubo dificultades para contestar las preguntas de la configuración epistémica 1, motivando la participación de los alumnos.	Evaluación
Ante el conflicto expresado por un alumno con relación al contexto extra matemático en el que se inserta la situación-problema 1, la discusión toma otra dirección y el docente acaba promoviendo el uso de la calculadora.	Asignación
Retoma la línea inicial de conducción de la puesta en común, preguntando a los alumnos qué estrategia siguieron para resolver las consignas de la configuración epistémica 1, y qué dificultades tuvieron.	Asignación
Valida la intervención de un alumno que describe el procedimiento llevado a cabo por su equipo y promueve la participación del resto del grupo al respecto de lo que enunció el compañero.	Regulación, Motivación
Promueve la contrastación de estrategias y procedimientos realizados por los diferentes equipos, lo cual le permite identificar conflictos semióticos.	Asignación, Regulación

Tabla 2. Configuración docente 1, asociada a la configuración epistémica 1

A partir de lo mostrado, podríamos concluir, en el caso del profesor A que, en cuanto al nivel epistémico:

a) Pone en escena una configuración epistémica que si bien parte de una situación problema en un contexto extra matemático, poco tienen éste que ver con la cotidianeidad de los alumnos. Además se desaprovecha la oportunidad de conectar el contexto con otras áreas del conocimiento.

b) Con la situación-problema propuesta, se promueve el uso de un procedimiento para encontrar la constante de proporcionalidad.

c) Promueve el uso de diferentes lenguajes a lo largo de la configuración (hay lenguaje numérico y verbal), pero no hay un esfuerzo de promover las conversiones entre ellos.

Con relación a los aspectos docentes, afirmamos que el profesor A:

a) Trata de que los alumnos lleguen por sí mismos a la solución de los problemas que les plantea. Ante las frecuentes preguntas que hacen los alumnos en las que piden su validación, no da una respuesta categórica, pero en cambio los anima a que expresen su opinión.

b) No proporciona introducciones al contexto en el que se trabaja la situación problema, lo cual provoca la aparición de dificultades debido a la presencia de términos desconocidos o poco familiares para los estudiantes.

c) Reorienta la actividad al percatarse de las dificultades generales que están surgiendo durante el trabajo en equipos. Originalmente la sesión estaba planeada para destinarse enteramente a la actividad por equipos, pero el profesor recondujo su estrategia con base en las necesidades del grupo.

d) A través del recurso de hacer preguntas, promueve la participación de los alumnos y la contrastación de estrategias y procedimientos de resolución llevados a cabo por los diferentes equipos.

e) Identifica dificultades que presentan los alumnos, los anima a expresarlas ante el grupo y promueve que en una discusión grupal se expresen argumentos que permitan validar o invalidar los procedimientos propuestos.

Consideraciones finales

Como pudo observarse en el apartado anterior, los resultados presentados son parciales e intentan ejemplificar la relación existente entre preguntas de investigación, herramientas teóricas usadas, metodología y análisis. La investigación se encuentra en la etapa final, en la cual estamos estructurando las conclusiones a partir de la integración de los análisis parciales de la información de los dos sujetos de estudio.

Referencias bibliográficas

Ávila, A. (2001). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudio sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39 (1-2)*, 127-135.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 9 (4), 131-155.

Ibarra, S., Villalba, M., Armenta, M., Del Castillo, A., Grijalva, A., Soto, J., Urrea, M. y Ávila, R. (2011). *Diplomado Prácticas Docentes en las Matemáticas de Secundaria. Guía del Instructor*. Universidad de Sonora. México.

Mena, R. (2005). *Un estudio sobre la enseñanza del álgebra*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad de Sonora. México.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México: SEP.

NÍVEIS DE CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS ESPERADOS DOS ESTUDANTES PARA ACESSO NA UNIVERSIDADE BRASILEIRA

Lourival Pereira Martins, Carlos Roberto da Silva, Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos
Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN Brasil
lomib@ig.com.br, carlos@diadematematica.com, alvesdias@ig.com.br, aniammcampos@gmail.com

Resumo. O objetivo desse trabalho é relatar uma análise buscando identificar os conhecimentos matemáticos institucionalmente esperados pelo sistema educacional brasileiro para os estudantes concluintes do Ensino Médio do ano de 2011 tomando como base a avaliação do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM 2011, que atualmente é utilizada para o acesso pela grande maioria das universidades pública e privada. Para construir nosso instrumento de análise consideramos elementos da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (2001), as abordagens teóricas em termos de quadros segundo definição de Douady (1992) e níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997). Nessa análise, buscamos identificar uma visão geral das relações pessoais institucionalmente esperadas dos estudantes, no que se refere aos conteúdos matemáticos, que tenham sido estudados pelos mesmos durante os 12 anos que compõem a Educação Básica no Brasil.

Palavras chave: níveis de conhecimento, quadro, expectativas institucionais

Abstract. The aim of this project is to report an analysis in order to identify the mathematical knowledge institutionally expected by the Brazilian educational system for high school students graduating in 2011, based on the results of ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio (2011) – a national exam used by several students to enter public and private universities. Our analysis was based on elements of The Anthropological Theory of the Didactic of Chevallard (2001), theoretical approaches in terms of frames as defined by Douady (1992) and levels of knowledge expected of students as defined by Robert (1999). In this analysis, we attempted to identify an overview of students personal relationships institutionally expected in relation to mathematical contents which have been studied by them during the 12 years of the Basic Education in Brazil.

Key words: levels of knowledge, framework, institutional expectations

Introdução

A busca de uma resposta às constantes críticas às deficiências do Ensino Básico no Brasil têm mobilizado as instituições oficiais na busca de uma resposta à sociedade por meio da formulação de políticas que levem à melhoria desse ensino.

Várias são as ações que têm sido implementadas nesse sentido, tanto em nível estadual como federal entre elas uma das que têm tido maior repercussão é o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, não só pela importância enquanto avaliação dos estudantes ao final do Ensino Médio, mas também por seu papel enquanto referência para a entrada no Ensino Superior.

O ENEM é uma avaliação de âmbito nacional que tem como objetivo, segundo a página oficial do Ministério da Educação e Cultura – MEC, "democratizar as oportunidades de acesso às vagas federais de ensino superior, possibilitar a mobilidade acadêmica e induzir à reestruturação dos currículos do Ensino Médio" (Brasil, 2012). Isso nos conduziu a considerar essa avaliação como um dos instrumentos por meio do qual as instituições oficiais podem considerar o desempenho dos estudantes e também avaliar o funcionamento da estrutura de ensino montada para a formação dos mesmos.

Assim, o objetivo desse trabalho é relatar uma análise das questões proposta na prova de matemática do ENEM 2011, tomando como ferramentas de análise elementos da teoria Antropológica de Chevallard (2001), a noção de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1999) e a noção de quadros segundo definição de Douady (1986, 1992)

Referencial teórico

A ação oficial, como destacada na introdução, assim como a participação de um grande número de setores da sociedade preocupado com a formação do estudante egresso em nosso sistema de ensino, tanto no aspecto da necessidade de formação de mão de obra cada vez mais especializada, como na formação individual do ser humano é que em última instância define não só os conteúdos como a forma como esses devem ser trabalhados em sala de aula. Assim, se nos referimos a Chevallard (1994, 1997, 1999, 2001), observamos que essas instâncias culturalmente estabelecidas na sociedade constituem a *noosfera* que segundo Chevallard (1999) é constituída por professores militantes, associações educacionais, formuladores de políticas públicas institucionais entre outros. Isso nos conduziu a considerar que um olhar institucional para o ensino da Matemática no Ensino Médio brasileiro pode ser identificado por meio da avaliação do ENEM, o que fica evidenciado na matriz de referência definida pelo Ministério da Educação e Cultura em que são apresentadas as competências e habilidades que se espera tenham sido desenvolvidas pelos estudantes ao longo de sua vida escolar na Educação Básica. Observamos aqui que o Ensino Médio integra atualmente a Educação Básica e passará a ser obrigatório a partir de 2016.

Evidenciamos ainda que na matriz de referência, definida pelo Ministério da Educação e Cultura em 2009 por meio do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacionais Anísio Teixeira é explicitadas as competências e habilidades, que servem de base para elaboração da avaliação. Podemos assim considerar que esse documento irá direcionar o trabalho de todos aqueles administradores escolares e professores que esperam um bom desempenho dos estudantes de suas respectivas instituições.

A título de exemplo citamos a competência "III. Enfrentar situações-problema" (Brasil, 2009, p.1), mais especificamente para a área de matemática e suas tecnologias sob o título "Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais" encontramos, por exemplo, a habilidade "H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais" (Brasil, 2009, p 5).

Tomando como base essa informação, os gestores escolares de cada escola, escolhidos pela sociedade para representar seus interesses, terão como expectativa conduzir seus estudantes a um desempenho favorável nessa avaliação. Dessa forma, eles tendem a adequar a situação proposta e trabalhar com seus estudantes de forma que possam responder satisfatoriamente às questões que visam avaliar as competências e habilidades indicadas nos documentos oficiais. O que nos conduz à noção de relação institucional e pessoal com os objetos matemáticos conforme Chevallard (2001).

Chevallard (2001) define relação institucional e pessoal ao objeto O quando pelo menos uma pessoa X ou uma instituição I tem relação com esse objeto. Exemplo: A noção de função é um objeto matemático, mas existem também os objetos "escola", "professor", "aprender", "saber", "dor de dente", etc.

Para refinar nossas análises consideramos ainda a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1999). A autora propõe a existência de três níveis de conhecimentos, técnico, mobilizável e disponível, utilizados pelos estudantes durante a execução de uma tarefa. Ainda segundo a autora, na análise de uma atividade é fundamental identificar em qual nível é exigido para que o estudante adapte seus conhecimentos. Este diagnóstico permite identificar se os estudantes são capazes de resolver apenas questões de solução imediata, nível técnico, ou se são capazes de mobilizar seus conhecimentos, ou seja, quando esses são pedidos explicitamente na tarefa ou se os estudantes dispõem de conhecimentos necessários para a solução de uma tarefa, nesse caso eles buscam em um sistema de referência as tarefas mais próximas àquela que devem resolver e por associação identificam o conhecimento em jogo.

Para melhor compreender a importância dada aos diferentes domínios matemáticos desenvolvidos na Educação Básica segundo a cultura brasileira, utilizamos a noção de quadro, segundo definição de Douady (1986), a saber: "*um quadro é constituído pelos objetos de um ramo da matemática, das relações entre esses objetos, e as várias imagens mentais associadas a esse objeto dentro desse quadro*" (Douady, 1986, p.13). A autora observa que um mesmo objeto visto em dois quadros distintos é descrito de forma diferente, gerando imagens mentais distintas e necessárias para a compreensão desse objeto.

Metodologia

Trata-se de um estudo inserido em um projeto mais amplo sobre a transição entre os Ensinos Fundamental, Médio e Superior.

Para o desenvolvimento desse trabalho utilizamos a metodologia da pesquisa documental, que corresponde a uma técnica da pesquisa qualitativa que deve ser realizada a partir de documentos cientificamente autênticos. Ao estudo documental associamos a construção de uma grade de análise que permite identificar o conteúdo matemático em jogo para cada questão, a abordagem proposta, os tipos de tarefas, os tipos de técnicas, o quadro de solução da tarefa, o nível de conhecimento esperado dos estudantes e a identificação do contexto para verificar se o mesmo é ou não artificial. A grade de análise foi construída com base nos documentos oficiais para o Ensino Fundamental e Médio brasileiro, ou seja, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, Brasil (1997), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Brasil (2002), as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Brasil (2006) e a Matriz de Referência do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas, Brasil (2009). Nesses documentos são propostos os conteúdos a serem trabalhados e indicações metodológicas para o desenvolvimento dos mesmos. Neles foi possível identificar as relações institucionais esperadas dos estudantes que terminam o Ensino Médio em relação aos elementos da grade elencados acima. Aplicamos ainda a grade nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM dos anos de 2009, 2010 e 2011, que correspondem aos anos em que essa prova se tornou instrumento para acesso às universidades públicas e obtenção de bolsa em universidades privadas, para identificar as relações pessoais esperadas dos estudantes que terminam o Ensino Médio e terão acesso ao Ensino Superior.

Comparamos os resultados obtidos para as relações institucionais e pessoais esperadas para identificar os conhecimentos que podem ser supostos mobilizáveis ou disponíveis para aqueles que iniciam o Ensino Superior.

Resultados encontrados

Ao se propor uma questão, o formulador da mesma, deve levar em consideração os objetivos, por meio das competências e habilidades definidas, no caso de acordo com a matriz de referência, que pretende atingir e quais os conhecimentos necessários para que uma resposta seja formulada.

De acordo com Robert (1999) podemos considerar que a forma de proposição de uma questão pode ou não facilitar o estudante a encontrar uma resposta, pois esta depende do nível de conhecimento exigido na questão.

Apresentamos a seguir a análise de uma questão em função do nível de conhecimento esperado dos estudantes para a sua solução.

Na figura 1 apresentamos um exemplo de uma situação do ENEM 2011cujo nível de conhecimento é o técnico.

O medidor de energia elétrica de uma residência, conhecido por "relógio de luz", é constituído de quatro pequenos relógios, cujos sentidos de rotação estão indicados conforme a figura:

Disponível em: http://www.enersul.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010.

A medida é expressa em kWh. O número obtido na leitura é composto por 4 algarismos. Cada posição do número é formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro.

O número obtido pela leitura em kWh, na imagem, é

A 2 614.
B 3 624.
C 2 715.
D 3 725.
E 4 162.

Figura 1: ENEM 2011, p.20

Nessa questão é pedido ao estudante que efetue a leitura registrada em um relógio medidor de energia elétrica, sendo destacado no enunciado que a mesma é expressa em kWh e que o número obtido na leitura é composto por quatro algarismos. Sendo a posição do número formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro.

Para respondê-la o estudante necessita conhecer e utilizar como ferramenta explícita o sistema de representação decimal o que permitirá ler e interpretar o valor indicado nos esquemas que representam os relógios. Não se exige do estudante a mobilização de outros conhecimentos além dos indicados no enunciado. O quadro em jogo é o numérico, mesmo que na questão se faça o uso de figuras que poderiam ser associadas à geometria. Observamos ainda que a habilidade exigida é a leitura de códigos, o que nos conduziu a considerar o contexto utilizado para enunciar a tarefa como artificial.

Na figura 2 consideramos o exemplo de uma questão cujo nível esperado dos estudantes é o mobilizável.

O prefeito de cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por Km. construído (n), acrescido de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto que a segunda cobrou R$ 120 000,00 por Km construído (n), acrescido de um valor fixo de R$ 150000,00. As duas empresas apresentaram o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada. Do ponto de vista econômico, qual a equação possibilita encontrar a extensão da rodovia qualquer que seja uma das propostas apresentadas?

a) 100n + 350 = 120n + 150

b) 100n + 150 = 120n + 350

c) 100(n + 350) = 120(n + 150)

d) 100(n + 350 000) = 120(n + 150 000)

e) 350(n + 100 000) =150(n + 120 000)

Figura 2: ENEM 2011, p.26

Lembrando que o nível mobilizável corresponde a um conhecimento que é explicitamente pedido na questão e cabe ao estudante utilizá-lo de forma correta buscando a ferramenta adequada para a solução da tarefa proposta.

Para a questão da figura 2 é solicitado ao estudante escolher entre cinco equações aquela que corresponde à passagem da representação em língua natural para a representação algébrica de uma função afim.

Como são dadas cinco equações em que uma delas corresponde a comparar duas funções afins que modelam a situação proposta. Trata-se de uma tarefa usualmente trabalhada no Ensino Médio no estudo das funções afins e basta o estudante identificar os dois casos possíveis para associar cada lado da equação com os dados da situação, o que nos conduziu a considerar que o nível de conhecimento esperado dos estudantes é o mobilizável. Observamos ainda que para a mesma situação se não é dado o conjunto de equações cabe ao estudante identificar o conhecimento em jogo e assim teríamos uma tarefa cujo nível esperado é o disponível, pois cabe ao estudante buscar entre os objetos que domina os conceitos relacionados à dependência funcional, mais especificamente o conceito de função afim.

Ressaltamos ainda que o quadro de solução da tarefa é o algébrico e que o contexto apresentado é apropriado para a formulação da situação sobre a noção de função afim proposta.

Na figura 3 apresentamos o exemplo de uma questão cujo nível de conhecimento esperado dos estudantes é o disponível.

Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

Terreno 1: 55 m por 45 m
Terreno 2: 55 m por 55 m
Terreno 3: 60 m por 30 m
Terreno 4: 70 m por 20 m
Terreno 5: 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno

A 1.
B 2.
C 3.
D 4.
E 5.

Figura 3: ENEM 2011, p.21

Embora seja uma questão aparentemente mais simples ela não faz nenhuma referência ao conhecimento envolvido na sua solução. O estudante deverá, dentro das ferramentas que dispõe buscar aquelas que se referem ao cálculo do perímetro e medida de superfície e ter um domínio mínimo das noções relacionadas à variação funcional. A partir dessas informações o estudante poderá resolver o problema de duas maneiras.

- Calcular os perímetros e as áreas de cada terreno e por comparação determinar aquele que apresenta perímetro constante e a maior área.
- Modelar a área em função do comprimento ou largura, obtendo uma função quadrática, que deve ser maximizada por meio da determinação do vértice.

Na primeira solução o quadro em jogo é o da aritmética generalizada, quadro em que os objetos matemáticos são tratados pelas propriedades das operações numéricas envolvidas, mas é preciso comparar os resultados encontrados, o que exige um raciocínio associado aos fundamentos da álgebra. Na segunda solução o quadro em jogo é o algébrico, visto que exige que o estudante disponha das noções de função quadrática e determinação do ponto de máximo da mesma, que corresponde ao seu vértice.

Para essa tarefa observamos que os conhecimentos em jogo são perímetro e área de um retângulo e para a maximização por meio da segunda técnica exige ainda conhecimentos sobre função quadrática e suas propriedades. Além disso, o contexto utilizado para enunciar a situação é apropriado para o desenvolvimento e aplicação das noções em jogo.

Após a aplicação da grade às 45 questões de matemática da prova do ENEM 2011 observamos que dezesseis poderiam ser respondidas com aplicação imediata da técnica relacionada ao conhecimento envolvido, isto é, exigiam o nível técnico. Vinte e três levavam à mobilização de algum conhecimento. E apenas seis provocavam o estudante levando-o à necessidade do nível que Robert classifica como disponível, ou seja, aquele em que o estudante deve buscar na sua bagagem de conhecimentos situações de referência que o auxiliem a resolver a situação proposta, pois nenhuma indicação sobre o conhecimento em jogo é dada na situação.

Identificamos a presença de seis quadros a saber: aritmética generalizada, aritmética, numérico, algébrico, geométrico e estatístico. Sendo predominante o quadro da aritmética generalizada para o qual encontramos dezoito questões que correspondem a 40% da prova de matemática. Quatro questões envolvem conhecimentos relacionados apenas à leitura e interpretação de números, que classificamos como quadro numérico e seis questões que poderiam ser resolvidas utilizando as operações numéricas básicas, classificadas dentro do quadro da aritmética. Apenas dez questões necessitavam da utilização de estruturas associadas ao quadro algébrico. Seis questões, ou seja, menos que quinze por cento da prova, foram propostas utilizando objetos no quadro da geometria e duas no quadro da estatística.

Considerações finais

Ressaltamos que os resultados e as considerações aqui apresentadas correspondem apenas às expectativas institucionais sobre as relações institucionais e pessoais esperadas dos estudantes e nem todos os estudantes atingem essas expectativas, mesmo se essas dão pouco destaque aos conhecimentos desenvolvidos no Ensino Médio, como mostram os resultados da macroavaliação ENEM.

Assim, a partir da análise desenvolvida observamos que a relação pessoal esperada dos estudantes, por parte dos atores envolvidos na formulação do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, está associada aos conhecimentos desenvolvidos nos nove primeiros anos da escolaridade, pouca ênfase é dada aos conteúdos trabalhados no Ensino Médio (14 – 17 anos), o que justifica as exigências dos níveis técnico e mobilizável.

As questões propostas nos quadros numérico e aritmético constituíram cerca de vinte e dois por cento da avaliação. Esses conhecimentos são anteriores ao momento em que o estudante é introduzido no mundo da álgebra sendo tratado nas séries iniciais do Ensino Fundamental (6 – 11 anos).

Quarenta por cento das questões foram propostas no quadro que denominamos de aritmética generalizada, quadro em que se situa a transição da aritmética para a álgebra, com a generalização das propriedades das operações numéricas e desenvolvimento de uma linguagem que permitirá o trabalho com a álgebra.

Essa etapa da formação escolar é desenvolvida nas séries finais do Ensino Fundamental (11 – 14 anos). Logo, sessenta e dois por cento das questões exige conhecimentos associados à relação pessoal que se espera tenha sido desenvolvida ao longo do Ensino Fundamental.

Quando consideramos o nível de conhecimento esperado dos estudantes em relação às noções matemáticas que compõem a avaliação, observamos que a ênfase é dada ao nível mobilizável, com cerca de cinquenta por cento das questões propostas. Quinze por cento das questões propostas estão no nível técnico, restando apenas cerca de quinze por cento no nível disponível.

Podemos considerar, de acordo com as expectativas institucionais em relação ao conhecimento matemático exigido na avaliação de acesso ao Ensino Superior, que aqueles que dispõem das técnicas operatórias e são capazes de aplicar as regras e leis do cálculo algébrico estão preparados para utilizar esses conhecimentos na construção de novos conhecimentos.

Referências bibliográficas

Brasil (2009). *Matriz de referência do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Acesso em 14 de setembro de 2012 de http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13318&Itemid=310

Brasil (2012). *ENEM pagina inicial*. Acesso em 14 de setembro de 2012 de http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13318&Itemid=310

Brasil (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasilia: MEC, SEF.

Brasil (2002). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza Matemática e suas tecnologias. PCN + Ensino Médio.* Brasilia: MEC, SEMTEC.

Brasil (2006). *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza Matemática e suas tecnologias*. Brasilia: MEC; SEMTEC.

Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algèbre et transposition didactique. En *Actes du Seminaire des Mathématiques de l'Université de Torino,* 52 (2), 175-234. Torino: Seminário de l'Associazione Mathesis.

Chevallard, Y. (1997). Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique. *Skholê* 7, 45-64.

Chevallard, Y. (1999). L' analyse des pratiques enseignantes en theorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221-226.

Chevallard, Y. (2001). *Organiser l'étude 1. Structures & Functions.* Acesso em 20 de fevereiro de 2012 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52

Chevallard, Y. (2001a). *Organiser l'étude 3. Ecologie & Regulation*. Acesso em 20 de fevereiro de 2012 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet**.** *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2), 5-31.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

Robert, A. (1999). *L' Enseignement de mathématiques au lycée. Un point de vue didactique*. Paris: Eclipses Edition Marketing S.A.

LENGUAJE MATEMÁTICO Y VALIDACIÓN EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Patricia Sastre Vázquez, Rodolfo Eliseo D´Andrea
Facultad de Agronomía Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires Argentina
Facultad de Química e Ingeniería Universidad Católica Argentina
psastre@faa.unicen.edu.ar

Resumen. El presente artículo reporta el primer año del Proyecto trienal de Investigación: Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería, el cual se realiza en dos Facultades de Ingeniería de Argentina. Los estudiantes no transponen automáticamente el lenguaje natural al lenguaje matemático. El desconocimiento del lenguaje matemático genera dificultad en la comprensión de los conceptos matemáticos, cómo se relacionan éstos y cómo se les aplica en la resolución de problemas. En este proyecto se intenta caracterizar a las dificultades en la comprensión de los lenguajes matemático y natural, de los estudiantes que ingresan a la Universidad, y la incidencia de estas dificultades en los procesos de validación. Asimismo se pretende proponer alternativas de solución a las dificultades generadas en la extrapolación del lenguaje natural al lenguaje matemático, haciendo un aporte a los estudiantes de ingenierías con problemas similares.

Palabras clave: lenguaje natural, lenguaje matemático, extrapolación, validación

Abstract. This paper reports the results of the first year of the triennial Research Project: Analysis of the Mathematical Language and their influence in the processes of Validation by university students of Engineering, which is being carried out in two Engineering Colleges of Argentina. The students do not transfer automatically the natural language to the mathematical language. The ignorance of the mathematical language generates difficulty in the understanding of the mathematical concepts, how relate these and how applies them in the resolution of problems. This project tries to characterize the difficulties in the understanding of the mathematical and natural languages, of the students that the incoming students to the University, and the incidence of these difficulties in the processes of validation. Likewise it pretends propose alternatives of solution to the difficulties generated in the extrapolation of the natural language to the mathematical language, doing a contribution to the students of engineering with similar problems.

Key words: natural language, mathematical language, extrapolation, validation

Introducción

Beyer y Suarez (1988, p. 59) afirman:

> El sistema educativo se apoya, en gran medida, en la comprensión del lenguaje y en consecuencia, para que funcione eficientemente, es necesario que los estudiantes de todos los niveles posean habilidades para comprender el lenguaje en sus diferentes formas: oral, escrito, simbólico, icónico.

Si se considera a la Matemática como una manifestación semiótica; (Radford, 2003), entonces sus elementos generan significados sintácticos y semánticos en un lenguaje simbólico, el cual podría considerarse equivalente al lenguaje natural de un individuo. Sin embargo los estudiantes no transponen automáticamente el lenguaje natural que utilizan habitualmente al lenguaje matemático. Precisamente la falta de comprensión de los conceptos matemáticos expresados en el lenguaje que le es propio a la Ciencia Matemática no permite ver como éstos se relacionan y su utilización en la resolución de problemas.

Desde el punto de vista de la comunicación, la característica más importante de la Ciencia Matemática es su lenguaje riguroso, el cual está ligado al hecho de que sus conceptos son entes abstractos cuyas representaciones están determinadas tanto por la semiótica como por la noética (Duval, 2000), de manera que las relaciones de los símbolos y signos dependen del dominio conceptual en el que se encuentren. Las expresiones matemáticas, por sencillas que sean, son registros semióticos que determinan significados (semántica), sin importar la forma en la que están representadas (sintaxis). Estos significados están mediados por conceptos fundamentales que son la base de la construcción del saber matemático.

Para los estudiantes es fundamental poseer un uso apropiado del lenguaje matemático, ya que esta habilidad les facilita la aprehensión de los procesos que constituyen la estructura teórica de cada contenido matemático. Estos contenidos necesitan ser comprendidos para una efectiva apropiación por parte del estudiante a los efectos de extrapolarlos a actividades procedimentales específicas del curso de Matemática elegido y de aplicación a Tecnologías básicas.

La palabra "validación" toma mayor presencia a partir de su uso en los trabajos de la Escuela Francesa (Brousseau, 1994 y Balacheff, 1987). Dentro de este marco teórico, la validación consiste en el empleo de recursos de tipo técnicos, teóricos disciplinares y argumentativos, por parte del que aprende, para garantizar la validez de un resultado formulado. Esta actividad se realiza teniendo en cuenta las convenciones de una comunidad que trata el saber en forma experta, ya que es frente a este ámbito que debe dar garantías de validez. En este sentido, la validación es una actividad matemática inherente al estudio de la disciplina; sin embargo, no hay suficiente desarrollo didáctico sobre cómo se aprende o cómo se enseña a validar (Falsetti, Marino y Rodríguez, 2004). El lenguaje matemático está dotado de una simbología y una estructura que le son propias. Es fundamental conocer el significado de sus símbolos para ser capaces de interpretar lo que se quiere decir con ellos y, además, para utilizarlos con el objetivo de expresar lo que se quiera expresar.

Problema de investigación

En general, al comenzar sus estudios universitarios los estudiantes presentan numerosas dificultades. En particular, al iniciar sus clases de Matemática, surge una serie de obstáculos que complican el proceso de enseñanza-aprendizaje. Uno de los problemas más notables que muestran los alumnos universitarios, al comenzar la asignatura Matemática, es su casi total incompetencia en el uso del lenguaje matemático.

Al momento de la resolución de problemas, estos dependen en principio de la comprensión del enunciado y luego de la conversión de las informaciones que se presentan: se debe pasar de una descripción discursiva de los objetos a una escritura simbólica (numérica o literal) de sus relaciones, es decir, a un modelo simbólico de la situación. Este pasaje no es automático ni directo y el estudiante, incluso pudiendo trabajar eficazmente en los registros de partida y de llegada efectuando tratamientos de las representaciones, por separado, puede no lograr la conversión entre registros. (Sastre Vázquez, Boubeé, Rey y Delorenzi, 2008).

A la hora en que el estudiante debe enfrentarse a la resolución de problemas, una parte importante de sus dificultades se debe a que no logran dar 'el primer paso', el que consideramos básico y fundamental, el cual es la lectura comprensiva del enunciado del problema, su interpretación acabada, que es la base sobre la cual deberá construirse la posterior resolución, que también puede presentar problemas, pero de otro tipo. (Sastre Vázquez et al, 2008).

Sastre Vázquez, Boubée y Rey (2005), en los estudios de diagnóstico llevado a cabo en la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina, encuentran que los estudiantes realizan medianamente la operatoria numérica, plasmada en ejercicios descontextualizados, mientras que al enfrentarse a situaciones de mayor complejidad, un alto porcentaje no las resuelve, o las realiza inadecuada o erróneamente.

Según Gascón Pérez (1997), la actividad matemática en los estudios de secundaria se puede calificar de mostrativa, es decir, basada en recordar, ordenar y sistematizar conocimientos fundamentados en el sentido común. En este nivel educativo, las definiciones se realizan mediante comentarios y ejemplos concretos, haciendo un uso muy limitado del lenguaje matemático. Por otra parte, considera que en la universidad los estudios de matemáticas se centran en una actividad que podemos llamar demostrativa, cuyo objetivo principal es la construcción de conocimientos matemáticos, de manera que se utiliza de forma rigurosa el lenguaje matemático, con su particular estructura y simbología.

Resumiendo, los estudiantes que ingresan a los estudios universitarios se enfrentan con numerosas dificultades, porque en ese ámbito la forma de impartir los contenidos es muy diferente a la que ellos están acostumbrados. Para comprender los contenidos matemáticos impartidos en la Universidad es necesario que los estudiantes conozcan los rudimentos del lenguaje matemático. Sin embargo, en general, desconocen los principales elementos de este lenguaje. Este desconocimiento es el causante de la producción de numerosos errores de construcción y de interpretación, el cual dificulta el proceso de incorporación de nuevas estructuras conceptuales.

Las dificultades que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática se incrementan cuando la actividad matemática se realiza con estudiantes cuyo principal interés no está centrado en esta ciencia. Los estudiantes y docentes pueden poseer diferentes concepciones sobre esta ciencia, y sobre la importancia y necesidad de esta disciplina en su carrera universitaria, particularmente en carreras 'no matemáticas'. Incluso pueden presentarse miradas diferentes entre los docentes que dictan esta asignatura y los docentes que son usuarios de la misma o podrían serlo.

En este proyecto, el interés se centra en conocer cómo los docentes y estudiantes utilizan el lenguaje matemático en el ámbito áulico y como se emplea ese lenguaje en procesos de validación. Para lograr los objetivos se propone: 1) explorar las ideas que tienen los docentes de Matemática de Carreras de Ingeniería sobre el lenguaje matemático y la epistemología de esta Ciencia, 2) estudiar la utilización que hacen los docentes del lenguaje matemático en el ámbito áulico, 3) analizar el nivel de conocimiento del lenguaje matemático con el que acceden los estudiantes a la Universidad, 4) analizar los procesos de validación utilizados por los estudiantes frente a ejercicios que requieren del uso del lenguaje matemático, 5) caracterizar y analizar las dificultades en los procesos de validación, causadas por el nivel de acceso al lenguaje matemático y 6) proponer líneas de acción para la resolución de las dificultades identificadas.

Metodología

Durante el primer año de la investigación, en una primera instancia se presentó, a 171 estudiantes ingresantes, una encuesta–diagnóstico, para obtener la información sobre el dominio que poseían del lenguaje matemático. Con los resultados se intenta caracterizar las dificultades y obstáculos en la comprensión del lenguaje matemático. Asimismo se pretende que los estudiantes, al enfrentarse con las preguntas, tomen conciencia de las lagunas que tienen, con el fin de provocar la necesidad de implicarse en acciones que les permitan solventar sus carencias frente a los cursos de Matemática universitaria. El test empleado está inspirado en la propuesta de Ortega (2002) con las modificaciones y adaptaciones que se consideraron necesarias. La primera parte de la encuesta recolectó información sobre: datos personales del estudiante, calidad de la enseñanza matemática recibida, grado de utilidad que le asigna a la Matemática, y su predisposición y gusto por la misma. En la segunda parte, se averiguó sobre cuestiones concretas relativas al lenguaje matemático: el grado de conocimiento del significado de los símbolos más usuales y de los enunciados que suelen aparecer en textos matemáticos.

En una segunda instancia, durante el primer año del Proyecto, se realizó una prueba con el objeto de analizar el conocimiento intuitivo de los estudiantes sobre la conjunción y la disyunción. La prueba consistió en seis ejercicios sobre cálculo con proposiciones y desigualdades, la cual se complementó con una encuesta a docentes y estudiantes.

La tercera instancia experimental de la investigación tuvo como objetivo explorar los procesos básicos de validación que poseían los estudiantes. Se aplicó una prueba consistente en cinco ejercicios orientados a determinar el valor de verdad de una proposición en los que se pedía al estudiante que explicara los razonamientos que seguía para cada elección.

El número de estudiantes que intervino en la segunda y tercera instancia experimental fue el mismo número de estudiantes que realizó la prueba diagnóstico, mientras que el número de docentes fue de 23 en total, considerando ambas instituciones.

Resultados

Sólo el 17 % de los estudiantes considera haber tenido una calidad de enseñanza que califica como mala o regular. La mayoría: 53 %, considera que ha recibido una buena enseñanza y el 30 % restante piensa que la calidad de enseñanza recibida fue muy buena.

El 55 % de los estudiantes, manifiestan que les gusta bastante la matemática. El 20 % dice que le gusta mucho, mientras que 26 % confiesa que la Matemática le gusta más o menos, poco o nada. Al 32 % de los estudiantes la Matemática les resulta difícil o más o menos difícil. Para el 37 % es una asignatura fácil y la consideran muy fácil el 31 % de los estudiantes. La mayoría afirma que la Matemática es bastante interesante (52 %) o muy interesante (25 %), mientras que un 24 % declaran que poco, o más o menos interesante.

Los estudiantes que señalan que la Matemática es bastante (55 %) útil, y los que la consideran muy útil (40%), suman el 95% de los encuestados. La mayoría de los estudiantes, entre un 75 % a un 80 %, manifestó que los 10 símbolos presentados les eran familiares. Para el reconocimiento de los símbolos □□y □□□□e tuvieron menores porcentajes de estudiantes (64 % a 66 %). Los símbolos □□□□□□□□□son los que más han sido usados por los estudiantes. Entre 51 % y un 68 % del grupo de encuestados los señalan como uno de los que han utilizado. El resto de los símbolos presentados no han sido utilizados por la mayoría de los encuestados (63 % hasta 70 % según el símbolo). Los símbolos □□□□□□□□□□son los que la mayoría de los estudiantes manifiestan conocer y, además, la mayoría da una descripción correcta de ellos, (entre un 67 % a un 71 % del grupo). Los símbolos cuyos significados fueron menos conocidos y sobre los cuales los estudiantes no dieron una interpretación fueron: □□□□y □□. Los estudiantes no extrapolaron la escritura simbólica de ciertas expresiones al lenguaje natural y menos aún pudieron proponer ejemplos de cada proposición. Es decir, no utilizaron el lenguaje matemático de forma "concreta" ni tampoco de forma "abstracta", los conceptos serían para ellos palabras carentes de significación matemática en sentido estricto.

Los resultados de la prueba realizada a los estudiantes, con el objeto de analizar el conocimiento intuitivo que de la conjunción y la disyunción poseían, revelan que la mayoría muestra confusión ante la utilización de la conjunción y la disyunción inclusiva. También la mayoría testifica desconocer el funcionamiento de ambos conectores y manifiesta nunca haber recibido información sobre éstos. Aproximadamente un 90 % de los estudiantes identifican la conjunción y se percatan que el valor de verdad de una proposición molecular es verdadero cuando las proposiciones atómicas son todas verdaderas. Sin embargo, en general no pueden señalar el valor de verdad falso, cuando alguna de las proposiciones atómicas resulta falsa y otras verdaderas. Tienden a analizar separadamente el valor de verdad de cada componente sin arribar a conclusión alguna. Pueden advertir la falsedad de la proposición completa cuando todas las componentes son falsas. No distinguen claramente la disyunción inclusiva, ya que sólo comprenden que puede ser verdadera cuando todas las componentes son verdaderas.

Del análisis de la prueba consistente en una serie de ejercicios orientados a determinar el valor de verdad, surge que la mayoría de los estudiantes, cuando deben validar, actúan a través de una verificación, pero sin un criterio formado al hacerlo, como “tanteando” y considerando esta acción como suficiente para establecer la verdad de una proposición matemática. Por lo general, los estudiantes entienden qué se espera de ellos cuando se les pide una demostración y reconocen que la verificación es insuficiente como demostración. Sin embargo, tienden a recurrir a la misma como mecanismo de prueba cuando encuentran dificultades. Esto probablemente está asociado al hecho de que en la vida y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba estándar, enfrentándose los estudiantes a un problema epistemológico no menor. Del análisis de las encuestas surge que los estudiantes tienen una idea muy ingenua de la Ciencia Matemática, una idea que parece anclada en las primeras ideas del niño, que adquiere en el ciclo primario, como si el paso por el ciclo medio no existiese.

Por su parte, aproximadamente un 90 % de los docentes de los cursos básicos de Matemática, declaran no realizar enseñanza alguna sobre la utilización y las implicancias en el lenguaje matemático, de la conjunción y la disyunción inclusiva, durante el desarrollo de sus clases. El mismo porcentaje recientemente mencionado, de los docentes utilizan poco el lenguaje matemático en todas sus facetas, evitando la simbolización.

Conclusiones

El enfoque tradicional de la enseñanza de la matemática, donde prevalece la transmisión de información en lugar de la formación, con procesos de comunicación unilaterales y donde no se hace énfasis en la transmisión y comprensión del lenguaje formalizado, trae aparejadas numerosas consecuencias negativas.

El lenguaje que utiliza la Matemática tiene su propia sintaxis la cual, en general, no coincide con la del lenguaje común o natural, y es importante tener en cuenta que no existen razones valederas para admitir que el alumno descubrirá tal sintaxis por sí mismo y sin ningún tipo de apoyo al respecto. La adquisición del dominio de lenguaje matemático no se logra de forma espontánea, sino que se requiere del ejercicio de una serie de acciones mentales, las cuales deberían ser desarrolladas en actividades propuestas al estudiante por el docente. Resumiendo, se sugiere que antes de la iniciación del desarrollo de los contenidos matemáticos, se realicen actividades con el objetivo de fortalecer el conocimiento y manejo del lenguaje matemático. Finalmente, es sumamente importante que los docentes reflexionen y sean conscientes de la importancia del lenguaje matemático, a fin de que ellos hagan hincapié en cuanto a la enseñanza del mismo.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

Beyer, W. y Suárez, N. (1998). Influencia del Lenguaje Formal Matemático en la Solución de Problemas con números Racionales. *Educación y Ciencias Humanas*, (10), 61-63, (59) 65 y 77.

Brousseau, G. (1994). Los Diferentes Roles del Maestro. En Cecilia Parra e Irma Saiz (Comps.). *Didáctica de Matemáticas* (pp. 65-94). Buenos Aires: Paidós, Educador.

Duval, R. (2000). *Basic Issues for Research in Mathematics Education*, in Proceedings of the 24nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1, 55-69.

Falsetti, M., Marino, T. y Rodríguez, M. (2004). Validación en Matemática en situación de aprendizaje. En: *Actas del VI Simposio de Educación Matemática*, Bs. As. Formato CD.

Gascón Pérez, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *SUMA Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (26), 11–22.

Ortega. J. F. (2002). Lenguaje Matemático: Una experiencia en los estudios de Economía de la UCLM. Murcia. *Departamento de Matemáticas. Instituto de Educación Secundaria "Diego Tortosa" de Cieza.*

Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice during the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 123–150.

Sastre Vázquez, P. Boubée, C. y Rey, G. (2005). Dificultades en la resolución de problemas del alumno ingresante a Ingeniería Agronómica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18,* 207 – 212. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sastre Vázquez, P., Boubée, C., Rey, G. y Delorenzi, O. (2008). La comprensión: proceso lingüístico y matemático. *Revista Iberoamericana de Educación*, 46, 8–15.

LA FORMACIÓN MATEMATICO-DIDÁCTICA DEL PROFESORADO DE PRIMARIA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS PROBABILIDADES. UN ANÁLISIS DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

Claudia Vásquez, Ángel Alsina
Pontificia Universidad Católica de Chile — Chile
Universidad de Girona — España
cavasque@uc.cl, angel.alsina@udg.edu

Resumen. Actualmente la enseñanza de la probabilidad ha adquirido mayor protagonismo a nivel curricular, planteando la necesidad de contar con profesores capacitados para una enseñanza idónea, principalmente en Educación Primaria. Para ello se requieren estudios que permitan determinar el conocimiento matemático-didáctico que los profesores deben poner en juego para enseñar probabilidades, los cuales aún son escasos. Bajo este escenario surge esta investigación, para analizar: ¿cómo desarrollar en profesores de primaria un conocimiento matemático-didáctico adecuado para una enseñanza idónea de la probabilidad? Para dar respuesta a este interrogante se utilizará como referente teórico de la Didáctica de la Matemática al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), con base en una metodología mixta, que contempla analizar, por un lado, el conocimiento matemático-didáctico de los profesores de primaria para enseñar probabilidades, y por otro, el grado de idoneidad didáctica de sus prácticas de enseñanza.

Palabras clave: formación del profesorado, conocimiento matemático-didáctico, probabilidad

Abstract. Currently teaching probability has greater role to curriculum level, so that qualified teachers are needed for an appropriate education, especially at primary level. It is therefore necessary to conduct research to determine appropriate teaching mathematical knowledge for teaching probability. From this point of view, the research question of our study is: How to develop an appropriate teaching mathematical knowledge for teaching ideal of probability in Elementary Education? The research is based on the Ontosemiotic Approach Knowledge and Mathematics Instruction (EOS), and used a mixed methodology to analyze, on the one hand, the teaching of mathematical knowledge primary teachers to teach probability, and secondly, the degree of educational suitability of their teaching practices.

Key words: teacher training, teaching mathematical knowledge, probability

Antecedentes, problemática de investigación y objetivos

En los últimos años la enseñanza de la probabilidad ha ido adquiriendo mayor protagonismo a nivel curricular, tanto desde una perspectiva internacional como nacional, para la formación de ciudadanos reflexivos y capaces de enfrentar situaciones de incertidumbre. En este sentido, el Ministerio de Educación de Chile actualizó el Marco Curricular de Educación Básica y Media e integró el tratamiento de la información como un nuevo eje temático, llamado "Datos y Azar". En esta actualización los contenidos de estadística debían ser abordados desde el primer ciclo de Educación Básica y los contenidos de probabilidades a partir del segundo ciclo (MINEDUC, 2009a, 2009b). Recientemente, este proceso de ajuste se ha modificado de nuevo por la incorporación de las nuevas Bases Curriculares de Educación Básica 2012, realizándose cambios profundos en el área de matemáticas siguiendo orientaciones internacionales (NCTM, 2003). Uno de estos cambios es la incorporación del eje temático de "Datos y Probabilidades" en toda la Educación Básica, para responder a la necesidad de que todos los estudiantes se inicien en temas relacionados con el azar y aminorar los desfases existentes entre el currículo nacional y los internacionales (MINEDUC, 2012). Estos desfases han quedado de manifiesto, principalmente, con el análisis de los resultados obtenidos por nuestros estudiantes en mediciones internacionales tales como *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) y *Programme for International Student Assessment* (PISA). Aun cuando los resultados de las últimas aplicaciones han experimentado cierta mejoría, en ambas mediciones nuestro país se ubica muy por debajo del promedio internacional en el área de matemáticas. Estos datos señalan la necesidad de que los profesores que enseñan matemáticas tengan una formación de más calidad, ya que en su gran mayoría no han contado en su formación inicial con asignaturas que les permitan alcanzar una enseñanza eficaz de la probabilidad, entendiendo por enseñanza eficaz aquella que "requiere que el profesor sea capaz de comprender lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender y, en consecuencia, les desafía y apoya para aprender bien los nuevos conocimientos" (NCTM, 2003, Pág. 17). Ello cobra aún más relevancia si consideramos que, en el caso de Chile, los datos sobre la calidad educativa en general y sobre la enseñanza de las matemáticas en particular revelan severas carencias. El informe 2010 de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) señala que nuestro país debe encauzar sus esfuerzos hacia la mejora de la formación de profesores en todo los niveles educativos, sobre todo en lo que se refiere a los profesores de Educación Básica, ya que estos "reciben una formación general, y los conocimientos que adquieren sobre las materias no resultan suficientes ni siquiera para los cursos iniciales" (OCDE, 2010, Pág.10). Otra investigación que avala lo expuesto es el estudio comparativo internacional *Teacher Education and Development Study in Mathematics* (TEDS-M), que en su informe de resultados *Breaking the Cycle, An Internacional Comparison of U.S. Mathematics Teacher Preparation* (Babcock *et al*, 2010), da a conocer resultados bastante preocupantes, ya que sitúa al desempeño de nuestros futuros profesores de enseñanza básica entre los peores del mundo, incluso muy por debajo de los resultados obtenidos por países con niveles de desarrollo iguales e inferiores al chileno. Y según el Reporte de Competitividad Global 2011-2012 del *World Economic Forum*, en un *ranking* de 142 países, Chile se encuentra en el número 87 en calidad general de la educación, y en el número 124 en calidad de la educación de matemáticas/ciencias.

Diversos estudios específicos sobre la enseñanza de las probabilidades revelan también serias carencias por parte de los futuros profesores. Azcárate (1995) detecta déficits en temas tan sencillos como las características de los fenómenos aleatorios, la asignación de probabilidades o la carencia de esquemas combinatorios, entre otros. Ortiz *et al.* (2006) exponen que los resultados obtenidos y las estrategias utilizadas por los futuros profesores de Educación Primaria en varios problemas son muy similares a las de los niños, siendo alarmante que los futuros profesores cometan los mismos errores que los alumnos a los que han de formar. Esta problemática cobra aún más relevancia para Chile, si consideramos el hecho de que encuestas aplicadas a profesores que enseñan matemática en el 2° Ciclo de Educación Básica han revelado que "un 45% de ellos declara no se sentirse preparado para enseñar los contenidos del eje de Datos y Azar a sus estudiantes, sobre todo aquellos vinculados a las probabilidades" (Vásquez, 2011).

Desde este marco es necesario realizar estudios relacionados con la enseñanza de las probabilidades en la Educación Básica, y más específicamente con los conocimientos matemáticos y didácticos que los profesores deben poner en juego para enseñar probabilidades, ya que éstos son prácticamente inexistentes en Chile. Los datos de estos estudios deben permitir mejorar de forma progresiva tanto los programas de formación inicial como los de formación permanente del profesorado, para contar con profesores preparados que logren que sus estudiantes alcancen los aprendizajes deseados, y que sean capaces de "reflexionar en qué debe aprenderse y cómo será aprehendido por sus estudiantes" (Schulman, 1986).

Con base en lo anteriormente expuesto se ha optado por llevar a cabo esta investigación, que busca proporcionar información sobre el conocimiento disciplinar y didáctico de los profesores para la enseñanza de la probabilidad en la educación básica, y responder así a la pregunta de investigación: ¿cómo desarrollar en los profesores un conocimiento matemático-didáctico adecuado para la enseñanza de las probabilidades?, para luego proponer un conjunto de sugerencias que les permitan alcanzar los conocimientos disciplinares y didácticos necesarios para una enseñanza eficaz e idónea de las probabilidades.

Marco teórico

Actualmente las investigaciones sobre el conocimiento matemático y didáctico de la probabilidad son escasas, sobre todo en lo que se refiere a profesores en ejercicio de Educación Básica, pues la mayoría se centra en profesores en formación. Sin embargo, es posible distinguir claramente dos líneas de estudio dentro de este campo: los estudios ligados a las actitudes y creencias de los profesores frente a las probabilidades y su enseñanza, y las investigaciones relacionadas con el conocimiento disciplinar y didáctico. Es en esta última línea en la que busca profundizar nuestro estudio, puesto que de acuerdo a investigaciones recientes se ha podido evidenciar que los profesores en formación presentan dificultades y concepciones erróneas en relación a la probabilidad y conceptos vinculados a ella (Ortiz, Serrano y

Mohamed, 2009), mientras que un grupo importante de profesores evita la enseñanza de la probabilidad debido a que la consideran un contenido de menor importancia, que podría representar dificultades para los estudiantes, o bien por falta de información y preparación (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006).

Una de las primeras investigaciones sobre el conocimiento probabilístico de los profesores fue realizada por Azcárate (1995), quien detectó una baja comprensión de la noción de aleatoriedad y por ende en la comprensión del conocimiento probabilístico por parte de futuros profesores, pues su razonamiento probabilístico se elaboraba más bien a partir de experiencias cotidianas que en un conocimiento formal. Situación que se ve reforzada por Begg y Edward (1999), quienes al solicitar a un grupo de profesores de primaria dar respuesta a tres situaciones relacionadas con ideas básicas de aleatoriedad, sucesos equiprobables e independencia, detectaron una débil comprensión de la probabilidad y de las nociones que subyacen a ella. Con ello no se quiere decir que sea necesario que los profesores cuenten con conocimientos matemáticos acabados de la probabilidad, como teoría de la medida, pero si se requiere que tengan un conocimiento profundo y acabado del contenido a enseñar y de cómo enseñarlo, entendiendo por comprensión profunda "aquellos conocimientos que debería poseer un profesor para ejercer en plenitud su tarea de enseñar matemáticas" (Ma, 1999, Pág. 13). Este autor expone que esta comprensión profunda se relaciona directamente con aspectos del conocimiento matemático que llevan a que el profesor sea capaz de enseñar, articular y explicar ideas matemáticas del contenido en cuestión a sus estudiantes; y propone cuatro propiedades relacionadas entre sí: ideas básicas, representaciones múltiples, conectividad y coherencia longitudinal. Al hablar de ideas básicas, representaciones múltiples y coherencia longitudinal, se refiere a los tipos de conexiones entre los aspectos de una comprensión significativa de las matemáticas, con respecto a su amplitud, profundidad y rigurosidad; mientras que al hablar de conectividad se centra en las conexiones entre conceptos y procedimientos matemáticos, que lleva a los estudiantes a un aprendizaje unificado de conocimientos. Schulman (1986) expone también que es necesario que los profesores conozcan y comprendan en profundidad la matemática que deben enseñar, así como aquellos tipos de conocimientos pedagógicos y didácticos necesarios para lograr una enseñanza eficaz.

En su planteamiento inicial, concretó los siguientes tipos de conocimientos: Conocimiento de los Contenidos; Conocimiento Pedagógico; y Conocimiento Pedagógico de los Contenidos o Conocimiento Didáctico de los Contenidos; al reconocer la necesidad de que los profesores deben aprender y manejar otros tipos de contenidos además del conocimiento matemático para una enseñanza eficaz de las matemáticas. Según este autor, el Conocimiento Pedagógico o Didáctico de los Contenidos se relaciona con las formas de enseñar el contenido, por lo tanto va más allá del contenido en cuestión, considerando sus representaciones, ejemplos, demostraciones, etc., enfatizando cómo hacerlo comprensible para los estudiantes, para así enseñarlo mejor. Posteriormente Schulman (1987) amplía y profundiza aún más en las categorías del conocimiento base que un profesor necesita para enseñar un determinado contenido, considerando como mínimo las siguientes: Conocimiento del Contenido; Conocimiento Pedagógico General, con énfasis en los principios generales y estrategias de gestión de aula y organización; Conocimiento del Currículo, especialmente en lo referido a la comprensión de materiales y programas que sirven como "herramientas del oficio" para los profesores; Conocimiento Pedagógico del Contenido; Conocimiento de los Estudiantes y sus Características; Conocimiento de los Contextos Educativos, que va desde el trabajo del grupo o clase hasta la administración y financiamiento escolar en distintas comunidades y culturas; y Conocimiento de los Fines, Propósitos y Valores de la Educación, así como de sus fundamentos históricos y filosóficos (Schulman, 1987, Pág. 8). Señala que estas categorías se pueden alcanzar a través de las siguientes fuentes: la formación académica en el contenido disciplinar a enseñar; el contexto del proceso educativo y materiales relacionados; investigaciones sobre educación, relacionadas con organizaciones sociales, aprendizaje humano, enseñanza y desarrollo y otros fenómenos sociales y culturales que influyen en la labor de los profesores; y por último, la sabiduría que otorga la propia práctica. Hoy en día la propuesta de Schulman continua vigente, y ha sido abordada y desarrollada por variados autores, destacando el trabajo desarrollado por Ball, Lubienski y Mewborn (2001) quienes introducen la noción de *"Mathematical knowledge for Teaching",* que se define como el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno (Hill, Ball y Schilling, 2008). Estos autores, basándose en las ideas de Schulman, proponen un modelo de conocimiento matemático para la enseñanza en el que se caracteriza el conocimiento matemático necesario para la enseñanza de la matemática escolar, estableciendo, además, la existencia de una correlación positiva entre el conocimiento matemático para la enseñanza y el logro de aprendizaje matemático en los estudiantes. En este modelo se distinguen dos grandes componentes del conocimiento matemático para enseñar: por un lado, se encuentra el conocimiento del contenido disciplinar, que se encuentra compuesto, a su vez, por el conocimiento común de los contenidos a enseñar, el conocimiento del horizonte matemático y el conocimiento disciplinar especializado; y por otro lado, se encuentran los componentes del conocimiento pedagógico del contenido, que incluyen el conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento de los contenidos y la enseñanza, y por último el conocimiento del currículo que se enseña.

Es importante destacar que si bien los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza han ganado su espacio en la investigación y formación de profesores, aún son muy generales y no permiten contar con un análisis minucioso de los tipos de conocimientos que deberían poseer los profesores para lograr una enseñanza efectiva de las matemáticas, y más aún en el caso de las probabilidades. Godino (2009) realiza un análisis de los principales modelos de conocimiento matemático para la enseñanza, identificando en ellos ciertas limitaciones, por lo que propone un modelo teórico sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor. Este modelo comprende algunas de las categorías de los modelos anteriormente descritos, que se complementan y desarrollan con elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Este enfoque, conocido como EOS, plantea un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor compuesto por un conjunto de facetas y niveles que interactúan entre sí para el análisis de la idoneidad didáctica (figura 1), sistema que tendremos en cuenta para el caso de la probabilidad, objeto matemático central en esta investigación, sin dejar de lado las particularidades de dicha materia. Godino y su equipo exponen que la idoneidad didáctica de un método para la enseñanza de las matemáticas se define en función del grado con el que resulta adecuado para su puesta en práctica en el aula. La idoneidad se estudia a través de la reflexión sobre sus diferentes componentes: epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, afectivo y ecológico (Godino, Batanero y Font, 2007):

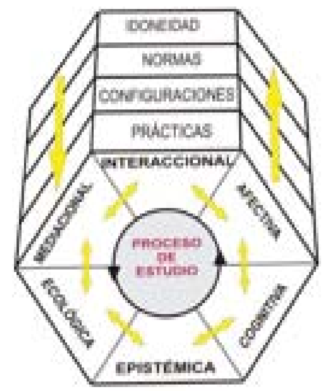


Fig 1: Facetas y niveles de análisis didáctico (Godino, 2009, pág. 21)

- La idoneidad epistémica es el grado de representatividad que tienen los significados institucionales implementados o pretendidos respecto a un significado de referencia. Desde el punto de vista de las matemáticas y su aprendizaje es necesario analizar qué contenidos matemáticos aparecen y con qué frecuencia; asimismo, cuál es el modelo implícito que se asume en una actividad o pequeño grupo de actividades.
- La idoneidad cognitiva expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.
- La idoneidad interaccional parte de la base que un proceso de enseñanza-aprendizaje tiene mayor idoneidad si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori); por otra, resolver los problemas que surgen durante el proceso de instrucción.

- La idoneidad mediacional alude al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- La idoneidad emocional concierne al grado de implicación (interés o motivación) del alumnado en el proceso de estudio. Está relacionada con los factores que dependen de la institución y con los que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- La idoneidad ecológica pone de manifiesto el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad, así como a los condicionamientos del entorno donde se desarrolla. En términos generales, alude al grado en que un método para aprender matemáticas resulta adecuado en el entorno donde se utiliza; el entorno incluye a todos los factores -tanto los de dentro como los de fuera del aula- que determinan la actividad que allí se lleva a cabo.

Los criterios de idoneidad didáctica ofrecen un marco adecuado para valorar cualquier proceso de estudio de las matemáticas (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009). Por ello, en este estudio se usan dichos parámetros para dilucidar el conocimiento matemático-didáctico que debe poseer un profesor para la enseñanza de las probabilidades en la educación básica; y así responder a la pregunta que guía esta investigación.

Metodología

Para alcanzar los objetivos propuestos, y responder a la pregunta que guía esta investigación, se ha optado por una metodología mixta, es decir, para este estudio se contempla una componente cuantitativa y otra cualitativa. Esto se justifica ya que, por un lado, se busca estudiar en profundidad el conocimiento matemático-didáctico que los profesores deben poner en juego para una enseñanza idónea de las probabilidades en la Educación Básica, y por otro, se quiere analizar la idoneidad didáctica de las prácticas de enseñanza de los profesores, a partir de la implementación de un programa de intervención en forma de curso. Mediante este curso, que se llevará a cabo a partir de los planteamientos del aprendizaje realista y reflexivo, se busca proponer un conjunto de recomendaciones, basadas en esta investigación, que contribuyan a mejorar el conocimiento matemático-didáctico de los profesores, para así enriquecer sus prácticas de enseñanza, y de este modo lograr una enseñanza eficaz e idónea de las probabilidades en la educación básica.

La componente cuantitativa contempla la aplicación de un instrumento de evaluación (pre-test y post-test) que permita medir el conocimiento disciplinar y didáctico de los profesores, necesarios para la enseñanza de las probabilidades. Con respecto a la componente cualitativa, ésta contempla el análisis del grado de idoneidad didáctica de las prácticas de enseñanza, para la enseñanza de las probabilidades en educación básica. Para ello, se analizarán sesiones de clases por medio de un registro a través de videos. Es importante señalar que el análisis de la información recopilada, se realizará desde la perspectiva del EOS ya que este modelo teórico ofrece un conglomerado de herramientas apropiadas para el análisis didáctico.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.

Babcock, J., Babcock, P., Buhler, J., Cady, J., Cogan, L., Houang, R., Kher, N., Patrick, J., Rosolova, K., Schmind, W.H. y Wight, K. (2010). *Breaking the cycle: An international comparison of U.S. mathematics teacher preparation.* Michigan: The Center for Research in Math and Science Education.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers` mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Begg, A. y Edwards, R. (1999). Teachers' ideas about teaching statistics. *Proceedings of the 1999 combined conference of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education.* Recuperado el 23 de Agosto de http://www.aare.edu.au/99pap/beg99082.htm.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias,* 27 (1), 59-76.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39, 372-400.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

MINEDUC (2009a). *Propuesta Ajuste Curricular: Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

MINEDUC (2009b). *Fundamentos del Ajuste Curricular en el Sector de Matemática.* Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

MINEDUC (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática.* Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

OECD (2010). Síntesis Estudio Económico de Chile, 2010. Recuperado el 15 de Julio de 2012 de http://www.oecd.org/dataoecd/7/38/44493040.pdf

Ortiz, J., Serrano, L. y Mohamed, N. (2009). Competencias de los futuros profesores de primaria sobre la probabilidad. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 95-116). España: Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en profesores en formación. En Bolea, P., González, M. J. y Moreno, M. (Eds,), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.

Schulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review,* 57 (1), 1-22.

Schulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15 (2), 4-14.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador de Bahía, Brasil.

Vásquez, C. (2011). *Estudio de las percepciones de los profesores de educación básica sobre sus necesidades de fortalecimiento para la enseñanza de la estadística y probabilidad*. Tesis de magister no publicada. Universidad de la Frontera.

EL PROCESO DE VERIFICACIÓN EN EL ESQUEMA DE VALIDACIÓN

Rodolfo Eliseo D`Andrea, Patricia Sastre Vázquez
Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario. Facultad de Química e Ingeniería Argentina
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Sede Azul. Facultad de Agronomía
rodolfoedandrea@yahoo.com.ar, pasava2001@yahoo.com.ar

Resumen. En general, en Argentina, el estudiante de Ingeniería, a la hora de validar realiza verificaciones aleatorias para algunos casos particulares. Para analizar su comportamiento frente a la verificación, se utilizó como instrumento de recogida de datos, una serie de proposiciones del Álgebra elemental y del Cálculo infinitesimal. Para el análisis se utilizaron dos grupos de estudiantes: uno que recibió formación sobre el lenguaje y epistemología matemática y otro que no la recibió. Se concluyó que el estudiante tiene conciencia que la acción de verificar, no es lo que se espera de él cuando se les pide una prueba, sin embargo recurren a ella. Esto se debe quizás a que en la vida cotidiana y en el ámbito las Ciencias Fácticas, resulta el tipo de prueba usual. A pesar de recurrir a la verificación, desconocen cómo debe realmente realizarse y es confundida con la demostración formal de proposiciones matemáticas.

Palabras clave: proposición; verificación; demostración; lenguaje matemático

Abstract. In general, in Argentina, the engineering student, to the time to validate performs random checks for some particular cases. To analyze its behavior compared to verification, was used as an instrument of data collection, a series of propositions in check of elementary algebra and calculus. Two groups were used for the analysis: one formed in the knowledge of the mathematical language and epistemology and another not. It was concluded that the student is aware that the action of verification is not expected, when they are asked to make a test, however resorting to it. Perhaps because in the dailyness and factual sciences, it is the usual type of test. In spite of resorting to verification, they don't know how should done and is confuse with the formal proofs.

Key words: proposition; Verification; demonstration; mathematical language

Introducción

En general, en Argentina, los estudiantes de Ingeniería, a la hora de validar realizan verificaciones aleatorias para algunos casos particulares. Actúan exploratoriamente y sin criterio formado, considerándose suficiente para el establecimiento de la verdad de una proposición matemática. Balacheff (2000) en su clasificación de los modos de demostrar que muestra un estudiante, encuadra la acción antes comentada como empirismo näif o ingenuo, configurada dentro de las denominadas demostraciones pragmáticas. Lo precedentemente descripto denota dos cuestiones epistemológicas importantes. Por un lado, la confusión del estudiante frente a las acciones de demostrar y verificar. Por otro lado, el desempeño en la actividad de realizar verificaciones, que no es llevada a cabo adecuadamente sino a través de un 'tanteo', pero sin un sostén apropiado y un conocimiento consistente de lo que se está realizando. ¿Será conocida la palabra verificación por el estudiante?. Y en tal caso, ¿Se comprenderá la palabra en el contexto epistemológico de la Ciencia Matemática, por lo menos de forma primitiva?

"Verificar una proposición matemática verdadera es exhibir un ejemplo que compruebe para ese caso particular que la proposición se cumple". (D´Andrea, Curia y Lavalle, 2012), más adelante se consideran las acepciones de Wason y Mason (2005). Sumándose entonces, al conocimiento o desconocimiento que podrían tener los estudiantes de la palabra verificación, la palabra ejemplo. Un test piloto realizado en un grupo de ingresantes a Ingeniería, corrobora este desconocimiento. Se le propuso al grupo mencionado que en una tabla de doble entrada vincularan la significación de una serie de términos que hacen a la epistemología de la Ciencia Matemática. Resultó notable que la palabra ejemplo, de un uso tan cotidiano y habitual, fuera solamente reconocida en un 50% aproximadamente de la muestra analizada. (Sastre Vázquez y D´Andrea, 2011)

La supresión de desarrollos teóricos en el ciclo medio ha limitado la cursada, en este estadio, a la realización de una práctica consistente en ejercicios que la única dificultad que poseen es la aplicación de un algoritmo concreto. Estos ejercicios no están concebidos como un proceso, limitándose la búsqueda del estudiante a la selección del algoritmo correcto. Esta selección no permite la interacción con situaciones que lleven al estudiante a analizar sus conocimientos para una revisión ya sea para una corrección o una transformación. (Parra, 1990)

Esto lleva a que el proceso de maduración intelectual, se retrase, de modo que el ingresante universitario, se encuentra con un universo diferente al del ciclo medio. Los cursos universitarios de Matemática requieren del sustento de la teoría para realizar la práctica, hábito no desarrollado en el ciclo medio, donde según expresión textual del estudiante: 'Matemática es sentarse a hacer ejercicios'. Esta praxis, tan alejada del método matemático, persiste en la estructura mental del estudiante, aunque al ingresar a la Universidad se les muestre la forma de desempeñarse que corresponde a la Ciencia Matemática. Esto se refleja precisamente cuando se somete al estudiante a situaciones nuevas para validar e inclusive en muchas oportunidades cuando se les pide que demuestren una proposición cuya prueba fue expuesta por el docente en clase. Su reacción, pese a conocer ya cuál es el procedimiento adecuado, es volver a las fuentes, recurriendo a la exhibición de ejemplos, sin saber cómo escogerlos para que satisfagan una proposición. Esta actitud puede ser debida a que, aún cuando pueda parecer que los estudiantes conocen la prueba de una proposición matemática verdadera no axiomática, siguen sintiendo la necesidad de una verificación (Vinner, 1983). Healy y Hoyles (2000) sostienen que los estudiantes necesitan realizar ensayos de verificación – inclusive después de realizada la demostración – porque precisamente, la demostración no los convence y la exhibición de ejemplos les refuerza la idea conceptual propugnada por la proposición demostrada. Más allá del hecho de que una prueba formal confiere validez general a un enunciado matemático, para confirmar esa validez, necesitan de controles posteriores

(Fishbein, 1982). La elección adecuada de ejemplos es una tarea que requiere reflexión y su práctica cotidiana contribuye a la construcción del razonamiento del estudiante. Wason y Mason (2005) establecen como definición de ejemplo, a un procedimiento a partir del cual el estudiante podría establecer una generalización y definen al proceso de ejemplificación, como la representación de una categoría genérica con la que el estudiante necesita entrar en contacto para extraer un caso particular. Lo que se postula a través de estas aproximaciones es precisamente establecer que el uso de ejemplos ayuda al estudiante a la generalización. Esta, permite la abstracción de situaciones concretas, constituyéndose en el puente para la construcción de argumentaciones. La elección adecuada de ejemplos y contraejemplos y la guía del docente en tal búsqueda en las instancias iniciales, constituiría un disparador para la producción de demostraciones. D´Andrea et al (2012) establecen un modelo didáctico para atenuar la dificultad del estudiante de Ingeniería frente a la reproducción de demostraciones, evitando la ritualidad y la memorización. Este modelo se basa en las tres facetas del lenguaje matemático: coloquial, visual y simbólico. Permitiendo que el estudiante desarrolle capacidad de razonamiento lógico, con el objeto de que enfrente problemas nuevos en disciplinas específicas de su Carrera. La cuestión esencial radica en el análisis de los procesos de deducción matemática en el aula y de cómo el estudiante puede tener una adecuada disposición mental para optimizar el acceso a los mismos. Procesos encuadrados en el currículo de los cursos universitarios de Matemática de Ingeniería, pero respetando la epistemología de la Ciencia Matemática. El modelo propone una secuencia para la comprensión de la proposición, como antesala a su prueba formal. Tal secuencia va desde el lenguaje natural del individuo (coloquial), pasando por el lenguaje visual, la verificación de la proposición y finalmente desde el lenguaje que le es propio a la Ciencia Matemática, y que es la instancia previa a la prueba. La verificación, cumple un rol determinante en el proceso descripto, ya que la elección de ejemplos adecuados, permitirá disparar conjeturas previas a la demostración. Este proceso no es completo si no se hace explícito el lenguaje matemático en los cursos iniciales de Matemática.

Experimentación

A los efectos de analizar el proceso de abordaje de la verificación, se aplicó un instrumento de recogida de datos consistente en ejercicios de verificación de proposiciones de Álgebra elemental y Cálculo infinitesimal. Los estudiantes de la muestra se encontraban realizando, en el segundo año de Ingeniería, un curso anual de Cálculo de dos partes: Aplicaciones del Cálculo Diferencial e integral unidimensional, Sucesiones y Series Numéricas y Series de potencias y Cálculo en varias variables. La muestra se tomó sobre dos grupos diferentes de estudiantes: 1) El grupo de control formado sobre un proceso de enseñanza y aprendizaje "centrado en el contenido, donde el docente transmite a los estudiantes un saber ya acabado y construido" y donde el estudiante no fue instruido sobre rudimentos esenciales del lenguaje y epistemología de la Ciencia Matemática. 2) El grupo experimental, formado sobre un proceso sustentado en los lineamientos del aprendizaje significativo, y donde el estudiante fue instruido sobre rudimentos esenciales del lenguaje y epistemología de la Ciencia Matemática. En cada uno de los ejercicios se propuso que verificaran una serie de proposiciones verdaderas. El primer ejercicio constaba de cuatro proposiciones de Álgebra elemental. Las dos primeras a la hora de ser verificadas, no requerían de un proceso demasiado reflexivo. Una reacción esperada del estudiante es que este exhibiera eventualmente (no necesariamente) en cada uno, dos ejemplos: uno con un real positivo y otro con un real negativo. Mientras que las dos últimas, requerían que el estudiante identificara hipótesis y las chequeara, de modo que se cumpliera lo establecido por la tesis. El segundo ejercicio constaba de dos proposiciones del Cálculo infinitesimal, acerca de contenidos que el estudiante se encontraba aprendiendo. Ambas requerían de lo mismo que necesitaban las dos últimas proposiciones del ejercicio 1.

Ejercicio 1: Las siguientes proposiciones son Verdaderas. Se pide que sean verificadas.

$a. \forall x \in R: \sqrt{x^2} = |x|$ $\qquad$ $b. \forall x \in R: x + 1 > x;$

$c. 0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1};$ $\qquad$ $d. A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

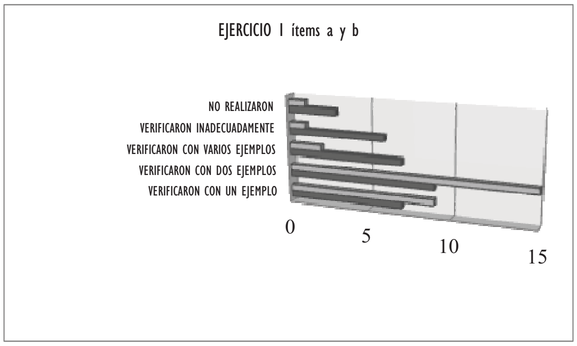
Ejercicio 2: Las siguientes proposiciones son Verdaderas. Se pide que sean verificadas.

$$a. Teorema\ de\ Rolle: f\ función\ continua\ en\ [a,b]\ y\ derivable\ en\ (a,b)\ y\ f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = 0.$$

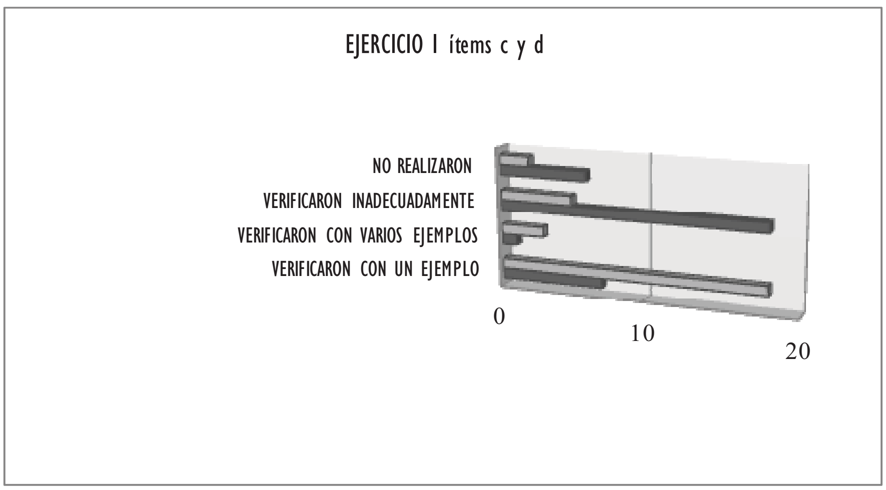
b. Criterio término n – ésimo para convergencia de series: $\sum_{k=1}^{n} a_k\ converge \Rightarrow \lim_{k \to \infty} a_k = 0$

Resultados

En el ejercicio 1, ítems a) y b), se observó que ambos grupos verificaron con un ejemplo, en porcentajes similares. Con dos ejemplos, verificó más del 50% del grupo 2, mientras que aproximadamente el 30% del grupo 1. Un poco más del 20% del grupo 1 realizó varias verificaciones para sustentar lo pedido, reacción que pasó prácticamente inadvertida para el grupo 2. Verificaron inadecuadamente, aproximadamente un 20% del grupo 1, mientras que hubo un solo representante del grupo 2 que así lo hizo. Esta inadecuación se reflejó en el ítem a) al asumir la verificación como una explicación, recurriendo a la interpretación geométrica del valor absoluto de un real. En el ítem b) se produjo algo similar, con la interpretación geométrica de la ubicación de los reales en la recta numérica. Un número mínimo en ambos grupos no realizó directamente las consignas propuestas.

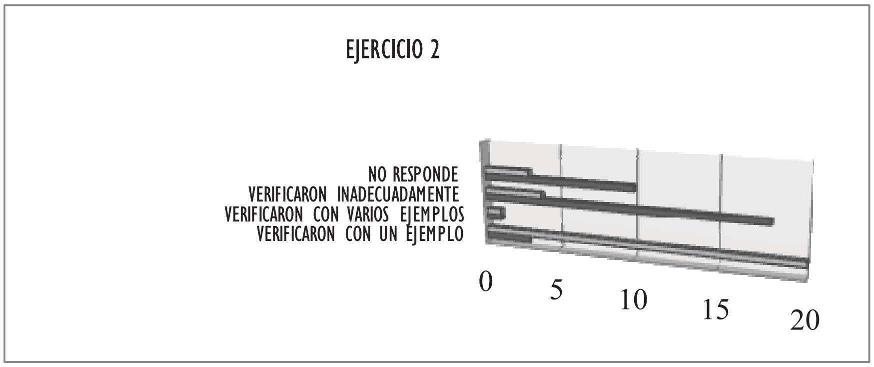


Grupo1: ■
Grupo 2: □ ***Gráficos correspondientes a resultados del Ejercicio 1. ítems a y b.***



Grupo1: ■
Grupo 2: □ ***Gráficos correspondientes a resultados del Ejercicio 1. ítems c y d.***

En el ejercicio 1, ítems c) y d), se observó que el grupo 1, en un porcentaje superior a la mitad, verificó de forma inadecuada. Aproximadamente un 18% del grupo 2 también así lo hizo. Consideraron que el logro del consecuente de la implicación era suficiente para sostener la verdad de la proposición. Aproximadamente un 22% del grupo 2 verificaron adecuadamente con varios ejemplos, mientras que del grupo 1, solamente lo hizo un solo estudiante. Los estudiantes del grupo 2 pudieron llevar a cabo la verificación adecuadamente con un ejemplo, en un número que superó al 60%. Un número mínimo no realizó directamente las consignas propuestas del grupo 1, siendo aproximadamente el 20% en el grupo 2.



Grupo1: ■ ***Gráficos correspondientes a resultados del Ejercicio 2.***
Grupo 2: □

En el ejercicio 2, se observó más claramente la contrastación entre los estudiantes del grupo 1 y 2. Los del grupo 1, verificaron inadecuadamente aproximadamente en un 56%. Contrariamente al grupo 2, entrenado en cuestiones del lenguaje y epistemología de la Ciencia Matemática, mostraron un desempeño adecuado frente a la verificación de ambos ejercicios planteados (72%). Un solo estudiante en cada grupo exhibió varios ejemplos. Un número mínimo no realizó directamente la propuesta en el grupo 2, mientras que aproximadamente un 31% en el grupo 1. Concretamente, en el ejercicio 2 a) hubo estudiantes que obtuvieron valores de c sin analizar el intervalo a que pertenecían y sin determinar si la función propuesta como ejemplo de la verificación, satisfacía las hipótesis del teorema propuesto. Es decir que la elección del ejemplo fue inadecuada, pero esto en correlato con el desconocimiento de la imprescindible necesidad del chequeo de las hipótesis. También hubo casos que, a pesar de una elección adecuada de ejemplos, se direccionaron sobre el consecuente de la implicación sin el chequeo previo de las hipótesis. Precisamente esto puede atribuirse que a diferencia del ejercicio 1, ítems c) y d), aquí eran varias hipótesis que debían chequearse para el cumplimiento de la tesis.

A continuación se detallan dos ejemplos representativos expuestos por los estudiantes, y su forma de operar frente a la acción de verificar. En el ejercicio 2 a) se observa primero el chequeo adecuado que debe hacerse de las hipótesis, que el estudiante en general no realiza y directamente 'verifica' lo postulado por la tesis, sin percatarse que ninguno de los dos valores obtenidos pertenecen al intervalo abierto correspondiente al ejemplo propuesto. En otros casos, el estudiante propone un ejemplo donde las hipótesis se cumplen pero no son chequeadas, direccionándose directamente a lo propuesto por la tesis. En cualquier caso, esa es la constante de su accionar. El proceso se repite en el ejercicio 2 b) como se muestra en el ejemplo escogido de la serie armónica.

Ejercicio 2 a)

$f(x) = x^2 - 1 \; en \; [0,1]$, satisface la continuidad $en \; [0,1]$ y derivabilidad $en \; (0,1)$ pero una de las hipótesis no se satisface: $f(0) = -1 \neq f(1) = 0$, sin embargo la reacción del estudiante se manifestó así:

Se direccionó directamente a la verificación del consecuente de la implicación (tesis):

$f(c) = c^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow c = 1 \notin (0,1) \vee c = -1 \notin (0,1)$, pensando en que logró el objetivo. Esto se produjo por un lado porque no se tuvo en cuenta el chequeo de las hipótesis y por otro, como pudo observarse, no se tuvo en cuenta que los valores hallados no pertenecen al intervalo $(0,1)$.

Ejercicio 2.b. Reacción del estudiante:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, esto significa que la serie: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ converge.

Conclusiones

Al actual estudiante de Ingeniería le resulta difícil comprender la exposición de procesos de validación de proposiciones matemáticas que realiza el profesor en el aula. Los estudiantes, a la hora de requerirles una demostración, tienen claridad sobre lo que se espera de ellos y reconocen que la verificación es exigua cómo demostración. Asimismo recurren a ésta como mecanismo de prueba cuando encuentran dificultades. La verificación resulta un método usual de la vida cotidiana y las ciencias fácticas, y probablemente la actitud esté asociada a este hecho. Esto lleva al estudiante a enfrentar confusiones entre la epistemología de la Ciencia Matemática y las disciplinas científicas factuales. Confundiendo la acción de demostrar y verificar. Esto también está asociado al desconocimiento del lenguaje y la epistemología que le es propia a la Ciencia Matemática. Por lo que se hace necesario que los ingresantes universitarios sean instruidos en el lenguaje matemático, por lo menos en sus rudimentos esenciales, cuestión que debería hacerse en cualquier disciplina que hace al abanico de las Ciencias básicas: Física, Química, Biología.

De la muestra de estudiantes analizada, a la hora de verificar, el grupo no formado en el conocimiento del lenguaje y la epistemología de la Ciencia Matemática fue quién exhibió varios ejemplos. Esto no es casual, y tiene que ver con un razonamiento primitivo, característico del empirismo ingenuo (Balacheff, 2000), descripto al comienzo del documento. Esa multiplicidad de ejemplos, tiene que ver además con la inseguridad del estudiante. Posiblemente con mayor cantidad de ejemplos exhibidos, sienten que la realización de su tarea tiene más sustento. Puede ocurrir como en los casos a) y b) del ejercicio 1, que la exhibición de dos ejemplos, en este caso particular, sean dos casos bien representativos: reales positivos y negativos. Si bien la consigna de los ejercicios fue clara, muchos pueden haber asociado lo pedido con la prueba de la proposición. Incluso, aquellos estudiantes formados en el lenguaje y epistemología matemática, en ciertas oportunidades, pueden llegar a confundir acciones como la de verificar y probar, aparentemente clarificadas. Esto podría tener que ver con la aceleración obligada de una madurez intelectual que termina siendo artificial ya que no tiene el respaldo de un ciclo medio que haya entrenado en ese estadio previo e imprescindible para el abordaje de la etapa universitaria. Esta aceleración es producto de una necesidad imperiosa que tiene un ingresante, carente de una formación sólida en el ciclo medio y que requiere conocimientos en el primer año universitario que exceden su formación propedéutica.

La falta de claridad de las acciones descriptas, y concretamente la verificación, obedecen a un desconocimiento explícito por parte de los estudiantes. Los términos que hacen a la Epistemología de la Ciencia Matemática no requieren de ser expuestos con un glosario enciclopedista, y menos para estudiantes de Ingeniería. Necesitan ser mostrados a través de una teoría complementada con una praxis activa, dejando de ser compartimentos estancos y desarrollados a través de una práctica cotidiana que lleve a cabo el estudiante, guiado por el docente.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una empresa docente. Universidad de Los Andes.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En: Parra, C. & Saiz, I. (Comp.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y Reflexiones (*pp. 51–63). Buenos Aires: Paidós Educador.

D´Andrea, R.E., Curia, L. y Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics,* 3 (2), 9–24.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31* (4), 396–428.

Parra, B. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas. *Revista Educación Matemática*, *2* (3), 22–31.

Sastre Vázquez, P. y D´Andrea, R.E. (2011). Análisis del lenguaje matemático en estudiantes ingresantes a Carreras de Ingeniería. En Borsa, E., Irassar, L., Pavioni, O. (Comp.). *Anales*

XVI EMCI (Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería) Nacional y VIII Internacional. Olavarría: UNICEN. Sede Olavarría.

Vinner, S. (1983). The notion of proof some aspects of students' views at the senior high level. En: R. Hershkowitz, ed. *Proceedings of the 7th Conference of the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 289–294). Shoresh, Israel.

Wason, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO ESTADO DE SÃO PAULO, NO BRASIL: UMA DESCRIÇÃO COM BASE EM DADOS DE 2010

Marcelo Dias Pereira, Ruy César Pietropaolo
Universidade Municipal de São Caetano do Sul Brasil
Universidade Bandeirante de São Paulo
marcelodpereira@gmail.com, rpietropaolo@gmail.com

Resumo. Com base em dados relacionados a cursos de formação inicial de professores (Licenciaturas) de Matemática no Estado de São Paulo, reunidos em 2010, este artigo apresenta algumas informações sobre cursos que constavam no sítio do Ministério da Educação e nos sítios das Instituições de Ensino Superior (IES) paulistas ou federais que atuavam naquele Estado. Nessas informações são identificados descumprimentos de artigos de Instrução Normativa do Ministério da Educação ou de artigos de Resoluções do Conselho Nacional de Educação.

Palavras chave: legislação sobre Licenciatura em Matemática

Abstract. Based on data collected in 2010 related to higher education courses for initial training of mathematics teachers in the State of São Paulo, this paper presents information on courses that appeared on the Ministry of Education website and on other state or federal Higher Education Institution websites in the state of São Paulo. The information identified breaches of the Normative Ruling' articles of the Ministry of Education or breaches of Resolutions' articles in the National Council of Education.

Key words: legislation on mathematics degree courses

Introdução

A formação de professores é um dos temas de grande interesse para a área da Educação em geral, especialmente no Brasil, desde 1996, ano em que foi promulgada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que propôs a transformação dos cursos de formação inicial de professores para a Educação Básica, até então licenciaturas curtas com suas habilitações, em licenciaturas plenas.

Para instituir as diretrizes desses novos cursos, assim como normatizar os processos de regulação da educação superior, o Ministério da Educação (MEC), por meio do Conselho Nacional de Educação (CNE), composto pelo Conselho Pleno (CP), pela Câmara de Educação Superior (CES) e pela Câmara de Educação Básica (CEB), elaborou e oficializou Pareceres, Resoluções e Portarias Normativas.

As duas primeiras Resoluções gerais neste sentido foram as de números 1 e 2, de 2002, do CNE/CP, que instituíram respectivamente as diretrizes dos cursos de licenciatura e a duração e carga horária desses cursos.

Em 2007, com o intuito de conceituar horas como unidade de carga horária, diferentemente do conceito hora-aula, a Resolução CNE/CES nº 3, especialmente no seu artigo 3º, pôs fim às interpretações ambíguas sobre o assunto ao registrar que a carga horária mínima de todos os cursos superiores, tratadas em resoluções e/ou pareceres que abordam a matéria, é mensurada em horas, ou seja, 60 minutos.

Por sua vez, a Portaria Normativa nº 40 de 2007, do MEC, especialmente no artigo 32º, indicou que o projeto pedagógico dos cursos, além de outros documentos e informações, deveriam ser disponibilizados à sociedade em meio impresso, na biblioteca das Instituições de Ensino Superior (IES), e em páginas eletrônicas próprias.

Especialmente para os cursos de Matemática, a Resolução CNE/CES nº 3 de 2003, apoiada no Parecer CNE/CES nº 1.302 de 2001, instituiu as diretrizes para as licenciaturas e para os bacharelados, fixando seus objetivos principais: "Os cursos de Bacharelado em Matemática existem para preparar profissionais para a carreira de ensino superior e pesquisa, enquanto os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação de professores para a educação básica" (Brasil, 2003, p.15). Ressalta-se que no Brasil, a educação básica compreende a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, nessa ordem, porém a Licenciatura em Matemática forma o professor para lecionar do 6º ao 9º ano do ensino fundamental e no ensino médio, composto por 3 anos.

Embora haja um número razoável de pesquisas relacionadas ao curso de formação inicial dos professores para lecionar Matemática no ensino básico, há ainda, na área da Educação Matemática, a necessidade de reflexões sobre os Pareceres, as Resoluções e as Portarias que instituem as diretrizes e normatizam essa licenciatura, assim como reflexões que busquem identificar eventuais mudanças que vêm sendo implementadas nesses cursos, face às demandas atuais do sistema educacional brasileiro.

Nesse sentido, estamos realizando uma pesquisa, em nível de doutoramento, que, em linhas gerais, investiga as transformações das diretrizes curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil e os pressupostos discutidos pelos Educadores Matemáticos para esses cursos.

Levando em consideração que informações sobre o número de licenciaturas nos estados, a distribuição desse número entre licenciaturas públicas e privadas, a duração desses cursos, a modalidade, (se presencial ou a distância), dentre outras, são consideradas relevantes pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática para promover um debate sobre a real qualidade dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil (Comissão Organizadora do IV Fórum Nacional de Licenciaturas, 2010) e que essas e outras informações fazem parte de nossa pesquisa, este artigo aborda variáveis como as acima mencionadas, relacionadas a cursos de Licenciatura em Matemática autorizados (os identificados no sítio do MEC) e cursos de

Licenciatura em Matemática ativos (os identificados nos sítios das IES paulistas ou das IES federais que atuam no Estado de São Paulo), com base em dados coletados da internet, em 2010.

A análise quantitativa das informações nos levou, em um primeiro momento, a identificar divergências nas duas bases de dados consultadas e o descumprimento do artigo 32 da Portaria Normativa nº 40 de 2007, do MEC, assim como o descumprimento de Resoluções, do mesmo Ministério, que embasam o sistema de ensino superior brasileiro. Em um segundo momento, levou-nos a questionar como os documentos oficiais do MEC são utilizados pelas IES, na elaboração e divulgação dos cursos de Licenciatura em Matemática, e pelos avaliadores do próprio Ministério da Educação, no processo de autorização e reconhecimento desses cursos.

Metodologia da Pesquisa e descrição de algumas variáveis dos cursos de Licenciatura em Matemática no Estado de São Paulo

Nos meses de setembro, outubro e novembro de 2009, por meio do portal eletrônico do MEC (Ministério da Educação, 2009), foi realizada a coleta de dados dos cursos de Matemática autorizados pelo Governo Federal, em âmbito nacional. Especialmente em relação ao Estado de São Paulo, os dados coletados foram conferidos e atualizados em junho de 2010, gerando o nosso Banco de Dados de São Paulo. No mês de setembro de 2010, as informações contidas no Banco de Dados de São Paulo foram confrontadas com as informações disponibilizadas nos sítios das IES. Nessa fase, um novo banco de dados foi gerado: o Banco de Dados da População Ativa, contendo, além das informações do Banco de Dados de São Paulo, as informações disponibilizadas pelas IES. Todos os cursos de Matemática propostos por IES paulistas ou federais, identificados nesse confronto, independentemente de constarem ou não como autorizados no sítio do MEC, passaram a fazer parte do segundo banco de dados.

Com base na análise das informações do Banco de Dados da População Ativa, foram identificados 150 cursos de Licenciatura em Matemática, autorizados pelo MEC, e 140 cursos ativos nas IES. Todos esses cursos são, na Figura 1, distribuídos de acordo com a natureza, em instituições públicas e instituições privadas.

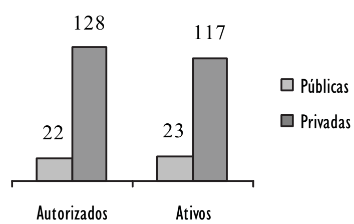


Figura 1: Cursos de Licenciatura em Matemática no Estado de São Paulo, Brasil, em 2010, distribuição pela variável natureza

De acordo com as informações disponíveis no site do MEC, em 2010, dos 150 cursos autorizados no Estado de São Paulo, em instituições paulistas ou federais, 8 eram oferecidos na modalidade à distância, e 142 na modalidade presencial. Desses 150 cursos, 1 estava estruturado com regime trimestral, 118 com regime semestral, 28 com regime anual, 1 com regime modular e, em 2 deles, o regime não era indicado. Eram ministrados por 110 instituições, sendo 95 privadas (45 faculdades, 24 centros universitários e 26 universidades) e 15 públicas (6 faculdades municipais, 1 centro universitário municipal, 1 universidade municipal, 3 universidades estaduais, 3 universidades federais e 1 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia).

Já de acordo com as informações que estão disponíveis nos sites das IES, os 140 cursos identificados como ativos no Estado de São Paulo, não necessariamente em funcionamento, eram oferecidos por 96 instituições paulistas ou federais, sendo 83 particulares (39 faculdades, 21 centros universitários e 23 universidades) e 13 públicas (5 faculdades municipais, 1 centro universitário municipal, 1 universidade municipal, 3 universidades estaduais, 2 universidades federais e 1 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia). Destes 140 cursos, 7 eram oferecidos a distância. Com relação ao regime, 1 era oferecido com regime trimestral, 76 com regime semestral, 13 com regime anual, 1 com regime modular e, em 49 deles, o regime não era indicado.

Na Tabela 1 observa-se a distribuição dos cursos, ativos e autorizados, de acordo com a organização (faculdades, centros universitários, universidades ou instituto federal de educação, ciência e tecnologia), a natureza (instituições privadas ou públicas), o regime (cursos anuais, semestrais, trimestrais ou modulares) e a modalidade (presencial ou à distância).

Organização/ Natureza	Regime	Presencial		EAD		Total	
		Ativo	Autorizado	Ativo	Autorizado	Ativo	Autorizado
Faculdade/	Semestral	26	34	-	1	26	35
Privada	Anual	2	8	-	-	2	8
	Modular	-	-	1	1	1	1
	Não indicado	10	2	-	-	10	2
Centro Universitário/	Semestral	15	23	1	-	16	23
Privada	Anual	3	4	-	1	3	5
	Não indicado	4	-	-	-	4	-
Universidade/	Semestral	17	42	2	4	19	46
Privada	Anual	2	7	-	1	2	8
	Não indicado	31	-	3	-	34	-
Instituições Privadas	Total	110	120	7	8	117	128

Faculdade/	Semestral	3	4	-	-	3	4
Publica Municipal	Anual	2	2	-	-	2	2
Centro Universitário/ Publico Municipal	Semestral	1	1	-	-	1	1
Universidade/ Pública Municipal	Anual	1	1	-	-	1	1
Universidade/	Semestral	6	5	-	-	6	5
Pública Estadual	Anual	3	4	-	-	3	4
	Não indicado	1	-	-	-	1	-
Universidade/	Trimestral	1	1	-	-	1	1
Pública Federal	Semestral	3	2	-	-	3	2
IFET/ Pública Federal	Semestral	2	2	-	-	2	2
Instituições Públicas	Total	23	22	-	-	23	22
Total		133	142	7	8	140	150

EAD: Ensino à distância

IFET: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia

Tabela 1: Cursos de Licenciatura em Matemática no Estado de São Paulo, Brasil, em 2010, distribuição pelas variáveis organização, natureza, regime e modalidade.

Com base nas informações contidas na Tabela 1, é possível concluir que, dos 49 cursos ativos cujo regime não é indicado, apenas um é oferecido por uma universidade pública estadual. Os demais são oferecidos por instituições privadas, a maioria por universidades.

Ainda com base na mesma tabela, é possível perceber que a maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática, independentemente da organização e da natureza, são oferecidos em regime semestral (76 de 140 cursos ativos e 118 de 150 cursos autorizados).

Com relação à informação sobre a carga horária, foi constatado que ela estava disponível em 103 cursos ativos e 148 cursos autorizados. Uma possível distribuição desses cursos pelas cargas horárias pode ser observada na Tabela 2.

Carga horária, em horas* (não necessariamente de 60 minutos)	Número de cursos	
	Ativos	Autorizados
Acima de 500 até 1.000	1	1
Acima de 2.000 até 2.500	4	8
Acima de 2.500 até 3.000	67	107
Acima de 3.000 até 3.500	28	24
Acima de 3.500 até 4.000	3	6
Acima de 4.000 até 4.500	-	2
Total	103	148

Tabela 2: Amostra dos cursos de Licenciatura em Matemática no Estado de São Paulo, Brasil, em 2010, distribuição pela variável carga horária

É necessário informar que o curso, tanto ativo quanto autorizado, que consta com uma carga horária acima de 500 até 1.000 horas é um curso com grau de Programa Especial de Formação Pedagógica de Docentes, com habilitação em Matemática, na modalidade à distância.

Tomando-se como parâmetro a carga horária mínima de 2.800 horas, de acordo com a Resolução CNE/CP nº 2 de 2002, das amostras de 103 cursos ativos e 148 cursos autorizados resultam: 7 ativos e 13 autorizados com carga horária inferior, 30 ativos e 48 autorizados com carga horária igual, e 66 ativos e 87 autorizados com carga horária superior.

Em se tratando da duração dos cursos, foi possível identificar, nos sítios, a integralização de 95 cursos ativos e 148 cursos autorizados e, conforme as informações contidas na Figura 2, pode-se afirmar que a duração que ocorre com maior frequência nos cursos ativos e nos cursos autorizados é de 3 anos, considerado o mínimo, segundo a Resolução CNE/CP nº 2 de 2002.

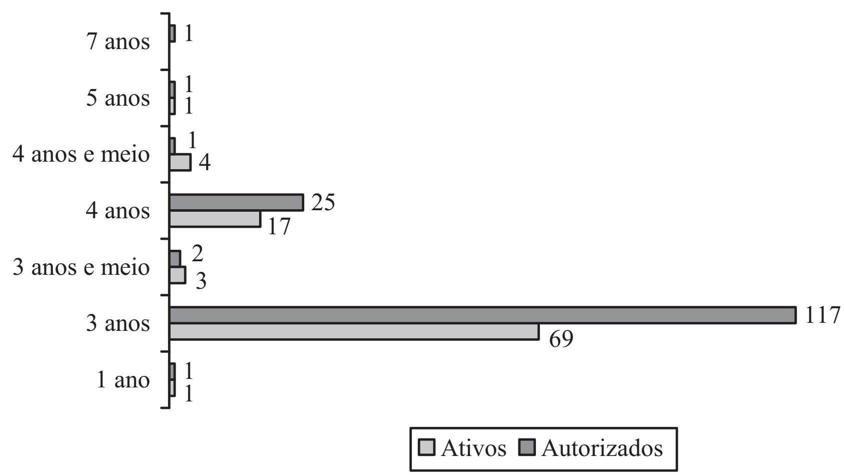


Figura 2: Amostra dos cursos de Licenciatura em Matemática no Estado de São Paulo, Brasil, em 2010, distribuição pela variável duração.

Já com relação à variável turno, informação disponível em 103 cursos ativos e 142 cursos autorizados, que é representada graficamente na Figura 3, foi constatado que a maioria das Licenciaturas em Matemática do Estado de São Paulo é oferecida no período noturno e que existem instituições que oferecem o mesmo curso em dois turnos. Nesses casos, percebe-se que não há diferenças entre as cargas horárias e durações do mesmo curso oferecido em turnos distintos.

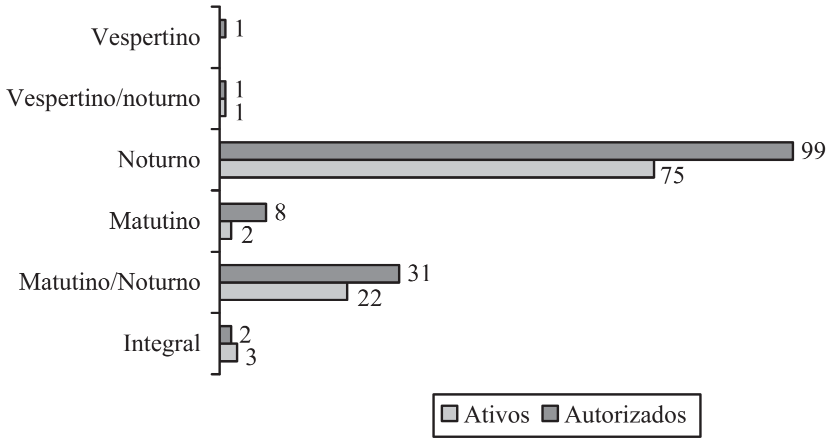


Figura 3: Amostra dos cursos de Licenciatura em Matemática no Estado de São Paulo, Brasil, em 2010, distribuição pela variável turno.

Considerações finais

Caracterizando-se os cursos de Licenciatura em Matemática ativos no Estado de São Paulo, é possível afirmar que são, na maioria, cursos noturnos, oferecidos por IES privadas e integralizados em 3 ou 3 anos e meio, sendo 3 anos o mínimo fixado por Resolução do MEC.

Já com relação à carga horária, foram observados indícios da existência de mais de 7 cursos ativos com carga horária inferior a 2.800 horas, instituída como mínima por Resolução do MEC, pois alguns dados coletados nas páginas eletrônicas de IES apontam a possível utilização do conceito de hora-aula de 50 minutos na proposta de cursos de Licenciatura em Matemática, ao invés da hora de 60 minutos para informar a carga horária dos cursos. Dessa forma, mesmo tendo 96 cursos ativos e 135 cursos autorizados com carga horária igual ou superior a 2.800 horas, não é possível afirmar quantos desses cursos cumprem efetivamente a Resolução CNE/CP nº 2 de 2002, no que se refere à carga horária, pois, por exemplo, um curso com 3.300 "horas" indicadas nos sítios, tanto do MEC quanto das IES, pode estar estruturado em apenas 2.750 horas relógio.

Um possível procedimento que poderia informar se as cargas horárias indicadas nos sítios são referentes à hora-aula ou hora relógio seria a análise dos Projetos Pedagógicos dos Cursos ou das suas matrizes curriculares que estavam, até 2010, à disposição nos sítios das IES em apenas 63 cursos. Mesmo assim, em muitos casos, não era possível identificar a real carga horária, pois em alguns desses 63 documentos eram apresentados somente os componentes curriculares, sem suas respectivas cargas horárias.

Dessa forma, a maior parte das IES não cumpriam, em 2010, o que determina o artigo 32 da Portaria Normativa nº 40 de 2007. E, levando em consideração que essa portaria é um dos documentos oficiais que devem ser atendidos para a solicitação da autorização ou da renovação da autorização dos cursos superiores, surge o seguinte questionamento: como os documentos oficiais do MEC estão sendo utilizados pelas IES na elaboração e divulgação dos cursos de Licenciatura em Matemática?

Por outro lado, face às divergências de informações existentes nos sítios do MEC e das IES (conforme é possível observar nas tabelas e gráficos apresentados) e também face aos indícios de que as resoluções do MEC estão sendo desrespeitadas por algumas IES como, por exemplo, a Resolução CNE/CES nº 3 de 2007, emerge, ainda, um segundo questionamento: como os documentos oficiais do MEC estão sendo utilizados pelos avaliadores do próprio Ministério da Educação para o processo de autorização e reconhecimento desses cursos?

Entendemos que, mesmo havendo a necessidade de reflexões para propor possíveis modificações, no sentido de melhor adequar os documentos oficiais do MEC para a formação inicial de professores de Matemática, o descumprimento, ainda que parcial, dos documentos oficiais hoje existentes pode, entre outros aspectos, dificultar a realização de um debate sobre a real qualidade dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil.

Referências bibliográficas

Brasil. Ministério da Educação, Câmara de Educação Superior do Conselho Nacional de Educação. (2001). *Parecer CNE/CES nº 1.302 de 2001 que propõe as diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura*. Brasília: Diário Oficial da União.

Brasil. Ministério da Educação, Câmara de Educação Superior do Conselho Nacional de Educação. (2003). *Resolução CNE/CES nº 3 de 2003 que estabelece as diretrizes curriculares para os cursos de matemática*. Brasília: Diário Oficial da União.

Brasil. Ministério da Educação, Câmara de Educação Superior do Conselho Nacional de Educação. (2007). *Resolução CNE/CES nº 3 de 2007 que dispõe sobre procedimentos a serem adotados quanto ao conceito de hora-aula, e dá outras providências*. Brasília: Diário Oficial da União.

Brasil. Ministério da Educação, Conselho Pleno do Conselho Nacional de Educação. (2002a). *Resolução CNE/CP nº 1 de 2002 que institui diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores de educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena*. Brasília: Diário Oficial da União.

Brasil. Ministério da Educação, Conselho Pleno do Conselho Nacional de Educação. (2002b). *Resolução CNE/CP nº 2 de 2002 que institui a duração e a carga horária dos cursos de* *licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior*. Brasília: Diário Oficial da União.

Brasil. Ministério da Educação. (2007). *Portaria normativa nº 40 de 2007 que institui o e-Mec, sistema eletrônico de fluxo de trabalho e gerenciamento de informações relativas aos processos de regulação da educação superior no sistema federal de educação*. Brasília: Diário Oficial da União.

Brasil. Presidência da República, Casa Civil. (1996). *Lei nº 9.394 de 1996 que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional*. Brasília: Diário Oficial da União.

Comissão organizadora do IV Fórum Nacional de Licenciaturas. (2010). *Orientações para os fóruns estaduais de licenciatura em matemática*. Recuperado em 03 de março de 2012 de http://www.sbem.com.br/files/orientacoes.pdf

Ministério da Educação. (2009). *Instituições de educação superior e cursos cadastrados*. Recuperado em 03 de março de 2012 de http://emec.mec.gov.br/

CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO Y DE LA COGNICIÓN DE LOS ALUMNOS SOBRE CUERPOS GEOMÉTRICOS. UN ESTUDIO DEL DOMINIO EN DOCENTES PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Natalia Sgreccia, Marta Massa
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura Argentina
Universidad Nacional de Rosario
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
sgreccia@fceia.unr.edu.ar, mmassa@fceia.unr.edu.ar

Resumen. El conocimiento del contenido y de los alumnos es uno de los dominios del conocimiento matemático para enseñar geometría tridimensional en los dos primeros años de la escuela secundaria. El mismo está asociado con las dificultades cognitivas que pueden tener los alumnos. Se presentan resultados, vinculados con dicho dominio, como parte de una investigación realizada con estudiantes avanzadas y egresadas de un Profesorado de Matemática de Argentina. La indagación estuvo orientada a caracterizar sus conocimientos para enseñar cuerpos sólidos en los dos primeros años de la escuela secundaria. Se comparten los resultados relativos acerca de: inferencia sobre posibles dificultades cognitivas en un contenido, habilidades geométricas a desarrollar en los alumnos y ejemplos para favorecer aprendizajes.

Palabras clave: conocimiento matemático, enseñanza, geometría 3d, escuela secundaria

Abstract. Knowledge of content and students constitutes one of the required domains of knowledge for teaching Mathematics. This domain is associated with cognitive difficulties that students may have. Related results with this domain are presented, as part of a research done on advanced and graduates students in Mathematics Teaching in Argentina. The study was oriented to characterize that domain of knowledge for teaching solids in the two first years of secondary school. The relative results -about: possible inference about cognitive difficulties in a particular content and content in general, geometric skills to develop in students and examples of use to promote learning- are shared.

Key words: mathematical knowledge, teaching, 3d geometry, secondary school

Encuadre del estudio

Esta investigación es parte de la tesis doctoral “La geometría del espacio en el Profesorado en Matemática: la generación de puentes entre la formación disciplinar y didáctica” (Sgreccia, 2012). Se analiza el caso de la Universidad Nacional de Rosario, similar a otros Profesorados universitarios en Matemática de Argentina. Interesa caracterizar el conocimiento matemático para enseñar geometría 3d en los dos primeros años de la escuela secundaria logrado en su formación por estudiantes para profesor y egresadas recientes.

La problemática emerge ante la reducida investigación educativa acerca de la formación de grado en la didáctica de la geometría tridimensional y la escasa importancia atribuida a este contenido por el profesor en la escuela secundaria (Moore-Russo & Schroeder, 2007). Según Ball, Thames & Phelps (2008), la mayoría de la gente estaría de acuerdo en que conocer Matemática es importante para su enseñanza. Sin embargo, lo que comprende tal conocimiento y su alcance aún amerita indagación desde la investigación especializada. Estos autores proponen un conjunto de seis dominios de *conocimiento matemático para enseñar* que han de disponer los profesores:

Dominio 1. Conocimiento común del contenido: es el que poseen las personas que usan la Matemática en cualquier ámbito científico o profesional, no sólo de enseñanza.

Dominio 2. Conocimiento en el horizonte matemático: permite establecer la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan con otros en el currículum y ofrece una visión para entender las conexiones entre las diversas nociones matemáticas.

Dominio 3. Conocimiento especializado del contenido: atiende a las adecuaciones, adaptaciones y secuenciaciones realizadas para transformarlo en contenido enseñable, aspectos no requeridos en otras profesiones u oficios que recurren a la Matemática.

Dominio 4. Conocimiento del contenido y de los alumnos: integra conocimiento acerca de la cognición de los alumnos y los procesos matemáticos que devienen en ellos. Le permite al docente prever respuestas, actitudes, dificultades y aciertos de sus alumnos.

Dominio 5. Conocimiento del contenido y de la enseñanza: requiere una interacción entre el entendimiento matemático específico y los aspectos pedagógicos y didácticos. Comprende, entre otros: las formas didácticas de abordar el desarrollo de la Matemática para hacer accesible su contenido a otros, las orientaciones para gestionar la clase, la organización de instrumentos adecuados para evaluar contenidos específicos.

Dominio 6. Conocimiento del contenido y del currículum: abarca los fundamentos, enfoques y organización vinculados con los programas y los materiales didácticos diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos particulares en un nivel educativo determinado. Es un conocimiento vinculado con lo normado jurisdiccional e institucionalmente y que posibilita las decisiones y acciones como docente.

En la tesis doctoral de referencia se trabajó con los seis dominios mencionados. En esta oportunidad se reporta lo relativo al *conocimiento del contenido y de los alumnos*.

Metodología de la investigación

Se adoptó un enfoque cualitativo, con aportes cuantitativos, y su alcance es descriptivo, con rasgos correlacionales (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2006).

Participaron 19 estudiantes y 13 egresadas (75% de las cohortes 2002-2007), representadas, respectivamente, con A1…A19 y B1…B13 en lo sucesivo. Se aplicaron cinco cuestionarios abiertos individuales en instancias virtuales correlativas y grupos de discusión (siete encuentros presenciales en grupos de 4 o 5 miembros). El procesamiento de la información se realizó mediante análisis del contenido (Ander-Egg, 2003), detectando indicadores (modalidades) para las categorías de análisis establecidas. En este trabajo se analizan las respuestas a cuatro preguntas (Tabla 1) que ofrecen información acerca del *conocimiento del contenido y de los alumnos* que las participantes poseen.

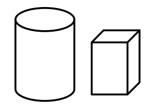
Categorías de análisis	Preguntas formuladas
Inferencia sobre posibles dificultades cognitivas en un contenido en particular. Se focaliza hacia la visualización de la superficie lateral de un cilindro y un prisma	*Quizás los alumnos tengan dificultades para entender que para cubrir la superficie lateral de estos cuerpos se usan trozos de papel de la misma forma. ¿Por qué cree que surge esta dificultad?* 
Inferencia sobre posibles dificultades cognitivas en el contenido en general. Se atiende a las eventuales dificultades de los alumnos al trabajar con cuerpos poliedros y redondos	*¿Cuáles son las dificultades de los alumnos con las que suele encontrarse, o supone que podría encontrarse, al enseñar cuerpos poliedros y redondos en los dos primeros años de la escuela secundaria?*
Habilidades a desarrollar en los alumnos. Se centra la mirada en las promovidas en una secuencia de enseñanza de sólidos platónicos dada	*¿Cuáles habilidades promueve esta secuencia en los alumnos?*
Ejemplos considerados de utilidad para favorecer aprendizajes. Con referencia a poliedros regulares convexos	*¿Cuáles ejemplos de poliedros regulares convexos considera que podrían se adecuados para motivar a los alumnos y complementar esta secuencia?*

Tabla 1. Categorías de análisis y preguntas formuladas

Resultados asociados a cada categoría de análisis

Respecto a la <u>Inferencia sobre posibles dificultades cognitivas en un contenido en particular</u>, las dificultades mencionadas por las participantes pudieron ser agrupadas, por su naturaleza, en *obstáculos matemáticos* y *didácticos*, cuyas modalidades se presentan en la Tabla 2. Las participantes identificaron predominantemente los focos *matemáticos* que podrían estar obstaculizando el entendimiento del alumno, con 22 alusiones de estudiantes y 15 de egresadas frente a solo 4 referencias a *obstáculos didácticos* por parte de docentes noveles.

Escasamente aludieron a eventuales circunstancias que, desde la enseñanza, pueden devenir en *obstáculos didácticos*, por posibles intervenciones docentes desacertadas que podrían propiciar concepciones erróneas en los alumnos (Brousseau, 2007). Sólo tres egresadas mencionaron *obstáculos didácticos*. Esto estaría indicando que casi todas las participantes se centran en obstáculos asociados netamente a contenidos matemáticos, sin prever que las decisiones docentes al respecto también pueden estar propiciando la dificultad en cuestión.

En cuanto al aspecto *matemático*, se dieron dos tipos de miradas: *analítica*, contemplando características de las superficies laterales y también de las bases, y *global*, aludiendo al carácter de *poliedro vs. redondo*. En la primera se involucra, explícita o implícitamente, el desarrollo plano de los cuerpos. En la segunda se distinguen tanto la curvatura de las superficies laterales como la presencia -o no- de plegado (aristas).

	Modalidades	**Fragmentos de respuestas**
Obstáculos matemáticos	(11,7) Distinción de algunas características de las superficies laterales	*[…] ver la superficie lateral del cilindro como "un todo", en un cuerpo redondo y la superficie lateral del prisma rectangular como "suma de partes"* (B6)
	(8,4) Distinción global entre cuerpos, por la curvatura	*[…] el cilindro es un cuerpo redondo. Piensan que, como en el caso de la esfera y el cono, el cilindro no se puede cubrir con un polígono* (A8)
	(3,4) Distinción entre las formas de las bases	*[…] por la forma de sus bases. Para cubrir la superficie lateral del cilindro los "bordes" superior o inferior del papel son segmentos que sobre el cilindro forman circunferencias y sobre el prisma forman polígonos regulares (B11)*
Obstáculos didácticos	(0,1) Predominio de lo 2d sobre lo 3d	*[…] en la mayoría de los casos, los alumnos piensan o ven a las figuras siempre en dos dimensiones […] (B2)*
	(0,1) Falta de instancias escolares que propicien la manipulación de objetos tangibles	*[…] a veces no les damos la oportunidad de que "desarmen y vuelvan a armar las figuras", lo que significaría para ellos una nueva visión del cuerpo […] (B2)*
	(0,1) Abordaje de contenidos en forma aislada	*[…] dar tratamiento por separado a los cuerpos redondos y los cuerpos poliedros cuando se aborda el tema "áreas laterales de cuerpos" […] (B9)*
	(0,1) Limitaciones en la manipulación de materiales	*[…] Al pensar en cubrir las superficies laterales de los cuerpos dados, los estudiantes pueden quedarse sujetos a la idea de que el papel utilizado debe permanecer adherido al cuerpo. De esta manera no gozan de la libertad de retirarlos, descubriendo nuevamente las superficies laterales de los cuerpos y comparando los trozos de papel utilizados […] (B4)*

Tabla 2. Inferencia sobre posibles dificultades cognitivas en un contenido en particular (El par ordenado (a,b) ubicado junto a cada modalidad indica la cantidad de estudiantes (a) y de egresadas (b) que la mencionaron)

Las tres primeras modalidades correspondientes a *obstáculos didácticos* aludieron a un menor trabajo de los alumnos en el espacio tridimensional que en el bidimensional (según insinuó la egresada B2), escasos momentos de clase destinados a una manipulación de objetos 3d para analizar sus elementos constitutivos (B2), falta de integración de distintos tipos de cuerpos al introducir el cálculo del área de su superficie lateral (B9). Cabe mencionar que la última modalidad de la Tabla 2 estaría denotando una falta de flexibilidad en el uso del recurso y en la comprensión de consignas.

En relación con la categoría <u>Inferencia sobre posibles dificultades cognitivas en el contenido en general</u>, las respuestas pudieron ser organizadas según las modalidades:

(12,9) *Representación gráfica 2d de lo 3d*
(6,7) *Proceso de visualización*
(5,2) *Representación mental 3d de lo 2d*
(2,5) *Aplicación a medidas*
(3,3) *Contenidos geométricos necesarios*
(5,1) *Secciones planas de cuerpos*
(2,0) *Mecanización de procedimientos*
(1,0) *Lenguaje específico; Motricidad fina; Descomposición de cuerpos; Motivación de alumnos*

Puede observarse que la mayoría de las participantes (excepto 3 estudiantes y 3 egresadas) aludió, en algún sentido, a la *relación 2d-3d*, al referirse a: representación gráfica 2d de lo 3d, representación mental 3d de lo representado en 2d, secciones planas de cuerpos. Esto denota que las participantes son conscientes que las acciones para establecer esta relación se enmarcan en un proceso de aprendizaje no automático, en acuerdo con Gutiérrez (1998):

> Al enseñar geometría espacial, el proceso de comprensión del concepto subyacente a una representación plana se complica debido a que hay que recorrer dos pasos: 1) interpretación de la figura plana para convertirla en un objeto tridimensional y 2) interpretación de este objeto (que en muchos casos sólo existe en las mentes de los estudiantes) para convertirlo en el concepto geométrico objeto de estudio (p.194).

Las referencias a otros contenidos del currículum escolar, tanto *necesarios* como previos (quinta modalidad) o posteriores, como *aplicaciones a medidas* (cuarta modalidad), descentran el foco de atención sobre la geometría 3d.

La segunda modalidad alude al *proceso de visualización*, comprendiendo tanto las referencias a las imágenes producidas por la visión directa del objeto concreto como a su abstracción en cuanto idea matemática. Esta modalidad, junto con la correspondiente a *descomposición de cuerpos*, son las únicas que se centran exclusivamente en geometría 3d.

Algunas participantes aludieron a dificultades más generales, que trascienden el contenido geométrico específico que aquí se está tratando, como ser: *mecanización de procedimientos*, *lenguaje matemático específico*, *motricidad fina* y *motivación de alumnos*.

En la categoría <u>Habilidades a desarrollar en los alumnos</u>, las respuestas se organizaron según los cuatro tipos propuestos por Höffer (1981): visuales, razonamiento, dibujo y construcción, comunicación. Las de tipo *visual* tuvieron limitadas menciones tanto en frecuencia como en su contenido. Las respuestas contemplaron habilidades perceptivas -visuales y táctiles- que estarían ayudando al proceso de visualización. Esto hace suponer que se considera que estas habilidades deben ser desarrolladas en la escolaridad primaria. Además, en general, las *habilidades visuales* así concebidas se consideraron como previas o promotoras de las *habilidades de razonamiento matemático*. Éstas fueron las predominantes: las participantes vieron en la secuencia propuesta un posible medio para la promoción de procedimientos que trasciendan tareas escolares de reproducción mecánica de conocimiento. Términos clave que sugieren esta idea, por ejemplo, son: elegir estrategias apropiadas (A1), ser consciente de su proceder (A1), evaluar el trabajo realizado (A19), resolver problemas (B1), establecer conexiones (B2), formular una conjetura (B7).

Para las participantes resulta sustantivo el desarrollo de procedimientos asociados con el reconocimiento y puesta en juego de relaciones entre los conceptos aprendidos, de modo de organizar procesos inferenciales que orienten la reflexión sobre lo realizado.

En menor medida se valoró la habilidad de *representación y construcción* de cuerpos en sí, no sólo como medio para lograr otros fines. Esto da indicios de la necesidad de potenciar su valor formativo, tal como mencionan Barrero, Beltrán, Bifano, Carpintero, Fioriti, Giuliani, Sessa y Vega (2007, p.33) "Las actividades de construcción -con una gestión de la clase que favorezca la reflexión- pueden resultar muy fértiles para promover la exploración y la elaboración de propiedades, así como para poner en juego propiedades ya conocidas".

CN 3	**Modalidades**	**Fragmentos de respuestas**
Visuales	(6,4) Sentido de la vista con el objeto concreto	*[…] las habilidades de visualización espacial (A6)* *[…] la observación de los poliedros concretamente […] (A13)*
	(5,3) Sentido del tacto con el objeto concreto	*[…] la manipulación de objetos geométricos (A16)* *[…] ver todos los elementos de un poliedro real tocándolo […] (B10)*
Razonamiento	(9,4) De 1° tipo: relacionar y aplicar contenidos ya desarrollados	*[…] poder relacionarlo con otros cuerpos (no necesariamente geométricos) [(A4)* *[…] interpretar mejor y correctamente los contenidos conceptuales desarrollados (A14)* *[…] posibilidad de establecer conexiones con contenidos matemáticos dados anteriormente (B2)*
	(9,11) De 2° tipo: inferir y probar nuevas relaciones	*[…] Establecer relaciones entre dos objetos. Comparar dos imágenes […] Extraer propiedades de las figuras construidas (B6)* *[…] formular una conjetura, corroborar o reformular la conjetura hecha anteriormente tratando de realizar una pequeña demostración y finalmente organizar toda la información obtenida (B7)*
	(13,9) De 3° tipo: trascender lo realizado y observarlo retrospectiva-mente	*[…] metacognitivas, ya que es una secuencia integrada de procedimientos que fueron elegidos con un objetivo determinado y el alumno debe saber elegir estrategias apropiadas y adaptarlas para lograr un buen aprendizaje y para esto debe ser consciente de lo que está haciendo (A1)* *Elaborar criterios personales que permitan resolver una situación problemática […] reflexionar críticamente sobre los posibles errores cometidos (B1)*

Dibujo y construcción	(5,4) Construcción de los cuerpos	*La de construir ellos mismos […] la de probar y no poder construir algo que pensaban que se podía (A18)* *[…] Construcción sobre la base de pautas dadas […] (B6)*
	(2,1) Representación matemática	*[…] representación de los poliedros en el papel […] (A3)* *[…] manejando procedimientos básicos de esta ciencia en todas sus formas: oral, escrita, gráfica y simbólica […] (B1)*
Comunicación	(7,4) Interacción grupal	*[…] Es muy importante el momento en que todos los grupos exponen sus trabajos, pues también así se aprende intercambiando ideas (A13)* *[…] desarrollo del pensamiento entre pares, lo que es muy importante porque entre los integrantes del grupo se plantean los distintos cuerpos, preguntas […] (B13)*
	(3,3) Cognitivo-lingüísticas	*[…] luego poder dar una explicación de la causa por la cual el conjunto de estos sólidos es finito […] (A11)* *[…] cognitivo-lingüísticas, a la hora de intercambiar ideas o de comunicar las conclusiones a los demás grupos (explicar, justificar, argumentar) (A12)*

Tabla 3. Habilidades a desarrollar en los alumnos

Las transcripciones de la Tabla 3 muestran dos concepciones distintas relacionadas con la *construcción de cuerpos*: aquellas que se basan en un criterio de exploración (A18) y las que le asignan un carácter de desarrollo guiado (B6).

Entre las *habilidades de comunicación*, fue considerable la valoración del intercambio en el *trabajo grupal*, trascendiendo la actividad individual que suele predominar en las clases de Matemática, para resolver ejercicios luego de escuchar la explicación del profesor (Báez Melendres, Cantú Interián y Gómez Osalde, 2007; Villella, 2001). Si bien las participantes, en conjunto, consideraron un amplio abanico de posibilidades, ninguna de ellas puntualizó en *habilidades de aplicación y transferencia*. A modo de síntesis se advierte que: 10 estudiantes y 7 egresadas no mencionaron habilidades *visuales* en sus respuestas; sólo 1 integrante de cada grupo no indicó habilidades de *razonamiento*; 12 estudiantes y 8 egresadas no señalaron habilidades de *dibujo y construcción*; 11 estudiantes y 7 egresadas no aludieron habilidades de *comunicación*. Sólo 2 estudiantes y 3 egresadas contemplaron, en sus respuestas, las cuatro habilidades identificadas.

En la categoría <u>Ejemplos considerados de utilidad para favorecer aprendizajes</u>, la amplia gama de ellos responde a las cinco modalidades que se muestran en la Tabla 4. Se observa el predominio de las modalidades: *cotidianeidad y familiaridad; Matemática*. En la primera modalidad se identificaron dos enfoques para promover el interés del alumno frente a lo desconocido: el que hace referencia a los más difundidos como el cubo (A5); el que otorga mayor significatividad a los poliedros menos frecuentes, como el icosaedro (A1). En la modalidad *Matemática* se ubican ejemplos de poliedros que actúan como prototipos en instancias escolarizadas. Se destaca que a esta modalidad corresponden las respuestas de la mayoría de las estudiantes, sugiriendo su poca familiarización con el campo de aplicación.

Las participantes aludieron, aunque en menor medida, a ejemplos vinculados con *Juegos*, *Arte y Arquitectura*, *Ciencias Naturales*, abarcando un amplio espectro de aplicaciones y siendo -en proporción- más recurrentes las respuestas de egresadas aquí. No se aprecian referencias específicas con los avances tecnológicos actuales.

Modalidades	Fragmentos de respuestas
(11,7) Cotidianeidad y familiaridad	Por ser los más cotidianos y familiares: *[…] el cubo y el tetraedro, por tener un menor grado de dificultad y ser los más frecuentes en la vida cotidiana […]* (A5) Por ser los menos cotidianos y familiares: *[…] el icosaedro, el dodecaedro y el octaedro por ser cuerpos poco comunes, es decir, son cuerpos que no están presentes en el entorno diario de los alumnos, por lo que pueden generar curiosidad en ellos* (A11)
(14,3) Matemática	*[…] los poliedros regulares convexos vistos anteriormente (los sólidos platónicos) son poliedros del espacio 3D y […] existen otros poliedros regulares convexos en otras dimensiones, por ejemplo el Hipercubo en 4D, mostrándoles la representación del mismo […]* (A14)
(4,4) Juegos	*Un ejemplo apropiado es el dodecaedro, pues los polígonos (pentágonos) se unen como en la pelota de fútbol […]* (A1) *[…] El cubo mágico es un poliedro regular […]* (B1)
(2,4) Arte y Arquitectura	*[…] construcciones arquitectónicas que reproducen poliedros regulares con distintos materiales (vidrio, acrílico, cemento)* (A12) *[…] obras de arte en las cuales aparezcan poliedros, como por ejemplo, dibujos de Escher o esculturas […]*(B7)
(1,4) Ciencias Naturales	*[…] El virus de la poliomielitis y de la verruga tiene forma de Icosaedro. Las células del tejido epitelial tienen forma de Cubos y Prismas […]* (B6)

Tabla 4. Ejemplos considerados de utilidad para favorecer aprendizajes

Cabe observar que la suma de las respuestas a esta categoría es el par ordenado (32,22), que no llega a duplicar la cantidad de estudiantes ni de egresadas participantes. Esto indica que, en promedio, cada participante aportó pocos ejemplos, como si *cuerpos poliedros y redondos* fuese un contenido que tiene una cantidad limitada de ejemplos posibles. Este supuesto se robustece ante la honesta respuesta de una participante que argumentó: *En este momento no se me ocurre ninguno* (B5).

Comentarios finales

El estudio ha dado evidencias que las dificultades cognitivas que suponen las participantes que los alumnos de escuela secundaria podrían tener en la visualización de cuerpos responden predominantemente a obstáculos matemáticos por sobre los de tipo didáctico. Las alusiones a dificultades cognitivas intrínsecamente 3d en torno al contenido en cuestión fueron escasas, percibiéndose la poca familiaridad de las participantes con una profundización en esta área. Más bien predominó su vinculación o aplicabilidad con temas de la geometría (2d) o con el eje Medidas, cuyo tratamiento suele ser más usual en las clases reales (Barrantes y Blanco, 2004).

Resultó nutrido el espectro de habilidades geométricas aportadas en conjunto, pero no fue así en cada participante en particular. En general, se valoró la secuencia para enseñar sólidos platónicos sobre la que se organizó uno de los cuestionarios por su promoción de construcción de conocimiento y en el momento de analizar ejemplos de poliedros regulares. En general, estos últimos se concentraron más en dos ámbitos: lo cotidiano y familiar así como el propiamente matemático, con escasas referencias a otros campos de aplicación que es hoy muy amplio. De manera sintética se puede decir que resta fortalecer este dominio de *conocimiento matemático para enseñar*, que amalgama *geometría del espacio* y *alumnos del secundario*, en términos de especialidad del contenido y del nivel educativo.

Referencias bibliográficas

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información*. Buenos Aires: Lumen.

Báez Melendres, M., Cantú Interián, C. y Gómez Osalde, K. (2007). *Un estudio cualitativo sobre las prácticas docentes en las aulas de matemáticas en el nivel medio*. Tesis Grupal de Licenciatura en Enseñanza de Matemáticas. Mérida: Universidad Autónoma de Yucatán.

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education,* 59 (5), 389-407.

Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias,* 22 (2), 241-250.

Barrero, M., Beltrán, S., Bifano, F., Carpintero, C., Fioriti, G., Giuliani, D., Sessa, C. y Vega, S. (2007). *Geometría. Aportes para su enseñanza. Nivel Medio*. Buenos Aires: Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de Buenos Aires.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Ema. Investigación e innovación en Educación Matemática*, 3 (3), 193-220.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ª ed.). México: McGraw Hill.

Höffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. *Mathematics Teacher,* 74 (1), 11-18.

Moore-Russo, D. & Schroeder, T. (2007). *Preservice and inservice secondary mathematics teachers' visualization of three-dimensional objects & their relationships*. Ponencia presentada en el North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Octubre, Stateline.

Sgreccia, N. (2012). *La geometría del espacio en el Profesorado en Matemática: la generación de puentes entre la formación disciplinar y didáctica.* Tesis de Doctorado no publicada, Facultad de Humanidades y Artes, Universidad Nacional de Rosario. Argentina.

Villella, J. (2001). *Uno, dos, tres... Geometría otra vez. De la intuición al conocimiento formal en la EGB*. Buenos Aires: Aique.

EL CONCEPTO DE FRACCIÓN EN SITUACIONES DE MEDICIÓN, DIVISIÓN Y LA RELACIÓN PARTE-TODO CON ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Ivón García, Guadalupe Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero México
bony_999@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com

Resumen. El artículo analiza el concepto de fracción desde la perspectiva de estudiantes de bachillerato en México, en situaciones de medición, división y la relación parte-todo. El estudio evidencia que recurren a las transformaciones ya sea de formas geométricas o bien de fracciones a su expresión decimal, para determinar partes de un todo. En el caso de las formas geométricas, a fin de determinar una medida de área de polígonos no convexos. Estas transformaciones dan cuenta además, que los estudiantes asocian a la fracción con la división.

Palabras clave: fracción, medición, división, relación parte-todo

Abstract. The paper analyzes the concept of fraction from high school mexican student's point of view, in situations related to measurement, division and part-whole relation. The study reports that students use transformations either geometric shapes or fractions in decimal terms, to determine the parties of the whole. In the case of geometric shapes, in order to determine a measure of area of not convex polygons. These transformations also show that students associated to the fraction with the division.

Key words: fraction, measurement, division, part-whole relation

Introducción

El estudio de las fracciones constituye una parte importante del currículo de matemáticas en la enseñanza básica, y sustenta el desarrollo del razonamiento proporcional y de temas como álgebra y probabilidad (Clarke & Roche, 2009). Sin embargo, es claro que para muchos profesores este tema resulta difícil de entender y enseñar (Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993; Nunes, Bryant & Watson, 2007) y de parte de los estudiantes, como es bien sabido, enfrentan serias dificultades en su aprendizaje. Nunes, Bryant y Watson (2007) por ejemplo, documentaron que en la enseñanza básica, los niños tienen más éxito para comprender la relación de equivalencia y de orden entre fracciones, por medio de magnitudes en situaciones que involucran a la división, que en aquellas asociadas a la medición. En Post, Behr, and Lesh (1986, citado en Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993) se reporta cómo el uso coordinado de las relaciones de orden y de equivalencia, combinado con la habilidad de estimar el tamaño de los números racionales, permite que algunos niños de primaria tengan éxito al comparar fracciones con igual numerador, con el mismo denominador, así como con aquellas de diferente numerador y denominador. León y Fuenlabrada(1996) por su parte, sostienen que el discurso matemático escolar (*dme*) en este nivel de enseñanza, prioriza el significado del fraccionamiento de la unidad y el dominio en las reglas de cálculo, en detrimento de situaciones que articulen a la medición con la comparación y el reparto, así como con la transformación de medidas. En esta misma dirección, Fandiño (2009) reconoce que el *dme* privilegia el estudio de la fracción sobre figuras estándar, lo que se constituye en un obstáculo didáctico.

Comprender el conocimiento construido por los estudiantes acerca de un concepto durante determinada etapa de su formación académica, cobra relevancia cuando el interés va más allá de identificar dificultades, sino más bien, de conocer su nivel de comprensión y de cómo lo usan ante situaciones concretas. En este artículo se reporta un estudio que analiza el conocimiento que estudiantes de bachillerato han construido en torno al concepto de fracción, así como de las relaciones que establecen entre su comprensión conceptual y los procedimientos desarrollados en ese proceso. En ese contexto, nos planteamos dar respuesta a las preguntas siguientes:

a) ¿Cuál es el conocimiento que los estudiantes han construido acerca de las fracciones y cómo lo ponen en juego ante situaciones que involucran a la medición, la división y la relación parte todo?

b) ¿Qué relaciones establecen entre su comprensión conceptual de las fracciones y los procedimientos que les fueron enseñados para compararlas y representarlas en los contextos continuo y discreto.

El estudio se sustenta de las investigaciones de Fandiño (2009) y de algunos constructos teóricos definidos por Sierpinska (1994) respecto de la comprensión de conceptos. De Fandiño (2009), retomamos la categoría de significados matemáticos asociados al concepto de fracción, asimismo, de las dificultades que se sabe, enfrentan los estudiantes.

Comprensión de conceptos matemáticos

El aprendizaje de procedimientos, aunque indispensable en matemáticas, es insuficiente en la comprensión de conceptos matemáticos (Pantziara & Philippou, 2012), pues generalmente contribuye a la realización de tareas rutinarias, que no siempre son exitosas. Sierpinska (1994) afirma que una persona comprende algo cuando logra relacionarlo con un contenido en sus estructuras mentales, a través de una serie de operaciones mentales, dentro de un proceso de comprensión compuesto por actos de comprensión que se relacionan entre sí. Sostiene además, que la asimilación de un concepto difícilmente podría hacerse mediante la lectura de su definición, y que solamente cuando se han comprendido ejemplos y contraejemplos del objeto definido, es cuando puede decirse lo que este objeto es y lo que no es, cuando hemos dado cuenta de sus relaciones con otros conceptos, cuando hemos notado que estas relaciones son análogas a relaciones que son familiares con aplicaciones, es que podemos decir que comprendimos algo acerca de él. La investigadora define a la *comprensión* en términos de *actos de comprensión* y los caracteriza por medio de cuatro operaciones mentales que los sujetos realizan en el proceso de comprensión, y consisten de lo siguiente:

a) La *identificación* de un objeto entre otros objetos, tiene que ver con el reconocimiento de un objeto. Es la operación principal involucrada en los actos de comprensión y consiste en una reorganización del campo de conocimientos, de modo que algunos objetos que hasta ahora eran un mero antecedente, de pronto aparecen como el objeto principal de la descripción; a menudo se le quiere dar un nombre, o, si ya lo tiene, este nombre inesperadamente obtiene una categoría de término científico en nuestra mente, porque ha sido interiorizado.

b) *Discriminación* entre dos o más objetos, está presente al momento en que se reconocen diferencias entre dichos objetos, con relación a características invariantes, así como entre sus propiedades.

c) *Generalización.* Es una operación mental en la cual una situación dada se entiende como un caso particular de otra situación. El término situación es concebido en un sentido amplio, desde una clase de objetos material o mental, a una clase de eventos (fenómeno) a problemas, teoremas o enunciados y teorías. Conduce a un conocimiento que puede extenderse al rango de las aplicaciones; algunas afirmaciones resultan irrelevantes y nuevas posibilidades de interpretación se descubren.

d) *Síntesis.* Se entiende como la búsqueda de una relación común, un principio de unificación una similitud entre varias generalizaciones y su comprensión como un todo. Es la percepción de relaciones entre hechos hasta ahora aislados; como un resultado, propiedades, relaciones, objetos, etc. están organizados en un conjunto consistente.

Los procesos de comprensión se articulan a los de razonamiento, y se manifiestan a través de explicaciones verbales y no verbales, sustento del análisis de esta investigación.

Método

Las actividades de exploración y su aplicación

La exploración se llevó a cabo mediante cinco problemas, que situaron a los participantes a trabajar con las fracciones en dos contextos, en el continuo y en el discreto. Los significados considerados en su diseño fueron el de medida, relación parte-todo, como operador, cociente y razón. Se trabajó en equipo de tres integrantes, constituyéndose diez a los que denominamos como E1, E2,…E10. Las actividades se aplicaron en dos sesiones de dos horas cada una, las que fueron videograbadas para su posterior transcripción y análisis.

Los participantes

Las actividades fueron suministradas a 30 estudiantes (15 – 18 años de edad) matriculados en el segundo semestre de un bachillerato general, cuyos antecedentes académicos consistieron de conceptos, relaciones y propiedades matemáticas asociadas a los números enteros, fraccionarios y decimales que fueron objeto de estudio durante su formación académica en secundaria, así como del uso que hacen del concepto de número racional y conceptos algebraicos como ecuación, objeto de estudio en el bachillerato.

Aspectos considerados en el análisis de las actividades

El análisis se sustenta de las explicaciones verbales y no verbales de los estudiantes en dos momentos, durante la resolución de los problemas y durante una entrevista de tipo abierta. Los aspectos considerados en este proceso, fueron los significados asociados al concepto de fracción, así como las acciones mentales que Sierpinska (1994) categoriza para el estudio de los actos de comprensión de conceptos matemáticos.

Discusión y análisis de los resultados

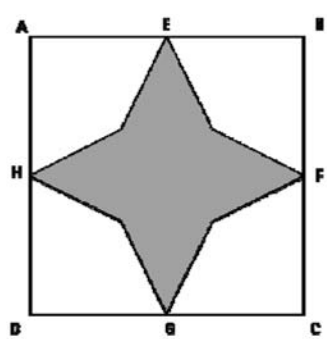
La discusión y análisis de los resultados provienen de los argumentos escritos y verbales presentados por los estudiantes en el proceso de resolución de dos de las cinco actividades usadas en la exploración. La primera, se articula a un octágono no convexo inscrito en un cuadrado de área unitaria, y la segunda, con la construcción de una piscina rectangular, en un terreno de la misma forma.

Ambas situaciones involucran a la medición, división y a la relación parte-todo.

a) *Las actividades y su análisis*

a.1) *Actividad 3: La región sombreada*

Determina el área de la región sombreada que se haya inscrita en el cuadrado ABCD de área unitaria. Tomando en cuenta que los puntos E, F, G, H son puntos medios. Justifica tus respuestas.



a.1.1) *Discusión y análisis de A3*

El análisis evidencia que los estudiantes *identificaron* el todo y sus partes y que orientaron sus procedimientos a la división del todo otro tipo de partes (relación parte-todo), recurriendo al trazo de segmentos de recta que pasaron por los vértices del octágono; consecuentemente, formaron triángulos y cuadrados congruentes (Véase figura No. 1).

Sin embargo, sólo E4 identificó esta relación entre las figuras y a partir de ello, completó con los triángulos, cuadrados, a fin de trabajar en torno a estos polígonos, esto es, recurrió a determinadas transformaciones. Es así que reconocieron que el cuadrado original quedaba dividido en nueve cuadrados iguales y que de ellos, un tercio correspondía a la parte sombreada (*identifican* y *discriminan*), pero ante todo, que esa parte (un tercio) correspondía al área que ocupa el octágono inscrito (*generalización*).

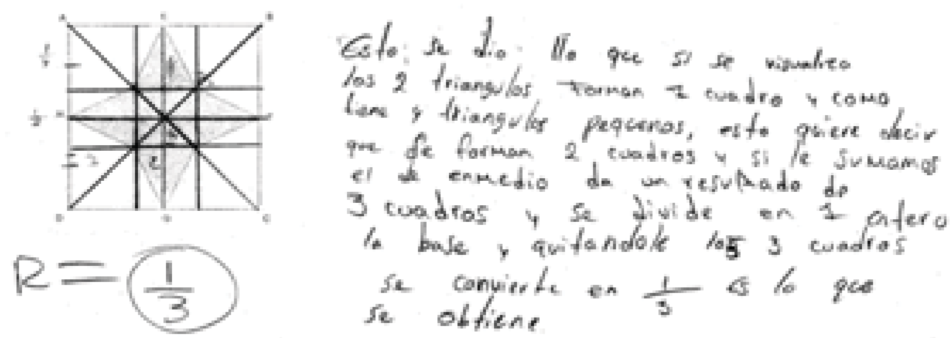


Figura 1: E4 identifica formas congruentes a partir de trazos auxiliares.

La visualización fue fundamental en la forma de proceder de E4, así como la descomposición y recomposición del todo, pues contribuyó a reconocer con qué formas geométricas les convenía trabajar, así como a determinar la medida de área que cumple con las exigencias del problema (Figura 1).

E4 reconoce que la determinación de la medida del área de la región sombreada debe hacerse de forma indirecta, por ello recurre a las transformaciones (*generalización* y *síntesis*). Una vez hecho esto, *mide* el área del octágono a través del conteo de partes congruentes. Quienes no comprendieron el concepto de área unitaria, *midieron* los lados del cuadrado con una regla así como los correspondientes a los triángulos que formaron y con ello, determinaron el área de los triángulos y cuadrados que forman el octágono, apoyándose de las fórmulas correspondientes. Sin embargo, la medida de área que determinaron no atendió a las exigencias, en razón de que la medida de la altura que consideraron para calcular el área de los triángulos fue la de un lado adyacente a la considerada como base. E3 por su parte, asignó medidas arbitrarias a los lados del cuadrado a fin de determinar la medida del área de las partes que conforman al octágono, del que *identifican*, está formada por un cuadrado y cuatro triángulos congruentes (parte-todo).

E3: Inventamos la medida… decimos que el lado del cuadrado mide doce y la mitad será seis… luego sacamos el área del triángulo (al que está sin sombrear) que se formó… como su lado coincide con la mitad del cuadrado, también medirá seis y para sacar la altura se ve que dividen el cuadrado en tres, entonces dividimos doce entre tres para sacar la altura del triángulo, después multiplicamos el lado y la altura, o sea cuatro por seis y después dividimos entre dos.

Cuando E3 dice "… se ve que dividen en tres al cuadrado…", reconoce que los lados de este polígono se dividen en tres partes iguales, por ello dividen doce entre tres a fin de determinar cuánto mide la altura de los triángulos no sombreados y con ello (*identifican* y *discriminan*), la medida de su área, 12 (Figura 2).

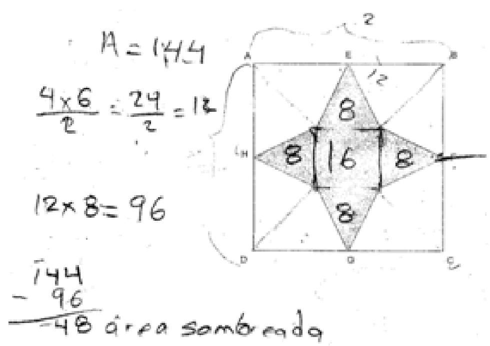


Figura 2: Uso de fórmulas por E3.

Entrevistador: ¿Pueden explicar por qué procedieron de esa forma?

E3: Porque así se calcula el área del triángulo y si sabemos cuánto mide… vamos a saber el área de la figura sombreada.

Entrevistador: Y después, ¿Qué hicieron?

E3: Multiplicamos cuatro por seis nos da veinticuatro y después lo dividimos entre dos y nos da doce, después multiplicamos doce por ocho.

Entrevistador: ¿Por qué por ocho?

E3: Son ocho triángulos que se formaron (los no sombreados)…luego multiplicamos el doce por ocho y nos da noventa y seis y como el área de todo es doce por doce, igual a ciento cuarenta y cuatro, a esto le restamos los noventa y seis y nos dio cuarenta y ocho, que es el área de la figura sombreada.

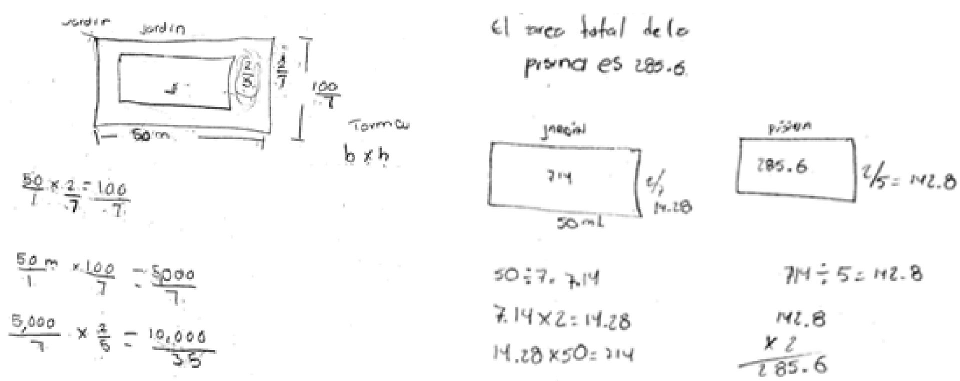
Los integrantes de E3 recurren a un caso particular a fin de usar fórmulas básicas para determinar la medida del área de las partes que forman el octágono y con ello, dar cumplimiento a las exigencias del problema (*generalización* y *síntesis*). Sin embargo, no determinan qué parte del área del cuadrado representa 48, medida del área del octágono, a la que llegaron con los datos que usaron.

a.2) *Actividad 4: La piscina*

Se desea construir una piscina en un jardín de forma rectangular que mide 50 m. de largo y el ancho equivale a dos séptimo de lo largo. El área que ocupará la piscina equivale a dos quintas partes del área total del jardín. ¿Cuál será el área que ocupe la piscina?

a.2. 1) *Discusión y análisis de A4*

Cinco equipos transformaron las fracciones asociadas a la medida del largo del jardín y del área que ocuparía la piscina, a su equivalente en decimal, ejemplo de ello, fue E9 (Inciso b, figura No. 3). Cuatro equipos por su parte, trabajaron con las fracciones sin transformarlas, como es el caso de E6 (Inciso a, figura No. 3).



a) Argumentos escritos de E6 b) Argumentos escritos de E9

Figura 3

Los argumentos (escritos como verbales) de E6 y E9, evidencian que conciben a la fracción como operador, y que relacionan el todo y las partes (Figura No. 3). Veamos algunos argumentos de E9 durante la entrevista.

> *E9*: Primero dividimos cincuenta en séptimos y nos da siete punto catorce, después multiplicamos por dos porque son dos partecitas y nos dio catorce punto veintiocho… luego multiplicamos catorce punto veintiocho por cincuenta y nos da setecientos catorce.

En el fragmento anterior, E9 exhibe la transformación de la fracción a decimal, seguidamente, determina el área del jardín y con ello, la que ocupará la piscina.

Entrevistador: Y esos setecientos catorce… ¿Qué son?

E9: Es toda el área… luego dividimos toda el área entre cinco.

Entrevistador: ¿Por qué dividen entre cinco?

E9: Porque nos piden dos partes de cinco… y encontrar el área de la piscina… multiplicamos por dos y nos da doscientos ochenta y cinco punto seis.

E6 reconoce además, que el número 50 puede ser expresado en forma de fracción y lo usa a fin de determinar la fracción que representa la medida del ancho del jardín.

E6: Tenemos que hacer una multiplicación… multiplicamos cincuenta por dos séptimos, o sea, multiplicamos cincuenta por dos y a uno por siete.

Entrevistador: ¿Por qué aparece ese uno?

E6: Para multiplicar y así multiplicamos cincuenta por dos y nos da cien y a uno por siete que es igual a siete… entonces tenemos cien séptimos que es el ancho del terreno…

En seguida, E6 procede a determinar el área que ocupa el jardín (*el todo*), apoyándose de la fórmula del rectángulo. Con este dato, determina el área que ocupará la piscina (*parte*).

E6: …y ahora vamos a sacar el área, base por altura, que es el área del jardín y ya que tenemos el área del jardín… entonces hacemos otra multiplicación cinco mil por dos que es igual a diez mil y siete por cinco que es treinta y cinco y así el área del jardín son diez mil sobre treinta y cinco…

Breve discusión de resultados

Los estudiantes identifican el todo y sus partes. Recurren a las transformaciones ya sea de formas geométricas o bien de fracciones (a su expresión decimal) para determinar las partes. En el caso de las formas geométricas, a fin de determinar una medida del área de un polígono no convexo, a través de sumas de áreas de polígonos convexos como cuadrados y triángulos. Es decir, transformaron el todo en otro tipo de partes (relación parte-todo), para medir el área del octágono, se apoyaron para ello, de fórmulas básicas. El privilegio del uso de decimales por su parte, contribuyó a que tuvieran éxito en la solución de las situaciones relativas a este tipo de casos. Estas transformaciones dan cuenta además, que los estudiantes asocian a la fracción con la división, uno de los significados reportados en Fandiño (2009) y se confirma además la tesis de Nunes, Bryant y Watson (2007) quienes afirman que en la enseñanza básica los niños tienen más éxito para comprender la relación de equivalencia y de orden entre fracciones por medio de magnitudes en situaciones que involucran a la división, que en aquellas referidas a la medición, aunque en nuestro estudio, se presentó en estudiantes de Nivel Medio Superior.

Referencias bibliográficas

Clarke, D. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics 72* (1), 127-138.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá:Magisterio.

León, H. y Fuenlabrada, I. (1996). Procedimiento de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 1* (2), 268-283.

Nunes, T., Bryant, P. & Watson, A. (2007). *Key Understanding in Mathematics Learning*. England: University of Oxford.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 327–361). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London, U.K.: Falmer Press.

ANÁLISIS DEL TRATAMIENTO DEL ÁLGEBRA EN EL PRIMER AÑO DE SECUNDARIA: SU CORRESPONDENCIA CON LOS PROCESOS DE ALGEBRIZACIÓN Y MODELIZACIÓN

Myrian Luz Ricaldi Echevarria
Colegio SS.CC Recoleta Perú
myrianluz@hotmail.com, tauromayo@gmail.com

Resumen. El presente reporte de investigación analiza el tratamiento que se da al álgebra en el primer año de secundaria. La investigación es de tipo cualitativo y utiliza como marco teórico fundamental la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El estudio fue realizado con 63 estudiantes del primer año de secundaria de un colegio privado en la ciudad de Lima. La investigación describe y analiza las diferentes organizaciones matemáticas y didácticas presentes en libros de textos y programas curriculares, además de incluir una descripción de la entrevista estructurada aplicada a docentes en relación a su práctica pedagógica.

En este contexto, la investigación describe y analiza si el tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria corresponde a un proceso de algebrización y si la modelización está presente en el proceso de instrucción estudiado.

Palabras clave: algebrización, teoría antropológica de lo didáctico, modelización

Abstract. This research assesses the treatment given to the algebra in the first grade of high school. This is a qualitative research and uses the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), as its theoretical framework. The study was conducted with 63 students in the first year of high school at a private school in Lima city. The research describes and analyzes the different mathematical and educational organizations showed in textbooks and curricula, and includes a structured interview applied to teachers about their teaching practice.

In this context, the research describes and analyzes whether algebra treatment in the first grade of high school corresponds to an algebraization modeling process and if it is showed in the instructional process studied.

Key words: algebraization, Anthropological theory of didactics, modelling

Introducción

El estudio del álgebra está presente a lo largo de toda la escolaridad llegando incluso hasta el nivel universitario. Sin embargo, a pesar de su presencia explícita en los programas curriculares, los estudiantes muestran dificultades asociadas a la resolución de problemas que implican la aplicación comprensiva de conocimientos algebraicos.

La presente investigación pretende focalizar su atención en analizar si el tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria corresponde a un proceso de algebrización y si la modelización está presente en el proceso de instrucción estudiado.

Abordaremos nuestro estudio desde una perspectiva epistemológica e institucional, considerando los fenómenos didácticos a partir de la modelización de la componente matemática. Para ello, nos situaremos dentro del marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cual nos suministrará las herramientas de análisis matemático y didáctico necesarias para reconstruir una posible evolución del dominio de investigación álgebra.

Formulación del problema

En el presente trabajo se busca analizar si el tratamiento del álgebra escolar en el primer año de secundaria corresponde a un proceso de algebrización o si el encuentro con tópicos algebraicos es a través de una aritmetización del álgebra. En este proceso se analizará también el papel que juega la modelización.

Objetivos de la investigación

Objetivo general:

Analizar si el tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria corresponde a un proceso de algebrización y si la modelización está presente en el proceso de instrucción estudiado.

Objetivos específicos:

1. Analizar los lineamientos curriculares propuestos en el Diseño curricular nacional (DCN) respecto al tratamiento del álgebra escolar.
2. Analizar si los tipos de tareas y técnicas propuestos en los libros de texto y actividades de clase son pertinentes para el estudio de temas algebraicos.

Marco teórico

La presente investigación tomará como referente la teoría antropológica de lo didáctico, propuestas por Chevallard (1997).Esta teoría nos brinda herramientas de análisis que nos permite caracterizar la serie de transformaciones a las que son sometidos los conocimientos algebraicos al pasar de una institución a otra, resaltar el papel de las instituciones en un sistema didáctico y analizar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio para mejorar su funcionamiento.

Teoría antropológica de lo didáctico

La TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar, como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado. Dicho objeto de estudio incluye además todas las instituciones que participan en este proceso. Bajo esta perspectiva, la actividad matemática debe ser interpretada como una actividad humana junto a las demás, y no considerarla solo como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo.

Por otro lado, se debe precisar que este marco teórico emplea como noción básica el término de praxeología el cual hace referencia a la estructuración o modelo único y coherente de toda actividad humana regularmente realizada, sobre los modos de hacer y saber. Este término hace referencia a la praxis (hacer), es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos. Al mismo tiempo, refiere al término logos, que se identifica con el saber e incluye las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que da sentido a los problemas planteados. Tipos de tareas, técnica, tecnología y teoría son los elementos que componen una praxeología. (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003).

Tratamiento del álgebra en la escuela

La investigación proporcionaremos algunos elementos para el análisis del funcionamiento didáctico del tratamiento del álgebra escolar en el primer año de secundaria. En nuestro caso realizaremos una:

Descripción del tratamiento algebraico en los programas curriculares del nivel secundario

El DCN, señala que el área curricular de matemática se orienta a desarrollar el pensamiento matemático y el razonamiento lógico del estudiante desde los primeros grados, con la finalidad que vaya desarrollando las capacidades que requiere para plantear y resolver con actitud analítica los problemas de su contexto y de la realidad.

En el mismo documento se indica que para desarrollar el pensamiento matemático, resulta relevante el análisis de procesos de casos particulares, búsqueda de diversos métodos de solución, formulación de conjeturas, presentación de argumentos para sustentar las relaciones, extensión y generalización de resultados, y la comunicación usando el lenguaje matemático.

En el caso del área de matemática, las capacidades explicitadas para cada grado involucran los procesos transversales de razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas, siendo este último el proceso a partir del cual se formulan las competencias del área en los tres niveles.

Para fines curriculares, el área de matemática en este nivel se organiza en función de:

- Números, relaciones y funciones
- Geometría y medición
- Estadística y probabilidad.

En cuanto al estudio del álgebra, el DCN propone su estudio en todos los niveles de la educación básica, dentro de la componente denominada Números, Relaciones y Funciones.

Creemos que esto se debe a su consideración como objeto de estudio en sí mismo, lo que constituiría una restricción para usar el álgebra como un instrumento de modelización.

Luego de la revisión del DCN afirmamos que:

- Sólo en el primer año de secundaria, se propone el estudio de patrones y el establecimiento de generalizaciones. Para este mismo grado se plantea el cálculo de valores numéricos y la traducción de enunciados verbales. Esto evidencia la consideración del álgebra como un lenguaje, pues se priorizan los procesos de simbolización.
- A medida que se avanza en los grados de la educación secundaria, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Además que hay una orientación hacia el cálculo operativo.
- Es una buena guía para organizar, planificar e interpretar la enseñanza a lo largo de la escolaridad obligatoria. Los rasgos inherentes a los procesos de simbolización, la manipulación de las expresiones algebraicas y el uso de algoritmos para resolver problemas son los tres puntos en torno a los cuales gira la programación propuesta en el DCN para nuestro dominio de investigación: el álgebra escolar. Además:
- El trabajo previo es un requisito para desarrollar la modelización, por lo que es necesario considerar capacidades a largo plazo que permitan el estudio de situaciones iniciales, la construcción de modelos, la formulación de respuestas y nuevas preguntas en un periodo de tiempo superior a un año.
- El álgebra escolar debe incluir el estudio de patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos, a largo de toda la escolaridad. Su estudio en un solo grado es insuficiente para lograr la formalización y generalización de situaciones diversas.
- El DCN, no propone articulaciones entre conocimientos básicos estructurados en el estudio de los sistemas algebraicos y analíticos para el desarrollo de un pensamiento algebraico y variacional, donde los conceptos de ecuación y función son fundamentales.

Además, aunque se proponen el trabajo en torno a procesos generales de pensamiento (como los de resolución de problemas, la modelación algebraica, el uso de conceptos y procedimientos) en diversos contextos (específicos de las matemáticas, cotidianos y de otras disciplinas), no se formulan pautas metodológicas de cómo llevarlas a cabo.

Análisis epistémico de los textos seleccionados

Diversos autores concuerdan que el papel que los profesores asignan al libro de texto es central. Así, en el informe Cockcroft (1985) se afirma que los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula.

Para propósitos de la presente investigación, se describió y analizó tres libros de texto en relación al tratamiento del álgebra escolar en el primer año de secundaria.

Los libros revisados fueron:

- Matemática 1. Editorial Santillana, del año 2007 editado en Lima, Perú.
- Matemática 1. Editorial Norma, del año 2007 editado en Lima, Perú.
- Matemática 1. Editorial Bruño, texto oficial del MINEDU (Ministerio de Educación) del año 2008.

Las prácticas matemáticas relacionadas al álgebra escolar se analizaron considerando:

- Los distintos usos de las letras y de la igualdad en la presentación de contenidos.
- La construcción y el uso de distintos modelos de solución de ecuaciones.
- Los procesos de solución de problemas y su relación con los procesos de modelización.

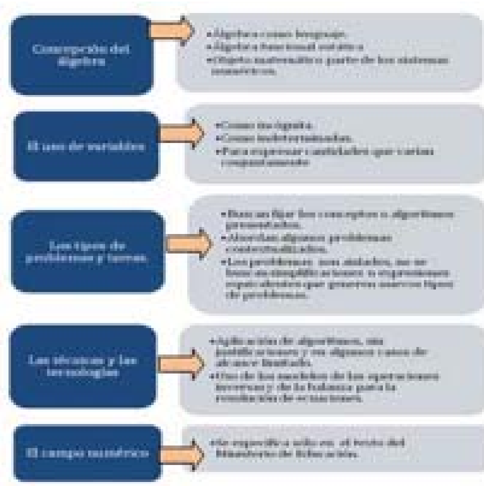


Figura 1: Aspectos algebraicos presentes en los textos analizados

Del análisis de los textos inferimos que los argumentos, las técnicas y tecnologías no son el objeto de estudio más importante, su lugar es tomado por la operatividad de las expresiones algebraicas (manipulación de ecuaciones, operatividad de monomios y polinomios, cálculo del valor numérico y del grado de expresiones algebraicas). Hay ausencia de cuestionamiento tecnológico, pues los procedimientos se usan sin problematizar su dominio de validez y sin modificaciones para adaptar los procedimientos a otro tipo de tareas.

Análisis de las prácticas docentes en el tratamiento del álgebra

Se considera que la práctica del docente en el aula tiene estrecha relación con sus concepciones y con su experiencia previa. Por ello, creemos pertinente tener otro referente sobre el tratamiento del álgebra a nivel escolar en el primer año de secundaria, en este caso nos referimos a la visión crítica del docente sobre su práctica pedagógica y los resultados que esta muestra. Esta información la pretendemos recabar a través de una entrevista estructurada, cuyas respuestas nos darán mayores elementos de análisis, pues constituyen al mismo tiempo una mirada crítica y autocrítica sobre cómo se enseña el objeto de estudio: algebra escolar. A continuación los resultados de la entrevista estructurada aplicada a cinco profesores en relación a su práctica pedagógica:

En cuanto a la experiencia de trabajo de los profesores entrevistados abordando temas algebraicos, tenemos que dos de los profesores han enseñado álgebra por 10 años, el resto tiene entre 3 y 7 años de experiencia. Un profesor señaló además que el álgebra está inmersa en toda la matemática, lo cual implicaría de alguna manera que no la considera un área o dominio de aprendizaje específico sino una herramienta presente a lo largo de la educación escolar. Los profesores señalan que, según su experiencia, la enseñanza del álgebra se presenta a lo largo de toda la secundaria, dependiendo los temas del grado y la programación. Dos de ellos además acotan que han enseñado álgebra en quinto y sexto grado de primaria.

En cuanto a la inversión en horas de clase, dos de los profesores entrevistados señalaron que dedicaban entre 2 y 3 horas pedagógicas de clase semanales a la enseñanza del álgebra, una profesora indicó que todo un bimestre, otro docente indicó que casi siempre y, el último docente que el número de horas de clase depende de la programación y del año.

Todos los profesores consideraron necesaria la introducción del álgebra en la secundaria, sin embargo las razones que proponen son diferentes: Una profesora indicó que es necesaria su introducción porque es valioso como conocimiento y además las situaciones propuestas motivan al estudiante; esto devela un tipo de docente que considera a las situaciones algebraicas como un fin en sí mismo, o como un recurso interesante para despertar la atención del estudiante, no se buscan interconexiones, ni justificaciones, ni ampliaciones de técnicas utilizadas o la producción de nuevos problemas, sino simplemente su aplicación inmediata. Por otro lado, tres docentes señalan necesaria su introducción pues describe técnicas que aisladas permiten resolver algunas situaciones específicas, estos docentes señalan textualmente que muchos problemas de geometría, trigonometría y aritmética necesitan del dominio de conocimientos algebraicos. Esto indica una posición de considerar al álgebra como un dominio de conocimiento aplicable a diversos contextos. Finalmente, una docente identifica el álgebra con un lenguaje que usa símbolos para representar objetos abstractos no conocidos.

En referencia a cómo suelen enseñar el tema de álgebra, tres docentes mencionaron los siguientes recursos didácticos: material concreto y técnicas lúdicas para fijar conceptos, y un poco de historia sobre el aporte de algunos personajes. Los otros tres docentes señalaron temas específicos de ejercicios con variables y procedimientos mecánicos cómo la resolución de ecuaciones. Del diálogo con los profesores se concluye que su praxis en aula se corresponde con lo previamente desarrollado en ese tema y, que este respondía a cuestiones institucionales (del colegio) ó formas de trabajo previamente validadas por su experiencia.

Considerando los problemas que suelen plantearse en el estudio del álgebra, los docentes entrevistados señalan como dificultades: encontrar aplicaciones en contextos reales a situaciones que involucran los grados relativos y absolutos, fijar las leyes de signos y la multiplicación de monomio, y los ejercicios con variables (el docente no da mayores detalles). No hay preocupación de los docentes por unificar los procedimientos para producir nuevos tipos de problemas que requieran nuevas técnicas de solución.

En relación a si los estudiantes evidencian haber aprendido álgebra; cuatro docentes responden positivamente, sólo un docente aclara la presencia de un grupo de estudiantes que generalmente siempre tienen dificultades y otro docente señala porcentualmente que desde su experiencia los estudiantes de instituciones educativas particulares demuestran mayor aprendizaje de tópicos algebraicos.

Sobre los temas algebraicos donde demuestran mayor logro de aprendizaje, los docentes entrevistados indicaron: el estudio del grado relativo y absoluto, reducción de términos algebraicos, valor numérico, ecuaciones, productos notables y leyes de exponentes. En el caso de nuestro estudio sólo los cuatro primeros están presentes en el trabajo del primer año de secundaria.

Considerando si estaban o no de acuerdo con la forma como el álgebra se presenta en los textos escolares, el 100% de los docentes entrevistados indicaron que no estaban de acuerdo y señalaban como justificación los necesarios cambios en los siguientes aspectos: la incorporación de problemas aplicados en contextos reales, reconocen la excesiva importancia dada a la aplicación de reglas algorítmicas. Un docente además señaló que los textos deberían ser más entretenidos y que deberían presentar el álgebra de otra forma. Por otro lado, dos docentes mencionaron que algunos libros consideran temas no idóneos al nivel cognitivo de desarrollo de los estudiantes.

A la pregunta ¿considera necesario hacer cambios en la introducción del álgebra? Cuatro de los cinco docentes entrevistados contestaron que si era necesario hacer cambios, luego propusieron las siguientes posibilidades para el estudio introductorio del álgebra en el primer año de secundaria: el trabajo con material concreto al menos al inicio para asegurar la comprensión de conceptos, proponer situaciones contextualizadas y motivantes para el estudiante, y que sean aplicables a la geometría, la trigonometría y/o la aritmética; además aprovechar del buen uso del recurso histórico. Sólo un docente señaló que no era necesario hacer ningún cambio.

Como resultado del contraste entre las evidencias, lo que dicen los profesores y algunos elementos analizados se presenta lo siguiente: Sobre su experiencia enseñando álgebra, los docentes señalaron que según su experiencia la enseñanza del álgebra se presenta a lo largo de toda la secundaria. Esto se correlaciona con lo presentado de la revisión del DCN, donde los tópicos algebraicos se presentan a lo largo de la educación secundaria. Los libros de texto revisados también confirman esta situación pues, en la mayoría de ellos se señala específicamente una unidad bajo el título de introducción al álgebra ó simplemente álgebra. Por lo tanto, concluiríamos que las prácticas identificadas como algebraicas han sido muy utilizadas y aplicadas en un dominio amplio de temporalidad a lo largo de la educación secundaria; pero sólo a nivel técnico puntual.

En cuanto a la inversión en horas de clase, los libros de primero de secundaria revisados, necesitan aproximadamente un bimestre para desarrollar los temas propuestos. De esto deducimos que los contenidos dependen del grado de estudio y de la programación propuesta en cada institución escolar.

En cuanto a la necesidad de introducir el álgebra a nivel escolar, consideramos que el grupo de docentes entrevistados prioriza en el álgebra las actividades y tareas que favorecen los procesos de simbolización, y las aplicaciones para resolver situaciones locales, asociando cada una de estas concepciones a los distintos usos de la variable y a los elementos que en la actualidad se consideran manifestaciones del pensamiento algebraico: habilidades para resolver problemas, habilidades para abstraer, representar, procesar, comunicar y habilidades para razonar. Por otro lado notamos que la introducción al álgebra se presenta como una generalización de las prácticas aritméticas.

Respecto a los problemas que suelen presentarse en el estudio del álgebra, los docentes están evidentemente mucho más preocupados por el manejo técnico local, sólo para responder a situaciones que en la mayoría de los casos se quedan en el campo abstracto. La modelización algebraica se queda en el trabajo en el modelo, perdiéndose la oportunidad de aprovechar las situaciones que amplíen el conocimiento del sistema estudiado inicialmente. Esta situación es la misma que se expone en los libros de textos analizados, donde los contenidos atomizados mayormente utilizan técnicas algorítmicas que no muestran interconexiones; sólo en el texto del Ministerio de Educación se presenta un intento por presentar situaciones cercanas al estudiante, pero en forma aislada.

En relación a si los estudiantes evidencian haber aprendido álgebra, este grupo de docentes considera que no todos los alumnos aprenden igual y que tal vez el contexto institucional condicione los niveles de logro de los estudiantes. Esto último se corresponde con la posición de la TAD, según la cual, el objeto primario de investigación a nivel escolar es la actividad matemática desde una perspectiva institucional.

El interés de los docentes está en el aprendizaje comprensivo de las definiciones básicas. Por ello, proponen recursos metodológicos, a fin de lograr dominio y aplicación en diversos contextos de los contenidos propuestos. Sin embargo, aquí también hay una concepción que prioriza el contenido o dominio de destrezas y aplicaciones como fin en sí mismo; confirmando con ello, el carácter aislado de las técnicas.

Conclusiones

El tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria no corresponde a un proceso de algebrización y la modelización está ausente en el proceso de instrucción estudiado. La problemática detectada es que los contenidos se presentan aislados, mayormente se utilizan técnicas algorítmicas y existe sólo interés por el manejo tecnológico puntual, perdiéndose la oportunidad de aprovechar las situaciones que amplíen el conocimiento.

Por otro lado, luego del análisis efectuado a los textos empleados y al DCN, y de la entrevista estructurada efectuada a algunos profesores, se vio reforzada la afirmación de que los docentes priorizan las actividades y tareas que favorecen los procesos de simbolización y las aplicaciones para resolver organizaciones matemáticas puntuales, en lugar de buscar algo más de complejidad entre sus componentes a través de organizaciones matemáticas locales o regionales. Esto confirma el carácter aislado de las técnicas y el dominio de algoritmos como un fin en sí mismas.

Referencias bibliográficas

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *En Recherches en Didactique des Mathématiques, 23 (1),* 79 -135.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Editorial Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE-Horsori.

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: Informe Cockcroft*. Recuperado el 18 de enero de 2011, de: http://divulgamat2.ehu.es/index2.php?option=com_content&do_pdf=1&id=9228.

PESQUISA BIBLIOGRÁFICA: O CASO DA MATRIZ HESSIANA DE UMA FUNÇÃO REAL DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Katia Vigo Ingar, Maria José Ferreira da Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo Brasil
kvingar21@gmail.com, zeze@pucsp.br

Resumo. Esta é uma revisão bibliográfica a respeito do ensino da matriz Hessiana de funções em várias variáveis, e é parte desses resultados que apresentamos no presente artigo. A metodologia é a pesquisa bibliográfica e para a coleta de dados, selecionamos bibliotecas de pós-graduação e, anais de congressos de educação matemática. Fizemos a busca a partir dos descritores: "Cálculo em várias variáveis", "funções de várias variáveis", "máximos e mínimos em várias variáveis". Não encontramos nenhum trabalho que tratasse de funções com mais de duas variáveis.

Palavras chave: cálculo à várias variáveis, a matriz Hessiana, revisão bibliográfica

Abstract. This is a bibliographic review about the teaching of the Hessian matrix of functions in several variables, and we present in this article part of these results. The methodology is a bibliographic research. Data was collected by selecting libraries of post-graduation and annals of mathematics education. The phrases used to searh were : "Calculus in Several Variables", "Functions of Several Variables", "Maximum and Minimum in Several Variables", and search results did not produce any academic literature about functions of three or more variables.

Key words: calculus in several variables, the Hessian matrix, bibliografic review

Introdução

Buscando a prática de engenheiros, economistas, físicos e matemáticos identificamos que grande parte dos problemas que enfrentam, no campo profissional envolve prioritariamente funções reais de várias variáveis: pressão atmosférica, distribuição de temperatura dentro de um corpo, a pressão dentro do fluído, o potencial eletrostático, densidades populacionais, grandezas econômicas, grandezas mecânicas. Esse fato talvez explique por que no segundo ano de cursos de Engenharia de algumas universidades de São Paulo, há em sua matriz curricular, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, que envolve o estudo de funções reais de várias variáveis. A matéria procura analisar, de forma coesa e ordenada, a estrutura lógica dos tópicos que são desenvolvidos, ligados ao conceito de diferenciabilidade de funções, sem relacioná-lo a conceitos usados em Física, Mecânica, Fenômenos de Transporte ou em outras disciplinas do curso de Engenharia. Uma importante aplicação do estudo de derivadas parciais é a otimização de funções. Otimizar uma função significa encontrar seu desempenho máximo ou mínimo. Se para as funções de uma variável, quando as derivadas primeiras forem nulas, teremos pontos extremos que podem ser máximos ou mínimos, para as funções reais de várias variáveis, a fim de saber de que tipo são esses pontos, teremos de utilizar a *matriz Hessiana* para o cálculo deles. Assim, pela importância das aplicações dessas funções na Engenharia, nos interessamos em estudar essa matriz.

Revisão da literatura

Segundo Creswell "a revisão da literatura proporciona uma estrutura para estabelecer a importância do estudo e também uma referência para comparar os resultados com outros resultados". (Creswell, 2010, p.51). A metodologia é a pesquisa bibliográfica que define procedimentos de maneira sistemática para captar, avaliar e resumir a literatura acadêmica. O objetivo do presente estudo é compartilhar os resultados de outros estudos que estão intimamente relacionados à produção acadêmica sob o Cálculo em várias variáveis, particularmente, sobre o estudo da matriz Hessiana de funções em várias variáveis publicada em revistas, teses e sites.

Começamos identificando os descritores que utilizaríamos para localizar os materiais nas bibliotecas de pós-graduação da Pontificia Universidade Católica de São Paulo(PUC-SP), na Universidade Estadual Paulista (UNESP) e Universidade de São Paulo (USP), o banco de teses da CAPES, a revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, bem como os anais dos congressos de Reunião Latino Americana de Matemática Educativa (RELME), Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), International Congress on Mathematical Education (ICME) e o *site* da Springer. Esses descritores emergiram na identificação do tema e foram "Cálculo em várias variáveis", "funções de várias variáveis", "máximos e mínimos de funções em várias variáveis" e "optimização".

Até o momento encontramos, três teses de doutorado e quatro artigos que tratam do ensino e da apredizagem do Cálculo Diferencial e Integral para funções de duas variáveis. A principio, foi realizada a leitura flutuante dos resumos publicados em cada um dos materiais escritos. Neles, buscamos o problema que está sendo tratado, o objetivo central ou o foco do estudo, examinamos os resultados fundamentais relacionados ao estudo proposto, e tratamos de identificar os teóricos utilizados.

As teses de doutorado são de Henriques (2006): "L'enseignement et L'apprentissage dês integrales multiples: Analyse didactique integrant l'usage du logiciel maple", Grimberg (2000): "A constituição da teoria das funções de várias variáveis no século XVIII: o início da análise moderna" e de Vieira (2011): "Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis".

No que diz respeito aos artigos, três deles tratam de pesquisas feitas fora do Brasil: "*Using the onto-semiotic approach to indentify and analyze mathematical meaning in a multivariate context*", USA e Espanha. *Geometrical representations in the learning of two-variable functions*, Mexico e Porto Rico. *A didactic survey of the main characteristics of Lagrange's theorem in mathematics and in* *economics*, Polônia. O artigo publicado no Brasil, intitulado "O software "MAPLE" no estudo de funções de várias variáveis"

Teses

Henriques (2006) apresenta um trabalho que trata do ensino e da aprendizagem de Integrais Múltiplas e suas aplicações no cálculo de áreas e volumes, utilizando o *software* Maple como ferramenta. O autor ressalta que um dos estudos preliminares para Cálculo de Integrais Múltiplas é o estudo de funções de várias variáveis reais: propriedades, domínio, representação gráfica, continuidade, curvas e superfícies de nível, gradiente, derivação parcial etc. Para o autor, a representação gráfica no espaço assume então um status diferente para o estudo de integrais múltiplas em comparação aos estudos preliminares aplicados ao cálculo de integrais. Assim, o objetivo de seu trabalho foi compreender as dificuldades encontradas pelos alunos e estudar em que medida a utilização de um *software* como o Maple poderia ajudá-los a superar essas dificuldades e favorecer a interação entre representação gráfica e representação algébrica dos objetos matemáticos tratados no trabalho. Visando ao desenvolvimento de seu trabalho em torno do ensino e da aprendizagem das Integrais Múltiplas, o autor estudou as abordagens teóricas que permitiram análises de um dado objeto matemático em vários registros de representação, o que lhe possibilitou precisar o que chamou de representação gráfica e representação algébrica de um sólido nos problemas de cálculo de volume por Integrais Múltiplas. Além disso, o autor apoiou-se na abordagem antropológica do didático e, por utilizar o ambiente computacional, esses estudos teóricos o conduziram a considerar a dimensão instrumental da aprendizagem em ambientes computacionais.

Grimberg (2000), adotando uma linha filosófica, procurou estudar o nascimento e a constituição da Análise Moderna no final do século XVII e no decorrer do século XVIII. O autor mostrou, ao longo de sua pesquisa, como a Análise tornou-se uma linguagem com aspectos formais característicos de uma teoria matemática: simbolismo, operações e operadores, tornando o cálculo diferencial e integral um cálculo formal.

Em seu trabalho, Vieira (2011) apresenta um estudo sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis cujo objetivo foi a identificação/descrição das categorias de raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis ao longo das fases do ensino, a partir da metodologia denominada Sequência Fedathi. O autor ressalta a estruturação e a concepção de situações didáticas de ensino envolvendo situações-problema diferenciadas que dizem respeito aos rituais algorítmicos identificados nos livros didáticos de Cálculo a Várias Variáveis. Os rituais algorítmicos foram atingidos com base numa visão de complementaridade entre a Teoria das Representações Semióticas e as categorias do raciocínio intuitivo descrita por Fischbein e exploradas nas quatro fases previstas pela Sequência Fedathi. O autor enfatizou a descrição da transição interna do Cálculo em uma variável para o Cálculo em Várias Variáveis com a intenção de delinear, caracterizar, discutir e compreender a natureza do principal raciocínio que quer registrar. Finalmente, aponta como conclusões que a exploração didática de categorias do raciocínio intuitivo, com base em uma mediação didática que envolveu a exploração de registros de representação semiótica, proporcionou a evolução do conhecimento do estudante a respeito dos conceitos principais do Cálculo em Várias Variáveis.

Artigos

Em seu artigo, Montiel, Wilhelmi, Vidakovic e Elstak (2009) apresentam um estudo que envolveu o aspecto do pensamento relacionado à matemática avançada. Os autores destacaram que o estudo em educação matemática no nível universitário é relativamente escasso e, por isso, não pode ser dado como certo que a compreensão matemática nesse nível não seja problemática. O objetivo principal do trabalho foi aplicar a abordagem onto-semiótica para analisar o conceito matemático de diferentes sistemas de coordenadas, bem como algumas situações e ações de estudantes universitários relacionados a esses sistemas.

Os autores apontaram como conclusão que a abordagem onto-semiótica permite uma estrutura de análise dos objetos matemáticos e de tudo o que está envolvido na comunicação de ideias matemáticas, o que permite esboçar uma riqueza de instrumentos desenvolvidos no estudo da semiótica.

O artigo de Trigueiros e Martinez apresenta uma pesquisa respeito de como os alunos trabalham com duas variáveis, com o objetivo de investigar a relação entre a noção que os alunos têm dos subconjuntos do espaço cartesiano tridimensional e a compreensão de gráficos de funções de duas variáveis. A teoria APOS e a teoria das Representações Semióticas foram usadas como referencial teórico. O trabalho foi desenvolvido com nove alunos que já tinham feito um curso de cálculo em várias variáveis.

Os autores concluíram que esse estudo forneceu informações a respeito das dificuldades dos alunos na compreensão de funções de duas variáveis. E particularmente, a generalização de funções de uma variável para funções de duas variáveis.

Os autores Xhonneux e Henry apresentam, em seu artigo, uma pesquisa que se concentrou no ensino do Teorema de Lagrange, em cursos de Matemática e Economia com os objetivos de descrever uma metodologia para analisar os processos de Transposição Didática para o teorema de Lagrange nos cursos universitários e, também, de utilizar a Teoria Antropológica do Didático para comparar os conteúdos das disciplinas de Cálculo de dois cursos nas Universidades de Namur e Louvain. Os autores concluíram que como os livros didáticos não representam efetivamente o conhecimento matemático "ensinado", seria necessário realizar outras análises para aceder de modo mais profundo às práticas dos professores e às percepções dos alunos.

Em seu artigo, Carvalho e Pereira apresentam um trabalho que tratou da utilização do software Maple V como ferramenta para o estudo de gráficos de funções de várias variáveis e de curvas de nível com estudantes de duas classes, uma do curso de Engenharia e outra do curso de Física. Segundo as autoras, na análise dos gráficos, os alunos realizam uma interação entre os níveis teórico e gráfico e essa manipulação permite a visualização e a explicitação do conteúdo, objeto da atividade. As autoras apontam, em suas conclusões, que o fato de que os alunos não identifiquem a superfície que representa a função estudada os leva a aceitar o gráfico apresentado no computador, sem muito questionamento, o que pode implicar em uma interpretação errônea deste.

Conclusões

Muitas dessas pesquisas nos mostram a natureza das dificuldades dos estudantes com relação às noções do cálculo em duas variáveis nos anos iniciais em cursos da universidade. Os autores advertiram que a aplicação de uma concepção estrutural dos conceitos, abordada a partir de sua definição formal, acarreta algumas dificuldades em termos de compreensão, principalmente quando se apoiam na transição de funções de uma variável para funções de várias variáveis. Alguns autores insistiram, também, na importância da interação entre diferentes representações semióticas para generalizar os principais aspectos dessas funções e identificar as mudanças nas propriedades fixas de cada tipo de função ou representação. Até o momento temos encontrado nesta revisão bibliográfica pesquisas que tratam de funções em duas variáveis reais, mas não encontramos nenhum trabalho que tratasse de funções com mais de duas variáveis. Esse resultado está nos conduzindo a aprofundar nossa revisão e buscar caminhos para ampliar o ensino para esse tipo de função, pois acreditamos que ele propiciaria a construção de conhecimentos mais significativos para os alunos uma vez que se apoiaria em aplicações de problemas reais.

Referências bibliográficas

Both, N.T. y Pereira, R. (2004). O software "MAPLE" no estudo de funções de várias variáveis. *Educação Matemática em Revista*, 17, 52-60.

Creswell, J. (2010). *Projeto de Pesquisa. Métodos Qualitativo, Quantitativo e Misto*. São Paulo: Artmed S.A

Emile, G. (2001). *A Constituição da teoria das funções de várias variáveis no século XVIII: o início da análise moderna*. Tesis de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo: Brasil.

Henriques, A. (2006). *L'Enseignement et l'apprentissage des integrales multiples :Analyse didactique integrant l'usage du logiciel maple*. Tesis de Doctorado, Université Joseph Fourier-Grenoble, Alpes, Francia.

Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic D. y Elstak, I. (2009). Using the Onto-semiotic approach to indentify and analyze mathematical meaning in a multivariate context. *European society for Research in Mathematics Education*, 12, 2286-2295.

Trigueros, M. y Martínez, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies Mathematical,* 73, 3-19.

Vieira, F. (2011). *Aplicações da Sequencia Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tesis de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Ceará. Brasil.

Xhonneux, S.y Henry V. (2011). A didatic survey of the main characteristics of Lagrange's tehorem in mathematics and in economics. *European Society for research in Mathematics Education*, 14, 1-10.

TRÊS TEORIAS E UMA PRÁTICA PEDAGÓGICA: A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, OS FUNDOS DE CONHECIMENTO E A PEDAGOGIA CULTURALMENTE RELEVANTE

Davidson Paulo Azevedo Oliveira, Marger da Conceição Ventura Viana, Milton Rosa
Universidade Federal de Ouro Preto Brasil
davidsonmat@yahoo.com.br, margerv@terra.com.br, milrosa@hotmail.com

Resumen. O presente trabalho apresenta e discute como os professores podem utilizar de teorias da Educação na prática pedagógica da sala de aula. Para isso, esse artigo teórico apresenta a Perspectiva Sociocultural da História da Matemática, os Fundos de Conhecimento e a Pedagogia Culturalmente Relevante. Essas teorias estão embasadas na cultura dos alunos para atingirem um ensino e uma aprendizagem visando formar alunos críticos e capazes de utilizarem o que aprenderam na escola para discutir as diferenças existentes entre os grupos minoritários e majoritários na sociedade atual. É apresentada uma atividade envolvendo as três teorias.

Palavras chave: história da matemática, pedagogia culturalmente relevante, fundos de conhecimento

Abstract. In this work we present and discuss how teachers can use Educational theories into pedagogic practice classroom. In so doing, this theoretical article presents the Sociocultural Perspective of the History of Mathematics, the Funds of Knowledge and the Cultural Relevant Pedagogy. These theories are grounded in the students' culture in order to achieve the teaching and learning so as to make the students more critical and capable of use whatever they learn at school and discuss the differences between minoritary and majoritary groups in the society. It is presented an activity involving the three theories.

Key words: history of mathematics, culturally relevant pedagogy, funds of knowledge

Introdução

Em estudos recentes, percebe-se que a História da Matemática é utilizada de duas maneiras distintas nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, de maneira explícita e implícita (Ferreira e Rich, 2001 *apud* Dambros, 2006). Explícita no momento em que são utilizados problemas idênticos aos que apareceram na História da Matemática ou por meio da utilização de fontes originais e de maneira implícita a partir da utilização de situações adequadas ao contexto atual ou servindo como um guia para que atividades matemáticas curriculares sejam elaboradas. Assim, os problemas e as atividades propostas pelos professores não são reconstruções idênticas às do passado, mas suas adaptações (Miguel e Miorin 2008).

Existe a necessidade de que não se ignore o ambiente sociocultural e a época na qual os conceitos matemáticos foram criados e desenvolvidos, especialmente, para a perspectiva sociocultural da História da Matemática, na qual os textos e conhecimentos matemáticos do passado são analisados (Furinghetti e Radford, 2002). Nessa perspectiva, a prática pedagógica em sala de aula pode ser percebida como um espaço geral de cultura na qual o conhecimento é desencadeado por meio da negociação de significados para os conteúdos estudados (Radford, Boero, Vasco *apud* Fauvel e Maanem, 2000).

Portanto, buscou-se, atrelar a História da Matemática à cultura dos alunos no ensino e na aprendizagem em sala de aula e aos seus fundos de conhecimento, que são intrínsecos a determinados grupos socioculturais. Esses fundos de conhecimento são necessários para a sobrevivência dos membros desses grupos, sendo difundidos de geração em geração. Consideramos que os grupos socioculturais também são compostos pelos alunos em uma sala de aula, que pertencem a diferentes grupos culturais, que possuem características peculiares (Azevedo Oliveira, 2012).

Nesse sentido, esse artigo discute a importânica de novas abordagens pedagógicas sejam utilizadas em sala de aula e que estejam baseadas no conhecimento matemático implícito existente nos fundos de conhecimento dos alunos, por meio da História da Matemática com a elaboração de atividades matemáticas curriculares embasadas nos princípios da Pedagogia Culturalmente Relevante.

As Três Teorias

A discussão da História da Matemática, dos Fundos de Conhecimento e da Pedagogia Culturalmente Relevante tem por objetivo facilitar o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem de práticas matemáticas padronizadas (Moll e Greenberg, 1990). Nesse sentido, a utilização dessas três teorias tem por objetivo ressaltar a cultura dos alunos e buscar o aprendizado de novos conteúdos curriculares.

Em nosso ponto de vista, esses argumentos, juntamente com o desenvolvimento da consciência crítica dos alunos, são as proposições básicas nas quais se baseia a Pedagogia Culturalmente Relevante. Essa teoria foi desenvolvida em 1989, para auxiliar alunos afro-americanos a atingirem o sucesso acadêmico. Porém, pode ser ampliada para utilização com todos os alunos (Rosa, 2010). Essa teoria é definida como a pedagogia crítica, que está comprometida com o coletivo, baseando-se no tripé composto pela consciência crítica, sucesso acadêmico e competência cultural (Ladson-Billigns, 1995). É nesse sentido que, a utilização dessas duas teorias juntamente com o auxilio da História da Matemática que a prática pedagógica relatada nesse artigo foi elaborada. A figura 1 mostra o relacionamento entre as três teorias e a prática pedagógica.

Figura 1: Conexão das três teorias com a prática pedagógica

Assim, essas três teorias estão relacionadas, pois giram em torno da prática pedagógica dos professores. Nesse sentido, busca-se desenvolver e propiciar aos professores a elaboração de uma prática pedagógica na qual os construtos teóricos fundamentam as aulas e deixem de ser somente teorias utópicas, sendo efetivamente utilizadas visando atingir o aprendizado com o desenvolvimento do raciocínio crítico-reflexivo e a reafirmação cultural dos alunos.

A Pedagogia Culturalmente Relevante pode estar diretamente conectada com a História da Matemática como uma ferramenta pedagógica de ensino na medida em que é possível mostrar aos alunos as contribuições de várias civilizações para a construção do conhecimento matemático. Nesse sentido, ressaltam-se as possibilidades que a História da Matemática proporciona aos professores com relação ao desenvolvimento de um ensino que considere as atitudes e valores dos alunos (Troutman e McCoy, 2008).

Além disso, de acordo com os resultados do estudo conduzido por Troutman e McCoy (2008), a História da Matemática auxiliou a maioria dos alunos a reafirmarem a própria identidade cultural por meio da observação de como os indivíduos pertencentes a vários grupos culturais desenvolveram conteúdos matemáticos no decorrer da história. De acordo com Furhinghetti (1997) *apud* Troutman e Maccoy (2008), uma das maneiras que os professores possuem para utilizar a abordagem da Pedagogia Culturalmente Relevante é a História da Matemática, que pode ser considerada como uma referência cultural disponível para os professores que almejam elaborar atividades curriculares matemáticas que sejam culturalmente relevantes para os alunos.

Nesse sentido, o conjunto de ideias matemáticas presentes nos fundos de conhecimento dos alunos pode ser considerado como um sistema adaptativo que pode ser utilizado para que, criativamente, resolvam novos desafios (Moll *et al*, 1990) e, assim, realçar a competência cultural. Dessa maneira, a História da Matemática pode auxiliar os professores de uma maneira implícita ou explícita (Azevedo Oliveira, 2012). Por exemplo, os professores podem auxiliar os alunos a entenderem que, durante o século XVI, na Renascença, foi deflagrada a evolução das representações enquanto que os sinais se tornaram manipuláveis como as *comodities* que foram manipuladas no comércio do século XVI (Radford, 2004). No entanto, esse entendimento somente pode ser concretizado se for analisado de acordo com o contexto social, econômico e social no qual os matemáticos e os indivíduos que auxiliaram a desenvolver o conhecimento matemático, especialmente a notação algébrica simbólica, estavam inseridos.

A Prática Pedagógica

Foram propostas e desenvolvidas atividades com duas turmas da primeira série do Ensino Médio de uma escola pública profissional situada no interior do estado de Minas Gerais, Brasil, com alunos que possuem, em média, 15 anos de idade, estando matriculados no curso técnico de Edificações, portanto, ao final de três anos serão profissionais capacitados para trabalharem na construção civil.

Para a coleta de informações que embasassem o emprego das três teorias discutidas foram utilizados como instrumentos de coleta de dados dois questionários, dois grupos focais e o caderno de campo do professor-pesquisador com anotações a respeito dos alunos, a observação das maneiras como realizaram as atividades, a resolução das tarefas solicitadas e, também, quatro entrevistas de acompanhamento. Para o levantamento de dados em relação aos fundos de conhecimento dos alunos foram utilizadas questões propostas em dois questionários e discussões realizadas em um dos dois grupos focais. Posteriormente, alguns assuntos discutidos no grupo focal foram retomados para esclarecimentos por meio de entrevistas de acompanhamento, que também continham questionamentos referentes ao conteúdo estudado.

Por exemplo, um estudante afirmou que o pai e o tio são donos de uma fábrica de pré-moldados, demostrando interesse em seguir a carreira do pai. Nesse sentido, a partir dos dados coletados e da leitura da fundamentação teórica, verificou-se que os conhecimentos adquiridos por esse aluno sobre a construção civil estão implícitos em seus fundos de conhecimento (Moll, Amanti, Neff, Gonzalez, 1992). Esse fato demonstra que a aquisição do conhecimento sobre esse campo do saber cotidiano foi adquirido na prática familiar, pois foi transmitido de geração em geração aos familiares desse aluno. Por exemplo, em uma das questões do questionário, sobre o interesse dos alunos em seguirem a carreira dos pais, esse participante mostrou-se interessado em trabalhar com o pai e com o tio ao afirmar que "a profissão do meu pai está no ramo do curso que estou cursando".

Nessa perspectiva, durante a realização dos grupos focais, dois alunos destacaram a presença da matemática nas atividades realizadas na engenharia, pois, um desses alunos afirmou que, como o seu pai é engenheiro, "então usa muita matemática" enquanto o outro alegou que para "calcular quantos metros quadrados de área vai ser preciso em uma obra, calcula-se o tamanho da construção". Diante desse contexto, e com esses instrumentos de coleta de dados, investigaram-se alguns fundos de conhecimento dos participantes (Moll et al, 1992) por meio dos quais foram estudadas as atividades que os pais e os responsáveis pelos alunos realizam em suas profissões e atividades cotidianas. Esse contexto possibilitou a utilização da

Pedagogia Culturalmente Relevante em sala de aula na elaboração das atividades curriculares propostas aos alunos.

As atividades propostas foram realizadas em grupos, pois é importante que os alunos envolvam-se em seu próprio aprendizado, pois "uma das maneiras de conseguir isto é dividir as pessoas em grupos. As pessoas falam mais e todos participam" (Gandin et al, 2002, p. 288-289). Além disso, Ladson-Billings (1995) ressalta que, em grupos, os alunos têm a oportunidade de trabalharem colaborativamente, serem responsáveis uns pelos outros, em relação ao aprendizado de todos os alunos, pois o "conhecimento não é construído individualmente, mas dentro de um amplo contexto social" (Radford Boero e Vasco 2000, p. 164). Essa abordagem facilita a observação do meio social, cultural e econômico no qual os alunos estão inseridos, possibilitando-lhes o desenvolvimento da competência cultural ao mesmo tempo em que aprendem novos conteúdos matemáticos, relacionados com o estudo das funções, transferindo-os para a resolução de situações-problema enfrentadas no cotidiano.

Na atividade descrita a seguir, a História da Matemática apareceu de maneira implícita, pois houve uma adaptação do problema da duplicação do cubo para a duplicação do quadrado, servindo como um eixo orientador para que o professor-pesquisador pudesse elaborar a atividade curricular proposta para os alunos. Assim, os alunos determinaram a área de um quadrado que possui o dobro de sua área original, que foi uma situação enfrentada pelos pitagóricos na antiguidade (CAJORI, 2007). Nesse sentido, foi apresentado aos alunos uma situação sobre a construção de uma laje de forma quadrada e informações referentes ao preço por metro quadrado de laje pré fabricada necessária para essa construção. A Figura 2 mostra o texto introdutório da situação proposta.

Um engenheiro deseja construir uma área de lazer no quintal de sua casa e projetou um espaço coberto no formato de um quadrado com um metro quadrado de área. Portanto, inicialmente, ele precisava construir uma laje de 1 metro quadrado de área. Porém, a sua esposa considerou o espaço muito pequeno e o casal resolveu que o espaço coberto deveria ter a área duplicada. Com base nessa situação descrita, analise e responda às questões a seguir:

Figura 2: Enunciado do problema proposto aos alunos

Em um dos itens foi apresentado os tipos de laje e os respectivos preços que foram os valores reais cobrados pela empresa de propriedade do pai de um dos alunos. Esses valores foram repassados durante uma conversa informal, na qual o professor-pesquisador teve a oportunidade de conhecer melhor esse aluno. Assim, foi elaborada uma proposta pedagógica que se vinculava à vida dos alunos (Ladson-Billings, 1995a), pois estudavam no curso técnico de Edificações enquanto que, o pai de um dos alunos trabalha é proprietário da fábrica citada anteriormente. Além disso, a história do trabalho familiar pode acumular conhecimentos que podem sere utilizados nas atividades curriculares propostas em sala de aula (Moll et al, 1992). É importante ressaltar que, nessa atividade, uma parte da história e do *background* cultural de um dos alunos foi utilizada na prática pedagógica por meio da pedagogia culturalmente relevante.

Então, na elaboração dessa atividade, o professor-pesquisador utilizou os fundos de conhecimento desse aluno que, além dessas informações, forneceu outras por meio de uma conversa em um *chat* no MSN. Nesse caso, a conversa *online* possibilitou o esclarecimento de algumas dúvidas relativas aos seus fundos de conhecimento (Azevedo Oliveira, 2012). A análise dos dados mostra que a utilização da *internet* é um fator importante na vida dos participantes desse estudo, pois, tem-se que 56 (80%) alunos possuem computadores em casa e que 57 (81,43%) participantes acessam a *internet* pelo menos uma vez por dia.

Portanto, esse ambiente virtual de comunicação possibilitou que o professor-pesquisador "entrasse na casa do aluno" para obter informações mais precisas sobre os seus fundos de conhecimento (Moll et al, 1992). Essa conversa ocorreu no dia 30 de dezembro de 2011, durante a qual esse aluno forneceu informações importantes a respeito das atividades realizadas pelo seu pai, que trabalha com a construção de lajes pré-moldadas. Então, de acordo com as informações obtidas, existem "três tipos de laje, convencional, treliça e minipainel treliçado". Esse aluno também afirmou que a laje "convencional com cerâmica é a mais básica de todas e, também, a mais fraca em comparação com as outras". Assim, a figura 3 mostra uma das questões proposta aos participantes.

c) O casal foi à uma empresa de pré-moldados, situada na cidade de Ouro Preto, para fazer o orçamento das duas áreas de um determinado quadrado, que tem um metro quadrado de área e, de outro,com o dobro dessa área. Conversando com os vendedores, foram informados de que existem três tipos de lajes: a convencional, a treliça e a minipainel treliçado. Sabe-se que a laje convencional é a mais barata, porém a mais fraca. No entanto, por uma questão de economia, eles resolveram que usariam a laje convencional. Utilizaram com piso o ESP ecológico com 40% de material reciclado. Sabe-se que os preços do metro quadrado dependem do tipo do piso, como, por exemplo:

- ✓ R$ 21,50 com tijolo cerâmico;
- ✓ R$ 24,00 com ESP ecológico e 40% material reciclado e
- ✓ R$ 25,50 com ESP moldado e 100% virgem.

Figura 3: Uma das questões proposta aos estudantes

Dentre as opções de material utilizado na escolha da laje estava incluído o EPS ecológico com 40% de material reciclado. Essa opção oferecia oportunidades para que os alunos discutissem sobre a importância em se utilizar materiais reciclados na atualidade, mesmo que aquele não fosse o material mais barato a ser empregado na construção. Apresentava-se, assim, por meio da Pedagogia Culturalmente Relevante, uma possibilidade pedagógica que permitia discutir sobre o coletivo em detrimento do individual (Ladson-Billigns, 1995), pois pode-se ter um custo maior sem, no entanto, garantir a sustentabilidade do meio ambiente.

A seguir, foi solicitado que os alunos construissem uma função e analisazem o que aconteceria se a laje construída tivesse o dobro da área da anterior, mantendo, porém, o seu formato quadrado. Esse direcionamento da atividade foi tomado ancorando-se na História da Matemática e na dificuldade histórica apresentada pelos pitagóricos que, se analisarmos do ponto de vista cultural, desconheciam os números irracionais, pois possuiam um pensamento geométrico apurado (Cajori, 2007). A solução encontrada pelos alunos foi a de traçar um novo quadrado cujo lado tivesse a mesma medida da diagonal do quadrado inicial. Nesse sentido, os alunos perceberam que o fato de, simplesmente, dobrar o lado do quadrado resulta em um quadrado com o quádruplo da área e não com o dobro, conforme requerido por essa atividade.

Portanto, a História da Matemática auxiliou o professor-pesquisador a entender o motivo da utilização do diagrama pelos alunos, no processo de resolução desse problema, pois existe uma tendência de se dobrar o lado do quadrado quando se pretende dobrar a sua área. Nesse sentido, a análise dos dados também mostra que, ao responderem sobre o significado do dobro do lado de um quadrado, um aluno alegou que se "a área do quadrado dobrou, então o seu lado também deveria ter dobrado". Esse é um equívoco que também ocorreu na História da Matemática (Eves, 1962).

Nesse sentido, por meio de anotações do caderno de campo do professor-pesquisador, durante a discussão com os participantes de um dos grupos focais sobre a resolução desse item, uma aluna argumentou que todos os alunos de seu grupo pensaram na possibilidade de dobrar o lado do quadrado original, mas reavaliaram esse posicionamento. Assim, essa aluna escreveu no verso de sua folha de resolução que "a princípio acreditamos que, o lado seria 2, mas isso é impossível já que a área seria 4 vezes maior". Então, por meio da discussão que o grupo de alunos realizou sobre esse assunto, os participantes puderam perceber que a nova área do quadrado seria quadruplicada e não duplicada como era requerido. Nesse sentido, para resolverem com exatidão essa situação-problema, os alunos decidiram empregar a fórmula da área do quadrado com a utilização de uma linguagem retórica. Posteriormente, utilizaram a linguagem simbólica, determinando, a seguir, a resposta com a utilização de símbolos matemáticos.

De acordo com esse contexto, existe a necessidade de que as dificuldades históricas sejam do conhecimento dos professores, pois podem auxiliá-los a entenderem as dificuldades dos alunos ao resolverem questionamentos similares (Artigue *apud* Radford, 1997).

Considerações Finais

Nesse estudo puderam-se constatar as dificuldades de alguns alunos com os números irracionais, porém, superadas pela utilização das calculadoras científicas, fórmulas de cálculo de área ou por meio de diagramas. Atualmente, essa abordagem está relacionada com o contexto sociocultural dos alunos, diferentemente do contexto geométrico grego. As respostas dos alunos foram analisadas e interpretadas de acordo com as três teorias que fundamentaram a elaboração da atividade, ressaltando, as três proposições da Pedagogia Culturalmente Relevante.

Além disso, durante o desenvolvimento, percebeu-se que é possível utilizar os fundos de conhecimento em salas de aula com o auxílio da História da Matemática para fornecer informações suficientes para a elaboração de atividades e servirem como parâmetros de análise das possíveis dúvidas dos alunos. Nessa perspectiva, foi possível oferecer oportunidades para que os pilares da Pedagogia Culturalmente Relevante pudessem ser discutidos e debatidos.

Pretendemos, dessa maneira, aprofundarmos e continuarmos os estudos na linha de pesquisa dessas três teorias, elaborando e estudando outras atividades que possam servir de exemplos para os professores interessados em seguir esse caminho metodológico de ensino e aprendizagem em matemática.

Referências bibliográficas

Azevedo-Oliveira, D. P. (2012). *Um estudo misto para entender as contribuições de atividades baseadas nos fundos de conhecimento e ancoradas na perspectiva sociocultural da história da matemática para a aprendizagem de funções por meio da pedagogia culturalmente relevante*. Dissertação de Mestrado Profissional não publicada. Universidade Federal de Ouro Preto. Brasil.

Cajori, F. (2007). *A History of Mathematical Notations*. Volume I. New York, NY Cosimo Classics.

Dambros, A. A. (2006). *O conhecimento do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos e o ensino de matemática: possíveis relações.* Tese de Doutorado não publicada, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR: UFP, Brasil.

Eves, H. (1962). *An Introducion to the History of Mathematics.* New York: Holt, Rinehart & Winston, Fauvel, J. & van Maanen, J. (2000). *History in mathematics education: the ICMI study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Gandin, L. A. Diniz-Pereira, J. E. & Hypolito, A. M. (2002). Para Além de uma Educação Multicultural: Teoria racial crítica, pedagogia culturalmente relevante e formação docente (Entrevista com a professora Gloria Ladson-Billings). *Educação & Sociedade, 1*(79), 275-293.

Ladson-Billings, G. (1995) But That's Just Good Teaching! The Case for Culturally Relevant Pedagogy. *Theory into Practice*, 34 (3), 159-165

Miguel, A. & Miorim, M. A. (2008). *História na Educação Matemática: Propostas e desafios*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Moll, L. C., Amanti, C., Neff, D. & Gonzales, N. (1992). Funds of Knowledge for Teaching: Using a Qualitative Approach to Connect Homes and Classrooms. *Theory Into Practice*, 31 (2), 132 – 141.

Moll, L. C., & Greenberg, J. B. (1990). Creating Zones of Possibilities: Combining Social Contexts. In L. C. Moll (Ed), *Vygotsky and Education: Instructional Implications and Applications of Sociohistorical Psychology 319-348*, Cambridge, Eng.: Cambridge University Press.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 17(1), 26-33.

Radford, L. (2004). The cultural-epistemological conditions of the emergence of algebraic symbolism. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, (Eds.), *Proceedings of the History and Pedagogy of Mathematics Conference & ESU4*, pp. 509-524 Uppsala, Sweden.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In: L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631-654. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum.

Rosa, M. (2010). *The Perceptions of High School Leaders abouth English Language Learners (ELL): The Case of Mathematics*. Tese de Doutorado não publicada. California State University. Sacramento, Sacramento, CA, EUA: CSUS.

Troutman, J. & McCoy, L. (2008). Re-membering Mathematics: The effect of Culturally Relevant Lessons in Math History os Students'Attitudes. *The Journal of Mathematics and Culture*. 3 (1), 14-51.

ANÁLISIS LINGÜÍSTICO DE ERRORES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

Marisol Radillo Enríquez
Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara México
marisol.radillo@red.cucei.udg.mx

Resumen. El estudio de los errores en la enseñanza de las matemáticas ha cobrado auge en las últimas décadas, aunque el aspecto lingüístico ha sido relegado. El objetivo de este trabajo consiste en identificar y clasificar los errores relacionados con el uso del lenguaje matemático en la solución de problemas de Geometría Euclideana. En la primera parte se presenta una reflexión en torno a la importancia didáctica de los errores, lo cual se relaciona con el problema de investigación que se comenta en la segunda parte del artículo. Posteriormente se reporta el análisis de las soluciones a un problema de demostración. Los resultados consisten en una clasificación lingüística de los errores encontrados y su relación con términos del lenguaje matemático; se considera que la complejidad lingüística de algunos de los términos matemáticos representa una dificultad para su traducción al lenguaje matemático y, por ende, tienen repercusiones negativas en la solución del problema.

Palabras clave: análisis de errores, lingüística, geometría, solución de problemas

Abstract. The study of errors in the teaching of mathematics has been increased in recent decades, although the linguistic factor has been relegated. The objective of this study is to identify and classify the errors related to the use of mathematical language in the solution of problems of Euclidean Geometry. The first part presents a reflection on the teaching importance of errors, which is related to the problem of research, discussed in the second part of the article. Then, the analysis of solutions to a problem of demonstration is reported. The results consist of a linguistic classification of errors and its relationship to mathematical language; some terms founded whose linguistic complexity represents a difficulty for its translation into the mathematical language and, therefore, they have a negative impact on the solution of the problem.

Key words: error analysis, linguistics, geometry, problem solving

Introducción

El interés sobre la naturaleza y las consecuencias de los errores que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas no es reciente, pues los primeros antecedentes se remontan a principios del siglo XX, durante el auge de la Psicología Experimental (Rico, 1995). En esa época el conductismo predominaba en la enseñanza y el error era considerado como una falla o equivocación, lo cual era inaceptable en el proceso de aprendizaje de los alumnos; por lo tanto los esfuerzos didácticos se orientaron a evitar su aparición en el proceso educativo.

Sin embargo, la revisión histórica del desarrollo del conocimiento científico se encuentra plena de conocimientos que inicialmente fueron rechazados por ser considerados falsos o erróneos, ya que contradecían las teorías establecidas (Kuhn, 2004; Kline, 1985). Al paso del tiempo y a la luz de los nuevos descubrimientos, algunas de las antiguas teorías científicas son ahora catalogadas como errores, mientras que otras han sido ampliadas. Ante esta evidencia se puede concluir que el error es una realidad y una posibilidad permanente en el desarrollo del conocimiento científico, el cual a su vez es presentado de manera sistematizada en el aprendizaje escolar.

En consideración al desarrollo del conocimiento científico, para los teóricos constructivistas del aprendizaje, los errores no son solo equivocaciones, como se consideraba desde los inicios de la pedagogía empírica, sino “oportunidades de aprendizaje”; los errores no necesariamente revelan un error o deficiencia en al aprendizaje, pues existen evidencias de situaciones en las cuales se aplican conocimientos correctos pero inadecuados para la situación por resolver (Brousseau, 2001; Astolfi, 2003). Bajo esta premisa se recomienda a los profesores diseñar situaciones que partan de los errores detectados para propiciar nuevo aprendizaje, en lugar de tratar de erradicarlos y surgió el interés por la investigación científica de errores.

Las publicaciones especializadas las áreas de la Didáctica y de la Matemática Educativa relacionadas con el análisis de errores, no cuentan con algún trabajo que se centre en el lenguaje matemático (Astolfi, 2003; Brousseau, 2001; Franchi y Hernández, 2004). Si bien las tipologías de errores de Radatz y de Movshovitz (Franchi y Hernández, 2004) incluyen una categoría destinada a “errores relacionados con el lenguaje”, ésta es insuficiente para determinar la influencia que el deficiente conocimiento del lenguaje matemático de los estudiantes ejerce sobre su aprendizaje matemático.

El presente trabajo es un reporte parcial de una investigación cualitativa y no experimental, cuyo objetivo consistió en identificar cuáles son los errores relacionados con el dominio del lenguaje matemático que enfrentan los estudiantes de Geometría Euclideana del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México, y cuál es su influencia en la solución de problemas de esta disciplina matemática. Los instrumentos de recolección de datos fueron cuestionarios que incluyeron problemas típicos de la materia, dejando de lado las interacciones de los estudiantes con el profesor y el método didáctico utilizado.

Problematización

El interés de la investigación se centra en los errores relacionados con el uso del lenguaje matemático, ya que el desconocimiento de sus normas por constituye una fuente de dificultades en la solución de problemas, independientemente de los conocimientos y capacidad de razonamiento deductivo del estudiante en cualquier rama de las matemáticas.

Desde la Lingüística, es posible establecer que el lenguaje matemático está conformado por diversos conjuntos de normas o códigos que rigen las diversas formas de representación utilizadas: (a) *Verbal*. Descripción de un objeto o enunciado matemático expresado solo en palabras, ya sea de manera oral o escrita; (b) *Simbólica*. Descripción de uno o más objetos matemáticos, sus propiedades y/o relaciones, expresada únicamente con la notación matemática tradicional (SIM); (c) *Gráfica*. Imagen de uno o más conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos. Suele incluir letras que asignan nombres específicos a los componentes de la figura (GRAF). El pasaje de una forma de representación a otra se denomina proceso de traducción.

Como punto de partida para el análisis de los errores, es necesario separar aquellos relacionados con el lenguaje matemático de aquellos propios de la naturaleza de la disciplina. Se parte del supuesto de que los errores en la solución de problemas de la Geometría Euclideana se clasifican en tres grandes categorías, no excluyentes entre sí: (a) De representación de objetos y enunciados matemáticos, (b) Deductivos, en cuanto a la secuencia de razonamientos necesaria para resolver el problema, y (c) Axiomáticos o de aplicación de la teoría (definiciones, propiedades, axiomas, teoremas, lemas, corolarios, construcciones) en el procedimiento de solución. Cada tipo de error puede tener consecuencias en los otros dos y uno de los propósitos del proyecto consiste en averiguar tales consecuencias.

Posteriormente se centra la atención en los errores de representación para establecer una tipología más detallada sobre aquellas fallas relacionadas con deficiencias en el uso del lenguaje matemático, así como sus repercusiones en el razonamiento deductivo y/o la aplicación de teoría en la resolución del problema (Radillo, 2009). Aunque en la investigación se incluyeron diversos tipos de problemas, por razones de espacio, en este reporte solo se muestran a detalle respuestas a problemas de demostración, por parte de los estudiantes del primer semestre en la universidad.

Soporte teórico-metodológico

En la Geometría Euclideana, la solución de un problema expresado en palabras requiere su traducción a enunciados simbólicos y/o a la construcción de una figura o esquema que represente los objetos matemáticos involucrados, así como las relaciones entre ellos. Por ejemplo, el planteamiento de una demostración requiere un proceso de traducción de la representación verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica (traducción entre códigos).

En la etapa de comprensión y planteamiento del problema los estudiantes se enfrentan a múltiples dificultades debidas a la polisemia de los términos utilizados, ya que la formulación matemática está permeada por el lenguaje cotidiano. Por ejemplo, el estudiante debe saber que algunas palabras utilizadas en el lenguaje matemático tienen significado diferente en el ámbito cotidiano, pues de lo contrario se puede distorsionar la interpretación del problema, e incluso en la construcción de un significado matemático (Rojano, 1994; Pimm, 1999; Ardila, 2002; Alcalá, 2002; Palencia y Talavera, 2004; Pochulu, 2004; Del Puerto, Minnaard y Seminara, 2006). Algunas de estas palabras o términos son: lado, grado, recto, mediana, relación, diferencia, potencia, radical, total, producto, media.

Las diferencias no se limitan al significado, sino que se aplican a las reglas gramaticales que rigen la formación de enunciados matemáticos, ya que dichas normas se vinculan con la teoría Matemática. Desde la Lingüística Aplicada, el lenguaje utilizado en la formulación de problemas no es el español cotidiano, sino un Español Especializado de la Geometría Euclideana (EE) (Arntz y Picht, 1995).

Aunque el lenguaje matemático se considera de carácter universal, algunas reglas varían según el autor o fuente bibliográfica consultada. Por ejemplo, en las normas institucionales del CUCEI se establece que la expresión $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ es un "enunciado bien construido", pero no es correcto escribir $\overline{AB} = \overline{CD}$ ya que se considera que los segmentos son congruentes mientras que sus medidas son iguales. Sin embargo esta segunda expresión es considerada correcta en otros ámbitos, pues la norma para representar segmentos o longitudes es diferente en cada comunidad académica. Por tal motivo, para propósitos del análisis lingüístico, se define el error de manera operativa, como una trasgresión a las normas establecidas para el uso del lenguaje matemático, en este caso de la Academia de Geometría Euclideana del CUCEI.

El soporte teórico fue construido desde la Lingüística, la Lógica Teórica y la Axiomática como disciplinas normativas, por lo que la metodología se centra en una descripción sobria de las diferencias demostrables entre el tipo de texto que se requiere en la resolución de cada problema y las respuestas redactadas por los estudiantes, consideradas éstas como registros lingüísticos y objetivos de su actividad cognitiva al resolver el problema.

Desde esta perspectiva se establecieron los siguientes constructos teóricos para llevar a cabo el análisis lingüístico de las respuestas de los estudiantes:

- Códigos de las 3 formas de representación, a partir de las partes de la Lingüística aplicables al lenguaje matemático: sintaxis, léxico y morfología y de acuerdo a las normas institucionales del CUCEI (Radillo, 2012).
- Procesos de traducción o Funciones de mapeo entre códigos.
- Tipo de texto que requiere la solución de cada tipo de problema: de demostración, construcción a regla y compás, de solución numérica.

Una vez explicitadas las normas lingüísticas, se procedió a diseñar los instrumentos de recolección de datos, que consistieron en cuestionarios integrados tanto por problemas típicos de la materia como por planteamientos de traducción entre pares de códigos de la Geometría (Radillo, 2011). El procedimiento de clasificación de las respuestas a cada problema consiste en analizar las respuestas de los estudiantes y determinar si se quebrantaba alguna regla determinada, ya fuera de representación, deductiva o axiomática, con lo cual se determina una clasificación preliminar de los errores detectados. Posteriormente se centró la atención solamente en los errores de representación, mediante el análisis lingüístico que permitió obtener una clasificación más detallada de los mismos.

Análisis de resultados

Unos de los problemas planteados a los alumnos consiste en demostrar el un: "*Si del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular a la hipotenusa, la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa*". El problema fue incluido en un cuestionario que contenía más preguntas a 37 alumnos de ingenierías que cursaban Geometría Euclideana con un mismo profesor, durante el segundo mes de clases.

Al analizar las respuestas se encontró que la principal dificultad para resolver este problema fue la traducción del teorema de la representación verbal a la simbólica (EE → SIM), pues 31 de los 37 estudiantes plantearon la tesis de manera incorrecta o la dejaron en blanco a pesar de haber trazado la figura y/o planteado hipótesis. El término "media proporcional" involucra la noción de "proporción continua", es decir aquella proporción cuyos términos medios son iguales, por lo que podría considerarse que es un término complejo desde el punto de vista lingüístico; aún así las respuestas equivocadas de los estudiantes están tan alejadas de una proporción, que es posible clasificarlas como errores axiomáticos o de aplicación de teoría.

Sólo un estudiante logró demostrar el teorema, 19 personas no hicieron la demostración y de las 17 cuya respuesta es incorrecta 13 de ellos plantearon la tesis erróneamente. La traducción entre los códigos verbal y gráfico (EE → GRAF), es decir el dibujo de la figura correspondiente, representó menor dificultad para los estudiantes ya que 22 de ellos hicieron la figura correcta, 4 el caso particular de un triángulo isósceles y 11 personas hicieron una figura equivocada o incompleta.

En la figura 1 se muestran dos formas correctas de representar la tesis y, si bien la figura pareciera un triángulo isósceles, las marcas de los ángulos agudos son diferentes, por lo que se percibe que el estudiante no consideró el caso particular; dado que hizo anotaciones al margen que establecen que el triángulo ABC queda dividido en dos triángulos semejantes, no congruentes, se puede afirmar que no hay errores de aplicación de teoría, pues el estudiante tiene los conocimientos necesarios para demostrar la tesis. Lamentablemente, este estudiante no logró demostrar la tesis, y esto se consideró un error deductivo puro.

En la figura 2 se aprecian varios tipos de error, ya que la hipótesis y la tesis no corresponden al enunciado condicional del teorema (error de traducción EE → SIM) y la figura muestra un triángulo isósceles (error de insuficiencia de generalización) lo cual repercute en un error deductivo, al plantear en la hipótesis la igualdad de los ángulos agudos. Si el triángulo rectángulo también es isósceles, la altura correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en otros dos triángulos congruentes entre sí, información que el estudiante dio por cierta, al grado de que la estableció como tesis (error deductivo) y la "demostró" con un teorema de semejanza (error axiomático).

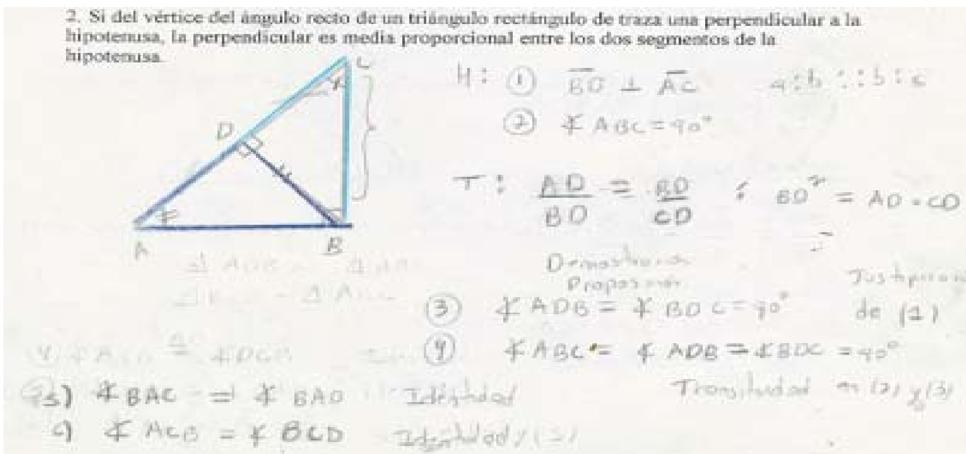


Figura 1. Dos formas correctas de simbolizar la tesis del teorema de la madia proporciona; error de deductivo. Alumno10.

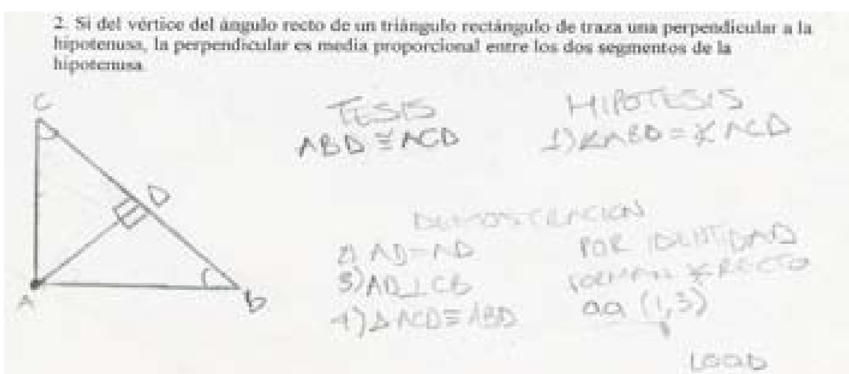


Figura 2. Tesis e hipótesis incorrectas y error de insuficiencia de generalización de la figura, que repercuten en errores deductivos. Alumno 23.

Si el planteamiento de las hipótesis y tesis es incorrecto (traducción EE → SIM + GRAF), entonces no es posible demostrar el teorema dado. Tal es el caso mostrado en la figuras 3.

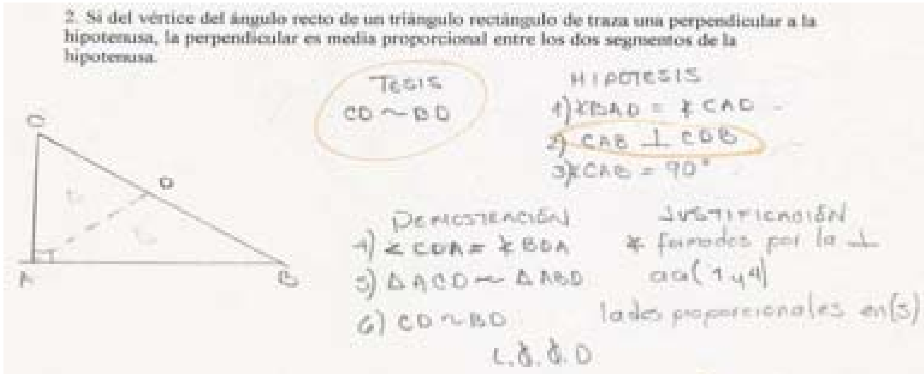


Figura 3. Tesis incorrecta y una hipótesis falsa. Error de representación que ocasiona errores deductivos y axiomáticos. Alumno 34

Conclusiones

Los errores de representación más frecuentes encontrados se relacionan con la sintaxis de la notación algebraica, principalmente en el uso adecuado de los diacríticos que diferencian figuras tales como recta, rayo y segmento, en el pasaje de traducción de la representación verbal de un enunciado a la notación simbólica. En cuanto los procesos de traducción del enunciado verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica, las principales dificultades se relacionan con términos del español especializado de la Geometría Euclideana que involucran términos complejos, como es el caso de la media proporcional en el ejemplo que se reporta.

Un error en la representación gráfica que tiene consecuencias en el resto de la solución del problema es el de la insuficiencia de generalización de una figura y/o las condiciones expresadas en el enunciado del problema, es decir, el trazar solamente un caso particular, EE → GRAF. En este caso, al dibujar un triángulo isósceles, los estudiantes atribuyen al teorema propiedades particulares (error deductivo y axiomático) y la demostración no es correcta, pues no corresponde a las condiciones generales dadas.

Respecto al código verbal, se detectaron algunos términos complejos del español especializado involucrados en los errores más frecuentes de traducción intercódigos cometidos por los estudiantes, ya que se requiere de varias expresiones en la notación simbólica para describirlos adecuadamente, pues condensan en un sólo término información que en el código simbólico se expresa más ampliamente, y constituyen obstáculos en la traducción entre los códigos del lenguaje matemático. Tal es el caso del término “media proporcional” que se ilustra en este documento.

Se espera que con este reporte se precisen algunos elementos metodológicos básicos para que los profesores de geometría puedan llevar a cabo un análisis lingüístico de las producciones escritas de los estudiantes de matemáticas, pues los resultados constituyen una potente herramienta para mejorar, tanto el diseño instruccional del curso, como los procesos de evaluación del aprendizaje. Con esta investigación se ha abierto ante todo la posibilidad de utilizar instrumentos de análisis que hasta ahora no habían sido explotados en la Matemática Educativa. Si he logrado al menos intrigar al lector y despertar su curiosidad sobre el gran potencial de estas nuevas herramientas, esta investigación habrá cumplido con creces su principal objetivo.

Referencias bibliográficas

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao.

Ardila, A. (2002). El lenguaje matemático y el usual, como mediador de la comunicación, en C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática 15,* 1169-1173. México: Grupo Editorial Iberoamericana

Arntz, R., y Picht, H. (1995). *Introducción a la terminología*. España: Ediciones Pirámide

Astolfi, J. P. (2003). *El "error", un medio para enseñar*. 2ª Edición. Sevilla: Diada Editora.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. Études dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques. *Petit x,* 57 (1), 5-29

Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., y Seminara, S. A. (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas*. Consultado el 1 de abril de 2007 en http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf

Kuhn, T. (2004). *La estructura de las revoluciones científicas.* México: Fondo de Cultura Económica.

Franchi, L., Hernández de R, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de geometría plana. *Educere, Investigación Arbitrada, 8 (24),* 63-71.

Kline, M. (1985). *Matemáticas: La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo XXI

Palencia, A., y Talavera, R. (2004). Estrategias innovadoras para la comprensión del lenguaje matemático. *Revista Ciencias de la Educación, 23 (1),* 7-60

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula.* 2ª Edición. Madrid: Morata.

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan en la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación,* 35 (4), 1-14

Radillo, M. (2009). *Obstáculos relacionados con las deficiencias en la traducción entre códigos en la solución de problemas de la Geometría Euclideana en el nivel de licenciatura*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Guadalajara, México.

Radillo, M. (2012). Los Códigos del lenguaje matemático en la geometría euclideana, en R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 162-170. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, J., Gómez, P., y Rico, L. (Eds.), *Educación matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (1), 45-66

COMPRENSIÓN DEL LENGUAJE ALGEBRAICO DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ponciano Hernández Hernández; Eugenio Filloy Yagüe
DME, Cinvestav-IPN México
phernandezh@cinvestav.mx

Resumen. Este artículo presenta los primeros resultados de la investigación que se está llevando a cabo con un grupo de 30 estudiantes mexicanos de 11 a 13 años de edad que cursan la educación secundaria. El interés es identificar las nociones de pre-álgebra y las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de transición de la aritmética al álgebra, como condicionantes de la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. Se aplicaron dos cuestionarios cuyos resultados indicaron el escaso dominio del Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos y el predominio del tanteo en la solución de ejercicios y de problemas; uno de cada tres estudiantes poseía los conocimientos básicos para iniciarse en el contenido de ecuaciones de primer grado, con cierto dominio de las operaciones básicas, pero aún con dificultades en las restas y divisiones; además, en su uso no le dieron sentido a la variable en la solución de problemas.

Palabras clave: ecuaciones lineales, solución de problemas, dificultades

Abstract. This paper refers to the first results of the research being carried out with a group of 30 Mexican students from 11-13 years old enrolled in secondary education. The aim is to identify pupils' understanding of the concepts of pre-algebra and the difficulties they face in the transition from arithmetic to algebra, to set the initial conditions for the teaching of linear equations. The application of two questionnaires resulted in an insufficient handling of the Mathematical Systems of arithmetical Signs and the prevalence of trials to solve exercises and problems; one out of three students had the basic knowledge to be initiated at the study of linear equations, with some mastery of basic operations, although with difficulties in subtraction and division. Besides, they did not make sense of the variable when solving problems.

Key words: linear equations, problem solving, difficulties

Introducción

La educación actual de nuestro país afronta grandes desafíos, principalmente en la educación básica-secundaria. En la disciplina de las matemáticas es donde se muestran mayores escollos, en particular las dificultades de comprensión del álgebra, "ecuaciones de primer grado" (SEP, 2006, p.43)

El interés que lleva a realizar esta investigación es el tratamiento de las matemáticas en la enseñanza, en particular en lo concerniente al pensamiento algebraico. En este campo llama la atención lo complejo del paso de la aritmética al álgebra. "Muchas de las dificultades en el proceso de apropiación del álgebra manipulativa tienen su origen en un arraigo a las fuentes de significado provenientes de la aritmética o del lenguaje coloquial, al interpretar símbolos literales y los signos de operación" (Solares, 2001, p. 9). Esto motiva a indagar dónde surgen estos conflictos. Generalmente los estudiantes consideran al álgebra como una de las áreas de las matemáticas más complejas por el nivel de abstracción que se requiere para su comprensión y el uso de su simbología. Es difícil para ellos comprender el significado de los signos de operación cuando cambian de un campo de conocimiento a otro. Esto se manifiesta en que la aritmética y el álgebra comparten muchos de los signos y símbolos; por señalar un ejemplo, en aritmética los signos "+, –" representan los signos de operación de la adición y de la sustracción, respectivamente; sin embargo, en álgebra estos signos, además de representar signos de operación, representan los signos de los números para el conjunto de números enteros positivos y negativos, correspondientemente. Por consiguiente, se formula la siguiente pregunta: ¿De qué manera la estrategia de la resolución de problemas al inicio del aprendizaje del lenguaje algebraico favorece la comprensión de los alumnos de las ecuaciones de primer grado? Se pretende identificar las principales dificultades que se presentan en la transición de la aritmética al álgebra.

Marco teórico

Para investigar los fenómenos de la enseñanza y del aprendizaje de un contenido matemático específico, Filloy propone la construcción de un Modelo Teórico Local (Filloy, 1999). Considera cuatro elementos esenciales: el sujeto que enseña, el sujeto que aprende, el conocimiento matemático en juego y la comunicación que establecen los sujetos implicados en el proceso.

En particular, se hará referencia a la componente de enseñanza sobre los modelajes concreto y sintáctico. En sus recursos didácticos a utilizar en el desarrollo de esta componente, se propone modelar contextos concretos familiares al alumno, para que ante las nuevas operaciones y los nuevos objetos los dote de sentido, construya los primeros rudimentos de sintaxis algebraica y aprenda a tratar la incógnita en los procesos de abstracción y generalización de operaciones (Filloy, 1999), que requieren del uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS).

En cuanto a la componente de procesos cognitivos, se considerará el tratamiento de la solución de problemas aritméticos/algebraicos, para el que se han identificado tres métodos clásicos: 1) Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS), que concibe a los enunciados de los problemas como descripciones de "situaciones reales" o "estados posibles del mundo" y transforma tales textos a través de oraciones analíticas, esto es, utilizando "hechos" válidos en "todo mundo posible": inferencias lógicas que actúan como descripciones de las transformaciones de las "situaciones posibles" hasta llegar a una que se reconoce como la solución del problema; es el también denominado Método Analítico Clásico para resolver problemas, en donde se utiliza propiamente la aritmética. 2) Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES), en el que el primer paso que se sigue después de leer el enunciado es identificar lo que se quiere obtener, esto es, lo que el usuario va a considerar como “lo desconocido” en el problema. Una vez hecha la identificación, se asigna un valor numérico para “lo desconocido” considerándolo como una solución hipotética. Con esto se quiere propiciar que el sujeto haga una lectura o re-lectura, en la que en lugar de que razone sobre relaciones en las que hay elementos desconocidos, ahora pueda pensar todas las relaciones del problema en términos de cantidades conocidas. Así, la utilización de una solución hipotética puede facilitar el desencadenamiento del análisis y con ello el proceso de solución, creando condiciones que permitan al usuario producir un proceso de verificación, al final del cual puede establecer una comparación numérica entre dos cantidades que representan lo mismo en el problema, pero que provienen de relaciones numéricas diferentes; a esta representación numérica se va a asignar una letra que va a jugar el mismo papel que el valor numérico hipotético usado como solución, con lo cual se obtiene la ecuación algebraica del problema; finalmente se opera algebraicamente con la ecuación obtenida, hasta obtener el valor numérico de la incógnita mediante las reglas de la sintaxis algebraica. 3) Método Cartesiano (MC), según el cual el proceso de solución se establece a través de la representación de algunos de los elementos desconocidos del enunciado del problema por medio de expresiones algebraicas, traduciendo después el texto del problema a una serie de relaciones, expresadas en lenguaje algebraico, que conduce a una o varias ecuaciones cuya solución, vía un regreso a la traducción, arroja la solución del problema. La aplicación del Método cartesiano requiere expresiones de un Sistema Matemático de Signos más abstracto que el Método de Inferencias Analíticas Sucesivas y el Método Analítico de Exploraciones Sucesivas, por las que un usuario competente dé sentido a una representación (simbólica); el uso correcto de los SMS implica una evolución en la solución de problemas, que se desprende de los ejemplos concretos dados en el proceso de enseñanza (Filloy, 1999). Para alcanzar una competencia plena en el método algebraico por excelencia es necesario dominar el Método Cartesiano.

Sistemas Matemáticos de Signos. (SMS)

El Sistema Matemático de Signos (SMS) en el que se expresan y comunican los textos matemáticos correspondientes a tales redes conceptuales, también, tiene una estratificación que se corresponde con los diversos usos, que van dando cuenta de acciones, operaciones y transformaciones cada vez más generales y provenientes de estratos de lenguaje cada vez más abstractos. (Filloy, 1999)

Procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra

Uno de los fenómenos más simples que la observación en clase arroja sobre los fenómenos de permanencia en un nivel de lectura con niños que acaban de terminar la educación primaria (alrededor de los 12 años) es el que aparece cuando se les enfrenta con las preguntas del tipo:

1. $3 \times \square = 12$

2. $3 \times \square = 672$

3. $\bigcirc \times = 672$

4. $3 \times x = 672$

5. $3x = 672$

Entre los 10 y los 12 años es fácil centrar a algunos estudiantes para que todas las preguntas "se lean" como (2): ¿Cuál es el número que multiplicado por 3 da 672?

A lo largo del primer año de educación secundaria (en el Sistema Educativo Mexicano), la mayoría de los estudiantes pasan a preferir el método de dividir B entre A para resolver la ecuación $Ax = B$, que es lo que quieren lograr los objetivos de los programas de matemáticas de este ciclo. Sin embargo, el mismo fenómeno vuelve a aparecer con estudiantes que ya habían logrado una gran operatividad para resolver todas las ecuaciones de primer grado, cuando el contexto en que aparece la ecuación $Ax = B$ proviene de una situación de análisis en la resolución de un problema. (Filloy, 1999).

Cómo plantear y resolver problemas.

En 1945 el matemático y educador George Polya, en su obra "How to solve it" (Polya, 1965, p. 19) propuso una metodología en cuatro etapas para resolver problemas. A cada etapa le asocia una serie de preguntas y sugerencias que, aplicadas adecuadamente, ayudarán a resolver el problema.

Etapa I. Comprensión del problema

Etapa II. Concepción de un plan

Etapa III. Ejecución del plan

Etapa IV. Visión retrospectiva

De esta forma, Polya considera importante que el sujeto domine las cuatro etapas para solucionar un problema. Evidentemente la última es la más importante, porque se reconsidera de nuevo el problema para hacer un análisis y de esta forma se permite encontrar varios procedimientos para solucionarlo. Así mismo, el procedimiento usado pueda servirle para hacer alguna analogía y solucionar otro problema.

Método

El método que se está llevando a cabo en esta investigación es de tipo cualitativo y en *curso*; se enfoca en la educación básica secundaria y se interesa en encontrar las causas que originan las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de comprensión del álgebra. Al respecto, la investigación se realiza en una escuela secundaria diurna pública mexicana, con un grupo de 30 estudiantes de 11 a 13 años.

A manera de exploración y previo a la enseñanza del contenido "ecuaciones de primer grado" se aplicaron dos cuestionarios. El objetivo de ambos cuestionarios fue establecer las condiciones iniciales que enfrentaría la enseñanza de las ecuaciones de primer grado, identificar nociones de pre-álgebra y las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de transición de la aritmética al álgebra. El primero planteó tres reactivos con preguntas abiertas sobre operaciones básicas, números con signo y recta numérica. Algunas de las preguntas que se presentaron a los estudiantes para su contestación son: 1. En el siguiente problema menciona qué operaciones se tienen que realizar para resolverlo. La mamá de Jacqueline va al supermercado y compró los siguientes productos: $3\frac{1}{2}$ kg de azúcar, 1.5 kg de aguacate, $\frac{1}{4}$ kg de queso panela, 2 kg de manzana y 0.5 kg de tortillas. El kg de azúcar tiene un costo de 22.50 pesos, el kg de aguacate cuesta 30 pesos, el kg de queso panela cuesta 70 pesos, el kg de manzana tiene un costo de 26.50 pesos y el kg de tortillas cuesta 13 pesos. ¿Cuánto se tiene que pagar por los productos comprados? Si pagó con un billete de 500 pesos ¿Cuánto recibió de cambio? ¿Cuál es el peso total de los productos comprados?

2. Ubica en la recta numérica 3 números enteros positivos (escríbelos con azul), 3 números enteros negativos (escríbelos con rojo) y 3 números naturales (escríbelos con verde).

3. Cierto mes del año la temperatura en la Ciudad de México es de 6 °C mientras que en Toluca, Estado de México, es de –2 °C. Representa en una recta numérica la temperatura de ambas ciudades.

El segundo instrumento consistió en siete reactivos con preguntas abiertas referidas a: uso de literales en fórmulas geométricas, ecuaciones aritméticas, generalidades de ecuaciones algebraicas, resolución de problemas y la incógnita en modelos geométricos. Algunas de las preguntas que se plantearon a los estudiantes fueron:

1. ¿Cuál es la fórmula para calcular el perímetro de un hexágono regular? Dibuja un hexágono regular, inventa la medida de los lados, utilizando la fórmula calcula el perímetro.

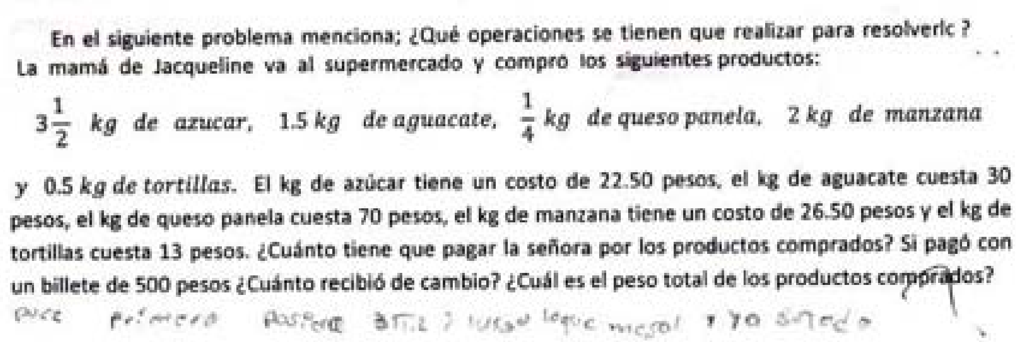
2. Encuentra el número que falta en las siguientes ecuaciones aritméticas: a) 8 +__= 15, b) 4 ×__= 36, c) 30 ÷__= 6, d) 9 + __= 0. 3. Encuentra el valor de *x* en las siguientes ecuaciones algebraicas: a) $\boldsymbol{x} + 4 = 13$, b) $7 + \boldsymbol{x} = 12$ c) $4\boldsymbol{x} + 2 = 22$, d) $6 - \boldsymbol{x} = 0$.

4. a) Por dos libros y una mochila pagué 400 pesos. Considerando que la mochila tiene un costo de 180 pesos. ¿Cuál es el precio de cada libro? b) La base de un rectángulo es el triple que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones, si el perímetro mide 24 cm? (Dibújalo). c) Por 5 plumas y un lápiz se pagaron 65 pesos. Considerando que el costo de las plumas es el mismo y el lápiz cuesta 5 pesos, ¿cuál es el costo de cada pluma?

Los dos cuestionarios se aplicaron en el aula, el primero con 15 minutos y el segundo con 30 minutos como máximo para su contestación individual, a la hora de la clase de matemáticas. Por sus respuestas obtenidas en el primer cuestionario, se seleccionó y entrevistó a un alumno en una sesión video-grabada para clarificar sus contestaciones.

Resultados

De las respuestas recopiladas con el primer cuestionario, el 40% evidenciaron dificultades para identificar las operaciones a realizar en la solución de problemas, de forma notoria en las restas y divisiones, lo cual se constató con un alumno a quien se entrevistó y que cometió errores principalmente con estas operaciones. La Figura 1 muestra las dificultades que tiene el estudiante para identificar que operaciones realizar para resolver un problema.



En el siguiente problema menciona; ¿Qué operaciones se tienen que realizar para resolverlo ?
La mamá de Jacqueline va al supermercado y compró los siguientes productos:

$3\frac{1}{2}$ *kg de azucar*, 1.5 *kg de aguacate*, $\frac{1}{4}$ *kg de queso panela*, 2 *kg de manzana* y 0.5 *kg de tortillas*. El kg de azúcar tiene un costo de 22.50 pesos, el kg de aguacate cuesta 30 pesos, el kg de queso panela cuesta 70 pesos, el kg de manzana tiene un costo de 26.50 pesos y el kg de tortillas cuesta 13 pesos. ¿Cuánto tiene que pagar la señora por los productos comprados? Si pagó con un billete de 500 pesos ¿Cuánto recibió de cambio? ¿Cuál es el peso total de los productos comprados?

[illegible]

Figura 1. Reactivo referente a identificar operaciones a realizar en una situación problémica.

En el caso del reactivo de números con signo, los estudiantes pueden ubicar un número positivo en la recta numérica; sin embargo, sólo dos estudiantes lograron ubicar un número negativo; los demás ubicaron un número negativo a la derecha del cero, lo que demuestra que no tienen nociones de números con signo (negativos). La Figura 2 muestra lo que un estudiante contestó.

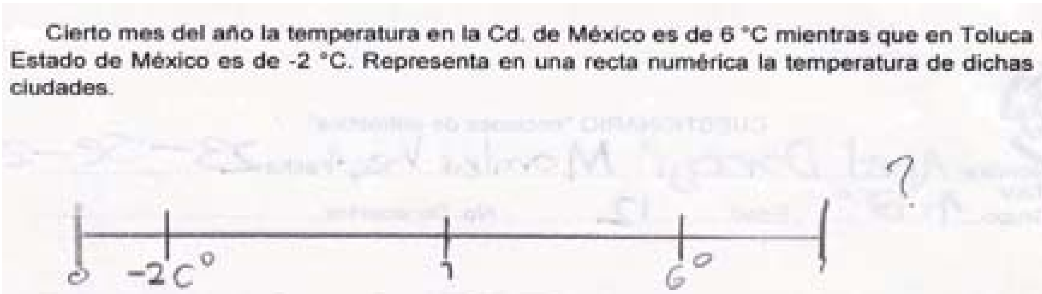


Figura 2. Reactivo referente a números con signo.

Finalmente, en el tercer reactivo, con respecto a la recta numérica sólo un alumno de cada nueve ubicó correctamente los números positivos, negativos y naturales. La Figura 3 muestra las dificultades de la ubicación de los números negativos en la recta numérica.

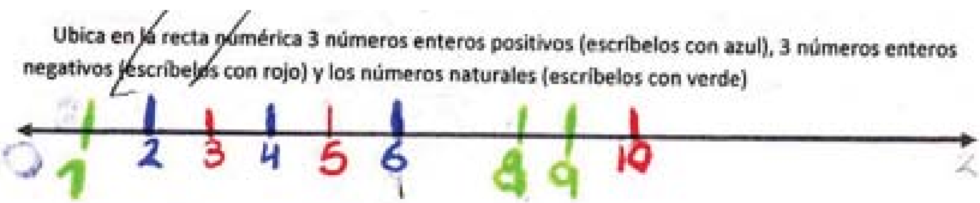


Figura 3. Reactivo referente a la ubicación de números positivos, números negativos y números naturales en la recta numérica.

Del segundo cuestionario, el 37% de las respuestas mostraron conocimientos básicos para acceder a la enseñanza de las ecuaciones de primer grado, manifestando ideas de: incógnita, igualdad, fórmula, figura geométrica regular, uso de literales, etc. No obstante, quienes contestaron correctamente lo hicieron por tanteo, sin exhibir otro procedimiento, y obtuvieron el resultado mediante cálculo mental. Se revelaron más dificultades para el apartado de "uso de literales en fórmulas geométricas", a pesar de haber estudiado este contenido en el nivel educativo anterior; sólo 10% de las respuestas fueron correctas en este apartado y su aplicación para cálculo de perímetros. Para las ecuaciones aritméticas del tipo número perdido, $a + \square = b$, $a\square + b = c$, 58% del grupo contestó acertadamente, lo que mostró un cierto dominio de ellas, aunque no como ecuación. En el reactivo de generalidades de ecuaciones algebraicas se presenta la literal x como incógnita; 56% del grupo respondió correctamente, pero a falta del acercamiento al uso de literales, los alumnos dudaron, por lo que el investigador dio una idea general del rol de la x en una ecuación durante la aplicación del cuestionario. A los reactivos de resolución de problemas aritméticos/algebraicos contestó correctamente 45% del grupo, aunque sin realizar operaciones. Finalmente, en el apartado de la incógnita en modelos geométricos, sólo 17% de las respuestas fueron correctas, lo que indica que la mayoría de los alumnos no poseía los conocimientos requeridos para la enseñanza del tema de interés. La Tabla 1 resume los principales tipos de respuestas obtenidas.

Contenido	Uso de literales en fórmulas geométricas		Ecuaciones aritméticas				Generalidades de ecuaciones algebraicas				Resolución de problemas			La incógnita en modelos geométricos		Total
Reactivo	1		2				3				4			5		5
Inciso	a	b	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	a	b	15
Tipo de respuesta																
Bien (B)	10%		58%				56%				45%			17%		37%
Noción (N)	20%		2%				0%				13%			12%		10%
Mal (M)	13%		24%				27%				24%			10%		20%
No contestó (NC)	57%		16%				17%				18%			61%		33%

Tabla 1 Porcentajes de tipo de respuestas recopiladas con el cuestionario.

Como conclusión en el segundo cuestionario, uno de cada tres alumnos tiene conocimientos básicos para estudiar el tema de ecuaciones de primer grado; sin embargo, aún con dificultades respondieron a los reactivos en las ecuaciones aritméticas y generalidades de ecuaciones algebraicas haciendo uso del cálculo mental y el tanteo; para encontrar el resultado, de igual manera manifestaron estos medios en las respuestas del reactivo de solución de problemas. Además, 63% del grupo exhibió un escaso uso de los sistemas matemáticos de signos.

Comentarios

De la aplicación de los dos cuestionarios resultó el uso insuficiente que los estudiantes hacen de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos y la necesidad de que den sentido al uso de variables en pre-álgebra. Así también muestran dificultades para identificar operaciones a realizar en la solución de problemas; esto augura dificultades en la comprensión del lenguaje algebraico por medio de la solución de problemas. Por ello, la enseñanza de las ecuaciones de primer grado se encaminará al arribo de la aplicación del método cartesiano, en donde el uso correcto de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos y algebraicos implica una evolución en la solución de problemas que se desprende de los ejemplos concretos dados en el proceso de enseñanza. Para el seguimiento de esta investigación se planea aplicar otros instrumentos después de la enseñanza de las ecuaciones de primer grado que conducirá el investigador, así como realizar entrevistas para caracterizar la comprensión de los alumnos del lenguaje algebraico de ecuaciones de primer grado.

Referencias bibliográficas

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamérica.

SEP, (2006). *Educación básica. Secundaria. Programas de Estudio*. México: Conaliteg.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Solares, A. (2001). *Sistema Matemático de Signos y distintos niveles de representación de la incógnita*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

O ENSINO DE ESTATÍSTICA VIA PROJETOS: A ESCOLHA PROFISSIONAL NO ENSINO SUPERIOR POR ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO DE ESCOLAS ESTADUAIS EM UBERABA

Ailton Paulo de Oliveira Júnior, Beatriz Cristina da Silva Delalíbera, Roberta Cristina de Faria Moreira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro Brasil
drapoj@uol.com.br, beatriz_delalibera@yahoo.com.br, betinha20cris@hotmail.com

Resumo. Com a finalidade de preparar os alunos de licenciatura em matemática em seu processo de formação, o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID realiza ações voltadas à melhoria da educação matemática nas escolas públicas participantes do subprojeto de matemática. Neste trabalho os alunos bolsistas da Universidade Federal do Triângulo Mineiro desenvolveram uma modelagem matemática na área de estatística, aplicando um questionário a 252 alunos do 2º ano do Ensino Médio a duas escolas estaduais de Uberaba em Minas Gerais. Através deste questionário pretendeu-se estabelecer perfil deste grupo e identificar a escolha profissional destes quando da entrada no Ensino Superior e sua motivação em continuar seus estudos. Alguns resultados indicam que o que dificultaria a continuidade dos estudos seria: 65,0% da escola I (condição financeira, disponibilidade de tempo, indecisão na escolha da área e vida familiar) e 63,4% da escola II, além dos mesmos da escola I (idade e falta de vontade).

Palavras chave: modelagem matemática, escolha profissional, alunos

Abstract. In order to prepare students for a licentiate degree in mathematics in their training process, the Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID, performs actions to improve mathematics education in the public schools participating subproject of mathematics. In this work the scholarship students of the Universidade Federal do Triângulo Mineiro developed a mathematical model in the area of statistics, applying a questionnaire to 252 students of the 2nd year of Secondary School to two state schools in Uberaba in Minas Gerais. By this questionnaire was intended to establish the profile of this group and identify the career choice of when entering the higher education and their motivation to continue their studies. Some results indicate that would hinder the continuity of studies would be: 65.0% of the school I (financial condition, availability of time, indecision in choosing the area and family life) and 63.4% II school, in addition to the same school I (age and unwillingness).

Key words: mathematical modeling, professional choice, students

Introdução

Gnanadesikan, Scheaffer, Watkins e Witmer (1997) afirmam que, para que os estudantes possam adquirir um entendimento conceitual de Estatística Básica, o ensino desta disciplina deve deixar de ser através de aulas expositivas, passando para o engajamento dos alunos em atividades diferenciadas de ensino. Sua preocupação se concentra na questão: Como fazer para que os alunos visualizem os conceitos importantes? Através de atividades especiais, o autor concluiu que houve melhoria da atitude do professor em sala de aula, onde foram discutidos assuntos importantes do cotidiano e onde foram desenvolvidos e entendidos conceitos chave.

A Estatística só adquire funcionalidade social quando utilizada na prática da pesquisa. O próprio nascimento e evolução dessa ciência foram impulsionados pelas necessidades de pesquisas nas mais diversas áreas do conhecimento humano.

Em Souza (2002) pode-se acompanhar uma atividade pautada no ciclo de investigação pela qual os estudantes foram conduzidos a formular questões (‘*Problema*’) e planejar estudos que lhes permitissem responder a essas mesmas questões (‘*Planejamento*). Segundo a autora, tais estudos englobaram a tomada de decisões quanto ao tipo de dados que necessitam, ao modo de recolhê-los (coleta de ‘*Dados*’) e à interpretação dos dados recolhidos (‘*Análises*’); uma vez terminado o estudo, os alunos comunicaram os resultados da sua investigação tendo o cuidado de preparar argumentos para defenderem as opções que tomaram e as interpretações que fizeram ao longo do processo de investigação (‘*Conclusões*’). Para alcançar esses objetivos a autora dividiu a atividade em sessões, cada uma com questionamentos para auxiliar e motivar os estudantes: 1ª) Preparação das questões de investigação; 2ª) A coleta dos dados; 3ª) Análise Exploratória dos dados; 4ª) Balanço do trabalho desenvolvido; 5ª) Preparação dos relatórios; 6ª) Apresentação dos trabalhos.

Portanto, a partir da utilização da metodologia do ensino via projetos, pretendeu-se estabelecer o perfil dos alunos do segundo ano do Ensino Médio de duas escolas estaduais em Uberaba e identificar a escolha profissional destes quando da entrada no Ensino Superior.

Metodologia

Os sujeitos da pesquisa foram alunos do 2º Ano do Ensino Médio de duas escolas públicas de Uberaba na região do Triângulo Mineiro que participam do subprojeto Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM). O PIBID, segundo o Decreto Nº 7.219, de 24 de Junho de 2010 tem por finalidade fomentar a iniciação à docência, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação de docentes em nível superior e para a melhoria da qualidade da educação básica pública brasileira.

As escolas estaduais foram selecionadas por participarem do subprojeto de Matemática do PIBID, e diferentes Índices de Desenvolvimento da Educação Básica - IDEB de 2007 e 2009 que é 5,4 para 4,6 (Escola I) contra 3,1 para 3,7 (Escola II), considerando que a média nacional é de 3,5 para 3,6. Esse indicador foi criado em 2007, para avaliar a qualidade da Educação Básica Brasileira (a escala de tal instrumento vai de zero a dez).

Assim, através da aplicação de um questionário a 252 alunos do 2º ano do Ensino Médio de duas escolas estaduais de Uberaba em Minas Gerais, sendo 214 da Escola I e 38 da Escola II, (adotamos a nomenclatura Escola I e Escola II) pretende-se estabelecer o perfil deste grupo e identificar a escolha profissional destes quando da entrada no Ensino Superior e sua motivação em continuar seus estudos.

Além disso, a proposta deste trabalho se desenvolveu a partir de atividades realizadas no PIBID/Matemática da UFTM com o objetivo de possibilitar aos alunos bolsistas e professores supervisores o aprendizado da Estatística, através da modelagem, dando-se da seguinte maneira: (1) escolha do tema a ser abordado: "A escolha profissional no ensino superior por alunos do 2º ano do ensino médio de escolas estaduais em Uberaba"; (2) formulação de problemas; (3) elaboração do instrumento de pesquisa; (4) aplicação do instrumento de pesquisa; (5) montagem do banco de dados; (6) tabulação dos dados; (7) análise dos dados; (8) divulgação dos resultados junto á comunidade escolar local, regional, nacional e internacional.

Esta metodologia de ensino tem por objetivo o desenvolvimento dos conceitos de estatística básica através da construção de uma pesquisa científica. Neste caso, a estatística se dará no ambiente real de sua aplicação e estará inserida no contexto da pesquisa científica.

Para Moore (1997) esta abordagem de conteúdos vem ao encontro do que o autor denomina de "nova pedagogia". Segundo o autor, a ideia central é o abandono de um modelo de "transferência de informações" a favor de uma visão "construtivista" de entendimento: estudantes não desejam ser uma vasilha preenchida com o conhecimento despejado pelos professores; eles inevitavelmente constroem seus próprios conhecimentos através da combinação de suas experiências presentes com seus conceitos já existentes.

Os conteúdos estatísticos abordados foram os seguintes: (1) variáveis qualitativas e quantitativas que compõem o instrumento de pesquisa; (2) construção de tabelas; (3) estatísticas básicas como: média, mediana e desvio-padrão; (4) noção de amostra e população. Pretendeu-se, portanto, com estas atividades, auxiliar na formação dos alunos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro no que tange a conteúdos básicos de Estatística utilizando o ensino via projetos.

Foram utilizados na elaboração do relatório técnico os softwares: *MSOffice Excel* para o gerenciamento do banco de dados; *WinSTAT* para serem efetuados os cálculos estatísticos; e *MSOffice Word* para a elaboração e edição de tabelas e a redação.

Resutados

Para apresentar os resultados serão consideradas as etapas do processo de Investigação Estatística, Figura 1, indicadas por Lopes (2003), cujo juízo a respeito do ensino de Estatística está em consonância com as tendências da Didática desta disciplina e com o trabalho com projetos, conforme esclarecem Batanero e Díaz (2004).

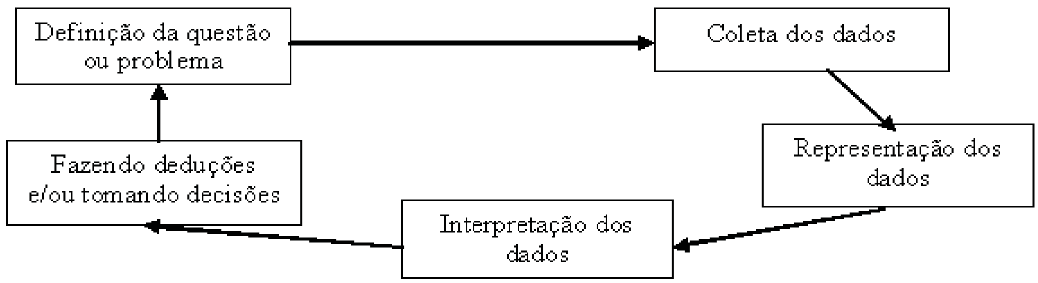


Figura 1. O processo do tratamento de dados

Pode-se conferir cada uma das sucessivas etapas dos referidos processos. As duas primeiras etapas referem-se à: (1) escolha do tema; e (2) interação com o tema ou estudo do fenômeno e período de interação nos grupos, possibilitando as negociações dos interesses envolvidos e discussões sobre o tema.

Assim, o desenvolvimento da atividade iniciou-se em abril de 2011 quando o PIBID/UFTM, Edital 2009, completava um ano de atividade, com a problematização dos assuntos a serem pesquisados e consistiu em estabelecer e delimitar o tema a ser tratado com o intuito de definir o contexto e os aspectos que seriam trabalhados ao longo das outras etapas da atividade.

Segundo Ponte (1990), ao se trabalhar com projetos o ponto de partida inicial é o gosto do aluno. Desta forma foi solicitado aos alunos bolsistas e professores supervisores do PIBID/Matemática/UFTM que sugerissem temas de seu interesse investigativo onde a Estatística lhes pudesse servir de auxílio para um melhor esclarecimento e compreensão.

Como o subprojeto trabalha junto aos alunos do Ensino Médio, pensou-se em desenvolver tema para atingir aos alunos para dar subsídios aos alunos do PIBID Matemática a desenvolver habilidades estatísticas. Desta forma, o trabalho pretendeu mostrar: A escolha profissional no ensino superior por alunos do 2º ano do ensino médio de escolas estaduais em Uberaba.

Na terceira etapa pretendeu-se definir a questão ou problema como a escolha do(s) aspecto(s) do tema, o estabelecimento de hipóteses e a elaboração da(s) questão(ões) para a verificação da(s) hipótese(s). Portanto, nesta etapa foram planejados, elaborados e aplicados questionários ao grupo em foco. O instrumento foi dividido nos seguintes blocos: I — Estabeleça seu perfil; II — Sobre a sua formação e a de seus pais; III — Sobre seus estudos e continuidade; IV — Você e a Matemática; e V — Sobre seu trabalho e escolha profissional. Focaremos alguns resultados focados nos itens I e V deste instrumento.

Fez-se necessária a utilização de outro preceito da abordagem de projetos — o trabalho em grupo. A promoção deste preceito não somente facilitou o levantamento das temáticas, mas também promoveu o exercício da cooperação, da expressão dos pontos de vistas, da divisão de tarefas e do consenso na tomada de decisões, habilidades e atitudes tão preciosas para a realização das demais fases do projeto estatístico.

Na quarta etapa buscou-se a compreensão do problema a partir da pesquisa de campo e da análise exploratória de dados. Nesta fase os alunos foram convidados a utilizar os conceitos e modelos estatísticos e matemáticos para calcular índices e medidas estatísticas com os quais poderão estabelecer relações e tirar conclusões, além de construir os modelos representativos dos resultados encontrados.

Assim, os alunos, no período de elaboração dos textos, frequentaram o laboratório de informática e organizaram e analisaram os dados coletados, elaborar tabelas relativas às informações obtidas, bem como a geração de textos referentes às análises decorrentes.

Apresentação da representação e análise de dados

Um dos dados que nortearam as conclusões do trabalho realizado é a questão da idade dos alunos das escolas, enquanto que na escola I, a maioria se encontra na idade correta segundo a base do sistema educacional brasileiro, ou seja, 16 anos, na escola II, encontram-se alunos com idade além do estabelecido, Tabela 1.

Variável	Escola I		Escola II	
Idade	**nº de alunos**	**%**	**nº de alunos**	**%**
14 anos	1	0,47	-	0,00
15 anos	64	29,91	10	28,57
16 anos	98	45,79	6	17,14
17 anos	27	12,62	1	2,86
18 anos	5	2,34	1	2,86
19 anos	2	0,93	-	0,00
20 anos	3	1,40	3	8,57
24 anos	-	0,00	2	5,71
25 anos	-	0,00	1	2,86
26 anos	-	0,00	1	2,86
De 30 a 39 anos	-	0,00	6	17,14
De 40 a 49 anos	-	0,00	3	8,57
De 50 a 52 anos	-	0,00	1	2,86
Média: 16 anos (desvio padrão = 0,77 anos)			Média: 22 anos (desvio padrão = 1,09 anos)	

Tabela 1. Perfil sócio e econômico dos alunos do 2º ano do Ensino Médio das Escolas I e II

Percebe-se que na Escola II, alguns fatores podem ter influenciado na diferença de idade média, pois muitos alunos dessa escola que estão retornando aos estudos já estão inseridos no mercado de trabalho, ou seja, os objetivos da maioria dos alunos da Escola são diferentes daqueles alunos que estão estudando para se prepararem para uma futura profissão.

Nas duas escolas, Tabela 2, a maioria dos alunos reside somente com os pais ou com os pais e irmãos, bem como moram em casas, sendo as mesmas em sua maioria próprias. Na escola I, muitos alunos ainda não trabalham e não contribuem com a renda familiar, já na escola II, os alunos já estão inseridos no mercado de trabalho e ajudam no orçamento familiar, desta maneira. A declaração da renda bruta total não é muito heterogênea e, portanto, o que pode diferenciar é a quantidade de pessoas que participa da contribuição da renda bruta familiar.

Renda bruta da família	Escola I		Escola II	
	nº de alunos	%	nº de alunos	%
Até R$ 540,00	10	4,67	3	7,89
De R$ 541,00 a R$ 1.000,00	40	18,69	14	36,85
De R$ 1.001,00 a R$ 1.500,00	50	23,37	3	7,89
De R$ 1.501,00 a R$ 2.000,00	33	15,42	8	21,05
De R$ 2.001,00 a R$ 3.000,00	21	9,81	3	7,89
De R$ 3.001,00 a R$ 4.000,00	13	6,08	3	7,89
De R$ 4.001,00 a R$ 5.000,00	15	7,01	1	2,64
Mais de R$ 5.000,00	7	3,27	1	2,64
Não responderam	25	11,68	2	5,26
Com quem reside	**nº de alunos**	**%**	**nº de alunos**	**%**
Pais e irmãos	134	62,62	19	50,00
Pais	53	24,77	4	10,53
Outros parentes	3	1,40	4	10,53
Outros	13	6,07	11	28,94
Não responderam	1	0,47	-	0,00

Tabela 2. Renda bruta familiar dos alunos do 2º ano do Ensino Médio das Escolas I e II

Observa-se que os pais têm forte influência na decisão dos adolescentes quanto ao seu futuro profissional, segundo a pesquisa realizada, 59,43% dos alunos da Escola I e 68,75% dos alunos da Escola II, consideram os pais como pessoa que mais influencia em sua escolha profissional. Outro fator de grande importância para optar pela carreira profissional são as informações sobre a profissão que o aluno pretende seguir.

Vários são os fatores que influenciam na escolha da profissão a ser seguida, dentre elas os alunos apontaram que trabalhar com o que gosta é a questão mais importante para a escolha da sua profissão para os alunos das duas escolas.

Considerando o segundo fator mais importante para a escolha profissional, os alunos da Escola

I, apontaram que é fazer uma boa faculdade, já os alunos da Escola II, classificaram o mercado de trabalho.

Alguns desses temas são abordados pela escola para auxiliar na decisão dos adolescentes, os alunos da Escola I destacaram que o mercado de trabalho é o fator mais discutido no ambiente escolar e os alunos da Escola II citaram que o item mais discutido pela escola para sucesso profissional é fazer uma boa faculdade, Tabela 3. Segundo Silva (2011), é atribuída à escola a solução de problemas de um país com problemas sociais e com desigualdades econômicas, através de um discurso de igualdade e construção de cidadania.

Fatores importantes para a escolha profissional	**Escola I**		**Escola II**	
	nº de alunos	**%**	**nº de alunos**	**%**
Mercado de Trabalho	13	12,26	6	12
Trabalhar com o que gosta	5	4,71	2	4
Ótimo salário	4	3,77	2	4
Fazer um bom curso técnico	5	4,71	5	10
Fazer uma boa faculdade	6	5,66	9	18
Relação entre a família e a profissão	2	1,89	1	2
Incluir atividades artísticas na profissão	2	1,89	1	2
Ambiente de trabalho	3	2,83	1	2
Profissão sem rotina ou rotineira	3	2,83	1	2
Ter vocação para uma atividade	3	2,83	1	2
Fazer de seu hobby uma profissão	3	2,83	1	2
Nenhuma questão é abordada	-	0,00	7	14

Tabela 3. Fatores importantes para escolha profissional discutidos na escola

Percebe-se então que a escola assume a responsabilidade de instruir os alunos para o mercado de trabalho através de discussões que os fazem refletir sobre o seu futuro profissional, além de transformá-los em cidadãos ativos na sociedade em que ele está inserido. Desta maneira, destaca-se que 56,62% dos alunos da Escola I e 26% dos alunos da Escola II, não responderam a questão sobre qual item importante para a escolha profissional que o aluno teve a oportunidade de discutir na escola, talvez por não ter compreendido o que foi perguntado, talvez por já ter maturidade sobre os assuntos abordados pela escola ou talvez por compreender que a escola aborda vários temas de forma abrangente, já que é uma das principais responsáveis pela formação técnica, cultural e social do aluno.

Segundo Santos (2005), a escolha de uma profissão é fator decisivo na vida de um adolescente, pois a família, a sociedade e eles próprios começam a cobrar a necessidade de avançar etapas após o ensino médio, ou seja, os jovens são pressionados pelos familiares a arrumar um emprego ou iniciar um curso superior ou profissionalizante. Devido a essas exigências, verifica-se que os alunos da Escola I afirmaram que o que mais influencia na sua escolha profissional é a opinião dos pais (59,43%), seguido das informações obtidas sobre a profissão (47,16%). Na Escola II os pais também têm muita influência na decisão profissional (68,75%), mais se observa que informações sobre a profissão foi apontado (com 68,57%), como o segundo fator que mais interfere na escolha profissional.

Assim, pode-se ponderar que a escola cumpre seu papel no processo de formação de pessoas para o mercado de trabalho, mas antes de tudo ela deve estar preparada para formar cidadãos críticos que tem consciência da importância do estudo para conseguir sobressair tanto no ramo profissional, como na sociedade em que vivem de maneira satisfatória e com sucesso.

Conclusões

Decidir sobre o futuro, qual carreira seguir, o que é mais importante para o sucesso profissional é tarefa difícil para o adolescente, já que muitos ainda não atingiram maturidade e são influenciados pela opinião de adultos que já tem experiência de vida, desta maneira, escola, professores e pais deve ser um tripé de apoio para que possam instruir na escolha do aluno sem que venham a seguir tendências e modismos impostos pela sociedade.

Alguns adolescentes podem se sentir ansiosos, pois a escolha do que fazer depois do ensino médio representa o início de uma etapa importante e o começo de uma vida adulta com responsabilidades morais e materiais, por isso, quanto mais informação a respeito de várias profissões e cursos, melhor será o amadurecimento de ideias para analisar a melhor escolha do aluno. Professores, pais e escola devem oferecer o maior número possível de alternativas para que o aluno seja capaz de decidir um curso e/ou uma profissão que o satisfaça pessoalmente e profissionalmente.

Além disso, evidencia-se que as atividades de organização de pesquisa de campo, coleta, tabulação de dados, interpretação e análise dos dados não foi tarefa fácil para estes alunos exigindo a retomada de conteúdos, um constante repensar dos resultados descritos e uma atitude questionadora do professor, refazendo perguntas objetivando despertar o espírito investigativo nos alunos.

Para Mendonça e Lopes (2010) a implementação da educação estatística deve acontecer de uma forma investigativa, na qual o grupo de alunos tenha vivência com a geração e análise de dados. Acredita-se que no momento em que a turma tenha participação ativa no processo, todas as habilidades serão favorecidas em seu desenvolvimento.

Assim, acredita-se que com o ensino vinculado à pesquisa é possível se vislumbrar a possibilidade de se compreender a sala de aula e o espaço escolar em geral, como um local permeado pelas mais diversas dimensões culturais, bem como pelas representações e imaginários sociais.

Referências bibliográficas

Batanero, C. e Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. In J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp.125-163). Zaragoza: ICE.

Decreto n 7.219 de 24 de junho de 2010. (2010). Dispõe sobre o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID e dá outras providências. Presidência da República, Brasília, publicado no DOU de 25 jun. 2010.

Gnanadesikan, M., Scheaffer, R. L., Watkins, A. E. & Witmer, J. A. (1997). An Activity-Based Statistics Course. *Journal of Statistics Education*, [Online], 5 (2). http://www.amstat.org/publications/jse/v5n2/gnanadesikan.html.

Lopes, C. E. (2003). O conhecimento matemático adquirido através dos projetos. In Lopes, C. E. (Ed), *Matemática em projetos*: uma possibilidade (pp. 23-27), Campinas, São Paulo: Faculdade de Educação.

Mendonça, L. O. e Lopes, C. E. O. (2010). Trabalho com educação estatística no Ensino Médio em um ambiente de Modelagem Matemática. In *Estudos e Reflexões em Educação Estatística* (pp 157-162). Campinas, SP: Mercado de Letras.

Moore, D. S. (1997). *Statistics: Concepts and Controversies*. New York: Freeman.

Ponte, J. P. (1990). *Computador, um instrumento da educação*. Lisboa: Texto Editora.

Santos, L. M. M. (2005). O Papel da Família e dos Pares na Escolha Profissional. In. *Psicologia em Estudo.* Maringá, 10 (1), 57-66.

Silva, R. G. D. (2011). Relato de uma Pesquisa Avaliativa sobre as Contribuições da Psicologia para o Ensino Médio. *Psicologia: Ensino & Formação,* 2 (1), 57-76.

Souza, O. (2002). Investigações estatísticas no 6° ano. In GTI (Ed.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: APM.

TRABALHANDO ESTATÍSTICA ATRAVÉS DE PROJETOS: PERFIL DOS ALUNOS DO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE ESCOLAS ESTADUAIS EM UBERABA

Ailton Paulo de Oliveira Júnior; Ébane Rocha Falconi; Vanderleia Conceição Ribeiro
Universidade Federal do Triângulo Mineiro Brasil
drapoj@uol.com.br, ebanefalconi@yahoo.com.br; vanderleia_cr@hotmail.com

Resumo. A atividade que descrevemos teve como objetivo possibilitar aos alunos bolsistas e professores supervisores do PIBID Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro em Uberaba, Minas Gerais, a prática da estatística através de atividades de ensino utilizando projetos. Assim, através da aplicação de um questionário a 146 alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de duas escolas estaduais, estabeleceu-se o perfil deste grupo. Alguns resultados indicaram que em média os alunos encontram-se no intervalo da idade, em anos, em que se esperaria que estivessem, ou seja, 12 anos. A maioria dos alunos da Escola II são moradores de bairros próximos à escola o que justifica o percentual de 63,16% dos alunos vão para a escola a pé. Evidenciamos que as atividades de organização de pesquisa de campo, coleta, tabulação de dados, interpretação e análise dos dados despertou o espírito investigativo nos alunos.

Palavras chave: alunos, matemática, ensino fundamental, ensino

Abstract. The activity described aimed to enable students and supervisors of PIBID Mathematics of Federal University of Triângulo Mineiro in Uberaba, Minas Gerais, the practice of using statistical learning activities using projects. Thus, by applying a questionnaire to 146 students in 7th grade of elementary school of two state schools in Uberaba in Minas Gerais settled the profile of this group. Some results have indicated that on average the students are in the range of age in years at which one would expect if they were, or 12 years old. Most students of the School II are residents of neighborhoods near the school which explains the percentage of 63.16% of the students go to school on foot. The school I not only receives students from neighborhoods near the school, but other neighborhoods, justifies by 61.11% using the family car, van or school bus and public transportation.

Key words: students, mathematics, primary education, teaching

Introdução

A Estatística vem, ao longo do seu desenvolvimento, prestando uma grande contribuição à sociedade, pois além de fornecer métodos para organizar, resumir e comunicar dados, também proporciona condições de fazer inferência através de observações realizadas por um universo maior de observações potenciais. Há um crescente número do aproveitamento da Estatística nas diversas áreas do conhecimento, existindo uma generalizada emergência e reconhecimento de problemas de natureza estatística nos vários ramos científicos, na indústria e em atividades governamentais o que faz crescer o interesse pela atividade estatística (Loureiro, Oliveira e Brunheira, 2000).

Dessa forma, torna-se cada vez mais necessário o ensino e a aprendizagem dessa disciplina pelos alunos. Porém, é preciso criar-se mecanismos para que exista a compreensão dos conteúdos ensinados e não seguir o sistema tradicional baseado na repetição como forma de aprendizagem.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), o ensino da Estatística e da Probabilidade surge no contexto do bloco de conteúdos com nome de "Tratamento das Informações", tendo como justificativa a demanda social e o frequente uso na sociedade contemporânea, pela necessidade de o indivíduo compreender as informações divulgadas, tomar decisões e fazer previsões que influenciam sua vida pessoal e em comunidade. Os PCN's ressaltam que a Estatística possibilita o desenvolvimento de formas específicas de pensamento e raciocínio, envolvendo fenômenos aleatórios, interpretando amostras, fazendo inferências e comunicando resultados por meio da linguagem própria quantitativa.

Acredita-se que os conteúdos do bloco "Tratamento da Informação" devem ser explorados com situações do cotidiano dos alunos, para que facilite o ensino-aprendizagem dos mesmos.

Para Cazorla e Santana (2006), o ensino de estatística permite fazer a interdisciplinaridade entre a matemática e as demais disciplinas, sendo dessa maneira o fio condutor dos projetos em temas transversais.

Lopes (1998) justifica o ensino de estatística na escola como uma ferramenta capaz de auxiliar o estudante a responder perguntas como: "quantos?", "quando?", "como?" e "em que medida?" Questões estas que possibilitam uma melhor compreensão da realidade. O aluno passa, assim, a fazer conjecturas e a elaborar questionamentos para responder a um processo investigativo o que lhe permite o estabelecimento de relações e o desenvolvimento de processos necessários à resolução de problemas.

Para tanto, acreditamos que a metodologia de ensino que tem por objetivo o desenvolvimento dos conceitos de estatística básica através da construção de projetos consiste na utilização de um ambiente real de sua aplicação e estará inserida no contexto da pesquisa científica.

Para Moore (1997) esta abordagem de conteúdos vem ao encontro do que o autor denomina de "nova pedagogia". Segundo o autor, a ideia central é o abandono de um modelo de "transferência de informações" a favor de uma visão "construtivista" de entendimento: estudantes não desejam ser uma vasilha preenchida com o conhecimento despejado pelos professores; eles inevitavelmente constroem seus próprios conhecimentos através da combinação de suas experiências presentes com seus conceitos já existentes.

A Estatística só adquire funcionalidade social quando utilizada na prática da pesquisa. O próprio nascimento e evolução dessa ciência foram impulsionados pelas necessidades de pesquisas nas mais diversas áreas do conhecimento humano.

Assim, o objetivo deste trabalho é estabelecer o perfil dos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental de duas escolas estaduais de Uberaba e explicitar, através da investigação estatística através do trabalho via projeto e com isto permitir aos alunos participantes do PIBID, um melhor conhecimento dos conteúdos básicos da Estatística.

Metodologia

Os sujeitos da pesquisa foram alunos do 7º Ano do Ensino Fundamental de duas escolas públicas de Uberaba na região do Triângulo Mineiro que participam do subprojeto Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM). O PIBID, segundo o Decreto Nº 7.219, de 24 de Junho de 2010 tem por finalidade fomentar a iniciação à docência, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação de docentes em nível superior e para a melhoria da qualidade da educação básica pública brasileira.

As escolas estaduais foram selecionadas por participarem do subprojeto de Matemática do PIBID, e diferentes Índices de Desenvolvimento da Educação Básica - IDEB de 2007 e 2009 que é 5,4 para 4,6 (Escola I) contra 3,1 para 3,7 (Escola II), considerando que a média nacional é de 3,5 para 3,6. Esse indicador foi criado em 2007, para avaliar a qualidade da Educação Básica Brasileira (a escala de tal instrumento vai de zero a dez).

Assim, através da aplicação de um questionário a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, sendo: 108 alunos (92,3% do total) da Escola I e 38 alunos (55,1% do total) da Escola II, no primeiro semestre letivo de 2011 pretendeu-se estabelecer o perfil deste grupo.

Além disso, a proposta deste trabalho se desenvolveu a partir de atividades realizadas no PIBID/Matemática da UFTM com o objetivo de possibilitar aos alunos bolsistas e professores supervisores o aprendizado da Estatística, através da modelagem, dando-se da seguinte maneira: (1) escolha do tema a ser abordado: "A escolha profissional no ensino superior por alunos do 2º ano do ensino médio de escolas estaduais em Uberaba"; (2) formulação de problemas; (3) elaboração do instrumento de pesquisa; (4) aplicação do instrumento de pesquisa; (5) montagem do banco de dados; (6) tabulação dos dados; (7) análise dos dados; (8) divulgação dos resultados junto á comunidade escolar local, regional, nacional e internacional.

Esta metodologia de ensino tem por objetivo o desenvolvimento dos conceitos de estatística básica através da construção de uma pesquisa científica. Neste caso, a estatística se dará no ambiente real de sua aplicação e estará inserida no contexto da pesquisa científica.

De acordo com Gonçalves Matsuo, Strapassan, Lovato e Saraiva (1999), com este tipo de atividade a liberdade que o aluno recebe deixa aflorar em si o pesquisador, o ser crítico que existe dentro dele.

Os conteúdos estatísticos abordados foram os seguintes: (1) variáveis qualitativas e quantitativas que compõem o instrumento de pesquisa; (2) construção de tabelas; (3) estatísticas básicas como a média aritmética; (4) noção de amostra e população.

Pretendeu-se, portanto, com estas atividades, auxiliar na formação dos alunos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro no que tange a conteúdos básicos de Estatística utilizando o ensino via projetos.

Foram utilizados na elaboração do relatório técnico os softwares: *MSOffice Excel* para o gerenciamento do banco de dados; *WinSTAT* para efetuar os cálculos estatísticos; e *MSOffice Word* para a elaboração e edição de tabelas e a redação.

Resultados

Para apresentar os resultados serão consideradas as etapas do processo de Investigação Estatística, Figura 1, indicadas por Lopes (2003), cujo juízo a respeito do ensino de Estatística está em consonância com as tendências da Didática desta disciplina e com o trabalho com projetos, conforme esclarecem Batanero e Díaz (2004).

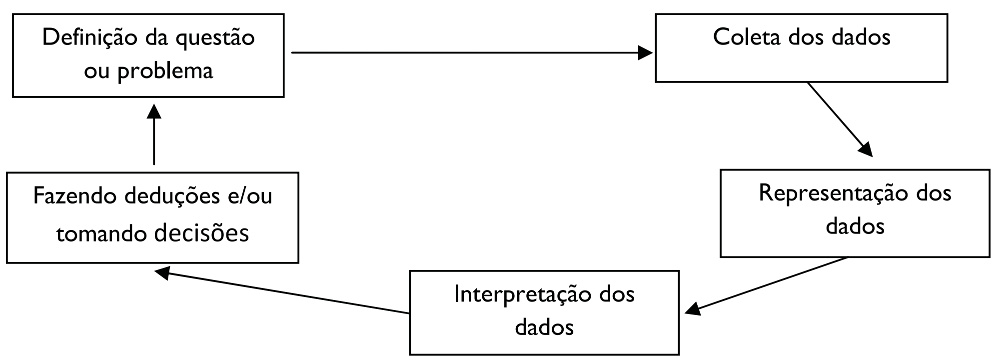


Figura 1. O processo do tratamento de dados

Pode-se conferir cada uma das sucessivas etapas dos referidos processos. As duas primeiras etapas referem-se à: (1) escolha do tema; e (2) interação com o tema ou estudo do fenômeno e período de interação nos grupos, possibilitando as negociações dos interesses envolvidos e discussões sobre o tema.

Assim, o desenvolvimento da atividade iniciou-se em abril de 2011 quando o PIBID/UFTM, Edital 2009, completava um ano de atividade, com a problematização dos assuntos a serem pesquisados e consistiu em estabelecer e delimitar o tema a ser tratado com o intuito de definir o contexto e os aspectos que seriam trabalhados ao longo das outras etapas da atividade.

Segundo Ponte (1990), ao se trabalhar com projetos o ponto de partida inicial é o gosto do aluno. Desta forma foi solicitado aos alunos bolsistas e professores supervisores do PIBID/Matemática/UFTM que sugerissem temas de seu interesse investigativo onde a Estatística lhes pudesse servir de auxílio para um melhor esclarecimento e compreensão.

Como o subprojeto trabalha junto aos alunos do Ensino Médio, pensou-se em desenvolver tema para atingir aos alunos para dar subsídios aos alunos do PIBID Matemática a desenvolver habilidades estatísticas. Desta forma, o trabalho pretendeu mostrar: A escolha profissional no ensino superior por alunos do 2º ano do ensino médio de escolas estaduais em Uberaba.

Na terceira etapa pretendeu-se definir a questão ou problema como a escolha do(s) aspecto(s) do tema, o estabelecimento de hipóteses e a elaboração da(s) questão(ões) para a verificação da(s) hipótese(s). Portanto, nesta etapa foram planejados, elaborados e aplicados questionários ao grupo em foco. O instrumento foi dividido nos seguintes blocos: I — Estabeleça seu perfil; II — Sobre a sua formação e a de seus pais; III — Sobre seus estudos e continuidade; IV — Você e a Matemática; e V — Sobre seu trabalho e escolha profissional. Focaremos alguns resultados focado no item I.

Fez-se necessária a utilização de outro preceito da abordagem de projetos — o trabalho em grupo. A promoção deste preceito não somente facilitou o levantamento das temáticas, mas também promoveu o exercício da cooperação, da expressão dos pontos de vistas, da divisão de tarefas e do consenso na tomada de decisões, habilidades e atitudes tão preciosas para a realização das demais fases do projeto estatístico.

Na quarta etapa buscou-se a compreensão do problema a partir da pesquisa de campo e da análise exploratória de dados. Nesta fase os alunos foram convidados a utilizar os conceitos e modelos estatísticos e matemáticos para calcular índices e medidas estatísticas com os quais poderão estabelecer relações e tirar conclusões, além de construir os modelos representativos dos resultados encontrados.

Assim, os alunos, no período de elaboração dos textos, frequentaram o laboratório de informática e organizaram e analisaram os dados coletados, elaborar tabelas relativas às informações obtidas, bem como a geração de textos referentes às análises decorrentes.

Apresentação da representação e análise de dados

A seguir será apresentado o perfil dos alunos das duas escolas em análise, a partir do trabalho que visou o aprendizado da Estatística, através do trabalho via projetos.

Na Tabela 1 observa-se que nas duas escolas os alunos do sexo masculino do sétimo ano do Ensino Fundamental apresentam um percentual ligeiramente superior: Escola I (52,78%) e Escola II (55,26%).

No que se refere à idade, observa-se que, em média, os alunos da Escola I (12,05 anos) são mais novos que os alunos da Escola II (12,64 anos). Além disso, tomando-se como base o sistema educacional brasileiro, que considera a idade de 7 (sete) anos como adequada para o início dos estudos no Ensino Fundamental e a de 14 anos, para sua finalização, um aluno que esteja terminando o 7º ano deveria ter em torno de 12 anos. Esta diferença deve-se a vários fatores como: reprovações seguidas, entrada tardia na escola e ainda evasão escolar. Desta forma, observa-se que em média os alunos encontram-se no intervalo da idade, em anos, em que se esperaria que estivessem.

Nas duas escolas, a maioria dos alunos reside somente com os pais ou com os pais e irmãos. Em relação ao tipo de imóvel, a maior parte reside em casa própria. Assim, os bairros onde as escolas estão localizadas são essencialmente residenciais e a cidade de Uberaba privilegia as casas como moradia.

Ainda na Tabela 1, observou-se que relativamente ao número de pessoas residentes com o aluno, tem-se na Escola I a média de 4,16 pessoas por domicílio enquanto na Escola II essa média diminui para 4. Os números são muito próximos para as duas escolas, porém estão acima da média nacional que é de 3,2 moradores por residência, segundo a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios 2011 (PNAD), realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), publicada em 21 de setembro de 2012.

Variável	**Escola I**		**Escola II**	
Sexo	**nº de alunos**	**%**	**nº de alunos**	**%**
Masculino	57	52,78	21	55,26
Feminino	51	47,22	16	42,10
Idade	**nº de alunos**	**%**	**nº de alunos**	**%**
11 anos	25	24,04	4	11,11
12 anos	58	55,77	17	47,22
13 anos	13	12,50	5	13,89
14 anos	7	6,73	8	22,22
15 anos	1	0,96	2	5,56
Médias	12,05 anos		12,64 anos	

Variável	Escola I		Escola II	
Com quem os alunos residem	**nº de alunos**	**%**	**nº de alunos**	**%**
Pais	23	21,30	7	18,42
Pais e irmãos	76	70,37	27	71,05
Avós	-	0,00	-	0,00
Parentes	6	5,56	1	2,63
Outro	2	1,85	1	2,63
Não responderam	1	0,93	2	5,26
Tipo de residência	**nº de alunos**	**%**	**nº de alunos**	**%**
Casa	97	90,65	36	94,74
Apartamento	10	9,35	2	5,26
Número de pessoas que residem com o aluno	**nº de alunos**	**%**	**nº de alunos**	**%**
1	1	0,93	-	0,00
2	9	8,33	3	7,89
3	27	25,00	9	23,68
4	29	26,85	12	31,56
5	18	16,67	9	23,68
6	10	9,26	-	0,00
7 ou mais	5	4,64	2	5,26
Não responderam	9	8,33	3	7,89
Média	4,16 pessoas		4,00 pessoas	

Tabela 1. Perfil sócio e econômico dos alunos do 6º ano das Escolas I e II

Na Tabela 2, observa-se que na Escola I aproximadamente 27,79% dos alunos declararam que a renda bruta da família fica entre R$1.001,00 e R$3.000,00. Nesta escola, os alunos vêm de famílias que por começarem a ter problemas financeiros e gostarem da proposta de ensino da escola retiraram seus filhos das escolas particulares e colocaram na escola, pois esta tem a tradição de prezar por uma educação de qualidade.

Na Escola II destaca-se que 59,83% dos alunos declararam que a renda bruta da família é de até R$1.000,00. Nesta escola a situação socioeconômica e cultural é baixa, e a comunidade é desorganizada, havendo grande movimentação migratória das famílias, pois está localizada numa região de risco, com grande desigualdade social e uma desestrutura familiar. Portanto, a população onde a escola está localizada é carente e necessita de atenção por parte das políticas públicas.

Renda bruta da família	nº de alunos	%	nº de alunos	%
Até R$ 540,00	8	7,41	8	28,05
De R$ 541,00 a R$ 1.000,00	24	22,22	12	31,78
De R$ 1.001,00 a R$ 1.500,00	8	7,41	7	18,42
De R$ 1.501,00 a R$ 2.000,00	11	10,19	1	2,63
De R$ 2.001,00 a R$ 3.000,00	11	10,19	3	7,89
De R$ 3.001,00 a R$ 4.000,00	8	7,41	1	2,63
De R$ 4.001,00 a R$ 5.000,00	4	3,70	1	2,63
Mais de R$ 5.000,00	9	8,33	1	3,45
Não responderam	25	23,15	4	10,53

Tabela 2. Renda bruta familiar dos alunos do 6º ano das Escolas I e II.

A partir do estudo observa-se que a maioria dos alunos da Escola II são moradores de bairros próximos a escola o que justifica o percentual de 63,16% dos alunos vão para a escola a pé, Tabela 3. Já na Escola I, por receber não apenas alunos dos bairros próximos à escola, mas de outros bairros, justifica os 61,11% que utilizam carro da família, van ou ônibus escolar e transporte público.

Tipo de Transporte escola	Escola I		Escola II	
	nº de alunos	%	nº de alunos	%
Van ou ônibus escolar	25	23,15	-	0,00
À pé	37	34,26	24	64,86
Carro	25	23,15	4	10,81
Motocicleta	1	0,93	1	2,70
Transporte coletivo	16	14,81	-	0,00
Bicicleta	3	2,78	8	21,62
Carona	1	0,93	-	0,00

Tabela 3. Tipo de transporte que os alunos do 6º ano vão para a escola, das Escolas I e II.

Conclusão

No desenvolvimento desse trabalho, iniciando-se com a definição do tema, produção do questionário, perpassando-se por todo o procedimento metodológico da pesquisa, como tabulação e interpretação de dados, verificou-se a eficiência na aprendizagem de conhecimentos estatísticos pelos discentes participantes do PIBID Matemática da UFTM, mesmo que estes ainda não tivessem visto essa disciplina na universidade.

Isso demonstra que ao estudar o perfil sócio, econômico e demográfico dos alunos das escolas participantes do programa, foi possível estabelecer-se um processo capaz de trazer a construção de conhecimentos sobre estatística.

Observamos a partir do desenvolvimento da atividade que a participação do trabalho feito em grupo aumentou o interesse pelo assunto abordado e a experiência possibilitou agregar valores que modificaram atitudes. O objetivo principal foi a mobilização para que o conhecimento tivesse significado dentro de uma situação vivenciada no dia-a-dia para contextualizar, e ser ampliado para outras situações.

Pode-se também trabalhar conteúdos estatísticos básicos como: (1) conceitos de amostra e população, pois se partiu da ideia de aplicar o instrumento de pesquisa a todos os alunos, mas conseguiu-se a aplicação a aqueles alunos que estavam presentes no momento em que os alunos foram às salas de aula e estes estavam presentes, ou não; (2) construção de tabelas para apresentação dos dados qualitativos e quantitativos como idade dos alunos (em anos), onde se pode desenvolver os conceitos de média, mediana e desvio-padrão; (3) utilização de planilha eletrônica para organizar os dados, trazendo a estes alunos momentos para poderem aprender a montar um banco de dados que pudesse facilitar a tabulação dos dados; (4) utilização de software estatístico para facilitar o tratamento de uma grande massa de dados; (5) elaboração de textos científicos onde pode-se vincular referencial teórico ao objetivo do trabalho, permitindo ainda que os alunos pudessem refletir sobre os dados coletados e não somente fazer uma apresentação simplesmente descritiva dos dados.

Além disso, evidencia-se que as atividades de organização de pesquisa de campo, coleta, tabulação de dados, interpretação e análise dos dados não foi tarefa fácil para estes alunos exigindo a retomada de conteúdos, um constante repensar dos resultados descritos e uma atitude questionadora do professor, refazendo perguntas objetivando despertar o espírito investigativo nos alunos.

Assim, acredita-se que com o ensino vinculado à pesquisa é possível se vislumbrar a possibilidade de se compreender a sala de aula e o espaço escolar em geral, como um local permeado pelas mais diversas dimensões culturais, bem como pelas representações e imaginários sociais.

Referências bibliograficas

Batanero, C. e Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. In J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp.125-163). Zaragoza: ICE.

Brasil (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: *Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental — Brasília: MEC/SEF.

Cazorla, I. M., e Santana, E. R. S. (2006). *Tratamento da informação para o ensino fundamental e médio*. Itabuna: Via Litterarum.

Decreto n.º 7.219, de 24 de junho de 2010 (2010). Dispõe sobre o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID e dá outras providências. Presidência da República, Brasília, Brasil, publicado no Diário Oficial da União de 25 jun. 2010.

Gonçalves, C. F. F. Matsuo, T., Strapassan, E., Lovato, J. P, e Saraiva, T. S. (1999). Uma metodologia de Ensino da Estatística Baseada em Pesquisa, Aplicada para a 5ª série do Ensino Fundamental. In *Atas da Conferência Internacional Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística — Desafios para o Século XXI*, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2012). *PNAD 2011:* crescimento da renda foi maior nas classes de rendimento mais baixo. Recuperado em 22 de dezembro de 2012 de http://www.ibge.gov.br/home/presidencia/noticias/noticia_visualiza. php? id_noticia=2222&id_pagina=1

Lopes, C. A. E. (1998). *A probabilidade e a Estatística no ensino fundamental:* uma análise curricular. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação da Universidade de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Lopes, C. A. E. (2003). O conhecimento matemático adquirido através dos projetos. In Lopes, C. E. *Matemática em projetos*: uma possibilidade (pp. 23-27), Campinas, São Paulo: Faculdade de Educação.

Loureiro, C., Oliveira, F., e Brunheira, L. (2000). *Ensino e Aprendizagem da Estatística*. Lisboa: GRAFIS.

Moore, D. S. (1997). *Statistics: Concepts and Controversies*. New York: Freeman.

Ponte, J. P. (1990). *Computador, um instrumento da educação*. Lisboa: Texto Editora.

FOMENTANDO EL PENSAMIENTO CRÍTICO DESDE EL AULA ESTADÍSTICA. UNA PROPUESTA DE AMBIENTES DE APRENDIZAJE

Claudia María Arias Arias, Martha Cecilia Clavijo Riveros, José Torres Duarte.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas Colombia
claudiarias_01@hotmail.com, ticayui@hotmail.com, jotorresd@udistrital.edu.co

Resumen. El presente documento muestra el proceso y algunos resultados que se han obtenido en el proyecto de investigación, bajo el enfoque de la Educación Matemática Crítica, titulado: "Ambientes de Aprendizaje para el fomento del Pensamiento Crítico. Un análisis de encuestas de opinión electoral". Éste se implementó en dos colegios públicos ubicados en la ciudad de Bogotá (Colombia), con el propósito de fomentar el pensamiento crítico en estudiantes de grado octavo y noveno, a partir de generar Ambientes de Aprendizaje empleando las encuestas pre electorales emitidas por los noticieros de la televisión colombiana.

De esta manera, a partir de la recolección y el análisis de la información, se encontró que una de las problemáticas presentes en el macro contexto de los estudiantes, puede ser llevada al aula para trabajar nociones de la estadística descriptiva, logrando con ello; no solo la construcción de herramientas conceptuales, sino también el fomento del pensamiento crítico en los estudiantes..

Palabras clave: pensamiento crítico, ambientes de aprendizaje, cultura mediática, educación estadística

Abstract. This document shows the process and some results that have been obtained in the research project, under the approach of Critical Mathematics Education, entitled "Learning Environments for the development of critical thinking. An analysis of electoral opinion polls. "This is implemented in two public schools located in the city of Bogota (Colombia), in order to foster critical thinking in students in eighth and ninth grade, from generating Learning Environments using pre election surveys issued by the news of Colombian television.

Thus, from the collection and analysis of information, which is based on macro issues within the context of students can bring to class notions of descriptive statistics, achieving not only the construction of tools conceptual, but also the promotion of critical thinking in them.

Key words: critical thinking. learning environments, media culture, education of statistics

Introducción

En el mundo actual debido al proceso de globalización, la sociedad se encuentra caracterizada por la disponibilidad de información (Batanero, 2002) gracias a las TICs (Tecnologías de la Información y la Comunicación), dicha información algunas veces evidencia problemáticas sociales y políticas de un determinado país; ésta en numerosas oportunidades, es presentada mediante gráficos estadísticos, pues estos son los más utilizados por los medios informativos (Batanero, 2002; Arteaga, 2011). Este es el caso de las encuestas de opinión, en las cuales se hace uso de otros objetos estadísticos; tales como, población, diagrama de barras, muestra, tipo de muestreo y margen de error.

Pero como indica Cox (1997)"una valoración pública de los principios generales en la interpretación de la evidencia, falta en muchos aspectos de los artículos en la prensa y programas de radio y televisión" (citado en Batanero, 2002, p.2), continua diciendo que "la información, a veces sensacionalista de los resultados de pequeños estudios, frecuentemente mal diseñados, es especialmente preocupante" (p.2), por lo cual, aunque la sociedad se encuentra en un momento en donde la información es de fácil acceso y está a la mano de cualquier persona, ésta no siempre es verídica, se presenta de manera errónea o es manipulada por factores políticos y/o económicos que tergiversan la información. Dicha situación afecta directamente a los ciudadanos que no se encuentran preparados para el análisis de la información, por ello, aceptan los datos, sin mostrar una actitud o disposición (ser inquisitivo, buscador de la verdad, sistemático, de mente abierta, etc.) que les permita interpretar, analizar, evaluar y realizar inferencias (habilidades cognitivas propias del pensamiento crítico) de lo que se les están mostrando a través de los mismos.

Ahora bien, como resalta Valero (2006) al reconocer que la escuela es un espacio de formación que puede dotar al ciudadano con habilidades para fomentar su pensamiento crítico y con ello, permitirle analizar la información que brindan los medios, se encuentra que lastimosamente la escuela se ha venido enfocando en el desarrollo netamente cognitivo olvidándose de la formación del ciudadano, pues separa el saber del contexto del estudiante; por ello es necesario que el aprendizaje deje de ser un proceso cuyo fin es poseer o almacenar conocimiento y pase a ser un proceso que permita actuar en el mundo.

En relación al reto de la educación antes descrito, los estadísticos y educadores se han preocupado porque la estadística y su enseñanza deje de ser "sólo una técnica para tratar los datos cuantitativos (…), y pase a ser una herramienta para la vida en sociedad, (…) en términos de capacidad de comprender la abstracción lógica que hace posible el estudio cuantitativo de los fenómenos colectivos" (Ottaviani, citado en Batanero,2002, p.2), en pocas palabras, la estadística debe fomentar disposiciones y habilidades cognitivas en los ciudadanos para que analicen y reflexionen en torno a problemáticas sociopolíticas del contexto, y más aún en una sociedad como la actual donde, por ejemplo, según Huergo y Fernández (1999), se generaliza la sensación de que lo que no existe en la televisión, no existe en la realidad; la imagen televisiva está ocupando el lugar de la realidad; por lo que la televisión permite acceder a la realidad mucho más que la escuela.

Justificación

Este proceso de investigación en torno a la enseñanza y aprendizaje de la Estadística se hace importante, puesto que, entrelaza tres variables que son emergentes en Educación Matemática y Estadística; tales como: Ambientes de Aprendizaje, Cultura Mediática y encuestas de opinión.

Con la primera (Ambientes de Aprendizaje) se propende por generar en el aula el constructo propuesto por Skovsmose (1999), "escenarios de investigación" bajo el enfoque sociopolítico de la Educación Matemática, en los cuales se hace énfasis en el desarrollo de competencias matemáticas desde un enfoque crítico teniendo en cuenta el contexto de los estudiantes y la naturaleza de la actividad que se plantea en la clase. La segunda, considerando que la sociedad se encuentra caracterizada por la disponibilidad de información, particularmente la emitida por los noticieros de la televisión colombiana y la posibilidad de hacer de ésta un objeto de análisis en el salón de clases, se fomentan competencias como lo plantea Landi (1992), entre ellas la de criticar el tan fluido y caótico mundo de imágenes y palabras en el que se vive actualmente. Es por esto que en cuanto a la tercera variable, teniendo en cuenta que en el actual contexto social de búsqueda y exigencia de calidad, la encuesta no esta exenta, pues, la credibilidad y significatividad de los datos que aporta la encuesta, en el análisis de la realidad social, está en concordancia al rigor que se haya puesto en el diseño, ejecución e interpretación de la información (Cea, 2005), lo que le implica al ciudadano llegar a inferencias basado en aspectos propios de la estadística descriptiva.

Metodología

La investigación se desarrolló bajo un enfoque cualitativo, pues buscaba describir algunos procesos que se dan en el interior del aula clase de estadística. Particularmente se trabajó con la investigación acción participativa ya que según Mora (2005) no puede ser otra en el campo de la Educación Matemática Crítica, pues es de esa manera como los actores se involucran en la transformación de su medio y de ellos mismos, y en donde la validez intersubjetiva, se construye en la argumentación y en las expresiones libres de los involucrados. En este orden de ideas, se tuvieron en cuenta cuatro fases, a saber: *problematización* donde se caracterizó y fundamentó la idea de investigación, además se evaluó la pertinencia de trabajar con estudiantes de básica secundaria, *elaboración de la propuesta de Ambientes de Aprendizaje,* que se realizó basada en una revisión teórica con respecto a Educación Matemática Crítica, Ambientes de Aprendizaje, Cultura Mediática, Pensamiento Crítico y aspectos estadísticos relacionados con las encuestas de opinión, ya que estos se constituyeron en las variables emergentes en Educación Matemática y Estadística (ver ilustración 1), en esta fase se propusieron siete Ambientes de Aprendizaje (AA) organizados en cuatro momentos. La fase de *implementación de los Ambientes de Aprendizaje y recolección de la información* se llevó al aula en dos instituciones públicas de Bogotá donde simultáneamente se hizo recolección de la información mediante los protocolos y las entrevistas, y finalmente la fase de *análisis y reflexión* donde a partir de los resultados se llegó a establecer conclusiones.

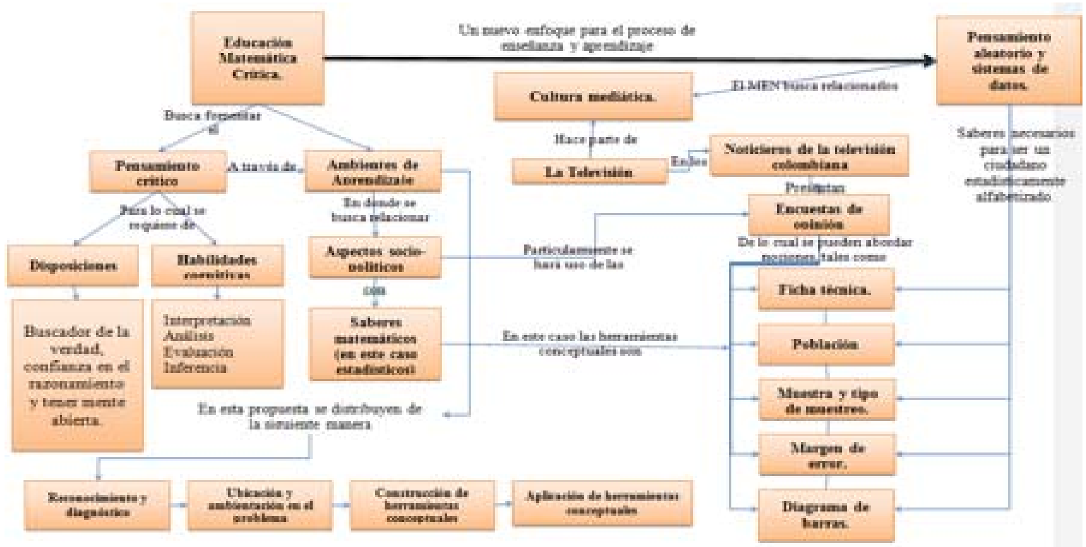


Figura 1: Mapa de los referentes teóricos

Estructura de la propuesta de Ambientes de Aprendizaje (AA)

Momento 1: Reconocimiento y diagnóstico

Esta se constituye por el *AA n°1 y AA n°2*. En el primero se realiza un reconocimiento, de las percepciones de los estudiantes hacia la problemática, y se busca motivar positivamente a los estudiantes hacia los demás AA. en el segundo, partiendo de situaciones relacionadas con la estadística, se busca aproximar a una caracterización de las habilidades del pensamiento crítico presentes en los estudiantes, y el manejo de nociones de la estadística, enmarcadas en una encuesta de opinión. En seguida se presentan apartes de la prueba diagnóstica:

Lee el siguiente fragmento de una noticia, publicada por Elespectador.com, y contesta:

- ¿En cuánto disminuyeron los accidentes entre junio de 2010 y junio de 2011?
- ¿En cuál mes y año se presentaron mayores incidentes?

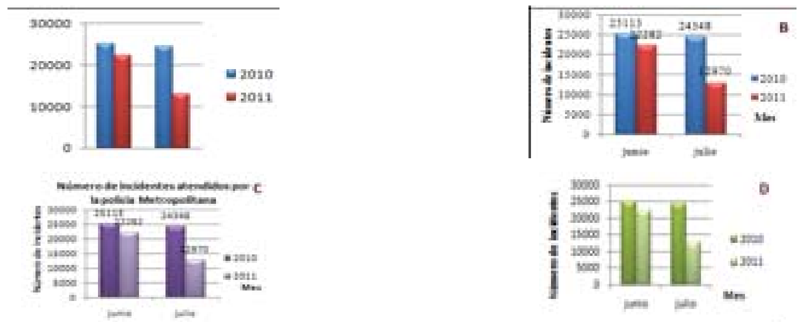
Bogotá |18 Agosto, 2011 - 11:07 am Venta de licor

<u>Distrito defiende a 'capa y espada' restricción a la venta de licor</u>

Con cifras de disminución de homicidios, riñas y accidentes de tránsito la Administración Distrital argumenta que la medida ha sido efectiva.

"…Barragán Beltrán demostró cómo a partir de la expedición del Decreto 263; que restringen la venta de licor en tiendas y espacio público después de las 11:00 pm, también se ha registrado una disminución en los incidentes atendidos por la Policía Metropolitana de Bogotá: mientras que en junio de 2010 se registraron 25.113 incidentes, en el mismo mes de 2011 estos bajaron a 22.282. El descenso se hace más notorio comparando el mes de julio de los dos años, al pasar de 24.348 casos a 12.970…"

2. Establece cuál de las siguientes gráficas es la más adecuada para representar la información de la anterior noticia. Solo puedes escoger una y debes argumentar en cada una el por qué es adecuada o no.



- ¿Consideras que es efectiva la restricción de la venta de licor después de las 11:00 pm? ¿por qué?
- ¿Crees que hay una mejor solución para que se disminuyan estos incidentes? ¿Cuál?

3. A continuación se presenta una tabla con datos de una encuesta, analízala y luego responde

la 12. Número y porcentaje de personas por tipo de progra

Tipo de Programa	Primera opción	
	N°	%
Noticieros	470	42,43
Telenovelas	174	15,67
Películas y series	115	10,36
Deportivos	48	4,32
Medio ambiente y vida animal	40	3,60
Programas culturales	39	3,51
Documentales ciencia	34	3,06
Otros	34	3,06
Espectáculos y entretenimiento	23	2,07
Medicina y salud	16	1,44
Actualidad política y debates	7	0,60
Clima y meteorología	3	0,30

Pregunta

¿Cuál puede ser el objetivo de ésta encuesta?

¿A qué personas debes encuestar?

¿Cómo recogerías tú esos datos? ¿Cuántas personas puedes encuestar de esa manera?

¿Cuántas personas debes encuestar?

Momento II: Ubicación y ambientación en el problema

Constituido por el *AA n°3* en el que se identifican aspectos estadísticos inmersos en las encuestas preelectorales y su influencia en aspectos socio-políticos. Por ello se plantean tareas de análisis y reflexión con respecto a la lectura “Encuestas Electorales” y un video que muestra una crítica hecha por un canal venezolano a las encuestas realizadas en Colombia que son emitidas en los noticieros. En lo que sigue se da a conocer una parte de la lectura y los interrogantes trabajados en torno a ella:

Encuestas electorales.

La encuesta es una técnica de investigación social que permite conocer las opiniones y actitudes de una colectividad por medio de un cuestionario que se aplica a un reducido grupo de sus integrantes al que se denomina «muestra». Esta técnica se usa con frecuencia en las *campañas electorales* con una serie de fines que desarrollamos más adelante.

Quienes no han estudiado estas disciplinas cuestionan la validez de esos datos argumentando que lo que dicen unos pocos cientos de personas no permite saber lo que opinan cientos de miles de ellas y elucubran acerca del tamaño de la muestra, su confiabilidad y otra serie de temas… (Duran, s.f., p.1)

Basado en el texto anterior, responde:

¿Por qué crees que algunos individuos cuestionan la validez de los datos recolectados por las encuestas? Según tu punto de vista ¿Cuáles son las influencias que tiene una encuesta electoral dentro de una campaña política?

- Teniendo en cuenta todo lo anterior ¿Qué aspectos de la estadística consideras que se deben tener en cuenta a la hora de realizar y/o analizar encuestas electorales?

Aquí se dan a conocer algunos interrogantes que se presentan con relación al video:

- ¿Consideras que los electores toman decisiones a partir de los resultados de las encuestas de preferencias electorales mostradas en la televisión? ¿por qué? ¿tú lo harías?
- ¿Qué aspectos deben presentar en la ficha técnica para las encuestas de opinión?

Momento III: Construcción de herramientas conceptuales

Constituido por tres AA, en los que se busca que el estudiante adquiera herramientas conceptuales de la estadística descriptiva, tales como, población, muestreo, muestra y diagrama de barras. En el *AA n°4*, se toman las encuestas de opinión emitidas en los noticieros de canales colombianos y se analizan sus fichas técnicas. Es así como se introduce la herramienta conceptual *población*, al determinar y caracterizar ésta en diversas situaciones, considerando la finalidad de la encuesta. En el *AA n°5,* se enfoca el trabajo sobre la herramienta conceptual diagrama de barras, mostrando a los estudiantes varios diagramas de barras de estas encuestas, que bajo lo propuesto por Friel, Curcio y Bright (2001, citados en Bruno, Espinel, González y Pinto, 2009), no poseen los componentes necesarios para la comprensión de la información allí representada. En la parte inferior se presentan los cuestionamientos para ello:

- ¿Qué tipo de gráficos estadísticos son presentados? ¿Qué características tienen estos gráficos? ¿Qué aspectos positivos y negativos evidencias en cada una de esas representaciones? ¿Cómo mejorarías estas representaciones?

Con el propósito que el estudiante formalice los aspectos carentes de estos gráficos, se les presenta el siguiente fragmento:

"… Los gráficos estadísticos se pueden considerar como representaciones gráficas en las que por medio de diferentes formas geométricas o bien, números, se muestran hechos numéricos o sus relaciones con el objetivo de comunicarlos o analizarlos. Así, los gráficos estadísticos utilizan características espaciales para representar cantidades.

Un gráfico estadístico está constituido por cuatro componentes (Friel, S., Curcio, F. y Bright, G., 2001):… Un marco, los especificadores, las etiquetas y el fondo …"

Y en el *AA n°6,* la actividad matemática está caracterizada por la reflexión en torno a la implicación que tiene la muestra y el tipo de muestreo en una encuesta de opinión. De esta manera, se desarrolla un debate a partir de la lectura de algunos fragmentos en los que se abordan dichas herramientas conceptuales.

Momento IV: Aplicación de las herramientas conceptuales

Esta última fase se encuentra conformada por el *AA n°7,* donde el estudiante puede identificar la utilidad de las herramientas estadísticas construidas anteriormente, al hacer uso de estas en una situación problema de su contexto. De esta forma la actividad matemática se ve enfocada en la construcción de un artículo que refleje una observación detallada de la encuesta de opinión emitida en un noticiero de la televisión colombiana, para tomar una postura y sustentar sus ideas empleando nociones estadísticas inmersas.

Conclusiones

El estado inicial de los estudiantes; revelado por la prueba diagnóstico, se describe en dos aspectos: el primero de estos relacionado con los conocimientos previos de las nociones estadísticas, donde quedó reflejado que los estudiantes presentan dificultades y errores en la elaboración de diagramas de barras según lo expuesto por Serrano (2009), pues: eligen una escala inadecuada para el objetivo pretendido; omiten las escalas en los ejes horizontal y/o vertical; no especifican el origen de coordenadas y no proporcionan divisiones en las escalas de los ejes. Así mismo, en cuanto a las nociones de población, muestra y tipo de muestreo, se evidenció que aunque los estudiantes tiene una idea implícita de lo que es una encuesta estos no reconocen aspectos estadísticos inmersos en esta.

Con relación al segundo aspecto que buscaba reconocer el nivel de desarrollo de pensamiento crítico de estos estudiantes, se logró destacar que se encuentran en los dos niveles más bajos de Matriz de valoración integral para asignar puntajes/calificaciones en pensamiento crítico (Facione & Nooren, s.f.) ya que ellos consistentemente hacen todo o casi todo lo siguiente: Propone interpretaciones tendenciosas de gráficas, preguntas o información, falla en la identificación o rápidamente descarta contra argumentos fuertes y relevantes, argumenta con razones irrelevantes o engañosas.

Luego, Se consolida una propuesta de siete Ambientes de Aprendizaje que parte de la problemática de las encuestas preelectorales, que permiten fomentar el pensamiento crítico en estudiantes de grado octavo, abordando temáticas de la estadística descriptiva, donde cabe destacar que al tomar situaciones relacionadas con las problemáticas del macro y del micro contexto de los estudiantes se hace más familiar el trabajo con dichas nociones.

a través de la implementación de la propuesta de AA, la documentación y la profundización en cada uno de los ejes temáticos que dirigieron esta investigación, se plantearon niveles más rigurosos, y a la vez más específicos, que configuran las categorías de análisis para la propuesta. En este documento solo se presentan los resultados referidos al desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes, es decir con respecto a las habilidades (interpretación, análisis, evaluación e inferencia) enfatizadas en las nociones estadísticas abordadas (encuesta de opinión, población, muestra, tipo de muestreo y diagrama de barras) y las disposiciones. De lo que se puede concluir que:

- Se evidenció en los estudiantes una forma diferente de observar la información dada por los noticieros de la televisión colombiana, ya que manifestaron la necesidad de estar alerta frente a lo que se recibe a través de dicho medio, esto se hizo evidente en las negociaciones de significados con los que se debe culminar cada AA pues es fundamental en este proceso de enseñanza y aprendizaje ya que se conforma en el aula una especie de debate donde se realizan preguntas específicas y dirigidas permite lograr un entendimiento en los estudiantes.
- Se generaron espacios en los que los estudiantes ponían en juego habilidades y disposiciones propias del pensamiento crítico, sin embargo se puede afirmar que aunque los estudiantes alcanzaron un muy buen nivel en cuanto a interpretación, análisis y evaluación, con respecto a la inferencia no se alcanzó a llegar al nivel más alto. Así mismo, con relación a las disposiciones se puede afirmar que se alcanzaron los objetivos, puesto que el perfil final de los estudiantes está caracterizado por: confiar en la razón, tener mente abierta y tendencia a la búsqueda de la verdad.

Referencias bibliográficas

Arteaga. P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de investigaciones Universidad de Granada. España.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. (2011). *Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales.* Recuperado el 15 de enero de 2011 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/76/Articulos_02.pdf

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. y Díaz, C. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *Revista iberoamericana de educación matemática. 23(2), 5-32.*

Batanero, C. (2002*). Los retos de la cultura estadística. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística.* Recuperado el 15 de marzo de 2011 de http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf

Cea, M. (2005). La Senda Tortuosa de la "Calidad" de la Encuesta. *Reis. Revista Española de Investigaciones Sociológicas 111, 75-103.*

Duran, J. (s.f.). *Encuestas Electorales*. Recuperado el 3 de abril de 2011 de http://www.iidh.ed.cr/comunidades/redelectoral/docs/red_diccionario/encuestas%20electorales.htm

Bruno, A., Espinel, M., González, M. y Pinto, J. (2009). Las Gráficas Estadísticas. En A. Bruno, M. Espinel, M. González y J. Pinto (Eds.), *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estocástica* (pp.184-202), España: Universidad de Granada.

Facione, P. y Noreen, C. (s.f.). *Matriz de valoración integral para asignar puntajes/calificaciones en pensamiento crítico*. Recuperado el 9 de octubre de 2012 de http://www.eduteka.org/pdfdir/RubricPensamientoCrítico.pdf

Facione, P. (2007). Pensamiento Crítico: *¿Qué es y por qué es importante?* Recuperado el 13 de octubre de 2012 de http://www.insightassessment.com

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education,32 (2), 124-158.*

Huergo, J. y Fernández, M. (1999). *Cultura Escolar, Cultura Mediática/ Intersecciones*. Universidad pedagógica nacional, Bogotá.

Landi, O. (1992). *Devórame otra vez*. Buenos Aires: Planeta.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Bogotá. Recuperado el 11 de septiembre de 2011 de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Mora, D. (2005). *Didáctica Crítica, Educación Crítica de las Matemáticas y Etnomatemática: Perspectivas para la Transformación de la Educación Matemática en América Latina*. La Paz: Campo Iris.

Sánchez, B. y Torres, J. (2009). *Educación Matemática Crítica: Un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los Ambientes de Aprendizaje*. Bogotá: ASOCOLME.

Serrano, L. (2009).*Tendencias actuales de la Investigación en Educación Estocástica.* Recuperado el 1 de octubre de 2011 de http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm

Skovsmose, O. (1999). Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica. Bogotá: Una empresa docente.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6 (1), 3–26.

Valero, P. (2006). *¿De carne y hueso?: la vida social y política de la competencia matemática*. Recuperado en diciembre de 2011 de www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-110766_archivo_pdf.pdf

LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS EN UNA MODALIDAD MIXTA

Marisol Radillo Enríquez, María Guadalupe Vera Soria, Lucía González Rendón, Irma Yolanda Paredes Águila
Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara México
marisol.radillo@red.cucei.udg.mx, lupitaverso@hotmail.com, lgrendon2@yahoo.com.mx, zona_escolar_20@hotmail.com

Resumen. Las reflexiones que se presentan se basan en nuestra experiencia con la modalidad mixta o b-learning en los cursos de Geometría Euclideana, Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo Avanzado en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara. Se reportan los hallazgos y debilidades encontrados en nuestra experiencia docente en esta modalidad, de las cuales surgen las bases para un proyecto de investigación. Con estas reflexiones se pretende concretar una propuesta de sistematización para la enseñanza de las matemáticas apoyada en el b-learning, para las diversas materias que se imparten en el CUCEI.

Palabras clave: b-learning, diseño instruccional, matemáticas

Abstract. The reflections that are presented are based on our experience with mixed mode or B-learning in the courses of Euclidean Geometry, Differential and Integral Calculus and Advanced Calculus at the University Center of Exact Sciences and Engineering (CUCEI) of the University of Guadalajara. We report achievement and deficiencies encountered in our teaching experience in this modality, from which start the basis for an investigation project. These reflections is intended to make a proposal of systemization for mathematics teaching based on the b-learning, for the various subjects that are taught in the CUCEI.

Key words: b-learning, instructional design, mathematics

Introducción

El desarrollo de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y la necesidad de las universidades públicas para ampliar su cobertura a pesar de las restricciones presupuestales, han sido factores decisivos en el desarrollo de la educación superior a distancia en México (Rama, 2008). No obstante, los recursos desarrollados para esta modalidad también son aprovechados en la educación presencial y dan lugar a una modalidad mixta denominada *b-learning*, que es un diseño docente en el que tecnologías de uso presencial (físico) y no presencial (virtual) se combinan con el fin de optimizar el proceso de aprendizaje (Alemañy, 2009). En esta modalidad se combinan las ventajas tecnológicas de la modalidad a distancia, con el quehacer diario de la educación presencial, lo cual representa una oportunidad para desarrollar situaciones de aprendizaje de matemáticas a nivel superior.

Soporte teórico-metodológico

El *b-learning*, *blended-learning*, o aprendizaje mezclado, es un modelo docente centrado en el aprendizaje, aunque el profesor puede, si lo desea, desempeñar un rol tradicional pero con apoyo de las tecnologías de información y comunicación (TIC) para desarrollar actividades dentro y fuera del aula, ya sea de manera sincrónica o asincrónica.

Los elementos fundamentales de *b-learning* son:

- ❖ Un modelo instruccional para abordar el objetivo o competencias deseadas.
- ❖ Una herramienta de *e-learning* que sea capaz de soportar el modelo instruccional
- ❖ El apoyo de profesionales para optimizar el modelo de aprendizaje

En nuestro caso se utiliza la plataforma Moodle, ya que está disponible en el CUCEI con un total de 200 cursos activos y 8025 alumnos registrados; de manera que la elección de la misma para el presente trabajo responde tanto a razones institucionales, como a las características técnicas que facilitan el trabajo a los usuarios no especialistas en informática. En este entorno de aprendizaje se dispone de diversos módulos de comunicación y de presentación de materiales así como diferentes tipos de actividades que permiten propiciar interacciones alumno-contenido, alumno-alumno, alumno-profesor que son fundamentales en los diseños instruccionales en la modalidad *b-learning*.

Nuestros cursos de matemáticas para la modalidad *b-learning* se diseñan de manera individual para cada materia de cada profesor. Se tiene un curso de Geometría Euclideana para dos grupos de 35 alumnos cada uno, con el mismo profesor; dos cursos de Cálculo Diferencial e integral, con diferente profesor, para atender a 3 grupos de estudiantes y un curso más de Cálculo Avanzado para cuatro grupos y un profesor.

Aunque cada tema de clase es desarrollado al interior del aula, el contenido teórico y diversas actividades interactivas y complementarias están disponibles en diversos formatos, de acuerdo al contenido matemático de que se trate. Por ejemplo, para las el tema de límite de una función, se dispone de un instructivo y un manual de prácticas para que el estudiante realice actividades de visualización matemática con apoyo de programas computacionales gratuitos, como el *Winplot o el Grahic Calculus*. De esta manera, durante el semestre cualquier estudiante puede acceder a estas y otras actividades y realizarlas por su cuenta, ya que no siempre es posible utilizar el laboratorio de cómputo durante la clase.

Cada una de nosotras da un toque personal a su curso, pero la estructura común a todos es la siguiente:

- ❖ Módulo de información general, que contiene el mensaje de bienvenida, el programa oficial del curso, una guía de estudio, la rúbrica de evaluación, y un cronograma de actividades.
- ❖ El resto del material está organizado por unidades temáticas y en cada bloque se incluyen los objetivos de la unidad, los contenidos teóricos necesarios, actividades de aprendizaje, actividades de evaluación y autoevaluación.

- El uso de recursos tales como los foros de discusión, chat, correo electrónico, si bien están disponibles en nuestros cursos, son poco utilizados por nuestros estudiante, ya que las sesiones presenciales son muy frecuentes.

Hallazgos

Se tiene registrado que los estudiantes de los cursos de Geometría Euclideana tienen una mayor participación en las actividades en línea, que los estudiantes de Cálculo. Una probable explicación sobre esta diferencia estriba en las tareas cognitivas que el estudiante debe realizar para resolver las actividades de cada materia. Mientras que la mayoría de los cuestionarios de Geometría constan de preguntas sobre teoremas y sus aplicaciones, redactados en lenguaje natural, los alumnos de Cálculo deben realizar un proceso de modelaje matemático para solucionar el problema, resolver en su cuaderno y después capturar la respuesta en simbología matemática.

En la figura 1 se muestran algunas preguntas de una tarea de la materia de Cálculo Diferencial, con preguntas de opción múltiple. La figura 2 contiene otras actividades de tarea para la misma materia, pero en este caso las preguntas son de respuesta corta. En ambos casos, el estudiante deberá resolver a lápiz y papel frente a la computadora, para después elegir o capturar la respuesta correcta. Por otra parte, se muestra parte de un examen de Geometría Euclideana en la figura 3, en el que cada pregunta será leída y contestada por medio de la computadora, lo cual es mucho más práctico para el estudiante.

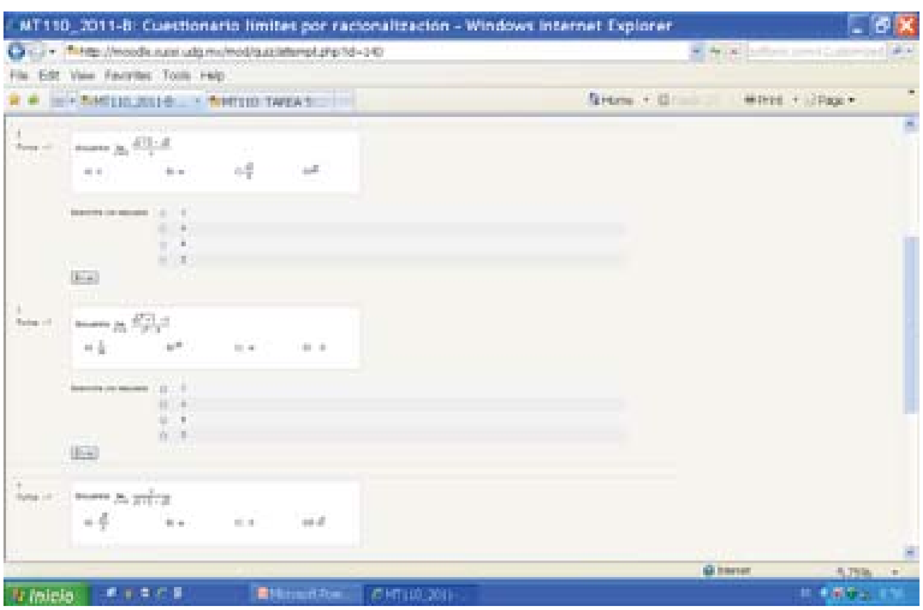


Figura 1. Cuestionario-tarea de la materia de Cálculo Diferencial e Integral, con preguntas de opción múltiple.

El tiempo requerido para contestar un problema de cálculo es mucho mayor que el que los estudiantes de geometría invierten en responder los cuestionarios orientados a propiciar el razonamiento deductivo y la aplicación de conocimientos. Aún así, los exámenes de geometría pueden incluir preguntas cuya respuesta será más sencilla de elaborar a lápiz y papel, que capturarla en línea.

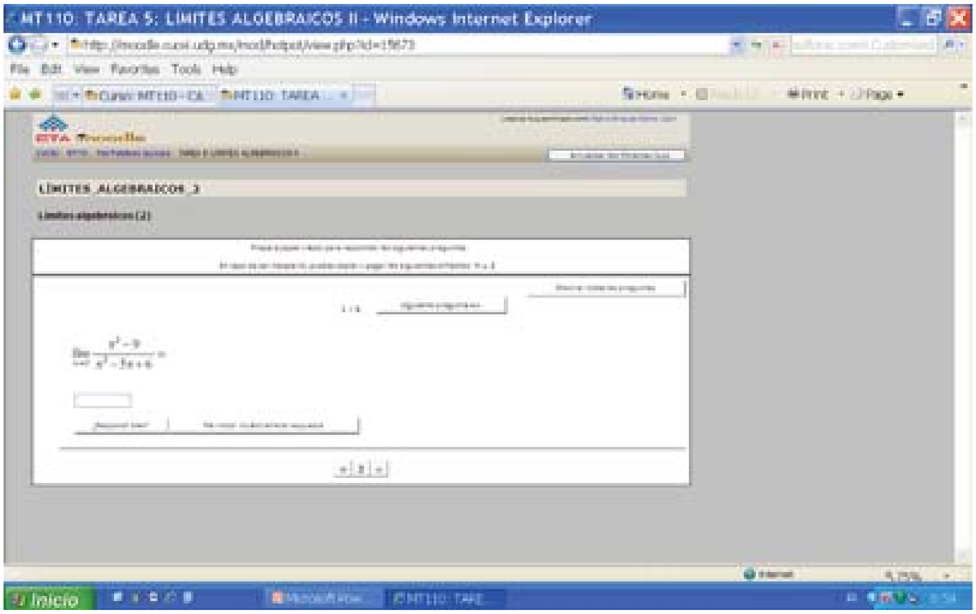


Figura 2. Cuestionario-tarea de la materia de Cálculo Diferencial e Integral, con preguntas de respuesta corta (numérica)

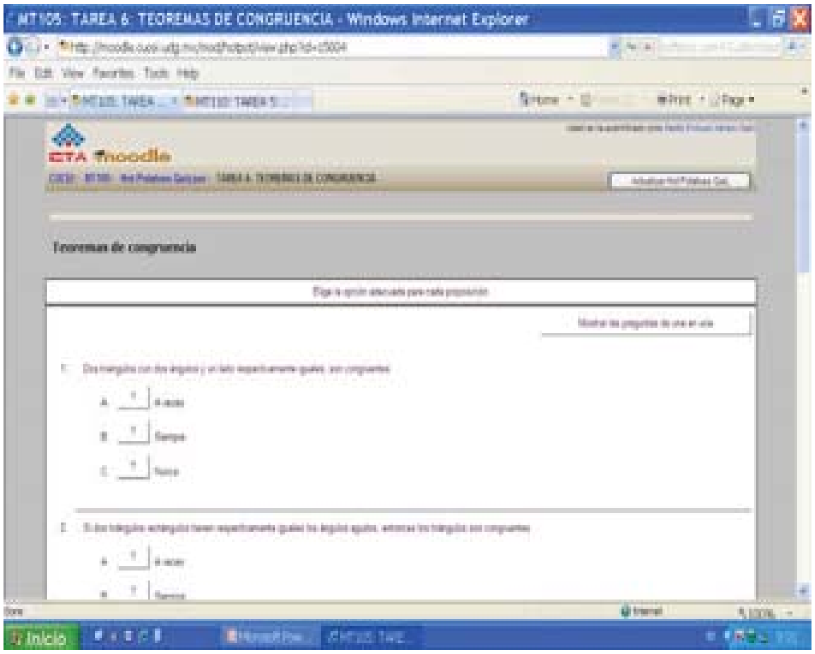


Figura 3. Examen parcial de Geometría Euclideana

Las actividades de demostración están limitadas por la necesidad de insertar símbolos, de manera que se diseñan actividades en que el estudiante relacione (figura 4) o columnas o de opción múltiple. Aún sí, se corre el riesgo de que la figura no aparezca en pantalla.

Figura 4. Actividad de demostración de teoremas, reactivo de relacionar columnas, para la materia de Geometría Euclideana

Con la reciente inclusión del editor de ecuaciones Wiris en nuestra plataforma Moodle, tenemos más opciones para diseñar actividades interactivas de aprendizaje en línea (figura 5), así como exámenes programados para seleccionar de manera aleatoria las preguntas de un bancos de reactivos previamente elaborado, con acceso al editor de ecuaciones y/o las herramientas de graficación, según el criterio del evaluador (figura 6).

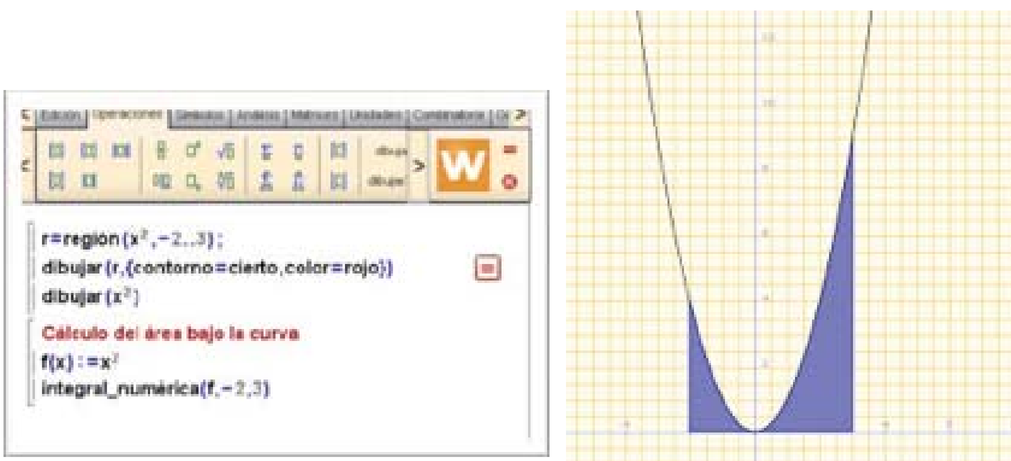


Figura 5. Actividad de aprendizaje para la materia de Cálculo Diferencial e Integral

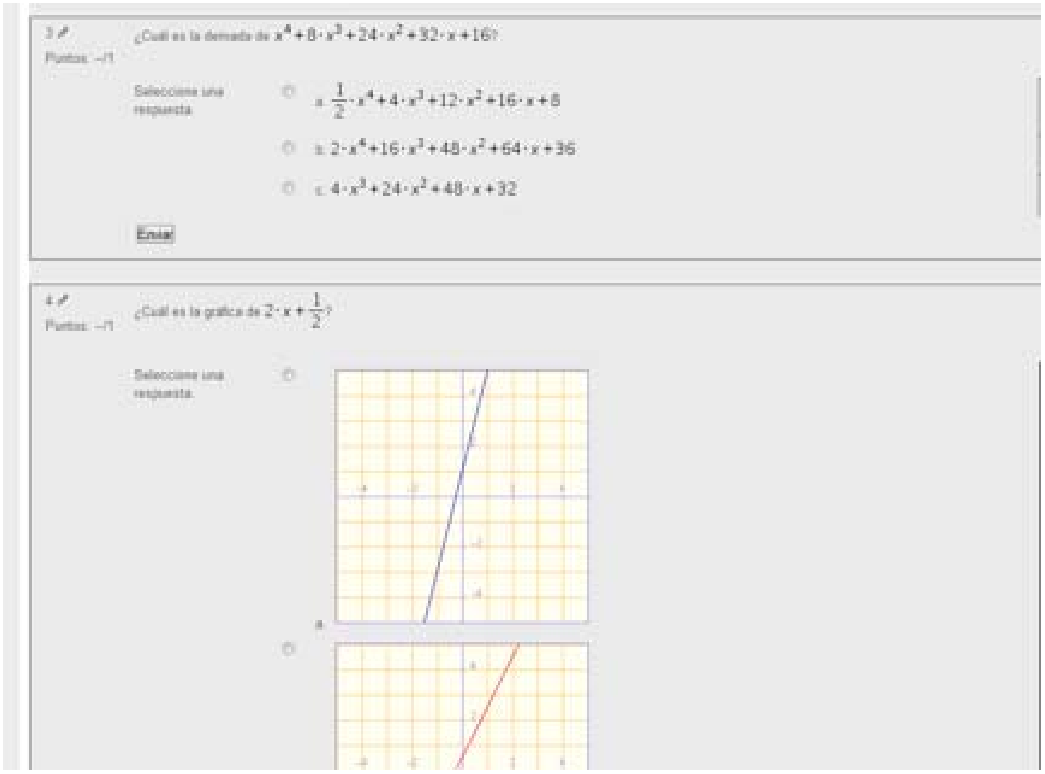


Figura 6. Examen elaborado con el editor WIRIS, con reactivos que cambian de manera aleatoria cada vez que un estudiante inicia la prueba

Las ventajas que hemos encontrado en nuestra experiencia *b-learning* son:

- Nuestros alumnos se familiarizan con la plataforma Moodle en diversos cursos, ya que se tiene el apoyo institucional para esta plataforma.
- La disponibilidad del material completo del curso en cualquier momento que el alumno lo requiera.
- La plataforma es compatible con muchos recursos que facilitan actividades de visualización matemática (enfoque teórico para actividades de aprendizaje)
- Se cuenta con varias opciones para diseñar actividades de evaluación que propicien el aprendizaje, mediante las opciones de retroalimentación y/o la evaluación ampliada. Al recibir de inmediato el resultado de la actividad de evaluación, el alumno se entera de cuáles son sus aciertos y errores y se puede propiciar la autoevaluación.
- La plataforma Moodle brinda herramientas que facilitan la evaluación formativa del curso, tales como el análisis de reactivos y reportes de las evaluaciones individuales y de grupo.

Algunos contratiempos que hemos tenido:

- La normatividad universitaria no prevé esta modalidad, aunque sí se recibe apoyo institucional para su implementación (PDI CUCEI).
- No todos los estudiantes tienen el perfil adecuado para el trabajo a distancia.
- Algunos de los "imprevistos" que reportan los estudiantes al resolver las actividades se deben más a su inexperiencia en el uso de las TIC, que a la plataforma Moodle :
- Hasta el semestre pasado, nuestra plataforma carecía de herramientas para insertar ecuaciones matemáticas, de manera que recurríamos a *LaTex* o a insertar imágenes. Esta es una dificultad extra para nuestros estudiantes y una limitación para cuestionarios de respuesta abierta.

Si bien las anteriores experiencias docentes no han seguido un protocolo de investigación científica, nos han motivado a diseñar un anteproyecto formal, para el curso de álgebra lineal. Actualmente se trabaja en el diseño de un curso de Álgebra Lineal incluirá diversos objetos para aprendizaje desde la perspectiva constructivista de Dubinsky (Kú,Trigueros y Oktac, 2008) denominada Marco de las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (APOE). Esta teoría parte de la premisa de que, para que una persona se apropie de un concepto matemático, es necesario que lo construya en su mente mediante un ciclo conformado por:

- Acciones, las cuales pueden ser transformaciones físicas o mentales que la persona efectúa sobre un objeto dado;
- Procesos, que son acciones repetidas e interiorizadas sobre el objeto de referencia;
- Objetos, que se refiere al nivel de construcción alcanzado cuando el estudiante logra pensar profundamente en dichas acciones y procesos (encapsulación), logrando en un momento dado, revertir los procesos hasta llegar a las acciones originales (reversibilidad) y reconstruir éstas para aplicarlas en la solución de otros problemas, y
- Esquemas, que es una colección coherente de procesos y objetos estructura.

Se considera que los recursos disponibles en el Moodle son adecuados para diseñar el curso completo desde la perspectiva de Dubinsky, aunque en los demás cursos no hemos establecido una corriente constructivista predominante.

Para el desarrollo del curso de Álgebra Lineal se planean tres fases generales para la sistematización del diseño: (1) Elaboración de los Objetos para Aprendizaje (OPA) para todas las unidades de aprendizaje;(2) Incorporación de los OPA al Moodle del CUCEI, y (3) Seguimiento, evaluación y mejoramiento del curso.

Consideraciones finales

Las experiencias docentes que hemos resumido han sido satisfactorias y continuaremos mejorando nuestros cursos, gracias a la reciente inclusión del editor de ecuaciones Wiris en nuestra plataforma Moodle.

El *b-learning* es una poderosa herramienta para los cursos de matemáticas, que permite diseñar actividades desde diversas teorías del aprendizaje. No obstante, el profesor debe tener conocimientos básicos de diseño instruccional y estar familiarizado con las TIC para que esta modalidad tenga éxito. Consideramos que la preparación del material en línea requiere que el profesor invierta tiempo y esfuerzo previo al inicio del curso, ya que cualquier improvisación es un riesgo innecesario. Se recomienda que siempre se haga una evaluación formativa tanto de los materiales como del curso completo y, al finalizar el ciclo escolar, se guarde una copia de respaldo del curso.

Para la sistematización de estos cursos con fines docentes se sugiere comenzar por elegir un enfoque teórico del aprendizaje que rija todo el contenido del curso, tal y como lo proponemos para Álgebra Lineal. El diseño de las actividades de aprendizaje y de evaluación deberán seguir un modelo instruccional definido que incluya la evaluación formativa de los materiales.

Una limitante para nuestro trabajo es la normatividad universitaria, ya que cualquier estudiante puede inconformarse ante el uso de las actividades on-line en los cursos presenciales. Por otra parte, es necesario recordar que no todos los individuos poseen las competencias de comunicación y gestión de autoaprendizaje necesarias; en consecuencia el profesor debe monitorear el trabajo en línea de sus alumnos y atender sus dudas en las sesiones presenciales.

Referencias bibliográficas

Alemañy, C. (2009). Blended learning y sus aplicaciones en entornos educativos. *Cuadernos de Educación y Desarrollo 1(2).* Consultado el 1 de junio de 2011 en http://www.eumed.net/rev/ced/02/cam3.htm

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática* 2 (20), 65-89.

Rama, C. (2008). Tipología de las tendencias de la virtualización de la Educación Superior en América Latina. *Revista Diálogo Educacional* 8 (24), 341-355. Consultado el 1 de junio de 2011 en http://www.claudiorama.name/node/114

ARQUIVOS PESSOAIS, ESCOLARES E INSTITUCIONAIS COMO FONTES DE PESQUISA HISTÓRICA

Aparecida Rodrigues Silva Duarte, Lucia Maria Aversa Villela
Universidade Bandeirante Anhanguera Brasil
Universidade Severino Sombra
aparecida.duarte6@gmail.com, luciavillela@globo.com

Resumo. A História da Educação Matemática vem se consolidando como um novo campo de investigação quer no Brasil ou no exterior. Neste estudo, sinaliza-se a importância de se tomar arquivos pessoais, escolares e institucionais como fontes de pesquisa histórica, em particular, para a pesquisa e produção de conhecimento sobre a Educação Matemática. Assim, este texto relata vivências acumuladas em dois grupos de pesquisa brasileiros que se dedicam a organizar, preservar e disseminar documentos relativos à Educação Matemática. Como resultado, pretende-se contribuir para a discussão da importância dos arquivos pessoais, escolares ou institucionais para a escrita da História da Educação Matemática..

Palavras chave: pesquisa histórica, fontes de pesquisa, educação matemática

Abstract. The History of Mathematics Education has been ratified as a new research area either in Brazil or abroad. This study indicates the importance of taking personal, school and institutional archives as a source of historical research, in particular for research and knowledge production about Mathematics Education. Thus, this paper reports the accumulated experiences of two Brazilian research groups which are dedicated to organize, preserve and disseminate documents relating to Mathematics Education. As a result, we intend to contribute to the discussion of the importance of personal, school or institutional archives for the writing of the Mathematics Education History.

Key words: historical research, research sources, mathematical education

Introdução

Em consulta ao Diretório de Grupos de Pesquisa do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), cujas principais atribuições são fomentar a pesquisa científica e tecnológica e incentivar a formação de pesquisadores brasileiros, foi possível realizar um levantamento de grupos de pesquisa que hoje explicitamente se dedicam a investigar a História da Educação Matemática no Brasil.

O primeiro a ser criado foi o grupo de pesquisa "História, Filosofia e Educação Matemática" (HIFEM) e surgiu em 1996. Encontra-se sob a liderança dos professores Maria Ângela Miorim e Antônio Miguel, ambos da Faculdade de Educação da Universidade de Campinas (FE-UNICAMP/Br).

Quatro anos após, em 2000, foi criado o "Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática" (GHEMAT), coordenado pelo professor Wagner Rodrigues Valente. Naquela ocasião, o grupo estava vinculado à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP/BR). Hoje em dia, esse grupo encontra-se subordinado à Universidade Federal de São Paulo

(UNIFESP/BR) e conta com a professora Neuza Bertoni Pinto Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR/Br) como segunda líder.

A terceira equipe foi cadastrada no Diretório de Grupos de Pesquisa do CNPq em 2002. Trata-se do “Grupo de Pesquisa História Oral e Educação Matemática” (GHOEM) e tem a liderança do professor Antonio Vicente Marafioti Garnica, da Universidade Estadual Paulista (UNESP – Baurú/ SP/Br).

Outros quatro grupos surgiram entre 2009 e 2011, o que sinaliza o aumento do fluxo de interesse na área. Em 2009, foi cadastrado o grupo de pesquisa “História na Educação Matemática” (LABHEM), sob a liderança do professor Bruno Alves Dassie, pesquisador da Faculdade de Educação da Universidade Federal Fluminense (FE- UFF/RJ/Br). No ano seguinte (2010) foram cadastradas duas equipes: o “Grupo de Pesquisa História - Matemática – Educação” (GHAME), coordenado pelo professor André Luís Mattedi Dias da Universidade Federal da Bahia (UFBA/Br) e o “Núcleo de Investigação sobre História e Perspectivas Atuais da Educação Matemática” (NIHPEMAT), tendo Ivanete Batista dos Santos da Universidade Federal do Sergipe (UFS/Br) como líder. Por último, em setembro de 2011, surgiu o “Laboratório de Pesquisa em História da Educação Matemática” (LaPHEM), sob liderança da professora Lucia Maria Aversa Villela da Universidade Severino Sombra (USS/RJ/Br).

Dentre esses grupos, para este artigo, destacamos os trabalhos desenvolvidos pelo GHEMAT e o LaPHEM, no que tange à organização, sistematização e normatização de acervos documentais, de modo que possam servir como fonte de conhecimento para investigações no âmbito da história da educação, em especial, a história da educação matemática. A escolha deve-se ao fato de que as autoras deste texto trabalharam na organização de arquivos pertencentes aos referidos grupos, estando, portanto, mais familiarizadas com os usos e a metodologia adotados por esses grupos. Por meio dessas experiências, temos como objetivo encorajar pesquisadores a investir esforços em pesquisas relacionadas com a produção em História da Educação Matemática.

Os participantes desses dois grupos creem que o lugar do historiador em educação matemática é o do historiador em educação. Para nós, esse é o primeiro passo para quem deseja fazer incursões na área. Simultaneamente, há que se ter clareza do porque se produzem pesquisas nesse campo: a que e a quem interessa pensar a historiografia do ensino e da aprendizagem em matemática? Para auxiliar na articulação de tais respostas, vejamos o que consta do *site* do GHEMAT sobre o que se busca nessas pesquisas:

> Por que hoje colocamos os problemas sobre o ensino de matemática do modo como colocamos? Por que pensamos em reformas sobre esse ensino do modo

> como são propostas? Por que ensinamos o que ensinamos em Matemática? Por que determinados saberes matemáticos são válidos para o ensino em detrimento de outros? Essas são questões do presente, naturalizadas, não-problematizadas, que a prática da história da educação matemática tem a tarefa de desnaturaliza-las (GHEMAT, 2012, s/p.).

As respostas nos levam a dimensionar a importância dos arquivos, sejam eles pessoais, escolares ou institucionais. Devem, pois, ser amplamente divulgados e estarem disponíveis para utilização pelos profissionais ligados ao campo da Educação Matemática.

As investigações que empregam a História Cultural como opção teórico-metodológica consideram os arquivos escolares, pessoais e institucionais como importante material para a análise do trajeto da Educação Matemática. O historiador deve levar em conta os materiais que se encontram nas instituições, pois essas fontes, como objeto de análise e embasamento de suas práticas, possibilitarão a redação do documento histórico (Valente, 2003).

Nesse sentido, consideram-se os dizeres de Certeau, para quem "[...] em história, tudo começa com o gesto de separar, de reunir, de transformar em 'documentos' certos objetos distribuídos de outra maneira" (Certeau, 1982, p. 81). A partir desses registros é necessário efetuar um trabalho que atribua sentidos ao passado e ao presente, transformando esses materiais em documentos.

A História Cultural faz uma ampliação no entendimento do que vem a ser documento histórico, defendendo uma história baseada em escritos de todas as formas, sejam eles textuais, orais, iconográficos etc. Assim, para os historiadores, os arquivos são lugares que permitem a realização de inúmeras pesquisas, de tal forma que a preservação da documentação escolar assume importância vital para os historiadores da Educação Matemática.

Os grupos de pesquisa GHEMAT e LaPHEM

Grupos de pesquisa em Educação Matemática têm se esforçado para organizar e colocar à disposição da comunidade acadêmica acervos documentais de natureza diversa com intenção de viabilizar a pesquisa histórica nessa área. O "Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática" (GHEMAT) e o "Laboratório de Pesquisa em História da Educação Matemática" (LaPHEM) são tomados como exemplos por tornarem públicos seus acervos. Ambos dedicam-se à investigação da História da Educação Matemática no Brasil, empregando como metodologia a pesquisa historiográfica orientada pela História Cultural, considerando, dessa forma, a produção escolar (livros didáticos, relatórios, provas, exames, cadernos de alunos e professores, legislações e programas veiculados, etc.) como material importante para a análise do trajeto da educação científico-matemática.

O GHEMAT, desde sua inauguração em 2000, vem crescendo muito em número de participantes e produção. Conta atualmente com pesquisadores de diversos estados e universidades do país, além de alunos de pós-doutorado, doutorado, mestrado e iniciação científica. Empenha-se no desenvolvimento coletivo de projetos de pesquisas sobre a educação matemática nos diversos níveis de escolaridade, em que são privilegiados, dentre outros, a história do ensino da matemática, dos conteúdos, dos livros didáticos, da disciplina de matemática e da formação de professores. Em seu *site* é possível verificar o rol de pesquisas concluídas e em desenvolvimento.

O centro de documentação do GHEMAT, localizado na cidade de Osasco/SP, disponibiliza aos pesquisadores os seguintes arquivos pessoais:

APSPN Arquivo Pessoal Scipione Di Pierro Netto. Esse acervo, doado por suas filhas, contém documentos relativos à vida profissional do professor de matemática Scipione, autor de consagrados livros didáticos e participante do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM). A organização dessa massa documental foi financiada pelo CNPq, por meio do projeto "A Matemática do colégio em tempos do Movimento da Matemática Moderna" (2005);

APUA Arquivo Pessoal Ubiratan D'Ambrosio, doado pelo próprio Professor D'Ambrosio**.** O material é constituído de cerca de 500 pastas, onde constam inúmeros documentos de sua participação em conferências, colóquios, simpósios e congressos científicos, dentre outros. A organização desse acervo culminou com a elaboração de um Inventário Sumário, o qual se constituiu em um dos produtos do projeto "Estudos sobre história da educação matemática no Brasil, 1950-2000" financiado pelo CNPq (2003);

APER Arquivo Pessoal Euclides Roxo. Esse arquivo, doado pelo filho do professor Roxo reúne cerca de 700 documentos, a maioria deles da época em que o titular foi diretor do Colégio Pedro II e assessor dos ministros Francisco Campos e Gustavo Capanema. Um dos produtos gerados pela organização desse acervo foi a obra "Arquivo Pessoal Euclides Roxo - Inventário Sumario", um guia ao usuário do APER, publicada pela revista "Educação Matemática Pesquisa" em 2002;

APOS Arquivo Pessoal Oswaldo Sangiorgi. Reune cerca de 1600 pastas do professor Sangiorgi. Foi doado por suas filhas. Por meio desse acervo pode-se investigar em maior profundidade a segunda metade do século XX da educação matemática brasileira. O Inventário Sumário do APOS, encontra-se publicado como anexo do livro "Osvaldo Sangiorgi – um professor moderno" (2008), o qual analisa a trajetória desse professor, uma das principais referências do Movimento da Matemática Moderna no Brasil;

APLBS Arquivo Pessoal Lucília Bechara Sanchez. Doado pela própria titular, encontra-se em fase de catalogação. Além dos arquivos pessoais, o centro de documentação também oferece aos pesquisadores a possibilidade de consultar livros didáticos de matemática, cadernos de alunos utilizados em outros tempos escolares, provas, exames e outros documentos de arquivos escolares.

O método utilizado para a conservação dos documentos que se encontram nos arquivos do GHEMAT obedece às seguintes etapas. Primeiramente, os documentos passam por uma higienização, classificação e ordenação, quando são retirados quaisquer materiais metálicos que possam danificar os papéis, tais como grampos, clipes, espirais etc. Em seguida, os documentos são protegidos com papéis especiais de potencial hidrogeniônico (pH) neutro, acondicionados em caixas de papelão, próprias para abrigar esse tipo de documentação, uma vez que não contêm grampos metálicos e são confeccionadas em papelão especial, que propiciam a sua conservação. Posteriormente, essas caixas são etiquetadas e armazenadas em ambiente adequadamente climatizado. Após o término de todo esse processo, o acervo é disponibilizado ao público.

Além dos arquivos pessoais, o GHEMAT conta com grande quantidade de livros didáticos de matemática. Possui cadernos de alunos utilizados em outros tempos escolares, provas, exames, CDs e DVDs que também são disponibilizados em seu centro de documentação.

Quanto ao recém-criado LaPHEM (setembro de 2011), pode-se considerar que procura seguir os passos do GHEMAT, até porque o Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente, um dos coordenadores do GHEMAT, atua como pesquisador colaborador do LaPHEM e foi quem orientou o doutorado da atual coordenadora deste grupo. Essa equipe busca desenvolver prioritariamente pesquisas sobre a História da Educação Matemática que se busquem vestígios históricos passíveis de serem encontrados no Estado do Rio de Janeiro/Br. É possível acompanhar a produção do grupo em sua *homepage*.

O LaPHEM, enquanto espaço físico, localiza-se na cidade de Vassouras, que é uma área histórica ligada ao ciclo do café, localizada no vale do Rio Paraíba do Sul, na região centro-sul do Estado do Rio de Janeiro. Esse município teve grande importância econômica para o Brasil a partir dos anos vinte do século XIX, chegando a ocupar o lugar de maior exportador mundial de café. Petrucelli (1994) afirma que, em 1870, Vassouras foi responsável por 66% do comércio mundial de café.

A principal temática abordada pelo LaPHEM foca em primeira instância acervos existentes no entorno do Município de Vassouras. Dando ênfase a dados históricos do Arquivo Público da Secretaria Municipal de Educação de Vassouras (APSMEV), que se encontra sob a guarda do Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional (IPHAN), seção Vassouras, está sendo desenvolvido o projeto *A Matemática do Ensino Primário em Vassouras, RJ: analisando um século de provas de alunos (1869-1969)*, que se desdobra em trabalhos de pré-iniciação científica (alunos de ensino médio), iniciação científica (licenciandos em Matemática) e de mestrado (Mestrado Profissional em Educação Matemática).

O acervo do APSMEV e permite encontrar traços da cultura escolar de um período em que os achados são raros: há exames de seleção aplicados a candidatos a professor interino que se estabeleceriam em escolas das fazendas do século XIX; relatórios de suas ações, inclusive acompanhados de pareceres dos avaliadores que para lá se deslocavam em épocas de exames dos alunos; pedidos de materiais à Câmara Municipal; pautas de frequência; recibos de prestação de serviços por parte desses professores e referentes a aluguéis de casas onde funcionavam essas escolas (caso não houvesse na região um benfeitor que cedesse um espaço em sua propriedade) e inventários sobre os bens de tais estabelecimentos.

É necessário alertar aos novos historiadores das disciplinas escolares que descobrir vestígios de culturas escolares é tarefa difícil e que, mesmo quando se encontra um grande volume de documentos, como é o caso do acervo do APSMEV, isto não significa que o restante do trabalho de cruzamento com fontes de outras naturezas seja tarefa sem percalços. A esse respeito, Julia indaga: "a história das práticas culturais é, com efeito, a mais difícil de se reconstruir porque ela não deixa traço: o que é evidente num dado momento tem necessidade de ser dito ou escrito?" (2001, p.15).

Infelizmente, às vezes, ocorrem imprevistos como os que os componentes do LaPHEM estão enfrentando desde abril de 2011 até o presente momento (fevereiro de 2013). Por determinação da gerência local do IPHAN, o APSMEV encontra-se fechado aos pesquisadores externos, de modo que, das caixas de documentos que compõem esse arquivo público, ainda não foi possível consultar o período de 1906 a 1950. Além disso, não há como rever alguns dos documentos anteriormente consultados.

Apesar desses reveses, a equipe desse laboratório de pesquisa tem caminhado em outras frentes. Aos alunos de ensino médio que se encontram na pré-iniciação científica cabe a digitalização de obras raras ligadas ao ensino da Matemática no Brasil, tais como "Tratado de

Arithmética”, de autoria de João Antonio Coqueiro, datado de 1860; bem como a elaboração de um folheto que localiza o autor e a obra. As pesquisas em nível de iniciação científica, que são realizadas por licenciandos em Matemática, normalmente voltam-se a subtemas que compõem o cenário temporal do macroprojeto (de 1869 a 1969), embora surjam, às vezes, outras preferências, como é o exemplo de uma estudante que pesquisa como a Geometria Analítica foi abordada nos exemplares da Revista Contacto, publicados entre 1976 e 1983 pela Fundação CESGRANRIO e destinadas à formação continuada de professores. As pesquisas dos mestrandos abordam enfoques mais consistentes sobre os subperíodos associados aos cem anos que cobrem a macropesquisa.

Há outros trabalhos em nível de mestrado que veem sendo realizados pelo grupo e que também têm outros olhares. Um deles, por exemplo, impulsionou a organização do Arquivo Pessoal Estela Kaufman (APEKF), que atualmente conta com cinquenta caixas e cerca de 2800 documentos catalogados, e ainda está em fase de implementação. Estela Fainguelernt, que é considerada professora emérita da Instituição a que o grupo citado está cadastrado, aos 79 anos, continua atuando no magistério e produzindo livros.

Cabe ainda destacar que as pesquisas do LaPHEM produzidas no curso de mestrado devem se enquadrar às exigências de um mestrado profissional e, portanto, envolvem também o estágio supervisionado e a elaboração de um produto a ser diretamente aplicado em salas de aula ou em formações continuadas de professores. Isto vem levando o grupo a ousar, buscando caminhos, uma vez que as experiências anteriores ligadas a esta linha de pesquisa estavam ligadas a mestrados acadêmicos e que, portanto, não necessitavam de cumprir tal exigência. Se, a princípio, esse requisito causou certo estranhamento nos integrantes do grupo, aos poucos proporcionou a descoberta de novas alternativas, novas maneiras de fazer, o que permitiu ao grupo propor ao professorado práticas pedagógicas enriquecedoras utilizando-se dos documentos pertencentes ao acervo e verificar o quanto o diálogo com o passado é importante e pode ser útil.

Considerações finais

O presente artigo consistiu em elaborar um breve relato sobre alguns acervos documentais, notadamente aqueles destinados a oferecerem subsídios para investigações no âmbito da história da educação matemática. Buscou-se, desse modo, divulgar e esclarecer sobre a importância da utilização e manutenção desses acervos. Cabe lembrar que a utilização de arquivos, sejam eles pessoais, escolares ou institucionais, para a elaboração de pesquisas, já é uma prática dos historiadores.

Como se vê, em nível oficial, são relativamente novos e poucos os grupos de pesquisa que tomam para si a incumbência de desenvolver pesquisas na linha de História da Educação Matemática.

Procurou-se apontar entusiasmos e dificuldades que são encontrados por dois dos grupos brasileiros que se envolvem com tais pesquisas no Brasil. Espera-se, assim, que a divulgação dos referidos acervos e das produções com eles relacionadas possam contribuir, de forma ampla, para o aprofundamento das pesquisas em História da Educação Matemática brasileira. É necessário que se estreitem as relações entre as equipes existentes e que seja estimulada a criação de novos outros grupos voltados para esse campo do saber.

Referências bibliográficas

Brasil. *Diretório do Grupo de Pesquisa do CNPQ*. Acesso em 20 de agosto de 2012 de http://dgp.cnpq.br/buscaoperacional/.

Certeau, M. de (1982). *A escrita da história*. Rio de Janeiro: Universitária.

Coqueiro, J. A. (1860). *Tratado de Arithmetica*. Paris: Rey e Belhatte.

Ghame. *Grupo de Pesquisa História-Matemática-Educação*. Acesso em 20 de agosto de 2012 de http://dgp.cnpq.br/buscaoperacional/detalhegrupo.jsp?grupo=0291708V 2COX4E.

Ghemat. *Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil*. Acesso em 20 de agosto de 2012 de http://www.unifesp.br/centros/ghemat/index.htm.

Ghoem. *Grupo de Pesquisa História Oral* e *Educação Matemática.* Acesso em 20 de agosto de 2012 de http://www.ghoem.com/grupo.php.

Hifem. *Grupo de Pesquisa: História, Filosofia* e *Educação Matemática.* Acesso em 20 de agosto de 2012 de http://www.fe.unicamp.br/hifem/index.html.

Julia, D. (2001). *A cultura escolar como objeto histórico*. Acesso em 10 de setembro de 2011 de http://www.sbhe.org.br/novo/rbhe/RBHE1.pdf.

Labhem. *Grupo de Pesquisa História na Educação Matemática.* Acesso em 20 de agosto de 2012 de http://www.uff.br/hedumat.

Laphem. *Laboratório de Pesquisa em História da Educação Matemática.* Acesso em 20 de agosto de 2012 de http://www.laphem.com.br.

Nihpemat. *Núcleo de Investigação sobre História* e *Perspectivas Atuais da Educação Matemática*. Acesso em 20 de agosto de 2012 de http://dgp.cnpq.br/buscaoperacional/detalhegrupo.jsp?grupo=00701015EMVPY5.

Petrucelli, J. L. (1994). Café, escravidão e meio ambiente: o declínio de Vassouras na virada do século XIX. *Estudos Sociedade* e *Agricultura 3*, 79-81.

Valente, W. R. (2002). *Arquivo pessoal Euclides Roxo: inventário sumário.* Educação Matemática e Pesquisa. São Paulo: PUCSP.

Valente, W. R. (2003). *Estudos sobre história da educação matemática no Brasil, 1950-2000.* CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico/ PUCSP.

Valente, W. R. (2005). *A matemática do colégio em tempos do movimento da matemática moderna.* CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico/ PUCSP.

Valente, W. R. (2008). *Osvaldo Sangiorgi – um professor moderno.* São Paulo: Annablume.

Villela, L.M.A. (2010). *Arquivo pessoal Estela Kaufman*. Universidade Estadual Severino Sombra. Vassouras: UESS.

Villela, L.M.A. (2011). *A Matemática do Ensino Primário em Vassouras, RJ: analisando um século de provas de alunos (1869-1969).* Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro.

PROCESO DE ADQUISICIÓN DEL CONCEPTO DE SUCESIÓN EN ALUMNOS DE LICENCIATURA

Elvira Borjón Robles, Otilio B. Mederos Anoceto
Universidad Autónoma de Guerrero México
Universidad Autónoma de Coahuila
Universidad Autónoma de Zacatecas
eborjon@mate.reduaz.mx, omederosa@gmail.com

Resumen. Desde la psicología educativa, Beltrán (1998) se analizan las técnicas y estrategias de aprendizaje que corresponden al subproceso de adquisición del proceso complejo del aprendizaje, proponiendo técnicas específicas de la matemática educativa, que promueven estrategias de aprendizaje y que impactan en el subproceso de comprensión. Se incluyen diferentes definiciones de estrategia de aprendizaje con la finalidad de justificar la elección que hacemos. El objeto de estudio del presente trabajo es el concepto de sucesión. Se diseña, aplica y analiza una hoja de trabajo que se pone en escena con alumnos de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas poniendo en práctica la técnica de representaciones y el aprendizaje activo, así mismo se propone una hoja de orientaciones que guía al docente que ponga en práctica nuestra propuesta. De todo esto se espera que el alumno tenga un aprendizaje significativo del concepto de sucesión.

Palabras clave: sucesión, técnicas de aprendizaje, estrategias de aprendizaje

Abstract. From educational psychology, Beltran (1998) discusses the techniques and learning strategies that correspond to the thread of the complex process of acquisition of learning, proposing specific techniques of mathematics education, promoting and learning strategies that impact on the thread understanding. They include different definitions of learning strategy in order to justify the choice we make. The object of study of this work is the concept of succession. It designs, implements and analyzes a worksheet that is staged with students of first semester of Bachelor of Mathematics implemented technique representations and active learning, also proposes a guidance sheet guides the teacher to put implement our proposal. From all this it is expected that the student has a significant learning of the succession concept.

Key words: sequences, learning techniques, learning strategies

Introducción

El presente trabajo lo motiva la investigación que se esta realizando en el doctorado en ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero, México, se han publicado diversos trabajos donde se ponen en juego distintos conceptos, por ejemplo, en Borjón y Mederos (2011) se plantea el concepto como una cuádrupla (*C, E, R,S*) donde por *C* entendemos el contenido, por *E* la extensión, por *R* las representaciones y por *S* el significado del concepto. Se trabaja con las representaciones de los conceptos subordinados al concepto de sucesión: sucesión acoda inferiormente, sucesión acotada superiormente y los conceptos contrarios a estos. En el presente trabajo se da la definición de aprendizaje que mas consenso ha recibido según Beltrán (1998) así como la forma de trabajar el contenido escolar. Se plantea abordar el aprendizaje significativo a través de estrategias de aprendizaje, nos concentramos en las estrategias de aprendizaje y ofrecemos una listado de las diversas definiciones resaltando el interés nuestro por adoptar el esquema de Beltrán (1998), se diseña una hoja de trabajo con sus orientaciones en el que se aborda el concepto de sucesión y los elementos que lo componen a través de sus representaciones geométricas.

Marco teórico

Por aprendizaje se entiende "un cambio más o menos permanente de conducta que se produce como resultado de la práctica" (Beltrán, (1998)) las formas de abordar el aprendizaje escolar según (Mayer (1992), citado en Beltrán 1998, p. 16) se hace de tres maneras, a saber 1. A través de respuestas, o enfoque conductista. 2. Como adquisición de conocimiento y 3. Como construcción de significado. En el primer caso el papel destacado dentro del proceso de aprendizaje lo desempeñan los procedimientos e instrucciones, que afectan directamente a la ejecución del estudiante a quien se le reserva el poco lúcido papel de recipiente en el que se almacenan los conocimientos previamente programados por una cuidadosa y uniformada planificación instruccional. En el segundo caso, el estudiante es más cognitivo, adquiere conocimientos, información, y el profesor llega a ser un transmisor de conocimientos. El foco de la instrucción es la información. El profesor lo que se pregunta es ¿qué puedo hacer para que la información especificada en el currículo esté en la memoria de esta alumno?, y en el aprendizaje como construcción de significado, el aprendizaje resulta eminentemente activo e implica una asimilación orgánica desde dentro. El estudiante no se limita a adquirir conocimiento, sino que lo construye usando la experiencia previa para comprender y moldear el nuevo aprendizaje. Consiguientemente, el profesor, en lugar de suministrar conocimientos, participa en el proceso de construir conocimiento junto con el estudiante, se trata de un conocimiento construido y compartido. Por aprendizaje significativo entenderemos el que se refiere al tipo de aprendizaje en que un estudiante relaciona la información nueva con la que ya posee, reajustando y reconstruyendo ambas informaciones. Para que se ponga en marcha el aprendizaje significativo se requiere disposición del sujeto a aprender significativamente y material de aprendizaje potencialmente significativo. Para lograr el aprendizaje significativo del contenido escolar se ponen en marcha estrategias de enseñanza y estrategias de aprendizaje (Díaz y Hernández, 1999), en este trabajo centramos la atención en las estrategias de aprendizaje. En ambos casos se utiliza el término estrategia, por considerar que el profesor o el alumno, según el caso, deberán emplearlas como procedimientos flexibles y adaptativos (nunca como algoritmos rígidos) a distintas circunstancias de enseñanza. Además para lograr el aprendizaje significativo se requiere contar con disposición del sujeto a aprender significativamente y material de aprendizaje potencialmente significativo.

> El aprendizaje es un proceso socialmente mediado, es decir el estudiante, para aprender significativamente, debe establecer conexiones entre el conocimiento

nuevo y los ya existentes en su estructura mental. Estas conexiones requieren una actividad mental, actividad que se ve facilitada por la mediación social (el "input" de los profesores, adultos e iguales) que empuja a los estudiantes más allá de lo que pueden hacer solos, pero no tanto como para ir más allá de su comprensión. Es en esta zona donde se construye el aprendizaje, una interacción entre lo que ya se conoce y las interpretaciones de los otros. (Beltrán, 1998, p.33).

Nos encontramos pues ante un proceso de aprendizaje significativo mismo que se contrapone al aprendizaje tradicional es decir él de los contenidos.

Por lo anterior las estrategias de aprendizaje serán el foco de nuestra atención y consideramos los objetivos de las mismas para dos autores, según (Dansereau, 1985; Weinstein y Mayer, 1983; citados en Díaz y Hernández, 1999) los objetivos particulares de cualquier estrategia de aprendizaje consisten en afectar la forma en que se selecciona, adquiere, organiza o integra el nuevo conocimiento, o incluso la modificación del estado afectivo o motivacional del aprendiz, para que éste aprenda con mayor eficacia los contenidos curriculares o extracurriculares que se le presentan. Para (Beltrán,1987) las estrategias al servicio del aprendizaje implican un plan de acción respecto a los mecanismos que puede poner en marcha el sujeto a la hora de aprender. Enseguida enlistamos algunas definiciones de estrategias de aprendizaje:

1. Una estrategia de aprendizaje es un procedimiento (conjunto de pasos o habilidades) que un alumno adquiere y emplea de forma intencional como instrumento flexible para aprender significativamente y solucionar problemas y demandas académicas.

   (Díaz, Castañeda y Lule, 1986; en Hernández, 1991; citados en Díaz y Hernández, 1999)

2. Las estrategias de aprendizaje se definen como conductas y pensamientos que un aprendiz utiliza durante el aprendizaje con la intención de influir en su proceso de codificación.

   (Weinstein y Mayer, 1986; citados en Beltrán, 1998)

3. Las estrategias de aprendizaje son secuencias integradas de procedimientos o actividades que se eligen con el propósito de facilitar la adquisición, almacenamiento y/o utilización de la información.

   (Dansereau (1985) y Nisbet y Shucksmith (1987); citados en Ramírez, sf)

4. Las estrategias de aprendizaje son actividades u operaciones mentales empleadas para facilitar la adquisición de conocimiento. Y añaden dos características esenciales de la

estrategias: que sean directa o indirectamente manipulables, y que tengan un carácter intencional o propositivo.

(Beltrán, 1998)

5. Las estrategias de aprendizaje son procesos de toma de decisiones (conscientes e intencionales) en los cuales el alumno elige y recupera, de manera coordinada, los conocimientos que necesita para cumplimentar una determinada demanda u objetivo, dependiendo de las características de la situación educativa en que se produce la acción.

(Monereo, 1994)

6. Las estrategias de aprendizaje son secuencias de procedimientos o planes orientados hacia la consecución de metas de aprendizaje, mientras que los procedimientos específicos dentro de esa secuencia se denominan tácticas de aprendizaje. En este caso, las estrategias serían procedimientos de nivel superior que incluirían diferentes tácticas o técnicas de aprendizaje.

(Schmeck, (1988); Schunk, (1991); citados en Beltrán, 1998)

7. Las estrategias de aprendizaje son procedimientos internos, no observables, de carácter generalmente cognitivo, que ponen en juego los sujetos cuando aprenden y que tienen como fin lograr un plan, un objetivo o una meta.

(Olmedo y Curotto, s.f.)

8. Por estrategia de aprendizaje se significa el conjunto de actividades mentales empleadas por el individuo, en una situación particular de aprendizaje, para facilitar la adquisición de conocimiento.

(Derry & Murphy (1986); citados en Beltrán, 1998)

9. Una estrategia de aprendizaje es un plan general que se formula para tratar una tarea de aprendizaje; y una táctica es una habilidad más específica que se usa al servicio de la estrategia o plan general.

(Snowman,1986; citados en Beltrán, 1998)

De acuerdo con Beltrán (1998), las definiciones expuestas ponen de relieve dos notas importantes a la hora de establecer el concepto de estrategia.

1. Se trata de actividades u operaciones mentales que realiza el estudiante para mejorar el aprendizaje.

2. Las estrategias tienen un carácter intencional o propositivo e implican, por tanto, un plan de acción.

A modo de síntesis y delimitación conceptual, los rasgos característicos más destacados de las estrategias de aprendizaje podrían ser los siguientes

Su aplicación no es automática sino controlada. Precisan planificación y control de la ejecución y están relacionadas con la metacognición o conocimiento sobre los propios procesos mentales.

Implican un uso selectivo de los propios recursos y capacidades disponibles. Para que un estudiante pueda poner en marcha una estrategia debe disponer de recursos alternativos, entre los que decide utilizar, en función de las demandas de la tarea, aquellos que él cree más adecuados. (Pozo y Postigo,1993; citados en anónimo, s.f.).

Acorde a la afirmación

> Las estrategias están constituidas de otros elementos más simples, que son las técnicas o tácticas de aprendizaje y las destrezas o habilidades. De hecho, el uso eficaz de una estrategia depende en buena medida de las técnicas que la componen. En todo caso, el dominio de las estrategias de aprendizaje requiere, además de destreza en el dominio de ciertas técnicas, una reflexión profunda sobre el modo de utilizarlas o, en otras palabras, un uso reflexivo y no sólo mecánico o automático de las mismas. (Pozo, 1989b; citado en anónimo, s.f.)

La psicología educativa ha tenido entre sus tareas fundamentales el estudio de los procesos, estos procesos han constituido la clave del aprendizaje significativo. Los resultados del aprendizaje dependen de los subprocesos sugeridos por el profesor y puestos en marcha por el estudiante mientras aprende. Surge entonces la pregunta: ¿cuántos y cuáles son los subprocesos de aprendizaje?

A esta pregunta dieron respuestas varios autores a partir de finales del siglo pasado. En cada una de las columnas de la tabla 1 se presentan los subprocesos correspondientes a determinadas fases del aprendizaje según Gagné (1974), Cook y Meyer (1989), Thomas y Rohwer (1986), Shuell (1988) y Beltrán (1998).

Gagné	Cook-Mayer	Thomas-Rohwer	Shuell	Beltrán
Expectativas			Expectativas	Sensibilización
Atención	Selección	Selección	Atención	Atención
Codificación	Adquisición	Comprensión	Codificación	Adquisición
Almacenaje	Construcción	Memoria	Comprensión	Personalización

Recuperación	Integración	Recuperación	Repetición	Recuperación
Transfer		Integración		Transfer
Respuesta		Auto-control		
Refuerzo			Evaluación	Evaluación

Tabla 1. Cuadro comparativo de subprocesos del proceso de aprendizaje

Una vez establecidos los subprocesos que forman el proceso complejo de aprendizaje, hay que dar respuesta a la pregunta, ¿cómo se ponen en marcha los procesos de aprendizaje?

"Los subprocesos de aprendizaje pueden llevarse a cabo por medio de actividades mentales muy diversas, dando lugar a estrategias más o menos eficaces que movilizan dichos procesos." (Beltrán, 1998, p. 47).

En ese sentido tenemos que Beltrán (1998) hace una estructuración del proceso de aprendizaje muy completa, de tal manera que no atomiza el proceso y permite realizar un seguimiento a la hora de ponerlo en práctica, este se expresa en la figura 1

Figura 1. Esquema del proceso de aprendizaje de Beltrán

Donde los subprocesos significan sucesos internos que implican una manipulación de la información entrante. Estos subprocesos constituyen las metas de las diversas estrategias de aprendizaje. Nosotros centraremos la atención en el proceso de adquisición de la tabla 1. En ese sentido según Beltrán (1998), el proceso de adquisición comienza con la selección o codificación selectiva mediante la cual se logra la incorporación del material informativo de interés para el sujeto. Una vez que el material ha sido atendido y seleccionado, el sujeto está en condiciones de darle sentido, de interpretarlo significativamente, es decir, de comprenderlo. Posiblemente éste es el momento más importante del aprendizaje, aquel en el que el sujeto construye significativamente su conocimiento. Como técnicas ponemos en práctica las representaciones analíticas y geométricas de las componentes del concepto de sucesión y enseguida determinar si se puso en práctica la estrategia de organización y concluir si se realizó el subproceso de comprensión.

Metodología

Se trabaja con un grupo de seis alumnos de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAZ. Se diseñan una hoja de trabajo y una hoja de orientaciones. Se realizan tres encuentros, el primero para recordar algunas definiciones como por ejemplo el concepto de función, definir y ejemplificar el concepto de sucesión real definido sobre ***N*,** dominio, codominio, grafo de una sucesión, imagen de una sucesión, y representación geométrica de la imagen. En una segunda sesión se aplicó la hoja de trabajo con 11 ítems relacionados con los conceptos descritos anteriormente. La tercera sesión sirvió para reforzar los conocimientos que se detectaron como débiles. La hoja de orientaciones sirve de guía para los maestros que deseen utilizar nuestra propuesta en la enseñanza del concepto de sucesión la hoja de trabajo se diseña en base a las técnicas de representaciones analíticas y geométricas de algunos elementos de la extensión del concepto de sucesión, según se describe en la tabla 2, con la finalidad de promover la estrategia de organización e impactar el subproceso de comprensión.

Ítems que involucran representaciones geométricas				
Problema 1 Identificar una sucesión en su Representación geométrica	Problema 2 Representar geométricamente del dominio, codominio, grafo e imagen	Problema 3 Identificar si una representación geométrica es o no una sucesión	Problema 4 Representar gráficamente el dominio, codominio, grafo e imagen de una no sucesión	Problema 9 Representar gráficamente en un plano el dominio, el codominio, el grafo y la imagen de una sucesión
Problema 5 Identificar si una expresión analítica es o no una sucesión y dar sus razones	Problema 6 Identificar si una expresión analítica corresponde a una sucesión o no (y no corresponde)	Problema 7 Determinar si una expresión analítica corresponde o no a una sucesión (sucesión alternada)	Problema 8 Determinar en forma analítica el dominio, el codominio, el grafo y la imagen de una sucesión dada en representación analítica.	Problema 10 Determinar el dominio, codominio, grafo e imagen de una sucesión alternante
Ítems que involucran representaciones analíticas				

Tabla 2. Descripción de la estructura de la hoja de trabajo

Conclusiones

Jaime	Técnica		Estrategia	Subproceso	Proceso
Problema	**RA**	**RG**	**Organización**	**Comprensión**	**Adquisición**
1		✔	✔	✔	✔
2		*	*	*	*
3		✔	✔	✔	✔
4		✔	✔	✔	✔
5	✔		✔	✔	✔
6	✔		✔	✔	✔
7	**		**	**	**
8	✔		✔	✔	✔
9		✔	✔	✔	✔
10	✔		✔	✔	✔
Observaciones	* No refleja la estrategia de organización, no realiza las representaciones gráficas del dominio, codominio, grafo e imagen del elemento de la extensión. ** La respuesta e correcta pero argumenta correctamente su respuesta *** Se observa dificultad en la notación utilizada para el grafo, el codominio y la imagen.				

Tabla 3. Ejemplo de tabla de evaluación del alumno Jaime

Una vez que se aplicó la hoja de trabajo se procedió a evaluar las respuestas de cada uno de los seis alumnos haciendo una tabla para cada alumno como la que se presenta en la tabla 3, de la que se desprendieron las siguientes conclusiones:

1. Las representaciones gráficas permiten que alumno identifique los elementos del contenido del concepto de sucesión, a saber el dominio, el codominio, el grafo y la imagen, se observa en el análisis que organizan su conocimiento para dar repuesta a los ítems.

2. En general los alumnos no están habituados a identificar tanto analíticamente, como gráficamente por separado los términos que definen una sucesión, el dominio, codominio, grafo e imagen y esto en nuestro trabajo tiene mucha importancia pues se presenta diferente a como se presenta de manera tradicional.

Referencias bibliográficas

Anónimo, (s.f.). *Definiciones de estrategias de aprendizaje*. Recuperado el 29 de marzo de 2012 de http://es.scribd.com/doc/38703404/Clasificacion-de-las-estrategias-de-aprendizaje.

Beltrán, J. (1998). *Psicología evolutiva y de la educación. Procesos, estrategias y Técnicas* de aprendizaje. España: Síntesis.

Borjón, E. y Mederos O. (2011). Técnicas y estrategias para participar en el proceso de adquisición de conocimientos conceptuales en el tema de sucesiones con límite. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 507-514. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cook, L.K. y Mayer, R.E. (1989). *Reading strategies training for meaningful learning from prose.* In M. Pressley y J.R. Levin (Eds.), *Cognitive strategy research: Educational applications* (pp. 87-126), New York: Springer-Verlag.

Díaz, B. y Hernández R. (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.*México: McGraw Hill.

Gagné R. (1974). *Essentials of learning for instruction*. Nueva York: Dryden Press.

Meyer, R. (1989). Guiding students' cognitive processing of scientific information in text. En M. Pressley, K. R. Harris y J. T. Guthrie (Eds.), *Promoting academic competence and literacy in school* (pp. 243-258), San Diego: Academic Press.

Monereo, C. (1994). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación a la escuela*. Barcelona: Graó.

Olmedo, N. y Curotto M. (s.f.). *Estrategias de Aprendizaje en Matemática.* Recuperado el 29 de marzo de 2012 de http://www.me.gov. ar/curriform/publica/ estrategias_ mat_ cata2.pdf.

Ramírez, S. (s.f.). Estrategias de aprendizaje. http://www.ugr.es/~iramirez/EstraApren.htm. Consultado el 29 de marzo del 2012.

Shuell, Th. J. (1988). The role of the student in learning for instruction. *Contemporary Educational Psychology,* 13 (3), 276-295.

Thomas, J. W. y Rohwer, W. D. Jr. (1986). Academic studying: the role of learning strategies. *Educational Psychologist*, 21(1-2), 19-41.

AS COMPETÊNCIAS DE LEITURA E INTERPRETAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Vânia Gomes da Silva Ribeiro, Carmen Teresa Kaiber
Universidade Luterana do Brasil Brasil
vania.ribeiro83@hotmail.com, kaiber@ulbra.br

Resumo. Este artigo apresenta resultados de uma investigação qualitativa que teve como objetivo identificar as dificuldades na interpretação e produção de textos matemáticos apresentadas por alunos da segunda série do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual do município de Viamão/RS. Os procedimentos para a coleta de dados reuniram seleção e organização de textos matemáticos a serem trabalhados pelos alunos, análise da produção desses, observações registradas em diário, questionários e registros de imagens. A análise dos dados foi realizada tendo como referência as competências e habilidades preconizadas pela Matriz do Exame Nacional do Ensino Médio (Ministério da Educação, 2009) e as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ministério da Educação, 2002). Resultados apontam para a necessidade de desenvolver e potencializar as competências de ler, interpretar e escrever matematicamente a partir da articulação da língua materna com a linguagem matemática.

Palavras chave: leitura, interpretação, textos matemáticos, língua materna

Abstract. This study presents the results of a qualitative investigation carried out to identify the difficulties in interpretation and production of mathematics texts by students of the second year of a public high school in the city of Viamão, RS, Brazil. Data collection included the selection and organization of mathematics texts to be studied by students, the analysis of how these texts were produced, notes recorded on a diary, questionnaires and image records. Data analysis was carried out considering the skills and abilities established in official directives (Matriz do Exame Nacional do Ensino Médio, Ministério da Educação, 2009; Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Ministério da Educação, 2002). The results indicate the need for the development and improvement of reading, interpretation and writing from a mathematical perspective, based on an articulation between native language and mathematical language.

Key words: reading, interpretation, mathematical texts, language maternal

Introdução

Concordando com o que preconizam os Parâmetros Nacionais do Ensino Médio (Ministério da Educação, 2002), encontra-se na leitura o primeiro passo no processo de interpretação, que vai muito além do domínio da Língua Portuguesa. Pondera-se que saber ler é, também, compreender e interpretar gráficos, esquemas, escritas numéricas e algébricas relacionando-os com a língua discursiva. Assim o aluno pode tornar-se capaz de analisar e compreender situações como um todo, tomar decisões, estabelecer estratégias, argumentar e fazer registros.

De acordo com Machado (1998) a Matemática é um sistema de representação original; apreendê-lo significa o mapeamento da realidade, como no caso da Língua. Mais do que aprendizagem de técnicas para operar símbolos, está relacionada com o desenvolvimento da capacidade de interpretar, analisar e significar.

Nesse contexto, a motivação para a presente investigação surgiu da percepção das dificuldades que os alunos, tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio, apresentam na resolução de problemas. Conjectura-se que essas dificuldades estariam fortemente relacionadas e teriam origem em questões ligadas à interpretação de textos matemáticos.

Assim, este artigo apresenta uma pesquisa realizada junto a um grupo de estudantes de uma 2ª série do Ensino Médio que tem como objetivo identificar as dificuldades que os alunos apresentam para interpretar e produzir textos matemáticos, os quais se constituem em situações problemas a serem solucionados.

Teoricamente a investigação busca respaldo nos trabalhos de Machado (1998), Kleiman (2002), Rabelo (2002) os quais têm como foco as relações entre a língua e a Matemática. Metodologicamente o trabalho se insere em uma perspectiva qualitativa, tomando como ponto de partida o desenvolvimento de uma sequencia de atividades que apresentam problemas e questões matemáticas nas quais a necessidade de leitura e interpretação está presente.

A elaboração das atividades, bem como a análise da produção dos estudantes, foi realizada tendo como referência as competências e habilidades constantes nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio-PCNEM (Ministério da Educação, 2002) e Exame Nacional do Ensino Médio-ENEM (Ministério da Educação, 2009) e aspectos cognitivos da leitura.

Habilidades e Competências em Matemática

No Ensino Médio cada área do conhecimento deve envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos teóricos, práticos e contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea de conhecimentos mais amplos.

De acordo com os PCNEM "a Matemática, no Ensino Médio, contribui significativamente para leitura das informações que circulam na mídia e em outras áreas do conhecimento" (Ministério da Educação, 2002). Espera-se que o aluno, nesta fase, além da leitura de informações seja capaz, também, de refletir sobre estas. Neste sentido há a necessidade de propor situações que vão além de simples descrições e representações de dados, atingindo investigações e tomadas de decisões. Três grandes competências são apontadas como meta na área de Matemática, as quais passam a ser descritas.

Representação e comunicação	Envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento.
Investigação e compreensão	Capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar ciências.

Contextualização das ciências no âmbito sociocultural	Análise critica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento cientifico.

Fonte: PCNEM (Ministério da Educação, 2002).

Figura 1: Competências da área de Matemática no Ensino Médio

Percebe-se que a competência de leitura, representação e interpretação é fortemente indicada pelo documento oficial.

Por outro lado, o Ensino Médio tem sido influenciado pelas competências contidas na matriz de Referência do ENEM (Ministério da Educação, 2009). O que está posto nessa matriz está articulado e, e em muitos aspectos, amplia e aprofunda o que preconizam os PCNEM (Ministério da Educação, 2002).

A matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do referido exame está organizada por competências e habilidades distribuídas em sete áreas, a saber.

Competências da área 1	Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
Competências da área 2	Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
Competências da área 3	Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
Competências da área 4	Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
Competências da área 5	Modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou técnico-cientifica, usando representações algébricas.
Competências da área 6	Interpretar informações de natureza cientifica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
Competências da área 7	Compreender o caráter e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (2010)

Figura 2: As áreas do conhecimento da Matriz de Referência de Matemática do ENEM

Particularmente, nesta investigação, o foco são as competências ligadas à leitura, escrita e interpretação como instrumento para enfrentar e solucionar problemas matemáticos.

A língua materna e a matemática

Machado (1998) pondera que a impregnação entre a Matemática e a Língua Materna é caracterizada pelo paralelismo, pela complementariedade e pela imbricação nas questões básicas relativas ao ensino de ambas. Quando se leva em consideração apenas uma das duas disciplinas há um comprometimento de possíveis ações pedagógicas consistentes.

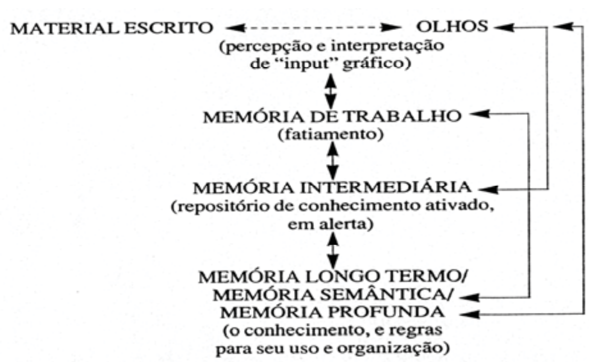
Segundo Kleiman (2002), muitos professores preocupam-se por que seus alunos não gostam de ler, porém, ao mesmo tempo, não sabem como promover situações em sala de aula que levem o aluno a desenvolver a competência leitora.

A autora argumenta que isto ocorre porque os professores, em sua maioria, não possuem o conhecimento teórico sobre a natureza da leitura, o que ela é e que tipo de engajamento intelectual é necessário para tornar a leitura uma competência. Considera a leitura como uma atividade a ser ensinada na escola que não deve servir somente como pano de fundo para o ensino de gramática ou outro mero pretexto para outros tipos de aprendizagem.

Assim, Kleiman (2002) considera o ensino da leitura fundamental para dar solução a problemas relacionados ao pouco aproveitamento escolar. Segundo a autora, ao fracasso na formação de leitores pode-se atribuir o fracasso geral do aluno no primeiro e segundo graus.

Processo cognitivo da leitura e textos matemáticos

Kleiman (2002) explica que a leitura está embasada em modelos sobre como os indivíduos processam as informações. Estes tratam de aspectos cognitivos da leitura que relacionam o sujeito leitor e o texto (enquanto objeto), a linguagem escrita e compreensão, memória, inferência e pensamento. O esquema da figura 3 apresenta os mecanismos e capacidades envolvidos no processamento da leitura apresentados pela autora.



Fonte: Kleiman (2002)p.32.

Figura 3: Mecanismos e capacidades envolvidos no processamento do texto

Estes modelos se voltam para complexos aspectos psicológicos da atividade de leitura, apontando para as regularidades do ato de ler, para atividade intelectual em que o leitor ideal se engajaria, atividades estas que começam pela apreensão do objeto através dos olhos com objetivo de interpretá-lo.

Segundo a autora, o processamento do objeto começa com os olhos, que fazem a percepção do material escrito. Este material passa, então, a uma memória de trabalho que o organiza em unidades significativas, sendo ajudada por uma memória intermediaria. Esta, por sua vez, torna acessível, como num estado de alerta, aqueles conhecimentos relevantes para a compreensão do texto em questão, dentre todo o conhecimento que estaria organizado na memória de longo prazo, também chamada de memória semântica ou profunda.

Com relação a textos matemáticos, Cardoso e Fonseca (2005) consideram que as atividades textuais para ensinar matemática e textos que demandam conhecimentos matemáticos para serem lidos são recursos para um trabalho com leitura nas aulas de Matemática.

Rabelo (2002) pondera que esse seria o ambiente através do qual a criança poderia tornar-se um indivíduo "letrado", isto é, um ambiente onde, efetivamente, ela construísse sua competência, na leitura, interpretação e produção de todos os tipos de textos das diversas áreas do conhecimento humano, sejam textos literários, científicos, jornalísticos, matemáticos, entre outros.

O autor classifica cinco grupos diferentes de textos matemáticos: Histórias Matemáticas, Histórias da Matemática, Personalidades da Matemática, Curiosidades Matemáticas, Matemática do Cotidiano (Rabelo, 2002). Esta classificação, na presente investigação, serviu como base na organização e seleção de atividades para a construção da competência de leitura, interpretação e produção de textos matemáticos.

Aspectos metodológicos

A presente pesquisa envolveu uma turma da 2ª série do Ensino Médio composta por vinte dois alunos com idade entre dezesseis e dezoito anos, sendo doze meninas e dez meninos. Entre estes 22 alunos, apenas quatro haviam sido reprovados em alguma série na sua trajetória escolar.

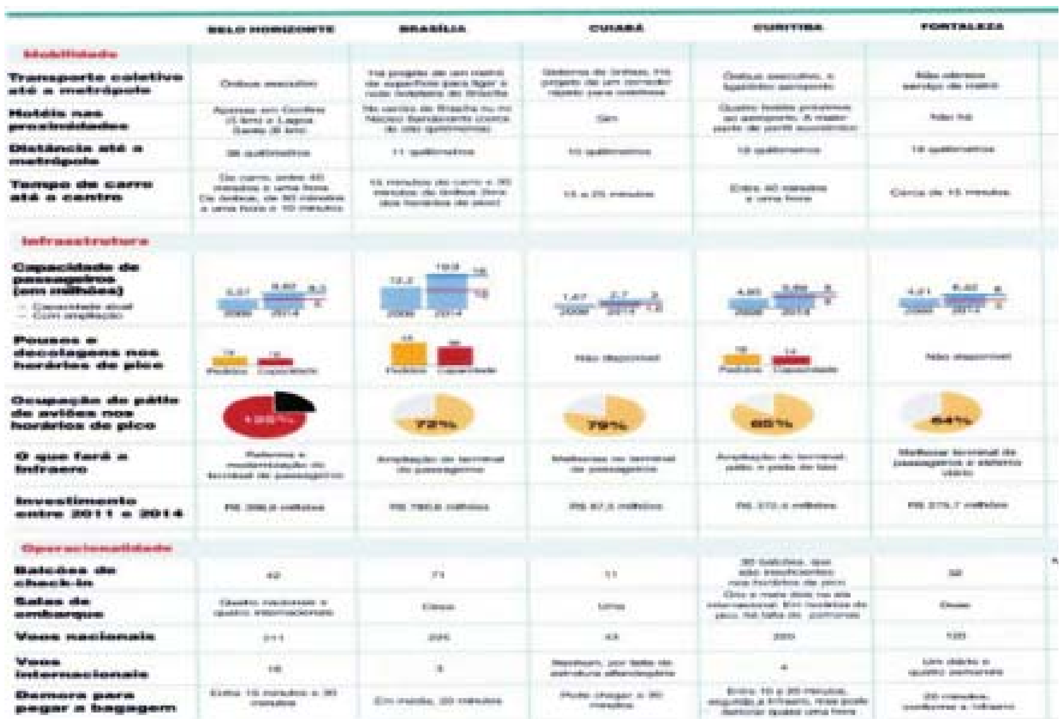
Assim, buscando atingir o objetivo de identificar as dificuldades na leitura interpretação e produção de textos matemáticos, foram organizadas e desenvolvidas, pelos estudantes, cinco atividades que serviram de base para a investigação. As atividades foram estruturadas tomando como referência a classificação de Rabelo (2002), a saber: História Matemática (Problema dos Camelos); Curiosidades Matemáticas (Idade de Diofanto); História da Matemática (História do Teorema de Pitágoras); Matemática do Cotidiano (Texto de jornal envolvendo questões sobre os aeroportos para a Copa 2014). Também foi desenvolvida uma atividade prática com o Teodolito, objetivando analisar a produção textual em linguagem matemática.

No início e ao término das atividades foram aplicados questionários: o primeiro visava traçar um perfil da turma e o segundo, identificar as impressões dos alunos sobre o trabalho realizado. A investigação contou, também, com observação sistemática da professora/pesquisadora devidamente registradas em diário de campo. A seguir são apresentados os principais resultados obtidos a partir dos textos Copa e Idade de Diofanto, atividades que esse artigo destaca.

Apresentação e Análise dos Resultados

A análise da produção dos estudantes, a partir da resolução das atividades, foi realizada à luz das competências e habilidades preconizadas pelo PCNEM (Brasil, 2002), Matriz de Referência do ENEM (Brasil, 2009) e dos referenciais sobre aspectos cognitivos da leitura. Aliada a estas, as observações realizadas pela pesquisadora complementam e aprofundam o quadro de análise.

O quadro da figura 4 apresenta parte da tabela contida na atividade "Copa" (adaptada do Jornal Zero-Hora de 18 de Julho 2010), a qual foi apresentada aos estudantes como parte da investigação. A análise dessa atividade é destacada nesse artigo.



Fonte: Adaptado do Jornal Zero Hora, 18 de Julho de 2010, p.13.

Figura 4: Tabela do texto Copa

A atividade exigia que os estudantes se utilizassem de competências tais como: ler e interpretar informações apresentadas em linguagem matemática (gráficos e números), transformar essas representações em língua natural, identificar dados relevantes para resolução das situações problema. O texto apresenta uma tabela com gráficos e informações por escrito, mostrando a situação dos aeroportos das cidades sede da Copa 2014, sobre diferentes aspectos como: capacidade de atendimento aos passageiros, pousos e decolagens disponibilizados, ocupação do pátio e operacionalidade. Destaca-se que todas as respostas aos questionamentos poderiam ser obtidas a partir da leitura, interpretação e comparação das informações contidas nas tabelas e gráficos apresentados. O texto despertou curiosidade nos alunos, a tarefa foi bem recebida pelo grupo e sua realização transcorreu de forma satisfatória. Observou-se certa resistência no momento em que a tarefa solicitava um texto que sintetizasse todos os questionamentos feitos em relação à atividade. Comparada com as demais, a atividade Copa foi a que menos suscitou solicitações de orientação e ajuda por parte dos estudantes.

A atividade constituía-se de quatro questionamentos, sendo que o primeiro referia-se à capacidade de passageiros, como ficariam os aeroportos após a reforma, se teriam capacidade de atendimento ou não. Foi questionado, ainda, qual aeroporto deveria ter maior investimento pelos dados informados na tabela. O segundo questionamento referia-se ao quesito pousos e decolagens, perguntando sobre qual das cidades sede possui maior capacidade para pousos e decolagens nos horários de pico. Já o terceiro questionamento referia-se a ocupação do pátio, solicitando a indicação de quais cidades estariam com os pátios de seus aeroportos superlotados e, o quarto, referia-se à operacionalidade dos aeroportos.

Analisando as respostas dadas pelos alunos aos questionamentos do texto Copa, verificou-se que o desempenho foi satisfatório na leitura, interpretação dos gráficos e análise de dados propostos na atividade. Atribui-se a facilidade apresentada pelos estudantes ao fato deste tipo de texto (jornalístico) estar presente no dia-a-dia do aluno, além do tema do texto ser um assunto que desperta interesse do aluno como futebol, viagens e cidades turísticas.

O texto A Idade de Diofanto contempla conhecimentos matemáticos como equações algébricas envolvendo números racionais, cálculos de mínimo múltiplo comum, multiplicação e divisão, utilização de diferentes formas de representação. Contempla, também, competências como tomada de decisão na hora de selecionar diferentes formas para representar um dado, estabelecimento de estratégias, identificação de dados relevantes em uma situação problema para busca de possíveis soluções.

Considera-se esta atividade a que trazia dados mais complexos, os quais exigiam, além de muita atenção na leitura, uma interpretação minuciosa. Os alunos teriam que transformar o problema da linguagem natural para a linguagem matemática, utilizando-se de representações numéricas e algébricas. Após a distribuição do texto e iniciada a leitura, um significativo número de estudantes relatou dificuldade para compreendê-lo. Começaram a fazer passagens dos dados da língua natural para a língua matemática, porém, apresentavam dificuldade em representar informações em linguagem algébrica. Demonstrando cansaço, solicitavam orientação à professora/pesquisadora antes de ler novamente o texto. Além da dificuldade de representar o problema, observou-se outro obstáculo encontrado na realização da tarefa: o conhecimento limitado com relação a operações com racionais. Os alunos mostraram-se inseguros frente a adições e subtrações de frações com denominadores diferentes. Considera-se que essa insegurança e falta de domínio dessas operações interferiu na realização da atividade, tendo em vista que essa era uma das competências presentes na tarefa (a construção de significados para os números racionais), bem como a competência de resolver problemas que envolvam esses números, usando representações algébricas.

Conclusão

O estudo revelou a grande dependência que o aluno tem da professora, seja na leitura, escrita e interpretação de textos, ou na própria solução das questões matemáticas. Diante dos entraves na interpretação, não insistiam em retomar a leitura e logo chamavam o professor/pesquisador argumentando "*não ter entendido*" ou "*se estava certo"*. Porém, na maioria das vezes quando retomavam a leitura conseguiam realizar a tarefa sem maiores dificuldades. Outro ponto relevante é a insegurança em tomar decisões, estabelecer e arriscar estratégias, pois os estudantes mostraram-se reticentes e imediatistas. Fazer, errar e estabelecer novas estratégias para resolução é considerado demorado e trabalhoso. De imediato, perguntam ao professor para que, rapidamente, consigam resolver. Tal constatação vai ao encontro das considerações de Rabelo (2002) de que o baixo desempenho dos alunos do ensino fundamental em relação à resolução de problemas está diretamente relacionado a não construção de uma competência para a interpretação de textos matemáticos.

Um aspecto interessante observado no estudo foi que, mesmo tendo dificuldades e até mesmo resistência em relação à leitura e interpretação os alunos manifestaram a necessidade desse tipo de trabalho na sala de aula, justificando esta necessidade do saber ler e interpretar pela sua importância em provas de seleção, concursos e provas de ingresso à universidade.

Assim, concordando com Machado (1998), entende-se que é premente o desenvolvimento da competência de leitura e interpretação de textos em todas as disciplinas, desde as séries iniciais. O professor poderá introduzir em sua metodologia, tratamento de dados com textos jornalísticos, solicitar relatórios e apreciações das aulas ou ainda pequenos relatórios em língua natural sobre a resolução de um exercício onde possam falar de suas experiências de modo a aumentarem a sua bagagem de conceitos e seu vocabulário.

Referências bibliográficas

Cardoso, C.A; Fonseca, M.C.F. R. (2005). Educação Matemática e letramento: textos para ensinar Matemática, Matemática para ler o texto. In: Nacarato, Adair Mendes (org). *Escritas* e *Leituras na Educação Matemática*. (pp. 63-76) Belo Horizonte: Autêntica,

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. 2010. Disponível em: http://historico.enem.inep.gov.br/index.php?option=comcontent &task=view&id=12&itemid=34

Ministério da Educação (2002). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Ciência da Natureza, Matemática* e *suas tecnologias*. Brasília: MEC/ Semtec.

Ministério da Educação (2009). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira. *Enem um ensaio para a vida.* (2009). Disponível em: http://www.inep.gov.br/enem.

Kleiman, A.(2002). *Oficina de Leitura Teoria & Prática.* 9.ed.Campinas:Pontes.

Machado, N. J. (1998). *Matemática* e *a Língua Materna: analise de uma impregnação mútua*. 4. ed. São Paulo:Cortez.

Rabelo, E. H. (2002). *Textos Matemáticos: Produção, Interpretação* e *Resolução de Problemas*.3 ed. Petrópolis, RJ:Vozes.

ARTICULACIÓN DE LAS ASIGNATURAS VINCULADAS A LA DIDÁCTICA DE LA CARRERA DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS

Raimundo Olfos, Verónica Fernández, Soledad Montoya, Patricia Vásquez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
raimundo.olfos@ucv.cl, averonica94@hotmail.com, patricia.vasquez@ucv.cl

Resumen. Este escrito da a conocer las etapas y los productos de un proyecto que tuvo por objeto la articulación y la renovación de los programas de asignatura vinculados a la dimensión didáctica del plan de estudios de la Pedagogía en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Fueron incluidos nueve asignaturas: dos Talleres de Educación Matemática, tres actividades curriculares de Prácticas Pedagógicas, un laboratorio de estudio de casos, dos asignaturas de Didáctica específicas y el Trabajo de titulación como profesor de matemáticas. El proyecto tiene como objetivo proporcionar a los futuros profesores de matemáticas "herramientas" para llevar a cabo sus clases actualizadas de acuerdo a las demandas educativas y la visión de un currículo basado en las competencias del perfil de egreso propuesto por el Instituto de Matemáticas.

Palabras clave: formación profesorado por competencias, didáctica

Abstract. This paper discloses the steps and products of a project that was aimed at the joint and renewal subjects' syllabus linked to the didactical dimension of the high school math teacher syllabus at the Pontifical Catholic University of Valparaiso. Nine subjects were included: two workshops on Mathematics Education, three pedagogical practices curricular activities, one case study laboratory, two specific didactic courses and the final work for Math teacher certification. The project aims to provide prospective Math Teachers "tools" to conduct their classes updated according to the educational demands and the vision of a competency-based curriculum of the graduate profile proposed by the Institute of Mathematics.

Key words: teacher education by competencies, didactic

Introducción

La carrera de pedagogía en matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso considera en su malla, entre otros, un eje de prácticas profesionales y asignaturas que tienen como contenido nociones de Didáctica de las Matemáticas, las que incluyen algunas asignaturas relacionadas con el desarrollo de habilidades de comunicación oral y escrita, y la capacidad para reflexionar desde su quehacer docente.

Las 9 asignaturas involucradas comprenden el 25% de los créditos de la carrera. La constatación de desajustes y obsolescencia de tales asignaturas por parte de los académicos que las conducen motivó a la realización de este proyecto de articulación de asignaturas, el cual fue auspiciado por la Dirección de Desarrollo curricular y formativo de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, favoreciendo que los estudiantes de la carrera conecten efectivamente la teoría y la práctica. Este escrito señala las etapas que llevaron a los nuevos planteamientos y describe los resultados alcanzados, en cuanto a la especificación de los programas de las asignaturas, adhiriéndose a una malla curricular diseñada en base a competencias en el marco de un proyecto anterior - MECESUP PUCV 0612: Diseño de currículos de Pedagogía en Matemáticas y Ciencias-.

El proyecto y su desarrollo

Teniendo en mente el enfoque de la investigación acción, un grupo de cuatro docentes de la Pedagogía en Matemáticas de la PUCV se propuso renovar y articular los programas de las asignaturas correspondientes a los ramos de didáctica, los talleres de educación matemática, el laboratorio de estudio de casos, las prácticas pedagógicas y el trabajo de titulación de la Carrera, con el objeto de proporcionar a los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas "herramientas" actualizadas para enfrentar sus clases, acordes a las actuales demandas educacionales, lo que se canalizó a través de un currículo planteado en función de las competencias del perfil de egreso declaradas en el proyecto MECESUP citado, referido al diseño de currículos de Pedagogía en Matemáticas y Ciencias, sobre la base de competencias, y con énfasis en la disciplina, su didáctica y la práctica docente.

Los cuatro docentes académicos involucrados en el proyecto tienen en promedio más de 20 años de experiencia como formadores de profesores de matemáticas, con grados académicos complementarios: doctor en Educación, Magister en matemáticas, doctora (c.) en matemática educativa y magister en didáctica de la matemática. Tres de los docentes con experiencia como profesores en la educación secundaria. El proyecto fue patrocinado por el Instituto de Matemáticas y auspiciado por la Universidad. Se contó con el apoyo de la Jefe de Carrera y con una evaluación experta, de una ex funcionaria del Ministerio de Educación.

La metodología consideró un trabajo personal y grupal por parte los docentes investigadores. El trabajo personal se refirió a la búsqueda y selección de materiales bibliográficos (Azcárate, 2004; Bosch y Gascón, 2009; Brousseau, 2006; Flores, 1999; Flores, 2007; Gascón, 2011; Niss, 2004; Villa y Poblete, 2007), a la presentación de los mismos al grupo y a la redacción de notas selectivas conforme a la etapa en que se llevaba adelante el proyecto. En el caso del trabajo grupal, éste se refirió principalmente a la participación en las discusiones semanales o quincenales en las que se analizaron y fueron reconstituyéndose los programas de estudio de las nueve asignaturas en cuestión, alcanzando como producto una articulación entre las competencias a desarrollar y los contenidos involucrados en tales asignaturas. La reformulación de los objetivos y contenidos de las asignaturas que los docentes investigadores imparten en los últimos años, abre la discusión en torno a la pertinencia de los programas y de las mismas asignaturas con respecto a las competencias del perfil. La obsolescencia de algunos tópicos, los avances en didáctica y las demandas de la carrera, llevaron a los profesores investigadores a centrar la atención en los estándares nacionales para la formación de profesores de matemáticas del país y en las tendencias internacionales en torno a la profesión.

Se planeó un trabajo en tres etapas, las cuales ahondaron en los puntos siguientes:

- Etapa 1. Revisión de los programas de estudios de nueve asignaturas
- Etapa 2. Discusión de las Competencias asociadas y su mapeo.
- Etapa 3. Renovación Articulada de las asignaturas.

La etapa inicial del proyecto se abocó a la discusión y conciliaron de los objetivos y las temáticas abordadas en las asignaturas -cursos, talleres y actividades de práctica-, con el fin de orientar la renovación y articulación de los marcos conceptuales, las referencias bibliográficas, las metodologías de trabajo y los contenidos de enseñanza. Para alcanzar esta meta, cada uno de los integrantes del grupo expuso acerca de los objetivos y contenidos de las asignaturas que últimamente han estado a su cargo, abriendo la discusión en torno a la pertinencia de la asignatura con las competencias del perfil, la obsolescencia de algunos tópicos, los avances en la disciplina y las demandas que este grupo de docentes percibe en la carrera, poniendo particular atención a los estándares para la formación de profesores de matemáticas en el país y tendencias internacionales en la profesión.

La segunda etapa se orientó a la discusión acerca de las competencias declaradas en el perfil y a su asociación con las nueve asignaturas en cuestión, estableciendo finalmente un mapeo entre competencias y asignaturas, procurando establecer énfasis prioritarios y declaraciones en el sentido si la competencia sería reforzada o bien asumida como objetivo fundamental de la asignatura. En esta etapa, una de las preguntas claves para el equipo de trabajo fue ¿qué nociones de la didáctica de la matemática necesita un profesor de matemáticas hoy? Para responder se enfatizó la adopción de marcos teóricos fundamentados, los cuales fueron seleccionados y discutidos, revisando algunos documentos y artículos que favorecieron el diseño de una red de nociones comunes sobre las cuales se consensuó el mapeo de competencias y asignaturas. El marco de referencia conceptual de la componente didáctica de la carrera quedó constituido por un conjunto de enfoques teóricos que facilitaron la articulación; entre ellos, la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el enfoque de Competencias para la enseñanza de la matemática, incluida la noción de Conocimiento Pedagógico del Contenido.

En la tercera fase de renovación de asignaturas, se conciliaron las propuestas de cambio con la visión de la jefa de carrera y la opinión de una experta externa. Se estableció la emisión de un informe final preliminar para someterlo a la crítica. Para la escritura del informe final se convino incluir los nueve programas de asignatura con un formato común, que incluyera los objetivos, los contenidos temáticos, las metodologías y la bibliografía, de modo de proveer una propuesta actualizada y articulada.

Resultados

El estudio condujo a la renovación curricular de la componente didáctica de las asignaturas de la carrera de Pedagogía en Matemáticas, respondiendo al objetivo general planteado en el proyecto de reformular los programas de nueve asignaturas referidas a la didáctica, prácticas y trabajo de título del plan de estudio de la carrera de pedagogía en matemáticas de manera articulada, preferentemente en base a competencias.

Sem	Asignatura	Nociones de la didáctica a tratar
3	Didáctica de las Funciones Práctica Inicial	Registros semióticos. Elementos de Teoría de situaciones. Modelación. Transposición didáctica centrada en el profesor. Reflexión Etnografía.
5	Didáctica de los Sistemas Numéricos	Elementos de la TAD, trasposición didáctica, Obstáculos epistemológicos. Uso de Teoría de situaciones
6	Laboratorio Estudio de Casos	Análisis de texto y Programas de Estudio Valoración de la matemática Uso de Transposición didáctica
7	Práctica Intermedia Taller 1	Estudio de clases. Implementación de Problemas abiertos. Resolución de problemas Paradigmas geométricos Demostraciones, Uso de Problemas abiertos.
8	Taller 2	Elementos de Teoría antropológica de lo didáctico Praxeologías puntuales. Nociones de Ingeniería Didáctica como metodología de la Investigación.
9	Trabajo de Título	Teoría de Situaciones Didácticas, Teoría Antropológica de lo Didáctico y el fenómeno de la transposición didáctica, Teoría de registros semióticos, Socio-epistemología y teoría de los campos conceptuales.
9 ó 10	Práctica Final	El estudio de clases.

Tabla 1: Nociones de la didáctica tratadas en cada uno de los cursos.

En la primera fase, se establecieron las nociones distintivas de la didáctica para cada una de las asignaturas, conforme a los semestres en que se dictan. Esta tarea se resolvió teniendo en cuenta la experticia de los docentes investigadores involucrados en el proyecto, la revisión que hicieran de la literatura y los acuerdos emanados de las discusiones del grupo. Una síntesis de las nociones tratadas se presenta en la tabla 1.

El análisis de los programas de las asignaturas relacionadas con la didáctica, junto con la revisión de las competencias de egreso declaradas en el proyecto MECESUP citado, orientaron la articulación de los programas de asignatura entre sí y en conformidad con el perfil de egreso. De modo tal que se estableció un mapeo entre las competencias del perfil y las asignaturas del programa. Esta acción llevó a un replanteamiento de las asignaturas atendiendo al perfil de egreso y a la estructura actual del programa con los recursos humanos disponibles. La optimización de este procedimiento de ajuste llevó a un cambio tan radical del curso que se optó por cambiarle de nombre. El mapeo de las competencias quedó planteado como se muestra en la Figura 1, en torno a cuatro de las nueve asignaturas:

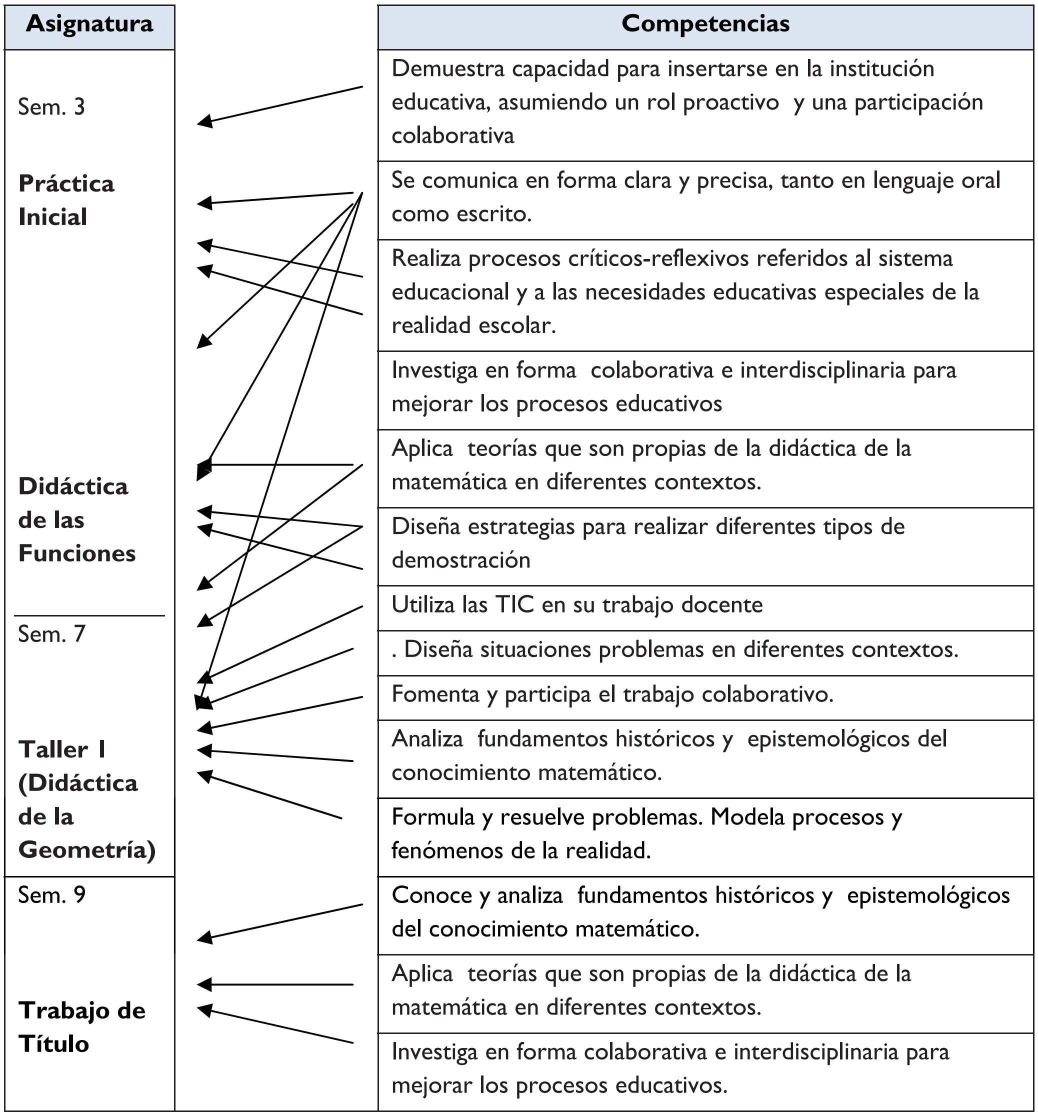


Figura 1: Mapeo de competencias del perfil en 4 asignaturas del Programa

Sobre la base del mapeo se reformularon los programas de las asignaturas, plasmándose una actualización en función a las demandas del sistema, las que permitirán a los estudiantes de pedagogía en matemáticas aprender nociones de teorías didácticas en forma secuenciada y acorde a las asignaturas cursadas semestre a semestre para alcanzar una mejor formación en base a competencias. La articulación propuesta entre asignaturas y con las competencias del perfil profesional culmina con la preparación idónea de los estudiantes durante su Práctica

Final Profesional y el Trabajo de Título, engarzando las competencias que se asumieron como las pertinentes para enfrentar la práctica y profundizar en la reflexión de la teoría y la práctica

Durante la tercera y última fase del proyecto se reconstruyeron los programas de asignaturas en función de las competencias del perfil de egreso ya mapeadas. El procedimiento tuvo en consideración la formación disciplinaria, su didáctica y la práctica docente, sobre la base de un modelo de desarrollo por competencias. Se conciliaron los objetivos y las temáticas abordadas en las distintas actividades curriculares -cursos, talleres y practicas-, consiguiendo renovar y articular los marcos conceptuales, las referencias bibliográficas, las metodologías de trabajo y los contenidos de enseñanza. Todo lo cual llevó a la formulación de los nuevos programas de asignatura con un formato común. La figura 2 muestra un ejemplo de programa de asignatura, dejando a la vista el formato adoptado, particularmente en su referencia a las competencias del perfil, los contenidos de la asignatura y la bibliografía para el ramo.

Nombre : Taller de Educación Matemática 2 Créditos: 6 Horas: 6 Prerrequisito: Taller I	Clave: MAT-459
Descripción	Asignatura que prepara al estudiante para diseñar una secuencia de enseñanza pedagógica y los respectivos medios evaluativos para una unidad de matemáticas dirigida a alumnos de Enseñanza Media. 1. Transformar un saber matemático en saber objeto de enseñanza para diferentes cursos de Educación Media (Transposición Didáctica). 2. Diseñar materiales pedagógicos para apoyar a un alumno de Enseñanza Media en la construcción de un conocimiento matemático y evaluar su efectividad.
Competencias	Aplica teorías de la didáctica de la matemática en diferentes contextos.
	Diseña situaciones problemas en diferentes contextos.
	Diseña e implementa unidades didácticas, utilizando modelos de enseñanza y modelos evaluativos adecuados a la matemática escolar.
	Investiga en forma colaborativa e interdisciplinaria para mejorar los procesos educativos
	Fomenta y participa el trabajo colaborativo. Se comunica en forma clara y precisa, tanto en lenguaje oral como escrito.
Unidades de Aprendizajes y/o Contenidos	Unidad 1: Teorías de didáctica de la matemática ▪ Elementos de la TSD: Situación a-didácticas, contrato, devoluciones e institucionalización. El medio. ▪ La transposición didáctica: Noosfera y actos de transposición. ▪ Teoría Antropológica: Dimensión cognitiva y social. Saber personal e institucional. Componente práctica y teórica. ▪ Teoría de Registros Semióticos de Duval y de Campos Conceptuales de Vergnaud. Unidad 2: Análisis preliminares e implementación de una secuencia de enseñanza ▪ Problemática didáctica: Ejemplo acerca del tratamiento de concepto y procedimiento en el aula.

	▪ Análisis de un contexto: Recogida de datos (registros en cuadernos y documentos, entrevista profesor, entrevista clínica a alumno(s). ▪ Criterios de análisis: Coherencia, completitud, articulación y pertinencia. Unidad 3: Diseño y análisis de aplicación de secuencia de enseñanza ▪ Determinación de criterios de logro y calidad de una secuencia de enseñanza referida a un tema. ▪ Contraste de la propuesta del Programa o Marco Curricular con la de textos, plan institucional y problemática detectada. ▪ Diseño de situaciones (acción, formulación, validación), situaciones problemas o problemas abiertos. ▪ Plan de clases: tipos de clases, momentos de la clase, roles del docente y del alumno por momento. El problema de la clase. Unidad 4. Gestión y reflexión sobre la implementación de las clases ▪ Material para la implementación y reflexión sobre la clase: producciones de alumnos, material de apoyo, registro de audio o video. ▪ La gestión y dimensiones del plan de clases: Actividad del alumno, devolución del profesor, reflexión sobre la marcha. ▪ Análisis a posterior: Elaboración de matriz del comportamiento de los alumnos por categoría, en relación al análisis a priori. ▪ Contraste entre el análisis a priori y a posteriori: Reflexión en torno a la problemática, los objetivos y los logros de la clase
Metodología	Activa, de taller. Trabajo colaborativo, exposiciones. Discusión de video de clases, análisis modelos de plan de clases. Sitio Web con tareas y trabajos compartidos
Evaluación	Control de lecturas, Individual de temas como TSD y Trasposición Informe grupal en Web de contexto: basado en cuadernos y entrevista al profesor, según acceso al establecimiento Diseño grupal en Web de sub-unidad, atendiendo problemática. Elaboración de plan de clases individual en Web -EVALUACION CLAVE- y eventual exposición. Exposición grupal (antes o durante) implementación de clases. Co-evaluación Informe grupal final, con contraste actividades por sesión, en Web.
Bibliografía	Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Colombia. Una empresa docente. Brousseau G. (1998): Théorie des Situations Didactiques. Grenoble, La Pensée Sauvage. Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, AIQUE. Chevallard. Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266. Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang. Isoda, M. y Olfos, R. (2009) El enfoque de resolución de problemas. Valparaíso, EUV. Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10* (23): 133-170.

Figura 2: Matriz con ejemplo de Programa de asignatura en base a competencias

En síntesis, el estudio da cuenta de la estrategia y los productos de la renovación en base a competencias de la componente didáctica del plan de estudios de la carrera de Pedagogía en Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, en el marco de una investigación acción. Se consideró nueve asignaturas, equivalente a alrededor del 25% de los créditos de la carrera. La renovación se orientó a articular los programas de las asignaturas, para proporcionar a los estudiantes "herramientas" actualizadas para progresar en su formación profesional acorde a las actuales demandas sociales y del sistema educativo.

Cada docente investigador recolectó información fundamentando su postura y fortaleciendo la bibliografía de los cursos. Se contrastaron las asignaturas con la propuesta curricular delineada en el proyecto MECESUP citado que establecía el perfil y las competencias a desarrollar en los estudiantes. Se consensuó las propuestas de cambio con la Jefa de carrera y el significado de las competencias del perfil. Por último la propuesta fue compartida con una evaluadora externa, con vasta experiencia en aula y en el Ministerio de Educación, para concluir con la escritura de los nuevos programas para las nueve asignaturas. Los profesores tomaron como referencia estos nuevos programas para implementar las asignaturas durante el año 2012.

Conclusiones

Los beneficios del proyecto recaen en primer lugar sobre la calidad de la labor que desempeñan los docentes investigadores y por ende en la formación que reciben los estudiantes y en la calidad de la oferta institucional. El proyecto fue ocasión de discusión fundamentada y de toma de decisiones en pos del mejoramiento de las asignaturas vinculadas a la didáctica de la carrera de pedagogía en matemática.

Un segundo beneficio fue la articulación de este trabajo con los productos del proyecto MECESUP ya citado, dando prolongación y sustentabilidad a una tarea ya iniciada. El tercer beneficio es la disponibilidad de los programas de asignatura en base a competencias. La discusión llevó implícitamente a la articulación de las asignaturas del eje de prácticas- práctica inicial, intermedia y final- y de las asignaturas de didácticas específicas, como lo son la de didáctica de las funciones y didáctica de los sistemas numéricos. La articulación explícita entre las asignaturas queda reflejada, a modo de ejemplo, con la inclusión de la competencia "Se comunica en forma clara y precisa, tanto en lenguaje oral como escrito.", en la formulación de varias asignaturas, dado la necesidad de ir desarrollando esta competencia vertebral en la formación de un profesor a lo largo de su carrera. De hecho, se ha constatado que los estudiantes están mostrando serias dificultades en la redacción en su trabajo de título.

Limitaciones

No hubo participación directa de los estudiantes de pedagogía, ni se contempló una etapa de marcha blanca que brindara evidencias de la funcionalidad, aceptación o del nivel de éxito de la propuesta. Lo primero se debió a que el proyecto se llevó a cabo en un año crítico de paro estudiantil que afectó el clima de trabajo con los estudiantes y, lo segundo, debido a que el proyecto era de un año, teniéndose sólo la oportunidad de atender a las necesidades inmediatas de articulación requeridas por las asignaturas para optimizar su funcionamiento.

Referencias bibliográficas

Azcaráte, P. (2004). Los procesos de formación: en busca de estrategias y recursos. En E. Castro & E. de la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática: Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (S.E.I.E.M.) (pp. 43-60). A Coruña: Servicio de Publicaciones.

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

Brousseau, G. (2006). Epistemologia e formazione degli insegnanti. En G. Brousseau, *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica* (pp. 51-56). Bologne: Pitagora Editrice.

Flores, P. (1999). Empleo de metáforas en la formación inicial de profesores de matemáticas. Educación Matemática, 11, 84-102

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *PNA*, *1*, 139-158.

Gascón, J. (2011) ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques, 31*, 9-50.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In Gagatsis A. & Papastavridis S. (Eds.) *3rd Mediterranean Conference on mathematical education,* (pp.115–124). Athens: The Hellenic mathematical society.

Villa, A. y Poblete, M. (2007). *Aprendizaje basado en competencias. Una propuesta para la evaluación de las competencias genéricas*. Bilbao: Mensajero.

PROCESOS DEDUCTIVOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Rodolfo Eliseo D´Andrea, Lisandro Curia, Andrea Lavalle
Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario. Facultad de Química e Ingeniería Argentina
Universidad Nacional del Comahue. Facultad de Economía y Administración
rodolfoedandrea@uca.edu.ar , lcuria@uncoma.edu.ar, alavalle@uncoma.edu.ar

Resumen. Este trabajo resume una investigación que se plasmó en una tesis de maestría cuyo objetivo principal fue el análisis cualitativo del proceso deductivo desarrollado por estudiantes universitarios de Ingeniería. Se analizó cómo el estudiante puede tener una adecuada disposición mental para acceder a procesos de validación. A tales efectos, se diseñaron una serie de actividades experimentales que junto con el marco teórico, desembocaron en un diagnóstico acerca de la actitud de este tipo de estudiantes frente a procesos de validación. Este diagnóstico generó un modelo didáctico que atenúa el problema de este tipo de estudiantes a la hora de enfrentarse a la demostración. Evitando actitudes rituales y memorísticas y propiciando la reproducción de pruebas matemáticas desarrolladas por el docente en clase.

Palabras clave: validación, deducción, demostración, modelo didáctico

Abstract. This paper summarizes the research that resulted in a master's thesis and whose main objective was the qualitative analysis of deductive process developed by university students from Engineering. It is analyzed as the student, you may have an adequate mental disposition to access validation processes. For these purposes, it is designed a series of pilot activities that together with the theoretical framework, resulted in a diagnosis about the attitude of this kind of students compared to validation processes. This diagnostic generated a teaching model that mitigated the problem of this kind of students getting to grips with the demonstration. Avoiding attitudes rituals and memory and by promoting the reproduction of mathematical proof developed by the teacher in class.

Key words: validation, deduction, proof, teaching model

Introducción

Este trabajo resume una investigación que se plasmó en una tesis de maestría en Educación Matemática. El objetivo principal de esta investigación fue realizar un análisis cualitativo para determinar las dificultades de abordaje del estudiante universitario de Ingeniería en el razonamiento deductivo y la demostración de proposiciones matemáticas, generando un modelo didáctico que permita el mejoramiento de estos procesos.

Breve marco teórico

En Argentina, el estudiante de Ingeniería a la hora de validar proposiciones actúa por lo general, realizando verificaciones aleatorias para algunos casos particulares. Balacheff (2000) precisamente introduce una clasificación acerca de los modos de demostrar que puede presentar un estudiante, donde esta forma se encuentra presente. Clasifica las demostraciones en pragmáticas y conceptuales o deductivas. Las pragmáticas se subclasifican en: 1) Empirismo ingenuo, donde el proceso de validación consiste en la verificación de la propiedad para unos pocos ejemplos elegidos de manera aleatoria. 2) Experimento crucial, donde los procedimientos de los estudiantes se basan en la elección minuciosa de un ejemplo, con el convencimiento de que esa elección es tal que si se cumple para ese particular caso, se cumplirá siempre y 3) Ejemplo genérico, que corresponde a procedimientos basados en la elección y manipulación de un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase. Las conceptuales se subclasifican en: 1) Experimento mental, los estudiantes interiorizan las acciones realizadas previamente (generalmente observación de ejemplos), y las disocian para establecerlas en argumentos abstractos deductivos. 2) Cálculo sobre enunciados, donde se establecen construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, que se originan en una definición o propiedad. Existen numerosos trabajos descriptivos sobre los modos de demostrar del estudiante, siendo la geometría, génesis de la clasificación citada y otras derivadas. Bell (1976) fue pionero en este tipo de clasificaciones y analizó el tipo de respuesta que puede presentar un estudiante frente a un proceso de validación, siguiéndoles: Harel y Sowder (1998) y Marrades y Gutiérrez (2000), entre otros.

Metodología

Para el desarrollo de esta investigación se elaboró en primera instancia una encuesta destinada a todos los profesores de Matemática Pura y Aplicada de una Facultad de Ingeniería. Esta encuesta, se implementó a través del correo electrónico y constó de 13 preguntas abiertas. El total de docentes entrevistados fue 17, entre los que se encontraban: ingenieros de diferentes especialidades, estadísticos y profesores de matemática. Entre las cuestiones planteadas a los docentes, se les preguntó acerca de su experiencia como estudiantes frente a la demostración matemática; cómo estudiaban estos desarrollos y cómo los implementaron en el aula como docentes. Finalizada la encuesta docente, se tomó una muestra no aleatoria de 42 estudiantes ingresantes a Ingeniería de la misma Facultad en que fueron entrevistados los docentes. A estos estudiantes se les aplicaron 5 ejercicios de validación y luego una encuesta. En la encuesta, se les preguntó esencialmente acerca de cuándo el docente recurrió a explicaciones a través de la visualización para desarrollar determinados contenidos o para efectuar determinadas demostraciones; y si esto resultaba útil o no para facilitar el aprendizaje. En cuanto a la demostración, se les interrogó sobre si comprendían los desarrollos realizados por el docente en clase; en qué forma los estudiaban; si eran capaces de reproducir una versión propia; si la prueba sumaba o quitaba a la comprensión de una proposición y finalmente si recibieron alguna formación respecto a la estructura de una demostración. De los ejercicios de validación aplicados a los estudiantes solo se mostrarán en este trabajo por cuestiones de espacio, solo tres. Esta selección se realizó en función del nivel de representatividad de los ejercicios. Los ejercicios consistieron en una serie de proposiciones a validar, siendo creciente el nivel de complejidad de las mismas. El estudiante en la primer proposición cuantificada existencialmente solo debió exhibir un caso para establecer la verdad de la misma; la segunda proposición cuantificada universalmente, requirió también de la exhibición del caso que permite determinar el valor falso de la misma (contraejemplo), para finalmente en la tercer y cuarta proposición, ambas cuantificadas universalmente, el estudiante debió recurrir a una prueba para establecer la validación, basada en el raciocinio y la abstracción. En los ejercicios 1 y 2 se analizó el tipo de respuesta brindada por el estudiante, lo que incluyó el tipo de razonamiento seguido. En el ejercicio 5 se analizó únicamente el razonamiento seguido incluyéndose en esto, el tipo de respuesta obtenida. Para el tipo de razonamiento seguido se tomó estrictamente la clasificación de Balacheff (2000), mientras que para el tipo de respuesta, se consideró una clasificación inspirada en Bell (1976); Marrades y Gutiérrez (2000) y Harel y Sowder (1998). A cada estudiante se le entregó una hoja adjunta con definiciones, conceptos, identidades, etc. que pudiera requerir, a los efectos de que se concentrara exclusivamente en el razonamiento y no se distrajera recordando estructuras conceptuales implícitas en los ejercicios propuestos de validación.

Ejercicio 1: Decide el valor de verdad de la siguiente proposición, explicando que razonamientos sigues para justificar la elección: $\exists x \in R/(x-1)(x-2)(x-4)=0.$

Este ejercicio apela a observar en el estudiante, la noción de recuento discreto, que implícitamente permite una noción de cuantificación y que se desarrolla entre los estadios preoperacional y el comienzo de las operaciones concretas. (Piaget e Inhelder, 1972).

Ejercicio 2: Para la siguiente proposición: $\forall x \in R: |x| < 0$, idéntico pedido al ejercicio 1. La idea de este ejercicio fue observar cómo el estudiante reaccionaba intuitivamente frente a una proposición cuantificada universalmente pero falsa. Primero ver cómo evaluaba su valor de verdad, y luego cómo lo validaba. Lo esperado del estudiante es que pudiera probar la falsedad de la proposición utilizando un contraejemplo, o bien justificarlo a través de la definición de valor absoluto o su interpretación geométrica.

Ejercicio 5**:** Considera las siguientes proposiciones verdaderas: i. Si un número entero es par, entonces su cuadrado es par, ii. Si un número entero es impar entonces su cuadrado es impar. ¿Cómo probarías la verdad de cada una de las mismas?

Aquí directamente se da por sentada la verdad de cada proposición e interesaba cómo el estudiante validaría cada una. Se esperaba que partiendo de un número hipotético, par o impar, elevara al cuadrado cada uno, y luego analizara el resultado obtenido.

Tipos de respuestas exhibidas por el estudiante

Clasificación Ejercicio 1: Completa universal: El estudiante encuentra y comprueba el conjunto finito completo de los casos requeridos. *Incapacidad frente a verdad universal=Incapacidad Bell:* El estudiante es incapaz de encontrar todos los casos requeridos. *Completa existencial:* El estudiante encuentra y comprueba que se requiere un único caso para probar la validez. *Incompleta inconsistente:* El estudiante determina el valor de verdad de la proposición pero no justifica su decisión. *Incompleta inconexa***:** El estudiante determina el valor de verdad de la proposición pero justifica inadecuadamente su decisión. *Incompleta existencial:* El estudiante detecta que existe algún caso que prueba la validez de la proposición pero no lo indica. *Incapacidad frente a verdad existencial:* El estudiante es incapaz de dilucidar que la verdad de la proposición se comprueba con solo encontrar un valor que la satisfaga.

Clasificación Ejercicio 2: Falsedad universal completa: El estudiante encuentra y comprueba el único caso requerido que le permitirá probar la falsedad. *Falsedad universal incompleta:* El estudiante detecta la falsedad de la proposición y no encontrando el contraejemplo justifica con argumentos consistentes. *Falsedad universal inconexa:* El estudiante detecta la falsedad de la proposición y no encontrando el contraejemplo, intenta justificar tal falsedad con argumentos erróneos. *Incapacidad frente a Falsedad universal:* El estudiante es incapaz de detectar tal falsedad. *Falsedad universal inconsistente:* El estudiante detecta la falsedad de la proposición pero no justifica su decisión.

Clasificación Ejercicio 3: Obedece a los lineamientos de Balacheff (2000).

Resultado de los ejercicios

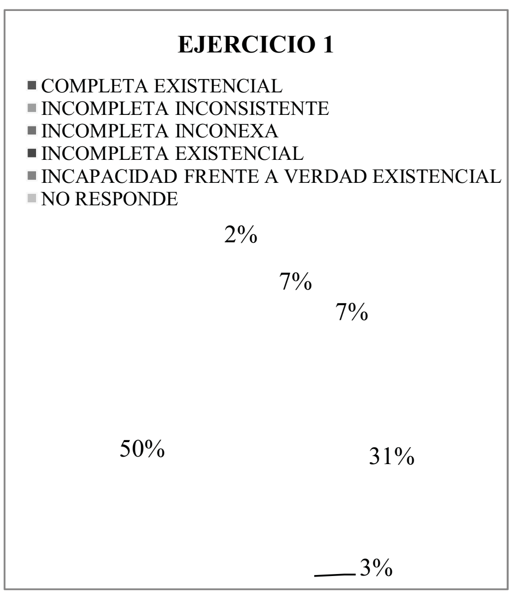


Figura 1: Resultados del Ejercicio 1

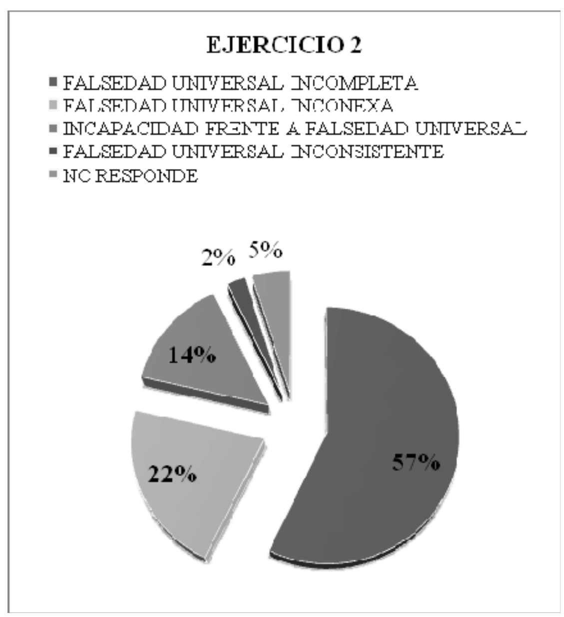


Figura 2: Resultados del Ejercicio 2

Figura 3: Resultados del Ejercicio 5.

Modelo didáctico propuesto

Los resultados de las encuestas docentes, ejercicios y encuestas a los estudiantes permitieron formular un diagnóstico que resume los resultados del modo siguiente: El estudiante ingresante a Carreras de Ingeniería requiere en los cursos de Matemática, comprender la demostración de proposiciones verdaderas no axiomáticas y teoremas. Tiene profundas dificultades para su comprensión, y más aún para reproducirlas, producto del retardo del desarrollo del pensamiento formal y la supresión de desarrollos teóricos en el área de Matemática en el ciclo medio. A esto se suma la experiencia personal de los docentes que valoran la formación recibida en la demostración de proposiciones y teoremas pero asimismo reniegan de aprendizajes memorísticos implícitos en estas cuestiones. Como consecuencia de estas experiencias y la reticencia de los estudiantes a incorporar estos contenidos, debilitan estos procesos en el aula. Con base en el diagnóstico y el marco teórico se propuso un modelo didáctico para la presentación y evaluación de demostraciones de proposiciones verdaderas no axiomáticas y teoremas. Éste se traduce a una secuencia conductista de tareas, que implícitamente tienden a generar el desarrollo del razonamiento lógico y la disciplina de la inteligencia en el estudiante. La secuencia de tareas es la siguiente: I. Accesibilidad del lenguaje Matemático: Generación por parte del docente de un prolegómeno acerca de elementos esenciales que hacen a la construcción del lenguaje matemático en todo curso inicial de Matemática universitaria que utiliza esta disciplina científica como herramienta. II. Interpretación coloquial de las proposiciones: Es fundamental que el estudiante pueda apropiarse de su significado, desde su propio lenguaje. III. Verificación: La exhibición de ejemplos contribuye notablemente a incrementar la apropiación de lo postulado por la proposición a validar. IV. Visualización: Esta acción, puede ser la interpretación geométrica de la proposición a demostrar ya sea a través de un diagrama a mano alzada o la utilización de un software matemático apropiado. V. Simbolización: Luego de cumplidas las etapas precedentes, entonces es posible presentarle al estudiante la proposición a demostrar desde el lenguaje que le es propio a la Ciencia Matemática. VI. Elementos epistemológicos de la proposición a demostrar: En esta etapa el estudiante deberá detectar hipótesis, hipótesis implícitas y tesis de la proposición a demostrar. VII. Contenidos implícitos de la proposición a demostrar: Aquí el estudiante deberá reunir la información más relevante que se necesita para la prueba y que está implícita en la etapa anterior. VIII. Pregunta de abstracción: Esta etapa está tomada de Solow (1992) y es la clásica pregunta de abstracción que un estudiante debe plantearse a la hora de abordar la prueba que quiere realizar. Este tipo de pregunta es coloquial, donde no interviene el lenguaje matemático y tiene que ver con el planteo específico de la situación implícita en la proposición que se quiere demostrar. Se detalla un ejemplo en párrafo aparte. IX. Guía secuenciada: Detallada en párrafo siguiente. X. Artificios: Esta etapa se lleva a cabo cuando el proceso de validación de la proposición a demostrar requiere de artificios en su desarrollo. La idea es desglosarlos secuenciadamente, estudiando su proceso epistemológico. No es objetivo de este trabajo detenerse en este análisis. Para quien desee profundizarlo, se recomienda leer el artículo: El artificio Matemático (D´Andrea, 2010). XI. Recomendaciones para el docente acerca de la redacción de la guía secuenciada y la implementación de este modelo.

Pregunta de abstracción: Por ejemplo, si se quiere probar lo planteado en el ejercicio 5 para los estudiantes, la pregunta de abstracción para este caso sería: ¿Cómo puedo demostrar que el cuadrado de un número entero es par?

Guía secuenciada

La Guía Secuenciada es una serie de instrucciones que describen la sucesión de argumentaciones que estructuran la prueba. Estas deben ser elaboradas por el docente inicialmente y gradualmente es el estudiante quien debe hacerlo a efectos de mostrar el nivel de comprensión alcanzado. La habilidad ‘demostrar’ no es requerida por estudiantes de ingeniería, pero si la capacidad de razonamiento implícito y precisamente la idea de la Guía es conducir al estudiante por ese camino, evitando actitudes rituales y memorísticas. Poincaré (1981) manifiesta que una demostración matemática es una cadena de silogismos ordenados, donde el orden y su intuición es fundamental para la realización de una demostración que trasciende a su memorización. Se expone a continuación un ejemplo:

Criterio de la derivada primera para la determinación de la monotonía de una función. Caso funciones estrictamente decrecientes. Enunciado: f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $\forall x \in (a,b): f'(x) > 0 \Rightarrow f\ es\ estrictamente\ creciente\ en\ (a,b)$. Prueba: Sea $[x,y] \subset [a,b], f$ resulta continua en $[x,y]$ por ser éste, subconjunto del intervalo donde la función es continua por hipótesis. Algo similar ocurre con la derivabilidad de f en el subintervalo $(x,y) \subset (a,b)$. Resulta entonces que por el Teorema del valor medio del Cálculo Diferencial, $\exists c \in (x,y) / f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)(*)$. $y - x > 0$ por ser la medida de la amplitud de un intervalo; $f'(c) > 0$ por hipótesis. El producto del segundo miembro de (*) es positivo, resultando el primer miembro, también positivo.

Así, teniendo en cuenta la definición de función estrictamente creciente: $f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(x,y) \subset (a,b)_{Q.E.D.}$

Guía Secuenciada: Considerar la función de la hipótesis en un subintervalo $[x,y]$ del dominio. Previa verificación de las hipótesis del teorema del valor medio del Cálculo Diferencial en el subintervalo citado, aplicarlo a tal función. Analizar el signo de uno de los miembros de la igualdad obtenida, producto de la aplicación del teorema citado. En base a esto, se podrá arribar a la tesis, teniendo en cuenta la definición de función estrictamente creciente en el subintervalo considerado.

Conclusiones

Las encuestas docentes revelaron la valoración de estos respecto a la formación recibida en la demostración de proposiciones verdaderas no axiomáticas y teoremas en sus carreras de grado, ponderando que el tipo de razonamiento utilizado influyó posteriormente en su carrera profesional. Manifestaron que a la hora de haber estudiado tales contenidos debían recurrir a la memoria para retener secuencias y artificios, declarando mayoritariamente no haber recibido formación respecto a la estructura interna de un teorema. A pesar de esto, no hacen demasiado hincapié en las demostraciones en sus clases y como consecuencia tampoco a la hora de evaluar. Una razón relevante es la dificultad y reticencia del estudiante, cada vez más agudizada, de recibir estos contenidos y más aún de reproducirlos. Los docentes hacen hincapié en su mayoría, en la visualización de proposiciones verdaderas a demostrar, previo al desarrollo de la prueba formal en el caso de ser realizada. Los ejercicios realizados por los estudiantes manifestaron desconocimiento del lenguaje matemático, lo que dificulta la lectura de proposiciones y su validación. Situación agudizada con la supresión de contenidos teóricos en el ciclo medio. Algunos estudiantes manifestaron que les gustaría poder reproducir sus propias versiones de las pruebas dadas por el docente o el libro de texto, pero les resulta una tarea difícil y terminan aceptándolas ritualmente con una relativa comprensión. La existencia de la demostración para el estudiante es un acto ritual, que debe ser repetido o imitado más allá de constituirse en una herramienta con una función explicativa sustentada en un sistema de validación cuya construcción pueda sea aceptada por el estudiante y su entorno. (Azcárate Giménez, 1998).

Observación final: El presente trabajo es una síntesis de las ideas principales de la tesis de maestría: Análisis del razonamiento deductivo de estudiantes de Carreras en Ciencias Naturales e Ingenierías en el proceso de validación de proposiciones matemáticas, defendida el 30 de abril de 2010 y publicada por Editorial Académica Española en junio de 2012. La tesis mencionada fue realizada en el marco del programa de Maestría en Educación en Ciencias con mención en Matemática de la Universidad Nacional del Comahue situada en la ciudad de Neuquén, Argentina.

Referencias bibliográficas

Azcárate Giménez, C. (1998). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 1 (2), 235-243.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una empresa docente. Universidad de Los Andes.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23 – 40.

D´Andrea, R.E. (2010). El Artificio Matemático. Reflexión e intento de solución. En: M.E. Ascheri, R.A.Pizarro, N.Ferreyra. (Comp. y Ed.), *Actas de III Reunión Pampeana de Educación Matemática* III (pp. 53-64). La Pampa: EdUNLPam

D´Andrea, R.E., Curia, L. y Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En: A. H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky. (Eds.), *Research in Collegiate mathematics education III* (pp. 243-283). Providence: American Mathematical Society.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 87-125.

Piaget, J.e Inhelder, B. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós.

Poincaré, H. (1981). *La Ciencia y el Método*. México: CONACyT.

Solow, D. (1992). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*. México: Noriega Editores.

LAS TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS EN LOS LIBROS DIDÁCTICOS DEL 6º AÑO RECOMENDADOS POR EL PNLD

Maurício de Moraes Fontes, Dineusa Jesus dos Santos Fontes
I Escola Técnica Magalhães Barata – ETEMB-PA Brasil
mauriciofontes@gmail.com, dineusa@gmail.com

Resumen. El presente informe tiene como objetivo verificar los Libros Didácticos de Matemática del 6º año de Educación Primaria que trabajan el tema de Transformaciones Isométricas de acuerdo con las recomendaciones de los Parámetros Curriculares Nacionales (PCN). La Metodología utilizada fue la cualitativa con estudio exploratorio. La muestra fue compuesta de nueve de los diez libros recomendados por el Plano Nacional del Libro Didáctico (PNLD) 2011 – 2013. Los resultados muestran que a pesar de la importancia del tema en innumerables aplicaciones en las Matemáticas, Física, Química, Artes, etc., ni todos los libros atienden las recomendaciones de los PCN.

Palabras clave: transformaciones isométricas, libro didáctico, enseñanza fundamental, PNLD

Abstract. IThis study aims to verify whether the textbooks of Mathematics - 6th grade of elementary school work the theme of Isometric Transformations according to the recommendations of the National Curriculum Parameters (PCN). The methodology used was a qualitative study with exploratory study. The sample consisted of nine from the ten books recommended by the National Textbook (NPDB) from 2011 to 2013. The results show that despite the importance of the theme in many applications in Mathematics, Physics, Chemistry, Arts, etc., not all books attended the recommendations of the PCN.

Key words: isometric transformations, textbook, basic education, PNLD

Introducción

De acuerdo con las recomendaciones de los Parámetros Curriculares Nacionales (PCN), “el estudio de la geometría es un campo fecundo para trabajar con situaciones problema y es un tema por el cual los alumnos se interesan naturalmente” (Brasil, 1998, p. 49).

De esa forma, la enseñanza de la geometría tiene un papel esencial en la formación de los alumnos de la Educación básica (6º al 9º año) – La Enseñanza Fundamental en Brasil comprende los discentes entre 11 y 14 años.

En esa formación, los docentes tienen que trabajar situaciones donde se explore formas de visualización en ejemplos comunes para los estudiantes. Por tanto, “la Geometría es una parte de las ciencias matemáticas que podría ser más explorada en la enseñanza básica. La geometría proporciona que trabajemos de manera más dinámica” (Ripplinger, 2006, p. 20).

Por su importancia en la sociedad, donde miramos muchas situaciones en que los estudiantes pueden aplicar los conocimientos geométricos como: la ingeniaría, la arquitectura, la mecánica, las artes, etc., se comprueba que el trabajo geométrico debe estar presente en las escuelas de Enseñanza Básica y Medía Superior.

Una de las partes de la Geometría que proporciona una visión general en los campos expuestos arriba son las Transformaciones Isométricas.

La elección del tema de las Transformaciones Isométricas (Translaciones, Rotaciones y Reflexiones, Simetría Axial y Central) se da por las innumerables aplicaciones en las matemáticas, Física, Química y Artes, etc., siendo así, "las Isometrías constituyen una de las áreas de las matemáticas con mayor variedad de aplicaciones, tanto en otras partes de las matemáticas como fuera de ellas" (Jaime y Gutiérrez, 1996, p.9).

Ese pensamiento es reforzado por (Imenes y Lelis, 2009, p. 58) que citan algunas razones para el estudio de la simetría:

- La ampliación de la percepción geométrica.
- Su presencia en la naturaleza.
- Su importancia en las artes visuales.
- Su uso en la matemática, posibilita descubrir y demostrar propiedades geométricas y algebraicas.

Esas ideas son compartidas por Mabuchi (2000) en su tesis de maestría, que concluyó su trabajo resaltando que:

> La formación del futuro profesor de matemática debe atender a los innúmeros aspectos que envuelve la enseñanza de las Transformaciones Geométricas y algébricas, mas, al mismo tiempo, acompañar las investigaciones didácticas, los análisis de currículos escolares y de libros didácticos, estimulando en los docentes actitudes investigadoras sobre las concepciones de sus alumnos. (Mabuchi, 2000, p. 196).

El libro didáctico muchas de las veces es el único recurso que el profesor tiene para trabajar los contenidos escolares recomendados por los currículos municipal, estatal y federal. Por eso, el catedrático tiene una responsabilidad muy grande en la selección de los textos escolares para su uso en el aula.

Aludiendo al párrafo anterior, en este trabajo se pretende verificar que los Libros Didácticos de Matemática del 6° año trabajan el tema de Transformaciones Isométricas de acuerdo con las recomendaciones de los PCN.

La importancia de la enseñanza de las transformaciones isométricas

En la enseñanza fundamental,

> en innumerables objetos físicos ocurren aproximaciones de planos de simetría de reflexión. En representaciones planas de esos objetos, tales planos de simetría se reducen a ejes de simetría. En el cuerpo humano se puede observar (aproximadamente) un plano de correspondencia. Así, también la imagen de un objeto en el espejo es simétrica a él. Hay ejes de simetría en diversas creaciones del hombre, como diseños de aeronaves, edificios y muebles. (Brasil, 1998, p. 124)

Esas recomendaciones establecidas por el PCN sobre el uso de las simetrías en el contexto social de alumno, son reforzadas por innúmeros investigadores, entre ellos, se destaca.-

> La integración y la aplicación de la Geometría en otros campos del conocimiento permiten instigar ideas y proponer aplicaciones prácticas para que podamos enfrentar problemas reales, en general, de naturaleza interdisciplinar. El trabajo hecho a partir de la exploración de los objetos del mundo físico, de obras de arte, pinturas, dibujos, esculturas y artesanía posibilitara que los alumnos establezcan conexiones entre la matemática y otras áreas del conocimiento. (Mori y Onaga, 2009, p. 16)

Esas conexiones son realizadas por medio de varios recursos, entre ellos destacamos: la incorporación de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), los libros de textos, las obras de arte, el trabajo con regla y compás, etc., para proporcionar al alumno una variedad de situaciones de aprendizaje.

Con eso,

> es posible presentar su estudio en diferentes contextos como el campo elemental de los materiales manipulativos tradicionales (espejos, plegado, regla y compás, etc.), el informático (operando en lenguajes de programación como el Logo, en programas construidos ex profeso, o en programas tipo “cad”, “draw” o “paint”), el de los problemas reales (trabajando en situaciones relacionadas, con la arquitectura, la publicidad, la industria, el arte, la química, etc.), o el puramente matemático (en el que se estudian las propiedades algebraicas que permiten organizar las diferentes isometrías). (Jaime y Gutiérrez, 1996, p. 9)

Por la riqueza de situaciones en el cotidiano del alumno, es que la enseñanza de las Transformación Isométricas es esencial en la formación de los estudiantes, pues, “muchos objetos, elementos de la naturaleza y construcciones presentan simetría” (Ribeiro, 2009, p. 99).

Otro hecho que justifica la enseñanza de las Transformaciones Geométricas en el currículo de la Enseñanza básica es la posibilidad del discente de diferenciar cuándo una figura es congruente o semejante a otra figura por medio de situaciones propuestas en los libros didácticos. A este hecho, "el estudio de Simetría tiene como objetivo auxiliar en conceptualizaciones de semejanza y congruencia, buscando que los alumnos desarrollen la capacidad de percibir si dos figuras poseen o no la misma forma y mismo tamaño, independiente de la posición que ellas ocupan en el plano" (Souza y Pataro, 2009, p. 57).

El libro didáctico de matemática

El Programa Nacional del Libro Didáctico (PNLD) es el más antiguo de los programas dirigido a la distribución de obras didácticas a los estudiantes de la Red de Enseñanza Brasileña y tuvo inicio, con otras denominaciones, en 1929.

A lo largo de 70 años aproximadamente, el programa fue mejorando y tuvo diferentes nombres y formas de ejecución. El PNLD es dirigido para la enseñanza fundamental pública, incluyendo las clases de alfabetización infantil.

El programa prevé la universalización de libros didácticos para alumnos de enseñanza fundamental pública de todo el país. Uno de los objetivos del programa es proporcionar a los alumnos de enseñanza fundamental, material didáctico de calidad a su disposición para que ellos puedan utilizar los textos para estudiar. Otro objetivo del programa es fornecer al docente de enseñanza fundamental material didáctico para su continua formación por medio de textos que son distribuidos gratuitamente por el gobierno.

> De acuerdo con las orientaciones de los PCN, "los recursos didácticos como libros, videos, televisión, radio, calculadoras, computadoras, juegos y otros materiales tienen un papel esencial en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Todavía, ellos precisan estar integrados a situaciones que proporcionen al ejercicio del análisis y de la reflexión" (Brasil, 1998, p. 56).

En algunas ocasiones los textos didácticos son las únicas fuentes de informaciones de muchos estudiantes.

> El aprendizaje puede tornarse más significativo, cuando diferentes formas de representación son contempladas en el libro didáctico. Aún de valorar un abordaje interdisciplinar con diferentes textos, se espera que el libro presente números, ecuaciones, figuras, tablas, gráficas, símbolos, dibujos, fotos entre otros elementos que contribuyan en las estrategias de articulación entre contenidos y

disciplinas. Cuanto más intensas fueren la interactividad y la articulación más significativa será el aprendizaje. (Pais, 2006, p.52)

De esa manera, los profesores de las escuelas públicas tienen que indicar para su uso en el aula con sus alumnos los libros que reflejan las orientaciones de los PCN (Parámetros Curriculares Nacionales) para alcanzar los principios orientadores en tal documento. Uno de esos principios es que:

> La Matemática es importante en la medida en que la sociedad necesita y se utiliza, cada vez más, en conocimientos científicos y recursos tecnológicos, que a su vez son esenciales para la incorporación de las personas como ciudadanos en el mundo del trabajo, de la cultura y de las relaciones sociales. (Brasil, 1998, p. 56)

Para Bianchini en el Suplemento con orientaciones para el profesor.

> En general, los recursos presentes en las salas de aula no son suficientes para fornecer todos los elementos necesarios al trabajo del profesor y al aprendizaje del alumno. En este caso, el libro didáctico desempeña un papel importante, asesorando grande parte de ese proceso, como organización y encaminamiento de la teoría y propuestas de actividades y ejercicios. Así, el libro didáctico pasaría a ser un aliado en el proceso de enseñanza y aprendizaje, como más un interlocutor para el dialogo entre educador y educando. (Bianchini, 2006, p.10).

La metodología

Este informe es de carácter cualitativo con estudio exploratorio pues, "en general, los estudios exploratorios responden a la necesidad de lograr claridad sobre la naturaleza del problema o de alguna de las variables o aspectos en él implicados, buscando lo nuevo por sobre la confirmación de lo que ya sabemos" (Vieytes, 2004, p. 90). En ese sentido, investigamos en nueve de los diez libros de matemática recomendados en el PNLD para el trienio 2011 – 2013, en los Libros Didácticos de Matemática del 6° año trabajan el tema de Transformaciones Isométricas de acuerdo con las recomendaciones de los PCN.

Análisis de los libros didácticos

Autor(es)	Libro	Editorial	Año de publicación	Transformaciones Isométricas
Mori y Onaga	Matemática: ideas e desafíos	Saraiva	2009	Las autoras introducen la idea de giro para definir ángulo. En la unidad 7 las autoras trabajan con polígonos y simetría.
Ribeiro	Projeto Radix: Matemática	Scipione	2009	El autor presenta un capítulo (8) para trabajar el tema de simetría.

Giovanni Júnior y Castrucci	A Conquista da Matemática	FTD	2009	En la unidad 4 subunidad 17, los autores utilizan la idea de giro para definir ángulo. Los autores no presentan ninguna unidad específica de simetría.
Souza y Pataro	Vontade de Saber Matemática	FTD	2009	Los autores presentan el capítulo 13 destinado al tópico de simetría.
Iezzi, Dolce y Machado	Matemática e Realidade	Atual	2009	Los autores no presentan ningún capítulo sobre el tema de simetría.
Bianchinni	Matemática	Moderna	2006	El autor no presenta ningún capítulo destinado al tema de simetría, entre tanto en el capítulo 5 el autor utiliza la idea de giro para definir ángulo.
Centurión y Jakubovic	Matemática na medida certa	Scipione	2010	Los autores presentan en el capítulo 2 la unidad denominada simetría axial.
Imenes y Lelis	Matemática	Moderna	2009	Los autores utilizan la idea de giro para definir ángulo. Los autores también presentan un capítulo para trabaja la simetría.
Dante	Tudo é Matemática	Ática	2010	El autor presenta una unidad para trabajar con simetría

Tabla 1: Comparación de los libros didácticos recomendados por el PNLD

De acuerdo con el análisis de los libros recomendados por el PNLD 2011 – 2013, algunos libros no presentan en su contenido las Transformaciones Isométricas.

Los autores Giovanni Júnior y Castrucci (2009) y Bianchini (2006) introducen el tópico de ángulo con la idea de giro. Esa es la única mención que los autores hacen en sus libros sobre las Transformaciones Isométricas.

Los autores Giovanni Júnior y Castrucci (2009) presentan en el final del libro un cuaderno de consejos para el Profesor, que en la página 23, orienta "Transformación de una figura en el plano por medio de reflexiones, translaciones y rotaciones e identificación de medidas que permanecen constantes en esas transformaciones (medidas de los lados, de los ángulos, de la superficie)". Entre tanto, en el libro del 6° año no trabajan tales transformaciones de forma más concisa y sí de forma superficial (giros). Este hecho es confirmado en otra investigación, que afirma, "la presencia del tema en los currículos es bastante notable. Entre tanto, los libros didácticos abordan el tema de manera tímida, superficial y desconectada" (Mabuchi, 2000, p. 192).

El libro de Iezzi, Dolce y Machado (2009), no presenta el tópico de Transformaciones en el Plano.

Ya los otros autores trabajan la simetría axial en el libro del 6° año, con los siguientes objetivos: reconocer figuras simétricas, identificar el eje de simetría y dibujar figuras simétricas.

Consideraciones Finales

La importancia de las simetrías es destacada en muchas situaciones del cotidiano de los alumnos y alumnas.

> La Simetría está presente en ornamentos, tejidos, dibujos en cerámicas, bordados, etc., de las más diversas culturas. Montar una exposición con ornamentos simétricos de varias procedencias seria un interesante ejemplo de pluralidad cultural, mostrando que todos los pueblos tienen preocupaciones estéticas que, muchas veces, usan las mismas ideas matemáticas. (Imenes y Lellis, 2009, p. 58)

De esa forma:

> Por medio de ese estudio, el alumno percibe y comprende mejor las figuras geométricas y sus propiedades. La simetría puede ser observada en la fabricación de automóvil, aviones, navíos, bicicletas, predios, muebles, etc., bien como en el cuerpo humano, en las plantas, en las aves, en los insectos y en los cristales. Además, confiere un toque de belleza, estética, regularidad y armonía en confecciones, en los papeles de pared, en los mosaicos, en los vitrales y en las artes en general. (Dante, 2010, p. 62)

A pesar de la importancia al tema de simetría, nos percatamos por medio de la revisión de los libros didácticos recomendados, que algunos autores no dan la debida importancia al tema investigado en el presente trabajo.

Esperamos que esos autores que no presentaron de alguna forma el tópico de Transformaciones Isométricas en los libros didácticos analizados en este informe, puedan en la próxima edición del PNLD, incluir el tema de Transformaciones Isométricas en sus textos didácticos.

A pesar de que todos los libros didácticos presentan una asesoría pedagógica para orientar el profesor en el proceso de enseñanza y aprendizaje, con innúmeras sugestiones para la mejoría de la formación docente, entre ellas destacamos: el uso de juegos, la historia de las matemáticas, resolución de problemas, las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), etc., la mayoría de ellos no utiliza tales recursos.

Esas propuestas para mejorar el trabajo docente aliadas al libro didáctico, son esenciales en el proceso pedagógico pues, "a la medida que surgen propuestas en el sentido de contribuir para superar lagunas existentes en la enseñanza de la geometría observamos los avances en la enseñanza de la misma y, en su interior, la valorización del asunto Simetría" (Ripplinger, 2006, p. 23).

A través de ese recorte de los resultados de nuestra pesquisa, hasta acá presentado, esperamos contribuir para que los profesores puedan evaluar la importancia de la elección del libro didáctico de matemáticas y reflejar sobre el papel de las Transformaciones Isométricas en las clases de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Bianchini, E. (2006). *Matemática*. 6ª Ed. São Paulo: Moderna.

Brasil (1998). *Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Brasília*. MEC/SEF.

Dante, L. R. (2010). Tudo é Matemática. 3ª Ed. São Paulo: Ática.

Fontes, M. M. y Fontes, D. J. S. (2010). Utilização do Software GeoGebra no Ensino de Geometria. *Encontro Nacional de Ensino de Matemática, 10* (pp.1 – 9), Anais. Salvador – BA. Brasil.

Gionanni Júnior, J. y Castrucci, B. (2009). A Conquista da Matemática. São Paulo: FTD.

Iezzi, G., Dolce, O. y Machado, A. (2009). Matemática e Realidade. São Paulo: Atual.

Imenes, L. M. y Lellis, M. (2009). *Matemática*. São Paulo: Moderno.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1996). *El Grupo de las Isometrías del Plano*. Madrid: Editorial Sínteses.

Mabuchi, S. T. (2000). Transformações Geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado ás práticas escolares nem à formação de professores. (Tesis de Maestría no publicada), Pontifícia Universidade Católica – SP). Recuperado el 18 de enero de 2012 de http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/setsuko_mabuchi.pdf

Mori, I. y Onaga, D. S. (2009). *Matemática: Ideias e Desafios.* 15. ed. São Paulo: Saraiva.

Pais, L. C. (2006). *Ensinar e Aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ribeiro, J. S. (2009). *Projeto Radix: Matemática*. 6º ano. São Paulo: Scipione.

Ripplinger, H. M. G. (2006). *A Simetria nas práticas Escolares.* (Tesis de Maestría no publicada), Universidade Federal do Paraná. Recuperado el 15 de febrero de http://dspace.c3sl.ufpr.br:8080//dspace/handle/1884/3951.

Souza, J. R. y Pataro, P.R. M. (2009). *Vontade de Saber Matemática*. São Paulo: FTD.

Vieytes, R. (2004). *Metodología de la Investigación en Organizaciones, Mercado y Sociedad: epistemología y técnicas.* 1. ed. Buenos Aires: De las ciencias.

LINGUAGEM DOS ALUNOS E A INTERAÇÃO DOS CONCEITOS ESPONTÂNEOS E CIENTÍFICOS NA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Walter Aparecido Borges, Maria Helena Palma de Oliveira
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
w.borges.ltda@terra.com.br, mhelenapalma@gmail.com

Resumo. Buscamos identificar características da linguagem produzida por alunos de 1º ano do Ensino Médio de escola pública da cidade de São Paulo na aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas. Focamos os registros de linguagem em transformação e sua relação com a aprendizagem de matemática. Os dados foram obtidos por meio de gravações em sala de aula e fazem parte de pesquisa mais ampla. As análises mostraram a importância do diálogo entre os alunos na construção de conceitos científicos. Verificou-se que no decorrer da atividade o desenvolvimento das falas apontou para uma evolução na generalização dos significados, isto é, na direção dos conceitos científicos.

Palavras chave: conceitos espontâneos, conceitos científicos, linguagem

Abstract. We sought to identify characteristics of language produced by students of 1st year of High School public school in the city of São Paulo in learning of logarithmic and exponential functions. We focus on the records of language in transformation and its relationship to learning math. Data were obtained from recordings in the classroom and are part of a wider research. The analysis showed the importance of dialogue between students in the construction of scientific concepts. It was found that the activity during the development of speech pointed to an evolution in the generalization of meanings, mean in the direction of scientific concepts.

Key words: spontaneous concepts, scientific concepts and language

Introdução

O ensino e a aprendizagem de matemática dependem da linguagem cotidiana. Entre os vários autores que defendem essa dependência destacamos: Duval (2008), Machado (2001) e Sfard (2010). Para esta pesquisa, as relações entre linguagem cotidiana e a matemática formam a base do que nos propusemos a estudar. Um texto de matemática que é lido, tanto pelo professor quanto por um aluno da sala de aula, pode não ter a sua compreensão imediata. É comum, ao final de um enunciado o professor perguntar aos alunos se estes entenderam o que é para fazer e obter um silêncio como resposta.

Consideremos uma situação particular de sala de aula como uma relação harmoniosa entre alunos e professores. Nessa situação, se um aluno decide romper com a sua insegurança e perguntar o que não entendeu ao professor, ele provavelmente o fará auxiliado muito mais pela linguagem cotidiana do que pela linguagem matemática.

Em nossa prática diária como professor de matemática do ensino médio nos últimos anos, observamos as dificuldades apresentadas pelos alunos para interpretar e realizar operações aritméticas, operações com frações, expressões algébricas, equações de primeiro grau e para com as demais atividades da matemática.

Essa constatação mostrou a necessidade de um diálogo mais consistente entre alunos e o professor e também entre os próprios alunos do ensino médio. Buscávamos explorar de modo planejado as possibilidades que as linguagens propiciadas por esse contexto de ensino e aprendizagem em sala de aula permitem. Pretendíamos reforçar o uso da linguagem cotidiana como possibilidade de aproximação e entendimento de conteúdos expressos em linguagem matemática.

A constatação inicial foi ganhando densidade e coerência com o amadurecimento do projeto e dos estudos o que encaminhou o pressuposto de que os processos de linguagem envolvidos na resolução de atividades com funções exponenciais e logarítmicas podem contribuir para a aprendizagem matemática em dois níveis: 1. Podem revelar processos mentais específicos para os quais não temos possibilidade de acesso. Nesse caso, consideramos a relação pensamento e linguagem como unidade indissociável. 2. Os processos de linguagem envolvidos na interação verbal professor-aluno e aluno-aluno trazem elementos essenciais para o entendimento dos progressos e das dificuldades na aprendizagem.

Nesse sentido, buscamos apoio teórico em estudos que consideram a indissociável relação pensamento e linguagem, bem como a relevância dos processos interacionais que ocorrem nos contextos de aprendizagem.

Para este estudo especificamente, buscamos identificar as características da linguagem produzida pelos alunos de primeiro ano do ensino médio de escolas públicas da cidade de São Paulo na aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas. Para tanto, tomaremos como referencial teórico-metodológico os trabalhos de Vigotski (2000, 2010).

Faremos a seguir uma breve exposição desse referencial teórico, que embasa a nossa pesquisa.

Referencial teórico

A linguagem cotidiana pode ser entendida como mediadora da linguagem matemática, não apenas possibilitando a leitura dos enunciados, mas alimentando a elaboração de conceitos, as estruturas lógicas da argumentação e a própria linguagem matemática (Machado, 2001).

Em seu trabalho sobre as primeiras experiências algébricas com alunos da sétima série, Sfard (2010) define a álgebra como um discurso. Para ela, a álgebra é assim caracterizada por ser uma forma de comunicação, baseada em um pressuposto de que o pensamento é individualizado a partir de uma comunicação interpessoal. Para que haja comunicação tanto com os outros quanto consigo mesmo, todos os interlocutores precisam agir de acordo com regras compartilhadas implicitamente entre eles, de maneira que diferentes tarefas podem fazer surgir diferentes conjuntos de regras de comunicação, ou diferentes discursos (Sfard, 2010).

Em seus estudos sobre Psicologia Cognitiva e as suas implicações nos problemas de aprendizagem matemática, Duval (2008), autor da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, classifica a linguagem natural como um dos registros de representação semiótica dos objetos matemáticos. Para ele, há outros registros como o sistema de numeração, as figuras geométricas, os gráficos, as escritas algébricas, entre outros.

De acordo com Duval (2008), o acesso ao conhecimento matemático só é possível por meio da sua representação semiótica. Um objeto físico, como uma cadeira, pode ser representado por um desenho, por um modelo em miniatura, uma fotografia e o objeto físico cadeira pode ser tocado ou manipulado; um objeto matemático como uma função pode ser representado por uma tabela, um gráfico, uma expressão algébrica, por uma frase e o objeto função matemática não pode ser tocado, visualizado ou manipulado a não ser por meio de sua representação semiótica.

Em sua teoria, o autor propõe que se disponha de pelo menos duas representações semióticas diferentes de um mesmo objeto matemático a fim de não se confundir o objeto e a sua representação. Para ele, a compreensão da matemática "está intimamente ligada ao fato de se dispor de ao menos dois registros de representação diferentes. Essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado" (Duval, 2008, p.22).

Para Duval (2008), a linguagem natural é um registro de representação semiótica discursivo, não algoritmizável, empregado nas associações verbais, nas formas de raciocinar, nas deduções válidas a partir de definições ou de teoremas.

Vigotski (2000) estabelece uma relação entre pensamento verbal e a linguagem Segundo ele, o pensamento verbal não engloba todas as formas de pensamento ou todas as formas de linguagem. Afirma que há uma vasta área do pensamento que não apresenta nenhuma relação direta com a linguagem, por exemplo, o pensamento manifesto na utilização de utensílios ou o pensamento prático em geral. Para ele, não há correspondência direta entre o discurso interior e a língua e também não há nenhum processo de pensamento, por exemplo, quando um indivíduo recita em silencio uma poesia decorada ou repete uma frase mentalmente.

Vigotski (2000), afirma que esquematicamente pode-se imaginar o pensamento e a linguagem como dois círculos que se cruzam. Na região onde se sobrepõem, ocorre a junção entre o pensamento e a fala para produzir o que foi por ele chamado de pensamento verbal. Esse tipo de pensamento, assim caracterizado, segundo Vigotski, não contém todas as formas de pensamento ou de fala. Fora da região do pensamento verbal, existe uma vasta área que não preserva nenhuma relação direta com a fala. A figura 1 é uma representação esquemática do pensamento verbal, segundo Vigotski (2000).

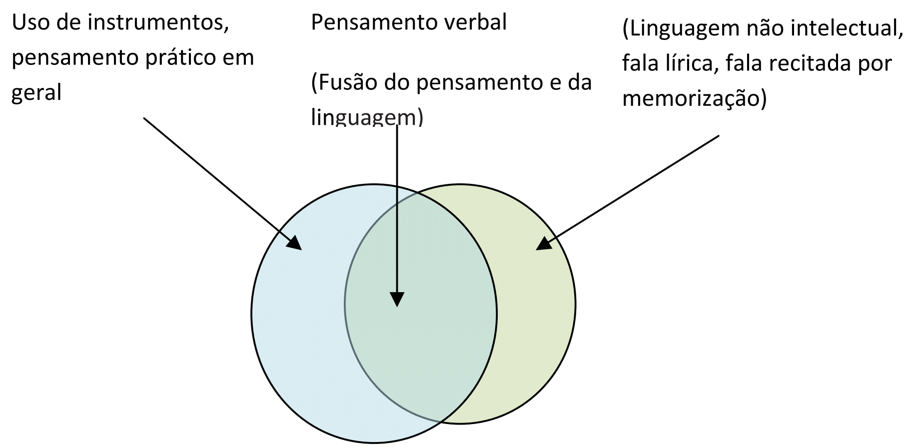


Figura 1- Representação esquemática do pensamento verbal, segundo Vigotski Fonte: Arquivo Pessoal. Baseado em Vigotski (2000, p. 58)

Para esta pesquisa, interessa-nos de modo mais específico a distinção, a relação e o processo de formação e transformação que envolvem os conceitos cotidianos (ou espontâneos) e os conceitos científicos no processo de aprendizagem. Vigotski (2000, 2010) afirma que o desenvolvimento dos conceitos não espontâneos não ocorre mecanicamente, mas evolui ajudado por uma vigorosa atividade mental por parte do aluno. Nas palavras de Vigotski:

> Poder-se-ia dizer que o desenvolvimento dos conceitos espontâneos da criança é ascendente enquanto que o desenvolvimento dos seus conceitos científicos é descendente, para um nível mais elementar e concreto. Isso decorre das diferentes formas pelas quais os dois tipos de conceito surgem. Pode-se remontar a origem de um conceito espontâneo a um confronto com uma situação concreta, ao passo que um conceito científico envolve, desde o início, uma atitude mediada em relação ao seu objeto (Vigotski, 2000, p.135).

Apesar de se desenvolverem em direções inversas, os conceitos científicos e espontâneos estão estreitamente relacionados. Essa relação é explicada por Vigotski como um movimento vertical, ou um esquema, como define o próprio Vigotski (2010), pois os conceitos cotidianos quando forçam seu caminho ascendente, abrem caminho para os conceitos científicos, que se desenvolvem de forma descendente. A assimilação dos conceitos científicos se distingue da assimilação dos conceitos espontâneos aproximadamente como o estudo de uma língua estrangeira difere do estudo da materna e da mesma maneira que a língua materna deve atingir determinado nível para que seja possível a aprendizagem de uma língua estrangeira (Vigotski, 2010).

A aprendizagem de uma língua estrangeira segue um caminho diametralmente oposto se comparada com a assimilação de uma língua materna. Para assimilar a língua materna, a criança não começa memorizando diferenças entre substantivos masculino e o feminino. Mas se for aprender uma língua estrangeira como o alemão, logo será explicado que se a palavra é do gênero masculino ela tem um elemento e terá outro se for do gênero feminino. Se for aprender a língua materna ela não começa a aprender combinando sons, se for aprender uma língua estrangeira começa exatamente daí. Na sequencia, apresentamos a metodologia utilizada para esta pesquisa, considerando principalmente o referencial teórico de Vigotski (2000, 2010)

Metodologia

Os dados para este trabalho foram obtidos de gravações com alunos de primeiro ano do ensino médio de uma escola pública estadual da periferia da zona norte da cidade de São Paulo. As atividades foram realizadas fora do horário de aula e os 10 participantes foram convidados a colaborarem voluntariamente. Todos os participantes ou seus responsáveis legais apresentaram termo de consentimento livre e esclarecido assinado.

Questões específicas foram selecionadas e apresentadas para resolução. Selecionamos para o estudo questões relacionadas com funções exponenciais e logarítmicas. Dividimos as gravações em intervalos significativos, que chamamos de episódios de ensino.

Para essas atividades foram planejadas as gravações de seis sessões de aproximadamente 50 minutos cada uma. Dois gravadores portáteis de áudio e duas câmaras de vídeo foram utilizados para as gravações.

Os alunos foram divididos em grupos e as atividades foram realizadas após o horário das aulas normais. Cada aluno recebeu um texto para ser lido inicialmente em silêncio e depois em voz alta. O objetivo da leitura em voz alta era fazer com que os alunos passassem a discutir as atividades entre si. A disposição dos grupos na sala de aula foi espontânea, os alunos ocuparam os espaços de acordo com a sua escolha.

Destacamos a seguir algumas falas dos alunos participantes da pesquisa para exemplificar a nossa análise.

Análise e discussão

Nas linhas abaixo, verificamos a tentativa de explicação da aluna J para o resultado da expressão $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$: "Em cima (referindo-se ao numerador) tem que fazer uma divisão, ou, tipo assim, qual que é o número que vai dar menos um, tipo na soma, quando você tirar menos um número, menos outro que dá menos um", disse J.

A figura 2 (a) registrou o momento dessa fala.

(a)

(b)

Figura 2 a e b – A aluna J explicando a expressão $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ Fonte: Gravação em vídeo das atividades. Arquivo pessoal

Na sequência da explicação, registrada na figura 1 b acima, a aluna J afirma: "isso aqui é o resultado de uma divisão, por exemplo, dois elevado a zero, dividido por dois elevado a (pausa, pensa um pouco), um". Após essa fala, a aluna CR pergunta "Por que um?" Imediatamente a aluna F responde: "Por que é menos um!" Ato contínuo a aluna CR ainda retruca "Por que zero? Essa é a minha dúvida".

Na primeira fala de J, que se refere à potência $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{2^{-1}}{3^{-1}}$, verificamos uma tentativa de explicação de um objeto matemático que não pode ser manipulado, só pode ser acessado por uma representação semiótica (Duval, 2008). J está usando linguagem cotidiana em sua tentativa de representá-lo de forma compreensível. Podemos perceber claramente que é uma linguagem em construção, embasada em conceitos espontâneos.

Na continuidade da explicação de J, seu pensamento parece se organizar e lhe permite utilizar argumentos de conceitos mais generalizados, na direção de conceitos científicos.

As falas de CR ao questionar o uso dos números um e zero, indicam que ainda não houve uma interação entre seus conceitos espontâneos e o conceito científico em seu pensamento referente à potência $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$.

A resposta de F "Por que é menos um" sinaliza um entendimento mais próximo da explicação de J.

Os diálogos entre J, CR e F revelaram uma tentativa de compreensão das participantes sobre as explicações de J. Como pudemos verificar, essa compreensão ocorreu gradativamente, modificando os diálogos à medida que a compreensão acontecia.

As falas dos alunos mostraram que apesar de terem certa destreza com as operações, não têm a mesma habilidade em demonstrar o domínio dos conceitos envolvidos. É um fato corriqueiro nas aulas de matemática um aluno resolver $2^{-1} = \frac{1}{2}$ sem saber o que significa. As dificuldades de compreensão dos significados emergiram nas perguntas de CR diante da explicação de J e também nas tentativas de explicação de J. Entretanto, verificamos no decorrer da atividade que o desenvolvimento das falas apontou para uma evolução na generalização dos significados, isto é, na direção dos conceitos científicos.

A análise dos diálogos mostrou a complexa interação entre os conceitos espontâneos e científicos na aprendizagem de matemática. Conforme Vigotski (2000), um conceito é mais complexo do que ligações associativas de memória e do que um simples hábito da mente; trata-se de um genuíno ato de pensamento que não pode ser ensinado por uma repetição constante e só pode ser realizado quando o desenvolvimento mental da criança alcançar o nível necessário. O autor afirma que, para qualquer idade, um conceito contido em uma palavra é um ato de generalização. De acordo com ele, não é possível dominar todos esses complexos processos psicológicos apenas por meio de uma aprendizagem inicial. Conforme Vigotski (2000), é impossível e estéril ensinar conceitos de maneira direta; se houver uma tentativa de fazê-lo, não se conseguirá mais do que um verbalismo oco e uma simulação de conhecimento de conceitos. Para Vigotski (2000), para que ocorra o desenvolvimento dos conceitos, muitas funções do intelecto devem ser desenvolvidas, por exemplo, atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar.

Nas atividades analisadas, a aluna apoiou-se em seus conhecimentos espontâneos para a explicação da resolução e percebeu a necessidade de outros apoios e informações. O processo de busca mostrou a necessidade de conceitos mais generalizáveis e forçou seus conceitos cotidianos na direção dos conceitos científicos.

Considerações finais

Constatamos com base nas análises dos diálogos dos alunos, envolvidos em situação de aprendizagem de matemática, que a linguagem destes mostra haver uma intensa atividade mental na interação entre os conceitos espontâneos e o conceito científico. Consideramos que essa interação revela um aspecto importante na elaboração de um plano de aula: ela existe de fato e exige muito mais do aprendiz do que interpretar um enunciado bem escrito ou prestar atenção na explicação bem elaborada do professor.

Outro aspecto importante a considerar é a criação de um ambiente propício para a manifestação da fala do aluno, levando em conta o tempo necessário para que ela ocorra, o tempo do aluno. Como vimos, conforme Vigotski (2000, 2010), a construção de um conceito científico é mediada por outros conceitos. A dificuldade demonstrada por CR evidenciou a mediação ainda precária dos conceitos anteriores que lhe serviriam de base para a compreensão do conceito que estava construindo. Dificuldades como essas podem passar despercebidas em uma avaliação escrita, isto é, uma atividade com sucesso pode ser realizada por um aluno sem que ele tenha se apropriado inteiramente do conceito, uma vez que um exercício pode ser resolvido por imitação.

Referências bibliográfica

Duval, R. (2008). Registros de representação semiótica e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática, In: Machado, S.D. A. (org.) *Aprendizagem em matemática*. (4a ed.). Campinas: Papirus.

Machado, N. J. (2001). *Matemática* e *Língua Materna (Análise de uma impregnação mútua)*. (5a ed.) São Paulo: Cortez.

Sfard, A. (2010). *Abordagem discursiva para o estudo do pensamento matemático*. Curso monográfico, Escola de Altos Estudos da Capes. Uniban, São Paulo.

Vigotski, L. S.(2000). *Pensamento* e *Linguagem.* (3a ed.). (J. L. Camargo, trad.). São Paulo: Martins Fontes.

Vigotski, L. S. (2010). *Psicologia pedagógica*. (P. Bezerra, trad.). São Paulo: Martins Fontes.

PROBLEMAS RUTINARIOS Y NO RUTINARIOS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

René Santos lozano, Santiago Ramiro Velázquez Bustamante
Universidad Autónoma de Guerrero México
santos_oasis@hotmail.com, sramiro@prodigy.net.mx

Resumen. Se presenta un informe de una investigación en proceso conformada por una revisión de los problemas de probabilidad en educación secundaria, un análisis de los problemas de probabilidad que se plantean en los libros de texto de educación secundaria y en los materiales de olimpiadas matemáticas locales e internacionales de este nivel educativo. Con esto se pretende constatar el desarrollo de actitudes hacia las matemáticas de alumnos, cuando solucionan problemas de probabilidad rutinarios o no rutinarios.

Palabras clave: solución de problemas, actitudes

Abstract. A report of an ongoing investigation comprised a review of probability problems in secondary education, an analysis of the problems arising in probability textbooks in secondary education and mathematics materials for local and international Olympiads. With these analyzes is to observe the development of the students' attitudes towards mathematics education, when solving probability problems either routine or nonroutine.

Key words: problemsolving, attitudes

Introducción

Este artículo presenta los aspectos de partida de una investigación que se centra en las actitudes que los alumnos pueden desarrollar en la solución de problemas de probabilidad rutinarios o no rutinarios, consideramos que las actitudes pueden ser positivas si el alumno soluciona problemas no rutinario reales y negativas si soluciona problemas que no son reales y rutinarios.

Alsina, Fortuny y Pérez (1997) consideran que las actitudes se refieren a la apreciación de las matemáticas y a la organización y hábitos de trabajo en esta asignatura. En la apreciación están incluidas la disposición del alumno para hacer matemáticas, el reconocimiento de las matemáticas en su formación y en el desarrollo de la sociedad, así como la valoración positiva de las matemáticas en las prácticas sociales y una postura crítica al leer y practicar diversas situaciones. En tanto que en los hábitos de trabajo se considera la perseverancia en la construcción o búsqueda de estrategias de solución, la búsqueda sostenida del conocimiento por medio del trabajo colaborativo, así como el interés y el respeto por los opiniones de sus compañeros.

Para definir las actitudes positivas y negativas consideramos la concepción de (Velázquez, Slisko, y Nolasco 2012) cuando sostienen que una actitud positiva en el ámbito de las matemáticas refleja el interés del alumno en la construcción, aplicación y difusión del conocimiento asumiendo la responsabilidad de sus acciones y las actitudes negativas se constituyen por la indiferencia, la escolarización, el rechazo y la imposición de criterios.

Por su parte, Baroody (1988) señala que en los problemas rutinarios, los datos y la incógnita están claramente especificados, hay una única solución y el camino para obtenerla es fácilmente deducible. En los problemas no rutinarios, la información que se suministra o bien es insuficiente o hay datos que sobran, existen distintas estrategias de resolución, pueden existir distintas soluciones o bien no tener solución alguna. Estos problemas son muy interesantes porque incitan a la reflexión, a la búsqueda de datos relevantes, estrategias y técnicas satisfactorias de solución, acotamiento de las posibles soluciones o identificación de problemas sin solución.

Para mostrar una idea de los problemas a que nos referimos presentamos los siguientes ejemplos.

Problema 1. Una bolsa contiene 350 galletas, de las cuales algunas son redondas y las demás son cuadradas. De estas 350 galletas, 200 son saladas y el resto son dulces. Hay 110 galletas cuadradas que son saladas y 75 galletas redondas que son dulces. Si Mario toma una galleta redonda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la galleta sea dulce?

Comentario: consideramos que se trata de un problema rutinario por abordar una situación artificial ya que es imposible que en un paquete se incluyan galletas saladas y dulces. Se pudiera suponer que se trata de galletas sobrantes en una convivencia, lo que no es posible porque son 50 galletas, demasiadas para ser sobrantes.

Problema 2. En el concurso de melate se utiliza una tómbola que contiene 44 esferas, numeradas del 1 al 44. El participante elige 6 números, si corresponden a las esferas que salen en el sorteo el participante gana.

Comentario: Es un problema no rutinario porque se ubicaen una situación real que posibilita la reflexión acerca de tomar decisiones de acuerdo a las posibilidades que se tienen para obtener un premio en estos tipos de juego de azar. Además, este problema favorece el desarrollo de estrategias de solución, como puede ser la simulación.

Planteamiento del problema de investigación

Los planes y programas de estudio de educación secundaria 1993, 2006 y 2011 insisten en el desarrollo de actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas, pero no hacen las explicaciones necesarias sobre lo que son y cómo desarrollarlas. Por su parte, en los libros de texto los problemas auténticos o no rutinarios de probabilidad están ausentes (Santos, 2011).

Por otro lado, diversos investigadores estudian los contextos o situaciones que abordan los problemas planteados en los libros de texto, asociados al desarrollo de actitudes positivas o negativas en los alumnos.En este sentido, Velázquez, Slisko, y Nolasco (2012) presentan una investigación sobre las concepciones que tienen los profesores de educación secundaria delos problemas en contextos auténticos y en contextos artificiales. Sostienen que el primer tipo de problemas genera actitudes positivas en tanto que el segundo produce actitudes negativas.

De manera que el problema de investigación consiste en la ausencia de problemas de probabilidad no rutinarios y reales en los libros de texto de educación secundaria, que pueden desarrollar actitudes positivas en los alumnos.

Marco teórico

Consideramos a la teoría de la actividad (TA) como marco teórico para esta investigación, porque nos permite realizar un análisis integral de la actividad humana, que se concibe como un sistema de acciones y operaciones que realiza el estudiante (sujeto) sobre el objeto (contenido matemático), en interrelación con otros sujetos, estructurada en sus tres etapas de orientación, ejecución y control (Leontiev, 1981). De manera que resolver problemas de probabilidad es una actividad en la que las acciones no se efectúan de manera inmediata, sino que se van formando por etapas y, por lo tanto, este proceso debe ser dirigido y planificado por el docente (Celestino, 2004).

En esta dirección también se encamina la concepción de aprendizaje propuesta por Galperin(1987), al sostener que las cualidades del hombre se desarrollan en la actividad, a través de la formación por etapas de las acciones mentales. Desde la fase externa o material hasta la interna e intelectual. Consideramos que la solución de problemas no rutinarios tiene potencialidades para la formación antes referida.

Objetivo de la investigación

Constatar el desarrollo de actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas cuando los alumnos solucionan problemas no rutinarios de probabilidad en la educación secundaria.

Metodología de la investigación

Para lograr este objetivo se pretende realizar las siguientes actividades:

Primer momento; un estudio del estado de arte, consiste en el análisis de diversos trabajos que estén en el ámbito de la solución de problemas en general y centramos la atención en el campo de la probabilidad, con el propósito de reconocer los tipos de problemas que se presentan, y las aportaciones que permitan alcanzar lo que se pretende.

Segundo momento; se analizan los problemas de probabilidad que se proponen en los textos de educación secundaria y los que se plantean en los materiales de olimpiadas matemáticas locales e internacionales en este nivel educativo, con el afán de reconocer el planteamiento de problemas rutinarios o no rutinarios.

Con base a lo anterior, en un *tercer momento* realizaremos algunas actividades con alumnos y profesores a fin de constatar el desarrollo de actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas.En este tercer momento que está pendiente de realizarse se consideran las siguientes acciones: a) Proponer a 10 profesores de matemáticas de educación secundaria el análisis de problemas de probabilidad de los textos oficiales de educación secundaria. Considerando como criterio principal el contexto o situación que abordan asociado al desarrollo de actitudes hacia el estudio de las matemáticas. b) Preparar a un grupo de 15 alumnos para que resuelvan los problemas analizados por los profesores y explorar el tipo de actitudes que generan. Esta exploración se hará a través de una observación participativa, que incluya las opiniones de los alumnos sobre los aportes de esta actividad a su interés y dedicación al estudio de las matemáticas.

Primer momento

Estado del arte en la solución de problemas de probabilidad.

Agnelli y Rodríguez (2007) reconocen en su estudio la importancia de los distintos significados probabilísticos que los alumnos pueden concebir en el proceso de solución de problemas; así mismo destacan que se deben clarificar estas interpretaciones más que los aspectos algorítmicos del tema. Desde nuestro punto de vista podemos afirmar que para la solución de problemas de probabilidad es necesario que los alumnos clarifiquen desde el nivel básico los enfoques de probabilidad clásico, frecuencial o subjetivo.

Flores y Ojeda (2009) destacan la importancia de lo estocástico para la solución de problemas de probabilidad, en su análisis señalan que en el nivel básico los alumnos carecen de conocimientos de los elementos de estocásticos, como son medida de probabilidad, espacio muestral, regla del producto y de técnicas elementales para el conteo, como es el diagrama de árbol. En este sentido destacamos esta información como un antecedente relevante que se debe reconsiderar en la investigación de la comprensión de estos saberes para plantear y resolver problemas no rutinarios que pueden cambiar la actitud de los alumnos hacia el estudio de las matemáticas, desde los primeros niveles educativos para enfrentar con éxito los problemas de su entorno.

Rivera y Ojeda (2009) identifican en el nivel medio superior la presencia de problemas que nosotros denominamos rutinarios o fuera de contexto, señalados por ellas como "problemas que no tienen alguna aplicación", como el de este ejemplo: En una caja hay 6 cubos iguales enumerados. De a uno a la vez se extraen al azar todos los cubos de las cajas. Hallar la probabilidad de que los números de los cubos extraídos aparezcan en un orden creciente.

Rivera y Ojeda (2009) también reconocen una enseñanza lineal basada en la mecánica de algoritmos, dejando a un lado la reflexión. La relevancia de esta investigación se sustenta en reconocer que se deben proponer nuevas ideas para el desarrollo de una cultura probabilística de los alumnos desde los primeros niveles, y así promover el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas.

En el diseño de una propuesta, Espinoza, J. Espinoza, J. y Chávez, E (2009) destacan la relevancia de otra alternativa que está lejos del tradicionalismo es decir la solución de problemas que se escapa de lo rutinario; reconocen que esta actividad promueve que los estudiantes empleen recursos heurísticos para plantear y resolver problemas, además de generar conocimientos significativos y a su vez favorecen el desarrollar de actitudes positivas hacia las matemáticas.

Comentarios finales

Reconocer y justificar que es necesario desarrollar una cultura probabilística desde los primeros niveles educativos es primordial para lograr con éxito la comprensión por los alumnos de los significados, conceptos, elementos de estocásticos.

Destacamos en esta investigación que en la enseñanza de la probabilidad priva la ausencia de la solución de problemas que se escapan de lo rutinario, es decir, de la mecánica de los algoritmos no auténticos y sin alguna aplicación. Desde nuestro punto de vista, consideramos que la clave para favorecer el desarrollo de actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas es promover la solución de problemas no rutinarios vinculados con la realidad y a situaciones auténticas. Para esta actividad es necesario la comprensión de lo estocástico, del uso de recursos heurísticos, de crear ambientes colaborativos, y que el docente sea un facilitador y orientador en este proceso.

Referencias bibliográficas

Agnelli y Rodríguez (2007). Estudio exploratorio sobre las concepciones de los alumnos acerca de la probabilidad. En G. Buendía, G. Montiel (Eds.). *Memoria de la XI Escuela de invierno* *en Matemática Educativa*, pp. 267-280, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Celestino, F. (2004). *El desarrollo de habilidades para transitar en representaciones vinculado a los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Tesis de licenciatura no publicada. Facultad de Matemáticas, Acapulco, Gro. México.

Espinoza, J. Espinoza, J. y Chávez, E. (2009). Enseñanza de la estadística por medio de la resolución de problemas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 683-692, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Flores, P. y Ojeda, A. M. (2009). Enseñanza y comprensión resultante de ideas de estocásticos en tercer ciclo de educación primaria. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 45-56, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Galperin, P. (1987). *Sobre el método de formación por etapas de las acciones mentales*, Psicología Evolutiva y Pedagogía. Moscú. URSS: Progreso.

Leontiev, A. (1981). *Actividad, conciencia, personalidad*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Rivera, M. S. y Ojeda, A. M. (2009). Comprensión de ideas fundamentales de estocásticos en el bachillerato universitario. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 45-56, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Santos, R. (2011). *Una propuesta didáctica en la solución de problemas de probabilidad en educación secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Facultad de Matemáticas, Acapulco, Gro. México.

Santos, R. (2009). *Una propuesta didáctica en la solución de problemas de probabilidad en educación secundaria*. Tesis de licenciatura no publicada. Facultad de Matemáticas, Acapulco, Gro. México.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio de matemáticas en educación secundaria*. D. F, México: Autor.

Velázquez, S., Slisko, J. y Nolasco, H. (2012). Concepciones de los profesores acerca de las actitudes que producen los problemas planteados en los libros de textos de matemáticas de educación secundaria. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 1221-1229. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zillmer, W. (1981). *Complementos de Metodología de la enseñanza de la Matemática.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

APRENDER A ENSEÑAR MATEMÁTICAS DESDE LA PLANIFICACIÓN

Angela Mora Zuluaga, José Ortiz Buitrago
Universidad de Los Andes-Táchira Venezuela
Universidad de Carabobo-Maracay
ammzuluaga@gmail.com, ortizbuitrago@gmail.com

Resumen. Se presenta un avance de investigación sobre el desarrollo de la competencia de planificación para aportar una visión sobre como aprender a enseñar matemáticas mediante la planificación. Es un estudio en curso, que se realiza desde el enfoque cualitativo interpretativo bajo la metodología de evaluación de programas. La observación y entrevista realizada a grupos de profesores en formación muestra: a) el análisis didáctico permite planificar una enseñanza centrada en el aprendizaje del estudiante, b) la reflexión y análisis sobre la enseñanza integra los distintos saberes del profesor en formación. Se concluye que la construcción de este conocimiento constituye un proceso complejo que requiere ser abordado desde distintos enfoques.

Palabras clave: planificación de la enseñanza, enseñar matemática

Abstract. This is an advance of a study case still in progress, its main issue is about the competence of planning to provide insight on how to learn to teach math through the planning process. It is an ongoing study, carried out from the interpretative qualitative approach under the methodology of evaluation of programs. The observation and interview with groups of teachers in training process shows these preliminaries findings: a) the training analysis allows you to schedule a lesson focused on the learning of the student, b) reflection and analysis on the teaching integrates the different knowledge of the teacher training. It is concluded that the construction of this knowledge is a complex process that requires to be addressed from different perspectives.

Key words: teaching planning, teaching mathematics

Introducción

Las exigencias de la sociedad actual a la educación matemática, se direccionan hacia una formación del docente enfatizada en la necesidad de centrar el acto educativo en el aprendizaje del estudiante. Las investigaciones sobre formación inicial del profesor de matemáticas dirigen su atención, entre otros aspectos, hacia los procesos involucrados cuando los profesores en formación intentan aprender a enseñar matemáticas (Azcarate, 2000; Llinares, 2007; entre otros). Uno de los propósitos fundamentales de la formación inicial, es que ellos aprendan a enseñar matemáticas. Aprender a enseñar matemáticas, es aprender una práctica y supone aprender a utilizar y construir conocimiento desde la reflexión sobre la enseñanza (Llinares, 2008). La complejidad que representa aprender a enseñar matemáticas requiere de distintas miradas o vías de abordaje. En este sentido, la planificación de la enseñanza es vista como una forma de abordarlo, pues requiere de la reflexión y análisis de la enseñanza de un contenido. Cuando el profesor de matemáticas en formación planifica una unidad didáctica referida a un contenido matemático, utiliza y construye conocimiento sobre cómo enseñar matemática.

Por otra parte, la planificación de la enseñanza constituye una competencia del profesor de matemáticas. Por tanto, su desarrollo debe formar parte de las finalidades de la formación inicial. Las capacidades que caracterizan esta competencia, se vinculan directamente con aprender a enseñar matemáticas, pues cada una de ellas involucra procesos de reflexión sobre qué enseñar, qué fenómenos están vinculados al concepto, cuáles son las expectativas de aprendizaje, qué competencias desea que el estudiante desarrolle, cuáles son los posibles errores y dificultades que deben abordar con los estudiantes, qué estrategias de enseñanza utilizar, qué tareas proponer, qué recursos utilizar, qué estrategias de evaluación son adecuadas, entre otros.

El tema abordado en este trabajo está inmerso en un proyecto de investigación cuya finalidad es analizar el desarrollo de la competencia de planificación de la enseñanza durante la implementación de un programa de formación de profesores de matemáticas. Durante su desarrollo, los profesores de matemáticas en formación planifican una unidad didáctica sobre un contenido del Currículo de Educación Media venezolano. En este reporte se presenta una visión sobre la planificación de la enseñanza como una forma de abordar el conocimiento necesario para aprender a enseñar matemáticas.

Aprender a enseñar matemáticas desde la planificación de la enseñanza

La planificación constituye una competencia clave del profesor de matemáticas (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez; 2008) que requiere del desarrollo de unas capacidades específicas que le permitan identificar, organizar, seleccionar, y priorizar los significados de los conceptos; establecer las expectativas de aprendizaje y diseñar las tareas para el logro de las mismas; elegir los materiales y recursos, y diseñar las estrategias de evaluación.

Para Gómez (2007) esta competencia tiende a organizarse de acuerdo con las capacidades necesarias para gestionar las dimensiones del currículo: contenido, aprendizaje, enseñanza y evaluación. Estas dimensiones, a su vez organizan los componentes que conforman el análisis didáctico, conceptualizado como el "procedimiento ideal para la planificación, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas" (Gómez, 2007, p. 130). La planificación relacionada con el diseño de unidades didácticas sobre un contenido matemático, tiene en la formación inicial, el propósito de generar experiencias donde los futuros profesores construyan conocimientos mediante la permanente reflexión sobre la enseñanza de un contenido. En otras palabras, la planificación de la enseñanza mediante el diseño de unidades didácticas utilizando el análisis didáctico, propicia oportunidades para aprender a enseñar matemáticas.

En este trabajo se asume la conceptualización de análisis didáctico realizada por Gómez (2007), pues permite planificar una enseñanza centrada en el aprendizaje del estudiante. El diseño de unidades didácticas a través del análisis didáctico aborda el proceso de aprender a enseñar matemáticas desde la integración de los distintos dominios del conocimiento del profesor en formación (disciplinar, didáctico, curricular, entre otros), la aplicación de dicho conocimiento en situaciones de enseñanza y, la reflexión y análisis de la aplicación de ese conocimiento. El análisis didáctico está conformado por cuatro análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación, que se interrelacionan y conforman un ciclo mutuamente recursivo. En la Figura 1 se resumen los procesos implícitos en cada uno de ellos. Este análisis permite organizar la planificación de la enseñanza de un contenido matemático. Otro concepto importante en la planificación de la enseñanza es el de los organizadores del currículo. Estos son definidos como "aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (Rico, 1997, p. 45). Cada uno de los análisis que conforman el análisis didáctico está relacionado con unos organizadores de currículo específicos. Estos organizadores constituyen herramientas conceptuales y metodológicas, las cuales permiten al profesor recabar, seleccionar y organizar la información necesaria para la planificación y diseño de unidades didácticas. Además, ofrecen un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas y un espacio de reflexión que permite visualizar la complejidad de la construcción del conocimiento matemático y proporciona criterios para abordarla (Ortiz, 2002).

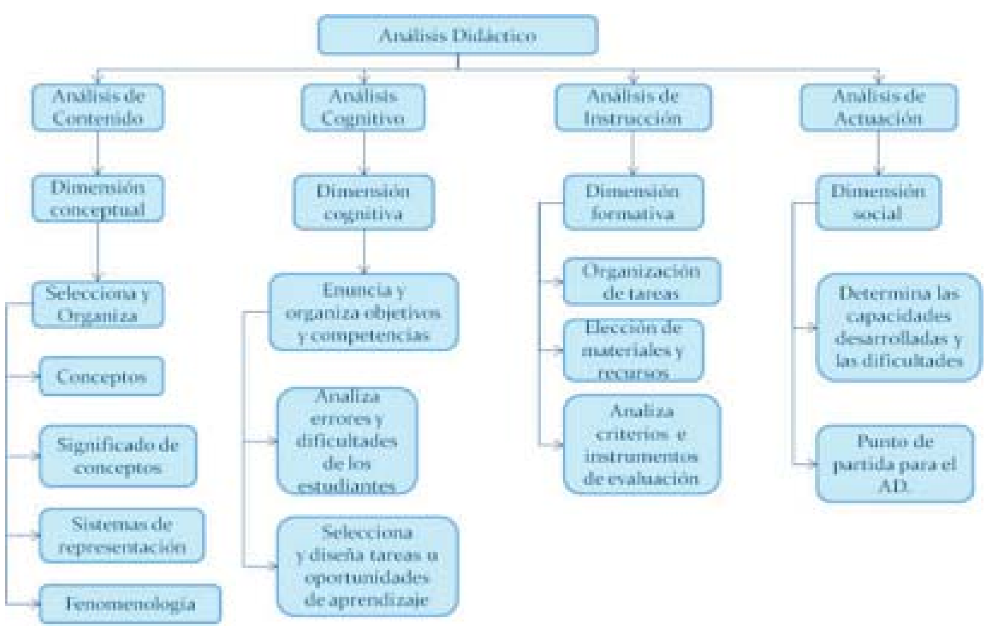


Figura 1. El Análisis Didáctico.

Para Rico y Lupiáñez (2008) la planificación además de establecer las expectativas de aprendizaje debe incorporar criterios para su seguimiento y desarrollo, considerando distintos niveles de dominio de cada competencia los cuales se reflejan en las tareas, su nivel de dificultad y grado de complejidad. Estos criterios se estructuran en el análisis cognitivo y de instrucción. Aprender a enseñar matemáticas, como ha sido mencionado, constituye una práctica y la planificación de la enseñanza como una competencia a desarrollar en los futuros profesores de matemáticas se desarrolla con la práctica en programas de formación de profesores donde se diseñan unidades didácticas tomando en cuenta el análisis didáctico y los organizadores del currículo.

La competencia matemática

El diseño de unidades didácticas constituye una tarea que permite la reflexión de los futuros profesores sobre la enseñanza de las matemáticas, cuando éstos desarrollan el análisis didáctico de un contenido matemático. Para esto, los profesores en formación determinan las expectativas de aprendizaje de las unidades didácticas en términos de objetivos de aprendizaje, competencias y capacidades. Las competencias a las cuales se refieren las expectativas de aprendizaje corresponden a aquellas que la unidad didáctica debe ayudar a desarrollar en los escolares de Educación Media. Específicamente se refiere a la competencia matemática de los escolares y sus dimensiones.

El término competencia se utiliza haciendo referencia a la competencia matemática, como "la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en las situaciones en las que ellas pueden jugar un papel" (Niss, 2003, p. 189). Por otra parte, las expectativas de aprendizaje condicionan el diseño, selección y organización de las tareas u oportunidades de aprendizaje, pues cada una debe tener una intencionalidad relacionada con las dimensiones de la competencia matemática con las cuales se vinculan. En este sentido, la planificación de la enseñanza a través del análisis didáctico permite al profesor de matemáticas en formación la reflexión sobre la competencia matemática y los niveles de desarrollo de la misma que aspira lograr mediante unas tareas u oportunidades de aprendizaje. Las relaciones que establece el futuro docente entre competencias, expectativas de aprendizaje, errores y dificultades, tareas, entre otros, le permite construir y desarrollar el conocimiento necesario para aprender a enseñar matemáticas.

Metodología

La investigación se enmarca dentro del paradigma cualitativo desde una perspectiva teórica interpretativa y sigue una metodología de evaluación de programas. En este trabajo se concibe el *programa formativo* como un plan sistemático, diseñado, planificado y organizado por el docente con el propósito de atender una necesidad y lograr una meta educativa en un contexto concreto. Por su parte La *evaluación de programas*, relacionada con la acción reflexiva y ordinaria de cada profesor o educador sobre su programa, se conceptualiza como un proceso que permite al docente recabar información sobre su calidad, sus metas, su organización, implementación, desarrollo, satisfacción de necesidades y resultados, con la finalidad de comprobar la adecuación de su diseño, el logro de las metas propuestas, y además incorporar las posibles mejoras.

Para llevar a cabo la investigación, se diseñó y aplicó el programa formativo denominado *Enseñanza del álgebra utilizando modelización y sistemas de cálculo simbólico* (EAMS), el cual tiene como propósito contribuir al desarrollo de capacidades asociadas con la competencia de planificación de la enseñanza. Este programa tiene como componentes principales: la planificación de la enseñanza utilizando el análisis didáctico, la modelización como estrategia de enseñanza y el uso de herramientas tecnológicas como recursos de enseñanza. La evaluación del programa se llevó a cabo siguiendo tres fases propuestas por Pérez (2000): diseño, desarrollo y resultados. Los resultados preliminares que se exponen, se relacionan con la evaluación del desarrollo del programa, y hacen referencia a la visión y percepción de los futuros profesores sobre el concepto de planificación de la enseñanza durante el desarrollo del programa formativo EAMS. En el desarrollo del programa EAMS, participaron 27 profesores en formación, todos estudiantes del IX Semestre de la Carrera de Educación, Mención Física y Matemática de la Universidad de Los Andes, Núcleo Táchira, Venezuela. Los futuros profesores conformaron seis grupos compuestos por 4 ó 5 participantes: Ecuaciones (EC), Sistemas de Ecuaciones (SE), Productos notables (PN), Polinomios (POL), Función polinómica (FP) e Inecuaciones (IN). Cada grupo eligió un contenido del Currículo de Matemática de Educación Media venezolana, con la finalidad de planificar una unidad didáctica, utilizando el análisis didáctico como proceso de organización de la planificación de la enseñanza de un contenido matemático.

La información mostrada en este reporte, se obtuvo mediante una entrevista semiestructurada realizada a cada grupo, que tuvo como finalidad identificar diferencias conceptuales sobre la planificación de la enseñanza y la percepción sobre el rol del análisis didáctico dentro de esa planificación. El guión de entrevista fue validado mediante el criterio de juicio de experto y se estructuró en dos partes. La primera se relacionó con el concepto de planificación antes de las actividades del programa. La segunda, estuvo dirigida a indagar sobre este concepto al finalizar el programa y las diferencias percibidas por los grupos. Las entrevistas se realizaron por grupos, y para su identificación se utilizaron los códigos asignados a cada uno, seguidos del número de la entrevista y la fecha de realización de la misma. En este caso, se tomó en cuenta la entrevista final cuyo código es EF. Así, el código SEEF09022012 indica que la información fue aportada por el grupo Sistemas de Ecuaciones en su entrevista final del día 09 de febrero de 2012.

Resultados y discusión

Como ya se mencionó, este trabajo representa un avance de una investigación en curso. Por esta razón, se mencionan resultados preliminares. La entrevista final realizada a los grupos de profesores en formación tuvo entre sus finalidades, indagar sobre su visión de la planificación de la enseñanza y cómo la perciben luego del diseño de una unidad didáctica utilizando el análisis didáctico. Al respecto, se mencionan algunas opiniones de los grupos:

SEEF09022012: "*Antes cuando uno pensaba en planificación pensaba en los contenidos, en cómo se iba a distribuir el tiempo en la clase, en lo que los muchachos iban a escribir en el cuaderno…con esto del análisis didáctico uno ya no planifica sólo el contenido, sino la forma de enseñar ese contenido, en captar el interés del estudiante, hacerles ver que la matemática se aplica en cualquier situación cotidiana y en las demás materias…uno piensa más en el estudiante, en lo que uno quiere que aprendan pero pensando en qué debemos hacer para que realmente aprendan, constantemente nos preguntábamos por qué esto y por qué aquello, por qué una tarea o por qué otra*".

PNEF14022012: "*Nosotros pensábamos que planificar era escribir unos contenidos, unos objetivos, unas estrategias, un tiempo, un instrumento de evaluación, cosas muy sencillas, sólo siguiendo un formato que dan en las instituciones, ahora con el análisis didáctico lo vemos distinto…es muy complejo* [planificar] *y no tan sencillo…cuando estábamos planificando la unidad didáctica discutíamos* e *intercambiábamos mucho, leíamos y reflexionábamos cada cosa, nos preguntábamos y repreguntábamos constantemente sobre los conceptos, los sistemas de representación, la relación con lo cotidiano, las expectativas de aprendizaje, las competencias, los errores comunes, las tareas…nos sorprendimos mucho cuando vimos que todo esto se relaciona, que hay como un hilo conductor, todo está relacionado con todo, y uno antes lo veía todo aislado*".

Como se observa, desde la visión de los profesores en formación, la planificación de la enseñanza utilizando el análisis didáctico en el diseño de una unidad didáctica genera reflexiones, discusiones y análisis de la enseñanza centradas en el estudiante, pues se toman en cuenta sus características, intereses y necesidades. Los futuros profesores desarrollan procesos de construcción del conocimiento necesario para aprender a enseñar matemáticas, mediante la reflexión sobre la enseñanza y la negociación de significados. Adicionalmente, los grupos hicieron referencia a su visión sobre la actividad de planificar:

SEEF09022012: "*La planificación mediante el análisis didáctico, nos hace pensar en lo que puede pasar en el aula, en que debe existir una relación entre los objetivos y expectativas de aprendizaje con las tareas, los recursos y el contexto…nos permite organizar mejor la enseñanza, porque siguiendo este proceso* [análisis didáctico] *y tomando en cuenta los organizadores, uno tiene claro lo que va a hacer, es algo que debemos hacer siempre, ningún profesor puede ir a dar clase sin planificar…cuando uno planifica puede brindar una mejor enseñanza y por lo tanto el alumno puede aprender más*".

POLEF23022012: "*la planificación es una actividad que como docentes tendremos que realizar siempre, forma parte de nuestra labor, en cierto modo nos asegura una mejor enseñanza y puede ayudar a que nuestros alumnos aprendan más, por eso no podemos improvisar*"

Estas opiniones, reflejan que para los grupos de profesores de matemáticas en formación, la planificación forma parte del día a día del docente y la relacionan con el desarrollo de mejores procesos de enseñanza y aprendizaje. Por otra parte, consideraron que sus experiencias de planificación son nulas o escasas y que su formación como docentes no solo debe enfocarse en la especialidad, sino en algunos aspectos como la planificación, el uso de herramientas tecnológicas y la didáctica, fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje:

FPEF10022012: "*…realmente veíamos que teníamos que aprender a planificar cuando llegáramos al liceo, aquí en la universidad en ninguna asignatura se nos había mencionado como planificar y qué elementos tomar en cuenta, se hace mucho hincapié en matemática y en física, pero esto de planificar nunca lo habíamos trabajado así, y es muy importante aprender a integrar recursos, estrategias, y sobre todo planificar tomando en cuenta todos los elementos que trabajamos con el análisis didáctico, nuestra formación debe también ir dirigida a esto, para no llegar tan nulos a los liceos y tener que hacer lo que hacen todos, comenzar a llenar formatos".*

SEEF09022012: "*Pensamos que se nos debe formar más en esto de planificar* e *integrar estrategias y herramientas tecnológicas, aquí [en la universidad] se nos enseña mucho de matemática y de física, pero las materias pedagógicas no se relacionan o no nos forman lo suficiente para ir al aula de clase, estamos en noveno semestre y nunca habíamos reflexionado sobre lo que era planificar y mucho menos planificar un contenido con todos los requerimiento del análisis didáctico, si uno planifica de esta forma, puede logar mejorar el interés del alumno y lograr que realmente aprendan*".

En la entrevista los grupos de profesores en formación mostraron diferencias entre su concepto de planificación antes y después de las actividades del programa formativo, y expresaron su opinión sobre el análisis didáctico como proceso de organización de la planificación de la enseñanza de un contenido matemático.

Conclusiones

De acuerdo con lo expresado por los grupos de profesores en formación, el diseño de unidades didácticas utilizando el análisis didáctico permite el desarrollo y construcción de algunas de las capacidades, competencias y conocimientos necesarios para aprender a enseñar matemáticas. Los profesores en formación intentaron responder a preguntas como ¿qué matemáticas enseñar?, ¿para qué enseñarlas?, ¿cómo enseñarlas y cuánto de ellas enseñar? o ¿qué valorar de ellas?, mediante procesos de discusión, reflexión, análisis y negociación de significados implícitos en el diseño de unidades didácticas con el análisis didáctico. Es decir, los grupos de profesores en formación intentaron responderlas al planificar la enseñanza de contenidos matemáticos. De este modo, se podría decir que el conocimiento necesario para aprender a enseñar matemáticas se desarrolla y construye mediante la planificación de la enseñanza.

Para concluir, la planificación de la enseñanza tal como se asume en este escrito, representa una forma de brindar a los profesores de matemáticas en formación oportunidades y experiencias para la construcción del conocimiento necesario para aprender a enseñar matemáticas. Representa una visión. Pero la complejidad de este conocimiento requiere de su abordaje desde distintas visiones, miradas o enfoques.

Referencias bibliográficas

Azcarate, P. (2000). El conocimiento profesional, naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante,* 8 (12), 111-138.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis de doctorado no publicada.. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entorno de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Trabajo presentado XIII Jornadas de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, JAEM-Granada.

Llinares, S. (2008). Construir el conocimiento necesario para enseñar matemática: Prácticas sociales y tecnología. *Evaluación e Investigación,* 3(1), 7-30.

Niss, M. (2003). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Evaluación de un programa de formación*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Granada, Granada, España.

Pérez, R. (2000). La evaluación de programas educativos: Conceptos básicos, planteamientos generales y problemática. *Revista de Investigación Educativa,* 18 (2), 261-287.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice-Horsori.

Rico, L. y Lupiáñez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma 58*, 7-23.

INIBIÇÃO INTELECTUAL NA MATEMÁTICA: INTERCONEXÕES ENTRE PSICANÁLISE E NEUROPSICOLOGIA

Laerte Fonseca
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe - IFS Brasil
Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN
laerte.fonseca@uol.com.br

Resumo. O objetivo desse trabalho foi analisar a noção de inibição intelectual e suas representações psicanalítica, bem como neuropsicológicas para compreender os quadros sintomáticos de desinteresse pelas aulas de Matemática a partir de casos encontrados na investigação de Fonseca (2011). As análises se fundamentaram nos princípios psicanalíticos de Klein (1968), os pressupostos neuropsicológicos de Luria (1981) e a proposta sobre Matemática Emocional de Chacón (2003) defendendo a importância de considerar os afetos para o desenvolvimento da aprendizagem Matemática. Analisamos a trajetória histórica das funções trigonométricas, três livros didáticos, a sequência didática proposta e, por último, um quadro diagnóstico dos comportamentos manifestos.

Palavras chave: inibição, funções, psicanálise, neuropsicologia aprendizagem

Abstract. The objective of this study was to analyze the notion of intellectual inhibition and its renditions, psychoanalytic and psychological illnesses symptomatic of frameworks to understand disaffection math lessons from cases found in investigation of Fonseca (2011). The analyses of psychoanalytic articles principles grounded if Klein (1968), Luria's neuropsychological assumptions (1981) and the proposal on Mathematics emotional Chacón (2003) defending the importance of considering the affections to the development of Mathematics Learning. We analyze the historical trajectory of the trigonometric functions, three textbooks, the following didactic proposal and, finally, a diagnostic framework behaviors manifests.

Key words: inhibition, functions, psychoanalysis, neuropsychology, learning

Introdução

É comum ouvirmos reclamações de estudantes do Ensino Médio sobre a dificuldade de aprender os conteúdos matemáticos que, praticamente, não tem sentido e nem significado para a vida deles. Essa dificuldade pode estar associada a quatro hipóteses, a saber: à ausência de elementos didáticos na formação do professor, estudantes que não dispõem dos conhecimentos prévios para desenvolver os conteúdos matemáticos desta etapa de ensino ou ainda, possíveis indícios de inibição intelectual e suas representações psicanalíticas, bem como neuropsicológicas.

Nesta pesquisa objetivou-se analisar quadros sintomáticos de desinteresse pelas aulas de Matemática a partir de casos encontrados na investigação de Fonseca (2011) alicerçando-se na noção inibição intelectual e suas representações psicanalíticas, bem como neuropsicológicas.

As fontes utilizadas para construir a fundamentação teórica abordam os princípios psicanalíticos de Klein (1968) e Santiago (2005), os pressupostos de Luria (1981) para tratar os fundamentos da Neuropsicologia e a proposta sobre Matemática Emocional de Chacón (2003) que defende a importância de considerar os afetos para o desenvolvimento da aprendizagem Matemática.

Particularmente, no nível Médio, possíveis causas da reprovação e evasão escolar estão relacionadas à ausência de sentido, à massificação de conteúdos em prol dos concursos vestibulares, à falta de imaginação e curiosidade dos estudantes, à dificuldade de apropriação de raciocínio sistemático e carência de práticas pedagógicas têm contribuído para tornar pouco significativa, particularmente, a aprendizagem das funções trigonométricas. Segundo Fonseca (2011), geralmente, tais dificuldades são compreendidas pelos professores apenas pela ausência de conhecimentos prévios supostamente disponíveis.

Em busca de investigar essa possível incongruência entre as causas apontadas e as camufladas pelo comportamento manifesto, essa pesquisa utilizou uma análise prévia sobre as funções trigonométricas que conforme Artigue (1988), auxilia na criação de atividades potencialmente significativas viabilizando e fortalecendo o trabalho do professor.

Dessa forma, decorreu a proposta de estudar o som considerando sua natureza de fenômeno ondulatório, cujas representações estão associadas ao conceito de senóide. Posteriormente, considerando o perfil dos sujeitos envolvidos na investigação, foi desenvolvida uma sequência didática baseada em Brousseau (2008), da qual procedeu à análise *a priori*, a experimentação, a análise *a posteriori* e a validação, conforme Artigue (1988).

A referida sequência didática contou com dez atividades que partiam da situação de ação, perpassando pela situação de formulação, validação e, por último, a institucionalização. Paralelamente, foi verificado ainda, a partir das análises sobre o estado da arte, que no Brasil são poucas as pesquisas no campo da Educação Matemática que permitem uma discussão interdisciplinar entre Matemática, Psicanálise e Neuropsicologia, analisando com exclusividade as possíveis origens das dificuldades de aprendizagem Matemática.

Destarte, e considerando o perfil dos sujeitos envolvidos na investigação, bem como os aspectos vinculados às características psicanalíticas e neuropsicológicas, foi desenvolvido uma análise diagnóstica baseado em Santiago (2005), do qual resultou a exame dos comportamentos manifestos e relatos participantes da pesquisa, dado a indiferença atitudinal diante da sequência didática cuidadosamente apresentada.

Na conclusão, a referida análise disponibilizou características possíveis de serem articuladas a sintomas percebidos pelo professor de Matemática em sala de aula.

Referencial teórico da pesquisa

Para dar cabo à problemática da pesquisa em tela, busquei articular três grandes pilares teóricos – Psicanálise, Neuropsicologia e Didática da Matemática – para cercar e compreender os meandros da intersubjetividade que circunda a dificuldade de aprendizagem dos conteúdos matemáticos do Ensino Médio brasileiro.

A entrada de uma análise psicanalítica se faz necessário dado que o comportamento manifesto expressa-se em forma de uma linguagem (corporal e atitudinal), cuja leitura e interpretação distancia-se dos professores de Matemática que não tiveram em sua formação elementos psicanalíticos para estabelecerem esses diálogos. Acerca dessas prerrogativas Klein (1968) esclarece que desde o início da década de 1930 percebia que os mecanismos da inibição intelectual eram isolados, o que dificultava a análise das manifestações dos alunos. Essa autora observava também que as dificuldades escolares das crianças começavam a se desfazer com o andamento do tratamento clínico. Porém, a cura não ocorria efetivamente apenas na clínica, mas após um trabalho conjunto de deciframento específico que se realizava sobre os conteúdos psíquicos geradores das inibições intelectuais.

Klein (1968) utilizava-se do método psicanalítico (associação livre: articulação da fala desordenada do sujeito, suas histórias, os sonhos, etc), em outras palavras, a formação do inconsciente que revelava na terapia problemas ocorridos nos primeiros estágios da libido.

Para Santiago (2005) – estudiosa de Klein (1968), os resultados da clínica permitiram elencar alguns traços psicanalíticos presentes em seus pacientes: narcisismo, neurose de angústia, psicose, neurose obsessiva, fobia, entre outros.

De certa forma, poder caracterizar e decifrar alguns dos comportamentos manifestos indesejados pelos professores de Matemática (por exemplo: "indisposição" ou "preguiça", agitação, displicência, mau humor, falta de atenção, etc.) que propiciam a apresentação dos conteúdos matemáticos de forma diversificada e inovadora, livra-os de críticas decorrentes da falta de habilidade pedagógica ou de domínio do conteúdo, mesmo que, ainda assim, não consigam atingir os seus alunos. Por outro lado, a via da Neuropsicologia também dá a sua interpretação, em curto prazo, acerca de comportamentos escolares indesejáveis em favor, especificamente, da Aprendizagem Matemática.

Como um dos primeiros estudiosos dessa área Luria (1981) traça um mapeamento inicial dividindo o cérebro em três unidades funcionais. Segundo ele, estas são responsáveis pelo funcionamento harmônico de todas as ações humanas. A primeira unidade corresponde à via de entrada dos estímulos captados pelos cinco principais órgãos receptores (visão, audição, olfato, paladar e tato). Também é conhecida como unidade da atenção, ou de regulação do tônus 'otimal' e vigília que envolve camadas do córtex e o sistema reticular ativador. A segunda unidade situa-se nas regiões laterais do neocórtex sobre a superfície convexa dos hemisférios, ocupando regiões posteriores incluindo as regiões visual (occipital), auditiva (temporal) e sensorial geral (parietal); formada por neurônios isolados que recebem impulsos individualizados e os transmitem a outros grupos de neurônios. Representa a unidade do processamento, onde as informações são direcionadas a regiões específicas do córtex para serem decodificadas e armazenadas, retornando posteriormente ao mundo exterior. E, por último, a terceira unidade denominada de planificação ou de saída, destinada a programar, regular e verificar a atividade mental. Está localizada no lobo frontal que, após fazer o julgamento, toma a decisão sobre um dado evento e envia a resposta para os membros executores/motores.

Durante a participação de itinerário cerebral são ativadas várias redes neuronais por meio das sinapses que mobilizam uma hierarquia de Funções Cognitivas: sensação, percepção, emoção, atenção, memória e funções executivas. (Davidoff, 2001). Essas funções podem ter fragilizados seus desempenhos por uma lesão cerebral causada por uma má formação fetal ou traumática, ou ainda, pela interferência de fatores emocionais segundo Chacón (2003) ou fatores psíquicos conforme Klein (1968).

Com efeito, optando pela articulação entre a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (2008) com a Engenharia Didática (ED) de Artigue (1988) e implementando esses conhecimentos para apresentar, por exemplo, as funções trigonométricas ou qualquer outro conteúdo matemático, estaria o professor certificado de que sua atividade docente, repousando sobre duas fortes teorias, conseguiria atingir, num grau mais amplo, os seus alunos. Admitindo essa assertiva como possibilidade para apresentar as Funções Trigonométricas, descrevo agora o arsenal das TSD. Brousseau (2008) explica que o conceito que fundamenta o sentido das situações matemáticas corresponde a "todas aquelas que levam o aluno a uma atividade matemática sem a intervenção do professor". (Brousseau, 2008, p. 21). Mais especificamente, Brousseau (2008), postula que "reservamos o termo *situações didáticas* para os modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno [...] é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional". (Brousseau, 2008, p. 21).

O intuito de termos recorrido ao sentido atribuído por Brousseau (2008) quando se refere às situações didáticas (SD) é, portanto, mostrar que o professor necessita criar um dispositivo que abranja um meio material e as regras de interação com esse dispositivo. Assim, para

Brousseau (2008) o ensino produzido a partir do funcionamento e desenvolvimento real desse dispositivo só poderia ser verificado se a aprendizagem for alcançada primeiro pela adaptação do aluno e, depois pela mudança de comportamento que incorpora (assimilação e acomodação) o meio criado por uma situação sem qualquer interferência do professor ao longo do processo.

Nessa preocupação de Brousseau (2008), já estava implícita a existência de indícios em que as primeiras engenharias foram trabalhadas por meio da Teoria das Situações Didáticas, o que nos conduziu a construir uma sequência didática observando os princípios da Engenharia Didática. Essa, como uma metodologia de pesquisa, isto é, ficou mais conhecida pelos trabalhos desenvolvidos por Artigue (1988). Desenvolve-se a sequência a partir de quatro dos princípios elencados pela autora: uma análise preliminar epistemológica, uma análise *a priori* do ponto de vista cognitivo, a experimentação, uma análise *a posteriori* e a validação da sequência.

Na presente investigação, os elementos garimpados, formaram o sistema didático encontrado no campo da pesquisa, que se estruturaram nos arredores da concepção de fenômenos naturais – mais especificamente, os ondulatórios –, do conceito matemático da função trigonométrica seno, na perspectiva de utilizar esse conceito matemático para as representações geométricas e algébricas dos fenômenos ondulatórios (o som), bem como na compreensão do "som" como motivação para o ensino da função trigonométrica seno.

Conforme Fonseca (2011), não obstante haver um estado de estabilização na simbiose do sistema didático analisado, encontrou-se vários elementos que tornavam insatisfatória tal simbiose. Assim, analisou-se as possíveis barreiras responsáveis pelo equilíbrio desejado e buscou-se sugerir propriedades para constituir um novo centro de gravidade ainda mais satisfatório.

A segunda fase, no caso dessa pesquisa, as variáveis macrodidáticas foram determinadas após diagnóstico dos entraves, tais como: mudança do ambiente de aprendizagem, modificação da metodologia de ensino, incentivo ao trabalho em grupo, valorização do método indutivo, estímulo à redescoberta, valorização à participação oral, valorização à criatividade, incentivo à percepção da interligação entre as representações algébricas e geométricas, incentivo à aplicação do conteúdo estudado em cotidianos diversificados, apoio às hipóteses levantadas pelos alunos, incentivo ao desenvolvimento de projetos de pesquisa.

Quanto às variáveis microdidáticas, consideramos a função seno em sua forma canônica $f(x) = a + b.sen(cx + d)$, consentindo mais flexibilidade para sensibilizar e atrair a atenção dos alunos a partir de três momentos distintos: a) *observação* e *percepção* (sem manipulação): ocorreu por meio da representação gráfica da senóide, numa situação real exibida nas cenas do vídeo assistido na primeira atividade; b) *observação, percepção e articulação* (com manipulação): aconteceu durante a representação gráfica da senóide por meio de simuladores de ondas na segunda atividade; c) *observação, percepção, articulação e criatividade* (com manipulação): incidiu na representação algébrica-gráfica da senóide por meio software *Graphmatica*, a partir da variação dos coeficientes reais *a, b, c* e *d* da função *f(x)* da terceira à nona atividade.

A primeira atividade foi inserida com o propósito de mostrar aos alunos como a utilização dos conhecimentos matemáticos ajuda ao homem em tarefas sofisticadas. Assim, o aparecimento dinâmico das ondas sonoras representadas por desenhos num computador de bordo demonstrava como é possível visualizar o som sem necessariamente relacionar a um modelo matemático algébrico decorrente, possivelmente, da série de Fourier. Analisando matematicamente na vida prática, os coeficientes *a, b, c* e *d* da função $f(x) = a + b.sen(cx + d)$ são reais de fato e, por isso, contribuem para uma aproximação otimizada da realidade.

Em contrapartida, observando os livros didáticos para o ensino das Funções Trigonométricas e, por transitividade, a exposição deste conteúdo nas salas de aula de Matemática, verifica-se o quão limitada é a forma como é apresentado aos estudantes este tema sempre que autores e professores utilizam-se de coeficientes inteiros para esboçar os respectivos gráficos. Com efeito, ressalta-se este ponto como sendo uma das lacunas que implicam para a não ocorrência da aprendizagem significativa.

Na segunda atividade objetivou-se criar um elo entre a primeira atividade e as oito últimas, pois naquele momento, o aluno, além de observar e perceber imagens e variações, poderia também interferir por meio da manipulação nos ícones de comando que cada um dos simuladores disponibilizava. Neste Sentido, iniciava-se a articulação entre as representações gráficas e as variações dos coeficientes no modelo algébrico.

Da terceira atividade em diante, a finalidade foi de mostrar a importância da compreensão dos coeficientes *a, b, c* e *d* inseridos na forma algébrica da função $f(x) = a + b.sen(cx + d)$ para ampliar o domínio sobre a representação gráfica. No decurso dessas atividades, discutiu-se sobre algumas propriedades (translação e reflexão), domínio e imagem.

Estabelecida a disposição da sequência didática, realizou-se a análise *a priori*, cujo objetivo, segundo Machado (1999), é constituir relações entre as escolhas feitas, os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Importa ressaltar que aluno é o único protagonista desse cenário.

A terceira fase, experimentação, equivale na concepção da engenharia civil, por exemplo, a realização ou execução do projeto. Neste caso, versa sobre aplicação da sequência didática. E, por fim, a fase da análise *a posteriori* e validação, equivale na concepção da engenharia civil, por exemplo, a checagem do projeto ou vistoria da obra. Para a Engenharia Didática, representa o momento de confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, cujo objetivo é validar ou refutar as hipóteses iniciais da pesquisa. Para tanto, tem-se de considerar todos os dados recolhidos durante a investigação, por exemplo: os registros de observações, os registros nos protocolos dos alunos, questionários, filmagem etc.

Metodologia da pesquisa

Iniciamos a nossa pesquisa com a análise prévia sobre as funções trigonométricas conforme Artigue (1988). Ainda segundo orientação do trabalho de Artigue (1988), verificamos a partir da análise em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio a noção de função trigonométrica, especificamente a função seno. Desta forma, e considerando o perfil dos sujeitos envolvidos na investigação, desenvolvemos uma sequência didática com as diferentes fases consideradas por Brousseau (2008), da qual decorreu a análise preliminar, *a priori*, a experimentação, a análise *a posteriori* e a validação, conforme Artigue (1988).

Após a realização e balanço dos resultados, foi desenvolvido um quadro diagnóstico baseado em Santiago (2005) para analisar os comportamentos manifestos e relatos dos participantes da pesquisa, ambos articulados cuidadosamente as observações acerca da indiferença atitudinal diante da Sequência Didática apresentada. Os relatos foram realizados por meio de duas entrevistas clínicas com cada um dos estudantes, cujos comportamentos despertaram atenção quando comparados aos demais da classe. Aqui o intuito foi compreender, a partir da interface das leituras de Klein (1968), Luria (1981), a origem das possíveis "dificuldades de Aprendizagem" desses alunos.

Análises e Resultados encontrados

No estudo epistemológico do som, enfatiza-se a origem da inspiração para caracterizar, conforme Brousseau (2008), a Situação de Ação (elo com o cotidiano), encontrada na exibição de um vídeo sobre o som como fenômeno possível de ser reconhecido pelo movimento harmônico e representado pela Função Trigonométrica $f(x) = a + b.sen(cx + d)$.

Por meio das análises de livros didáticos, verificamos que em nenhum dos livros analisados foram encontradas propostas de atividades que fizessem uso de softwares livres como o Graphmatica, Geogebra, entre outros.

Meticulosamente planejadas, as atividades foram desenvolvidas em cinco sessões de três horas cada uma, onde foi possível conferir resumidamente que, por simples observação: a mudança da "atenção" de *alguns alunos* quando se concentravam nas atividades, pois, além de conseguirem os objetivos previstos, demonstraram interesse, responsabilidade e desejo. No entanto, outros permaneceram "desligados".

Por meio das análises dos protocolos, outro ponto que merece destaque refere-se à liberdade de manipular uma função a partir de um software dinâmico, pois verificamos que se propicia a construção do conceito inerente ao conteúdo selecionado, incentiva-se a independência intelectual e o autodidatismo, estimula-se a pesquisa por meio da curiosidade e da criatividade. Por outro lado, nos protocolos de cinco estudantes praticamente não encontramos registros significativos.

Percebemos também que, alguns alunos foram incisivos, objetivos e claros, demonstrando a partir de seus registros que os coeficientes $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ e $\underline{d} \in \mathbf{R}$ da função $f(x) = a + b.sen(cx + d)$ são responsáveis pela apresentação geométrica do gráfico e, mais especificamente, pela *translação vertical, amplitude, frequência (período)* e *translação horizontal*, respectivamente.

Considerando-se oito dos protocolos dos alunos das últimas atividades, verificamos que os inventários das funções criadas por eles fazem variações em todos os coeficientes da função $f(x) = a + b.sen(cx + d)$, em que a sua maioria explicita o domínio de *f(x)* possível de compreender a própria criação (Fonseca, 2011). Os alunos manipulavam as funções a partir do significado que criaram dos coeficientes, buscando dessa forma representar graficamente o sentido resultado das suas imaginações que geralmente se referiam a artefatos, elementos da natureza (sons e ondas), etc. Os esboços, bem como as impressões de gráficos apresentadas nesta atividade, demonstraram que os alunos convenceram-se de que todo fenômeno pode ser matematizado por meio de equações, cujas incógnitas associadas responsabilizam-se por particularidades desse fenômeno. Neste sentido, o protocolo de outro aluno associa "caus" (sic) e "tranquilidade" a um inventário de funções matemáticas, mesmo que seja incipiente suas ideias por ausência de um arsenal matemático mais sofisticado. Vale à pena ainda destacar o cuidado e a "perfeição" com que um aluno "X" esboça seu desenho – "*uma corda ou o interior de um cabo de alumínio"* – agrupando algebricamente e sobrepondo geometricamente, representações matemáticas decorrentes da forma canônica da função seno.

Porém, os cinco alunos citados acima, identificados aqui no texto como *A 04_F, B 12_F, B 18_M, A 07_F* e *B16_M*, apresentaram, respectivamente, os seguintes comportamentos: apatia (indiferença), impaciência (ansiedade), desânimo (depressão), comilão (compulsivo) e ausente (desatento). Uma análise neuropsicológica apontaria para cada um deles falta de dopamina, excesso de GABA, ausência de serotonina, aumento da acetilcolina e baixo índice de noradrenalina, respectivamente. Enquanto que uma análise mais prolongada, psicanalítica associaria, respectivamente, os seguintes traços: narcisismo, neurose de angústia, psicose, neurose obsessiva e fobia. Por meio de duas entrevistas clínicas com cada um dos alunos, foi possível concluir que as causas de tais comportamentos estão associados à violência doméstica na infância, rejeição paterna, homossexualidade, luto familiar e acidente automobilístico, respectivamente.

Considerações finais

Baseando-nos no itinerário metodológico descrito acima, e também nos resultados obtidos a partir dos estudos de Klein (1968), Luria (1981), Chacón (2003), Artigue (1998), Brousseau (2008) e Fonseca (2011), foi possível concluir que a inibição intelectual em Matemática está associada a um incompleto desenvolvimento psicológico/psicossexual – imerso, primordialmente, no ambiente familiar – do aluno dificultando diretamente os canais neuropsicológicos de aprendizagem (sensação, percepção, emoção, atenção, memória e funções executivas) a estabelecerem conexões, por meio dos estímulos metodológicos bem estabelecidos cientificamente, com o meio externo (a sala de aula) e, mais particularmente, com o estudo das Funções Trigonométricas.

Referências bibliográficas

Artigue, M. (1988). *Engenharia Didática*. In: Brun, J. (org.). Didática das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas: conceitos e métodos de ensino.* Ática, São Paulo, Brasil.

Chacón, I. Mª G. (2003). *Matemática Emocional: os afetos na Aprendizagem Matemática*. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed.

Davidoff, L. L. (2001). *Introdução à Psicologia*. São Paulo: Pearson Education Brasil.

Fonseca, L. (2011). *A aprendizagem das funções trigonométricas na perspectiva da teoria das situações didáticas.* Dissertação não publicada, Universidade Federal de Sergipe. Brasil.

Klein, M. (1968). *Essais de psychanalyse*. Paris: Payot.

Luria, A. R. (1981). *Fundamentos de Neuropsicologia*. São Paulo: USP.

Machado, S. D. A. (1999). Engenharia Didática. In. Machado, S. D. A. *et al. Educação Matemática: uma introdução* (pp.43-67), Brasil: EDUC, São Paulo.

Santiago, A. L. (2005). *A Inibição Intelectual na Psicanálise*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed.

ESTUDO COMPARADO DA TRANSIÇÃO ENSINO SECUNDÁRIO E SUPERIOR ENTRE BRASIL E MOÇAMBIQUE

Pedro Mateus,Marlene Alves Dias
Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN Brasil
pzulu1010@yahoo.com.br, alvesdias@ig.com.br

Resumo. Nesse trabalho apresentamos um estudo comparativo entre Brasil e Moçambique no que se refere à transição da escola secundária para a universidade na disciplina de Matemática no domínio sobre funções reais de uma variável real. Para tal, mediante análise documental, comparamos os sistemas brasileiro e moçambicano e as propostas institucionais para o desenvolvimento do domínio das funções. O referencial teórico é a Teoria Antropológica do Didático. As análises mostram que as funções são desenvolvidas no quadro algébrico para o Brasil e no quadro analítico para Moçambique, o que conduz para organizações matemáticas e didáticas diferenciadas, e sugerindo ações didáticas distintas.

Palavras chave: funções, transição, praxeologias, estudo comparado

Abstract. In this work we present a comparative study between Brazil and Mozambique regarding the transition from secondary school to University in the discipline of Mathematics in the domain of real functions of a real variable. To this end, through documentary analysis, we compare the Brazilian and Mozambican systems and institutional proposals for the development of the domain of the functions. The theoretical framework is the Anthropological Theory of Didactics. The analyses show that the functions are developed in the algebraic framework for Brazil and the analytical framework for Mozambique, which leads to differentiated mathematical and didactical organizations, and suggesting different didactic actions.

Key words: functions, transition, praxeologies, comparative study

Introdução

Neste trabalho, apresentamos um estudo comparativo entre Moçambique e Brasil no que se refere à transição da escola secundária para a universidade na disciplina de Matemática no domínio sobre funções reais de variável real (natural). O estudo se insere na perspectiva global que tem como foco a análise das potencialidades dos softwares matemáticos no ensino e aprendizagem da Matemática: caso de Geogebra no estudo de derivadas de funções reais de variável real e da integral de Riemann. O trabalho aqui reportado visa recolher dados sobre o tipo de situações que cada um dos sistemas educativos analisados sugere para o estudo do conteúdo de funções reais de variável real, que constituem a base para o Cálculo Diferencial e Integral, na fase de transição do Ensino Secundário para o Ensino Superior.

Algumas pesquisas têm sido realizadas em diversos países sobre a transição do Ensino Secundário para o Ensino Superior, e centramo-nos sobre o olhar institucional conforme classificação de Gueudet (2008) após um estudo das pesquisas existentes.

Estudos comparados vêm sendo realizados no Brasil por Dias, Artigue, Jahn e Campos (2010) e esses têm mostrado o valor dessas pesquisas para identificar e compreender os efeitos característicos contextuais e culturais na proposição do conteúdo de ensino e nas ações didáticas que devem ser levadas em conta no processo de ensino e aprendizagem.

Observamos ainda que para Bosch, Fonseca e Gascón (2004), as dificuldades na fase de transição da escola secundária para a universidade provêm, principalmente, do choque entre as organizações matemáticas das duas instituições que refletem contradições e mudanças bruscas entre os respectivos contratos didáticos institucionais.

Gueudet (2008) apresenta um estudo teórico sobre os diferentes olhares e visões que se podem utilizar como filtro para compreender as dificuldades encontradas pelos estudantes nas diferentes etapas escolares. A seguir apresentamos uma breve definição dos diferentes olhares com exemplos por nós construídos, consequentemente associados à nossa pesquisa.

- olhar sobre o modo de pensar, que corresponde aos saberes intrinsecamente mais complexos que necessitam de novos modos de pensar. Exemplo: Analisar as dificuldades dos estudantes para compreender a noção de derivada quando se inicia o Ensino Superior. No caso de Moçambique, a introdução da noção da derivada de uma função real a uma variável real é feita por meio do modelo limite do quociente de diferenças, muito comum em livros usados localmente, bem como na maioria de livros de Cálculo Elementar editados em Portugal, no Brasil e nos Estados Unidos da América (os quais temos tido acesso regularmente). Apresentamos tal modelo na figura 1.

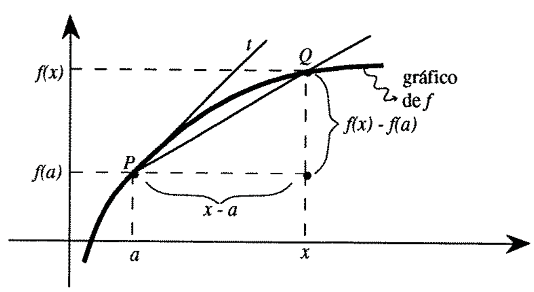


Figura 1: Exemplo para a introdução da noção de derivada (Sarrico 2005, p.14).

Alguns problemas que surgem depois da aprendizagem por meio dessa introdução:

- os alunos não identificam muito bem a relação entre a derivada de uma função f em um ponto *a* de seu domínio, que surge como número, isto é, limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quando x $\rightarrow$ a.
- os alunos não usam corretamente a noção de taxa instantânea de variação, uma expressão que geralmente aparece em problemas de contexto que usam a noção de derivada como ferramenta para a sua solução.

- os alunos confundem a noção de derivada com a noção de reta tangente.

- olhar sobre a organização dos conhecimentos que corresponde à nova organização em rede de conhecimentos. Exemplo: No Ensino Secundário no Brasil, função afim é organizada em torno das representações por tabela, fórmula e gráfico como ferramenta explícita para solução de problemas contextualizados. E no Ensino Superior, na disciplina de Cálculo a função afim é trabalhada enquanto objeto que permite associar a noção de derivada de uma função ao coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto *a* dado, do domínio de f .

- olhar sobre a linguagem e os modos de comunicação, corresponde a empregar uma linguagem matemática diferente, que exige novos símbolos e um novo tipo de discurso e também é preciso utilizar novas regras de comunicação, isto é, as demonstrações e as exigências de rigor passam a ser necessárias. Exemplo: O trabalho com a noção de função afim desenvolvido no Ensino Secundário e Superior no Brasil, primeiro no quadro algébrico e em seguida no quadro analítico exige uma nova linguagem e um novo modo de comunicação.

- olhar sobre a instituição, corresponde a considerar as novas expectativas institucionais. Exemplo: Tanto no Brasil como em Moçambique indica-se a introdução e o desenvolvimento da noção de função linear associada à noção de proporcionalidade para o Ensino Básico (11 a 14 anos) e para o Ensino Secundário as representações fórmula, tabela e gráfico servem de ferramentas explícitas para solução de situações contextualizadas. No Ensino Secundário a ênfase é dada às aplicações da noção de função afim na matemática, nas outras ciências e em situações cotidianas.

Assim, nesta pesquisa procuramos responder a questão: qual a organização matemática que se deseja, conforme as instituições analisadas propõem, para a fase de transição do nível secundário para o superior no domínio de funções reais de uma variável real?

Referencial teórico

Usamos como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático desenvolvida por Chevallard (1992, 2002), com particular destaque nas noções de praxeologia e hierarquia de níveis de co-determinação.

Uma organização praxeológica ou praxeologia é constituída de um bloco prático - técnico [tipo de tarefa/tipos de técnica], que corresponde a um saber fazer, e de um bloco tecnológico – teórico [tecnologia/teoria] que corresponde a um saber

A noção de tarefa supõe um objeto relativamente preciso para o qual se dispõe de alguma técnica com um entorno tecnológico-teórico mais ou menos explícito. Uma tarefa de tipo T evoca uma ação, o que é para fazer, por exemplo, calcular a derivada de uma função f no ponto x_0 de seu domínio é um tipo de tarefa para a qual uma das técnicas corresponde a determinar o limite da função em um ponto x_0, com um entorno tecnológico-teórico sobre limites de funções e sua representação gráfica. Uma técnica τ é uma maneira sistemática e explícita que permite realizar as tarefas do tipo T. Uma técnica deve ser pelo menos compreensível, legível e justificada para permitir o seu controle e garantir a eficácia das tarefas que permite realizar. As tarefas e as técnicas correspondentes formam, como indicamos acima, um bloco que se chama de bloco *prático-técnico* e que se identifica com o que comumente se denomina *um saber-fazer:* precisamente composto de um determinado tipo de tarefa T, e uma determinada maneira, τ, de realizar as tarefas deste tipo. Uma técnica pode ter êxito sobre uma parte P(τ) das tarefas do tipo T ao qual ela é relativa. Desse modo falamos do alcance da técnica. Quer dizer, a técnica tende a fracassar sobre T\P(τ) de maneira que se pode dizer que "não se sabe, em geral, realizar as tarefas do tipo T". A Tecnologia θ, como também já referido acima, é um discurso racional – do grego, *logos* – sobre a técnica – a *tekhnê* – cujo primeiro objetivo é *justificar* racionalmente a técnica, assegurar que ela realiza as tarefas do tipo *T*, quer dizer, a técnica permite encontrar o resultado pretendido. A segunda função da tecnologia é *explicar*, fazer inteligível, aclarar a técnica; expor por que é que ela é correta. A Teoria Θ corresponde à tecnologia da tecnologia, ela deve justificar, explicar e produzir novas tecnologias, consequentemente novas técnicas para tarefas do tipo T.

Observamos ainda que as praxeologias são as componentes dos diferentes domínios em que vivem os objetos matemáticos e segundo Chevallard (2002) as condições e restrições que determinam o processo de difusão praxeológico são exploradas e localizadas com a ajuda de uma escala que contém diferentes níveis de co-determinação, uma vez que elas podem se situar em determinado nível da escala, mas podem se exprimir em outro.

Assim, não podemos isolar o que se passa em uma classe do conjunto do sistema de ensino. Para a análise das condições e restrições de difusão do processo de difusão praxeológico Chevallard (2002) define os seguintes níveis de co-determinação: tópicos ↔ temas ↔ setores ↔ domínios ↔ disciplinas ↔ pedagogia ↔ escola ↔ sociedade ↔ civilização e explicita que esse nome é dado porque seus efeitos são percebidos nos dois sentidos.

Esses níveis descrevem as relações recíprocas entre os níveis mais específicos e os mais gerais do sistema didático. Assim, para as organizações matemáticas podemos considerar o *tema* associado a uma tecnologia e a uma organização matemática local como, por exemplo, a representação gráfica da função afim cujos *tópicos* podem estar associados a um tipo de tarefa e ligado a um *setor* que corresponde a uma teoria, por exemplo, o estudo das funções numéricas. Esse *setor* podendo estar mergulhado em um *domínio*, por exemplo, o da álgebra ou da análise matemática que por sua vez faz parte de uma *disciplina*, a matemática, para a qual existem indicações de estratégias e técnicas para desenvolvê-la, isto é, a *pedagogia* a ser considerada, que pode ser escolhida pelo grupo de professores de uma determinada *escola* que segue as orientações de documentos construídos pela *sociedade* que por sua vez está mergulhada em determinada *civilização*.

O autor observa que o que podemos fazer em determinado nível depende das condições e restrições criadas pelas escalas superiores que iniciam por civilização. Além disso, ao modificar as condições e restrições de um nível inferior teremos repercussões sobre os níveis superiores.

Chevallard (2002) ressalta que tradicionalmente os estudantes se limitam ao nível tópicos, os professores aos níveis tema, setores, domínios. Já as disciplinas são da responsabilidade dos responsáveis pela construção dos programas e propostas e os didatas se limitam à disciplina. Ainda segundo o autor a Teoria Antropológica se interessa necessariamente pelos níveis superiores, ou seja, pedagogia, escola, sociedade e civilização.

Na sequência apresentamos uma breve descrição da metodologia utilizada nessa pesquisa.

Metodologia

Articulando referencial teórico e objetivos, a metodologia utilizada é a de uma abordagem institucional centrada nos últimos anos do ensino básico e secundário, e no início do ensino superior, explorando documentos curriculares e livros didáticos. Nos limitamos à análise das relações institucionais propostas para o ensino e aprendizagem da noção de função para o ensino básico e secundário e das expectativas institucionais para o início do ensino superior. Utilizamos os parâmetros e/ou programas do ensino básico e secundário e planos curriculares do ensino superior. A análise dos documentos conduziu para comparações internas a cada país e o cruzamento dos dados entre os dois países.

Estudamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2006) e programas de ensino de Moçambique (Maputo, 2003), e em alguns casos, livros didáticos e planos curriculares do primeiro ano da universidade para ambos os países.

Resultados encontrados

Na figura 2, apresentamos um recorte panorâmico comparativo, limitado ao Ensino Secundário, entre o que é proposto para o trabalho com as funções, nos sistemas brasileiro e moçambicano.

Sistema brasileiro	Sistema moçambicano
1ª série: É nesta série que são apresentadas, formalmente, as ideias diversificadas sobre funções. No 2º bimestre são apresentados os seguintes assuntos: - Funções como relações de interdependência: com múltiplos exemplos; - Funções de 1º grau, gráficos, crescimento e decrescimento, taxas; - Funções de 2º grau: significado, gráficos, intersecções com os eixos, vértices, sinais. - Problemas envolvendo funções de 2º grau em múltiplos contextos e problemas de máximos e mínimos. No 3º bimestre continua a discussão sobre funções, mas desta vez com o foco sobre as potências, e assim são apresentados os seguintes assuntos: - As potências e o crescimento/decrescimento exponencial: a função exponencial; - As funções com variável no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica. **2ª Série** No 1º bimestre desta série são discutidos os seguintes assuntos relacionados com as ideias de função: - A periodicidade e o modelo da circunferência trigonométrica - Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos **3ª série** Nesta série, a última etapa do ensino secundário, são discutidas as seguintes situações de aprendizagem relacionadas com as noções de função: No 1º bimestre: - Geometria e o método das coordenadas - A reta, a inclinação e a proporcionalidade - Problemas lineares – máximos e mínimos No 3º bimestre são discutidas as seguintes situações: - Grandezas, interdependência: um panorama sobre funções.	**11ª classe** Nesta classe é revista a noção de função exponencial. Esta revisão visa constituir pontos de apoio para a resolução de equações e inequações exponenciais. Depois são introduzidas as funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente e cotangente. É colocado como objetivo o estudo completo das funções seno, cosseno, tangente e cotangente, tal como vem escrito no programa de ensino: "Estudo completo das funções (Domínio, contradomínio, zeros da função variação da função, variação do sinal da função e periodicidade)". **12ª classe** Nesta classe os programas sugerem uma abordagem mais diversificada sobre funções. São os seguintes conteúdos propostos: - Função modular - Funções reais de variável real. Os programas apresentam o seguinte conteúdo a ser abordado: "*Funções reais de variável real. Revisão da noção de função e gráfico de uma função. Domínio e contradomínio. Revisão das funções linear, quadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica.* *Função homógrafa: gráfico e propriedades. Operações com funções. Classificação das funções.(injectiva, sobrejectiva e bijectiva). Função inversa: propriedades e determinação da expressão analítica. Função monótona* *Paridade de funções (Interpretação gráfica e geométrica). Composição de funções*". Limites e continuidade de funções.

- Construção de gráficos: um olhar "funcional" - As três formas básicas de crescimento ou decrescimento: a variação e a variação da variação. - Os fenômenos naturais e o crescimento ou decrescimento exponencial: o número e.	Cálculo Diferencial (com funções de uma variável). Diversas aplicações do Cálculo Diferencial. Primitiva de uma função.

Figura 2: Recorte Panorâmico Comparativo

De modo geral, os materiais estudados, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM e Cadernos do Estado de São Paulo restringem a discussão, até ao final do ensino secundário, a três categorias de funções:

- Funções polinomiais: do 1° e 2° grau
- Funções periódicas: seno, cosseno e tangente
- Funções exponenciais e funções logarítmicas

E tais materais esclarecem que não há necessidade de discutir muitas categorias de funções, pois o que interessa é discutir as poucas recomendadas com uma boa profundidade, em particular, dando ênfase às suas representações e possibilidades de aplicação.

Contrariamente à restrição sugerida nos PCNEM no Brasil, encontramos nos Programas de Ensino em Moçambique uma sugestão para uma discussão de toda teoria de funções.

Observamos que os dois sistemas são similares mas com algumas estratificações, pois enquanto no Brasil o Ensino Básico é composto de dois ciclos de cinco e quatro anos respectivamente e obrigatório, em Moçambique não existe um dispositivo legal que preconize essa designação, mas é comum referir-se aos 7 anos iniciais como Ensino Básico organizado em dois graus e três ciclos sem que a obrigatoriedade seja legalmente assegurada.

Ensino Secundário

No Brasil ele é desenvolvido em três anos e compõe atualmente a Educação Básica devendo se tornar obrigatório a partir de 2016.

Em Moçambique essa etapa do ensino é desenvolvida em cinco anos, não é obrigatória e está dividida em dois ciclos.

A passagem do Ensino Secundário para o Ensino Superior em ambos os países está condicionada à aprovação em um exame específico para esse fim (o ENEM) para a maioria das universidades federais no Brasil e o exame de admissão em Moçambique.

A introdução da noção de função se dá de diferentes formas:

Ensino Básico

No que se refere à proposta para o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo funções, observamos que nos dois países a partir do Ensino Básico é indicado trabalhar a noção de função como uma relação de interdependência entre grandezas que pode emergir com a noção de proporcionalidade. Ainda nos dois países ressalta-se que a proporcionalidade é uma noção fundamental em matemática, pois permite a articulação de diversos conteúdos.

Ensino Secundário

Existe uma diferença entre as propostas de desenvolvimento do conteúdo funções nos dois países. No Brasil trabalha-se as funções numéricas centradas nas suas representações algébrica e gráfica e na possibilidade de aplicação dessas funções em outras ciências e/ou em situações contextualizadas, além disso as funções são desenvolvidas quase que exclusivamente no quadro algébrico. Em Moçambique esse mesmo conteúdo deve ser desenvolvido com ênfase ao contexto intramatemático e ao quadro analítico, mas também se propõe o uso de situações relacionadas a outras ciências e do contexto da vida cotidiana.

Ensino Superior

Nos dois países a noção de função de uma variável real a valores reais é utilizada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral enquanto objeto matemático. No Brasil ela serve de ferramenta explícita para a introdução de novas noções e novos modos de pensar e em Moçambique se passa da mesma forma, sendo que a transição não utiliza a mudança de quadros.

Conclusão

Do que constatamos nos materiais analisados, podemos resumir no seguinte:

Para o Ensino Básico o domínio das funções é tratado da mesma forma nos documentos brasileiro e moçambicano, mas ao considerar o Ensino Secundário observamos que em Moçambique a ênfase é dada ao quadro analítico, e assim nessa etapa escolar já se introduz as primeiras noções de Cálculo Diferencial e Integral para as funções de uma variável real a valores reais, o que corresponde a um trabalho que será iniciado apenas na universidade quando consideramos a proposta brasileira. Essa organização matemática e didática do domínio das funções nos dois países mostra a importância de um estudo que ultrapassa a identificação dos diferentes sistemas educativos que, em geral são bastante próximos, mas cujas propostas são decididas no nível sociedade quando nos referimos aos níveis de co-determinação segundo Chevallard (2002) e que podem apresentar expectativas de desenvolvimento de um determinado conteúdo muito diferentes.

Referências bibliográficas

Bosch, M.; Fonseca, C. e Gascón, J. H. (2004). Incomplettud de las Organizacioes Matematicas Locales en las Instittuciones Escolares. *Recherches en Didactique des Mathématique 24, 205-250.*

Brasil. **(**2006). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio +: Ciências da Natureza* e *suas tecnologias***.** Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: MEC, SEMTEC. Acesso em 20 de março de 2010 de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématique 12(1), 73-112*.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude.3. Ecologie & Regulation. En : *Actes de la XI école d'été de didactique des mathématiques – Corps*, 3-22). França: La Pensée Sauvage.

Dias, M. A.; Artigue, M.; Jahn, A.P. e Campos, T. M. (2010). A comparative study of the secondary-tertiary transition. In: *Proceedings Conference of the International Group for the Psychlogy Mathematics Education* 2, 129-136. Belo Horizonte: PME.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics,* 67 (3), 237-254.

Maputo. (2003). *Programa do Ensino Secundário Geral.* Instituto Nacional do Desenvolvimento da Educação – INDE – Maputo.

Sarrico, C. (2005). *Análise Matemática. Leituras* e *Exercícios.* Lisboa: Gradiva

A DISCIPLINA ESCOLAR MATEMÁTICA E O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA: UMA ESTREITA E IMPORTANTE RELAÇÃO

Francisco de Oliveira Filho
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
fofilho2004@yahoo.com.br

Resumo. Este texto tem por objetivo discutir a existência ou não de relações entre a disciplina escolar matemática e o ensino e aprendizagem de matemática. Utiliza como aporte teórico os estudos do historiador André Chervel (1990), com sua obra História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. Defendemos neste texto que os constituintes da disciplina escolar sob a ótica de Chervel estão diretamente relacionados com o ensino e aprendizagem, e o processo de constituição de uma disciplina escolar, denominado diisciplinarização,1 acaba por afetar o ensino e aprendizagem de matemática. Tem como questão norteadora a seguinte: Qual a relação existente entre a disciplina escolar matemática e o ensino e aprendizagem de matemática?.

Palavras chave: disciplina escolar ensino e aprendizagem de matemática

Abstract. This paper aims to discuss whether or not the relationship between school discipline and mathematic´s teaching and learning. Uses as theoretical studies of the historian André Chervel (1990), with his History of School Subjects: reflections on a field of research. We argue that text that the constituents of the school discipline from the perspective of Chervel, are directly related to the teaching-learning process and the establishment of a school subject called disciplinarização, ultimately affect the teaching and learning of mathematics. It has the following guiding question: What is the relationship between school discipline and mathematics teaching and learning of mathematics?.

Key words: scholar discipline, mathematic's teaching and learning

A Disciplina Escolar

Quando falamos em disciplina escolar é importante termos em mente que se trata de um processo; precisamos vê-la como fruto de um processo. Segundo Chervel, "os processos de instauração e funcionamento de uma disciplina escolar são precedidos por um processo de maturação dentro do ambiente escolar e caracterizados por precaução, por sua lentidão, e por sua segurança" (Chervel, 1990, p. 198).

A disciplina escolar é comumente tratada de uma forma redutora. Para o senso comum é o conteúdo que se ensina, o rol de conteúdos, a relação de matérias. O historiador André Chervel em sua obra, *História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa*, de 1990, sai do senso comum de considerar a disciplina escolar apenas como um rol de conteúdos. Quase nas conclusões de seu texto ele nos diz que "a disciplina escolar é então constituída por uma combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e motivação e um aparelho docimológico"[2] (Chervel, 1990, p. 207). Chervel também nos dirá que "conteúdos explícitos e baterias de exercícios constituem então o núcleo da disciplina" (Chervel, 1990, p. 205).

Veremos então agora o porquê de a disciplina escolar ter essa "forma" tal qual Chervel a descreve. Em seu texto, logo no início, Chervel vai advogar que a disciplina escolar é uma criação da própria escola; ela nasce no interior da escola, no seio da Cultura Escolar. O que podemos entender como Cultura Escolar? O historiador Antonio Viñao Frago, em sua obra *Culturas escolares*, assim a definiu: "[...] la cultura escolar es toda la vida escolar: hechos e ideas, mentes y cuerpos, objetos y conductas, modos de pensar, decir y hacer" (Viñao Frago, 1995, p. 69).

Quando se refere ao termo disciplina, já na introdução da expressão disciplina escolar, Chervel assim se posiciona:

> Com o termo disciplina os conteúdos de ensino são concebidos como entidades *sui generis*, próprios da classe escolar, independentes, numa certa medida, de toda a realidade cultural exterior à escola. [...] e desfrutando de uma organização, de uma economia interna e de uma eficácia que elas não parecem dever nada além delas mesmas, quer dizer à própria história (Chervel, 1990, p. 180).

Assim, o autor quer pontuar que as disciplinas escolares são criações do ambiente escolar, da cultura escolar; elas nascem no interior da escola, no dia a dia da escola. O pesquisador Faria Filho, referindo-se ao texto de Chervel e às disciplinas escolares, vem reforçar o argumento de que as disciplinas escolares são uma criação da escola e do ambiente escolar:

> Contrapondo-se à noção de transposição didática defendida por Yves Chevallard (1985), André Chervel advogava a capacidade da escola em produzir uma cultura específica, singular e original. [...] Para ele, a instituição escolar era capaz de produzir um saber específico cujos efeitos estendiam-se sobre a sociedade e a cultura, e que emergia das determinantes do próprio funcionamento institucional (Faria Filho, 2004, pp. 144-145).

Aqui, Faria Filho reforça a tese de Chervel, anotando um contraponto importante entre o pensamento dos dois pesquisadores a respeito do caráter interno da disciplina escolar.

Dessa maneira, os conteúdos, quando adentram o interior da escola, sofrem um processo de "vulgarização" para serem apresentados aos alunos, em razão de sua forma pura e íntegra. Tal trabalho, segundo Chervel, é realizado pelos pedagogos: "a tarefa dos pedagogos, supõe-se, consiste em arranjar os métodos de modo que eles permitam que os alunos assimilem o mais rápido e o melhor possível a maior porção possível da ciência de referência" (Chervel, 1990, p.

181). Na sequência o historiador nos brindará com uma frase que, a nosso ver, faz o *link* da disciplina escolar com o ensino e aprendizagem: "ao lado da disciplina-vulgarização é imposta a pedagogia-lubrificante, encarregada de lubrificar os mecanismos e de fazer girar a máquina" (Chervel, 1990, p. 181). Temos, no interior da escola, todo um trabalho de simplificação dos conteúdos, de transformação deles, que será apresentado aos alunos. Quem faz tal trabalho? O binômio disciplina-vulgarização por meio da "lubrificação" da máquina pela pedagogia-lubrificante, fazendo com que "a máquina gire". Que máquina é essa? A máquina do funcionamento da disciplina, do ensino e, no final, da aprendizagem.

Quando se refere ao objeto das disciplinas escolares, o historiador coloca três pontos importantes – sua gênese, sua função e seu funcionamento – e trabalha com algumas questões importantes.

No tocante à gênese: Como a escola começa a agir para produzi-las? Como a cultura escolar age para formar a disciplina escolar? A nosso ver, a escola atua por meio do "processo de disciplinarização". A escola age pelas finalidades do ensino. Dentre as finalidades do ensino temos as "finalidades de objetivo" e as "finalidades reais". As finalidades de objetivo são "a ordem do legislador", as legislações, os decretos, aquelas escritas nos textos, que segundo o historiador "são a primeira documentação a ser analisada pelo historiador das disciplinas escolares" (Chervel, 1990, p. 189). Entretanto, no âmbito da história cultural[3] precisamos ir às finalidades reais, aquelas das práticas concretas. Em uma Reforma Educacional, por exemplo, de certa forma podemos dizer que no interior da escola, no seio da cultura escolar, no âmbito das práticas escolares, os professores "subvertem" as ordens do legislador e fazem apropriações e adaptações de tais ordens na realização de suas práticas docentes. Assim nos fala Faria Filho, quando cita o pesquisador José Mário Pires Azanha: "[...] era no interior da sala de aula que se decidia o destino das políticas públicas, pelas resistências oferecidas por professores às mudanças e pelas alterações efetuadas nos padrões de trabalho vigentes" (Faria Filho, 2004, p. 141).

Chervel vai acentuar a importância do trabalho do historiador das disciplinas escolares na diferenciação entre as finalidades reais e as de objetivo, pontuando que "é necessidade imperiosa para o historiador das disciplinas" (Chervel, 1990, p. 190).

Quanto à função, Chervel vai nos colocar a seguinte questão: Que determinada disciplina responde à expectativa dos pais, dos poderes públicos, dos que decidem? Podemos inferir do posicionamento de Chervel que o que é ensinado na escola é fruto do resultado de embates, de disputas entre o que querem os poderes públicos e o que querem a sociedade, os pais e a equipe escolar. É fruto da diferença entre as finalidades de objetivo e as finalidades reais.

No que concerne ao funcionamento, Chervel nos pergunta: como as disciplinas funcionam? Elas funcionam relacionando seus componentes: um ensino de exposição (trabalho do professor), os exercícios, técnicas de incitação e motivação (ambos também relacionados ao trabalho do professor) e um aparelho docimológico, que são as provas e exames. Podemos dizer que "as disciplinas funcionam, quando ocorre a aprendizagem"; a nosso ver, se a disciplina não "funcionar", não ocorrerá a aprendizagem.

Outro ponto de suma importância e que deve ser destacado é o fenômeno da *Vulgata*,[4] um produto da disciplina escolar, do processo de constituição da disciplina escolar. Como fruto de tal processo, é criado um padrão de referência para a produção didática, um *corpus* constituído de: ensino dispensado pelos professores, conceitos ensinados, terminologia adotada, coleção de rubricas e capítulos, organização do *corpus* de conhecimentos, exemplos utilizados, tipos de exercícios praticados. Assim, o processo de constituição da disciplina escolar enseja a constituição de uma vulgata que, por sua vez, balizará a produção didática que virá para atender a essa nova disciplina.

Por fim, podemos concluir esse item com uma colocação muito forte de Chervel que mostra, sem dúvida, a ação da cultura escolar, do público escolar sobre os conteúdos de ensino:

> A "transformação pelo público escolar do conteúdo dos ensinos" é sem dúvida "uma constante importante na história da educação". Encontramo-la na origem da constituição das disciplinas, nesse esforço realizado pelos mestres para "deixar no ponto" métodos que "funcionem", pois a criação, assim como a transformação das disciplinas, tem um só fim: tornar possível o ensino (Chervel, 1990, p. 199).

As inter-relações

A nosso ver, a disciplina escolar matemática tem conexões fortíssimas com o ensino e aprendizagem de matemática, em função de seu processo de constituição, o qual é, como vimos, um processo complexo e dinâmico.

Partindo do conceito de disciplina de Chervel, veremos as inter-relações existentes entre os componentes dela e o ensino e aprendizagem, particularmente da matemática.

Os conteúdos e as baterias de exercícios, segundo Chervel, constituem-se no núcleo da disciplina, e o "conteúdo de conhecimento é o que distingue a disciplina escolar de outras modalidades não escolares de aprendizagem, como as da família e da sociedade: é ele que determina que se trata de uma disciplina escolar" (p. 202). Nesse ponto, voltamos a atenção ao nosso objeto de estudo, a matemática, para refletirmos a respeito do peso específico do conteúdo em nossa disciplina, que é muito grande, poderíamos dizer, imenso. A matemática é uma disciplina eminentemente conteudista. Quanto aos exercícios, assim Chervel pontua:

> [...] é a contrapartida quase indispensável. A inversão momentânea dos papéis entre o professor e o aluno constitui o elemento fundamental desse interminável diálogo de gerações que se opera no interior da escola. Sem o exercício e seu controle, não há fixação possível de uma disciplina. O sucesso das disciplinas depende fundamentalmente da qualidade dos exercícios aos quais elas podem se prestar (Chervel, 1990, p. 204).

No âmbito do ensino de matemática, indagamos: é possível o ensino de matemática sem os exercícios? O papel deles também não ocupa posição de extrema importância? É possível ministrarmos aula de matemática sem trabalharmos exercícios? Com certeza, a prática do professor de matemática e o ensino de sua disciplina estão diretamente ligados aos exercícios. Não há condições de desvincular essa prática de ensino sem os exercícios. Eu não conseguiria ministrar aulas sem me valer da utilidade deles.

As práticas de incitação e motivação são os artifícios utilizados pelos professores para tornar sua disciplina mais palatável para os alunos. Trazendo para o ensino de matemática, tais artifícios encontram lugar de destaque. Como imaginar um professor de matemática sem um bom conjunto de "práticas de incitação e motivação"? Estaria fadado ao fracasso e seus alunos a não aprenderem. A aprendizagem não aconteceria e a disciplina não funcionaria, com vimos anteriormente.

No tocante às provas de natureza docimológica, mais um dos componentes da disciplina escolar no conceito de Chervel, elas nos trarão que alguns exercícios se tornam especializados na medida em que se prestam à natureza docimológica, como exercícios de controle. Aqui podemos perceber a ligação entre os exercícios e as provas de natureza docimológica. Outro fenômeno a que Chervel alude é o "peso considerável que as provas de exame final exercem por vezes sobre o desenrolar da classe e, portanto, sobre o desenvolvimento da disciplina, ao menos em algumas de suas formas" (Chervel, 1990, p. 206).

Podemos também relacionar o fator docimológico ao ensino e aprendizagem de matemática. As provas, com certeza, representam uma parte importante no ensino e aprendizagem de matemática. Se os exercícios são importantes, alguns deles, como vimos, se prestarão ao papel docimológico e terão efeito sobre o resultado do processo. Certo ou não, com várias nuances de opiniões, eles medirão na ponta os resultados do trabalho pedagógico.

Um ponto fundamental já mencionado que queremos trazer à discussão é o fenômeno da *vulgata*. Quando a disciplina escolar está estabilizada, ela gera como produto um padrão de referência para a produção didática. Esse padrão é seguido por aqueles que vão produzir seus livros para atender à disciplina assim constituída e estabilizada. Coleções de livros são criadas e produzidas. Com uma reforma educacional, as finalidades do ensino são alteradas e, por conseguinte, a disciplina se desestabiliza. Uma nova vulgata surge e uma nova produção didática será mobilizada para atender a nova solicitação, com solavancos inevitáveis no ensino e aprendizagem da disciplina. Imagine em uma situação dessas, de implantação de uma nova reforma educacional, com alterações na produção didática, o professor ministrando suas aulas de matemática. Um novo programa em andamento, novas finalidades para ensino, a produção didática antiga está em desacordo, uma nova produção didática está vindo. Que livros utilizar? Continuo com os livros antigos? Já começo a utilizar os novos? Sim, vou utilizar os novos, mas os alunos ainda não os possuem. Enfim, são muitas questões que podem surgir em momentos de desestabilização de uma disciplina, momentos em que o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina pode ser comprometido.

Considerações finais

A grande questão da influência da disciplina escolar matemática no ensino e aprendizagem de matemática é o processo pelo qual um conteúdo de conhecimento passa a ser uma disciplina escolar. No desenrolar desse processo, chamado de disciplinarização, é que tais influências ficam mais evidentes e se exercem toda a sua força. O que podemos perceber neste estudo é que, pelo fato de a disciplina escolar nascer no seio da escola, no seio da cultura escolar, seu processo de constituição envolve, podemos dizer, a escola toda. É o trabalho da coordenação, do professor, do aluno. Assim, todos os constituintes da disciplina escolar, à luz do conceito de disciplina escolar do historiador André Chervel, acabam por influir no funcionamento da escola como um todo e, por fim, no ensino e aprendizagem de uma disciplina; no nosso caso, a matemática.

Notas:

1. No trajeto de elaboração de uma disciplina escolar, diz que há necessidade de *"disciplinarizar"* um determinado saber. Entende-se esse processo como a *ação histórica do cotidiano escolar na fabricação das diferentes disciplinas escolares* (Valente, 2009, p. 17).

2. Referente à docimologia, em francês, *docimologie* (estudos científicos dos exames e dos concursos) (Chervel, 1990, p. 206).

3. História cultural – também conhecida como Nova História. É a história "vista por baixo", a história não oficial, que dá voz aos "revoltados", aos "excluídos", aos "insurgentes", e não apenas aos reis e autoridades. Ela vem contar uma história não oficial e, para isso, faz uso de novos e diferentes tipos de fontes. Segundo o historiador Peter Burke, "os historiadores tradicionais pensam na história como essencialmente uma narrativa de acontecimentos, enquanto a nova história está mais preocupada com a análise das estruturas" (Burke, 1992, p. 12).

4. Em cada época o ensino dispensado pelos professores é, *grosso modo*, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem a mesma coisa ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do *corpus* de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos com variações aproximadas (Chervel, 1990, p. 203).

Referências bibliográficas

Burke, P. (1992). Abertura: a nova história, seu passado e seu futuro. In: P. Burke (Org.), *A escrita da história: novas perspectivas* (pp. 7-37). São Paulo: UNESP.

Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, Porto Alegre: Panonina

Faria Filho, L.M. de, Gonçalves, I.A., Vidal, D.G, Paulilo, A.L. (2004). A cultura escolar como categoria de análise e como campo de investigação na história da educação brasileira. *Educação e Pesquisa 30* (1), 139-159.

Valente, W.R. (2009). *A matemática do colégio através dos livros didáticos: subsídios para uma história disciplinar.*

Vinão Frago, A. (1995, set.-dez.). Historia de la educación e historia cultural. *Revista Brasileira de Educação*, 63-82.

Vinão Frago, A. (2007). *Sistemas educativos, culturas escolares e reformas*. Portugal: Edições Pedago Ltda.

IMPORTANCIA DEL APRENDIZAJE DE LA ACCIÓN DEL DESPEJE Y LA SUSTITUCIÓN NUMÉRICA EN LA INTERPRETACIÓN Y SOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMÁTICA

Edith Jeanetty Paulino Pérez, Julio Cesar Marmolejos
Universidad Autónoma de Santo Domingo República Dominica
paulino_marmolejos@hotmail.com, jmarmolejos2@hotmail.com

Resumen. Las matemáticas están unidas intrínsecamente a la actividad humana, como herramienta fundamental para el avance de las ciencias y las ingenierías por lo que su aprendizaje es un imperativo para los futuros profesionales del área de ciencia y tecnología, así como para los futuros profesores. El presente trabajo responde a un proyecto de aula, que procura dar solución a un problema preciso en una realidad concreta. las dificultades de los estudiantes del ciclo básico y los primeros semestres de ingeniería de la Universidad Autónoma en el aprendizaje de asignaturas como Matemática, Química, Física y la aplicación de procedimientos para la solución de problemas con el uso de ecuaciones, fórmulas y sustitución numérica, es una preocupación de los profesores de la facultad de Ciencias e ingenierías, lo cual da origen a la realización de un diagnóstico para determinar sus causas y proponer estrategias pertinentes para contribuir a la superación de las deficiencias encontradas.

Palabras clave: formación, aprendizaje, estrategias, resolución de problema

Abstract. Math is intrinsically linked to human activity, as a fundamental tool for the advancement of science and engineering so that their learning is imperative for future professionals in the area of science and technology as well as for future teachers. This paper responds to a classroom project, which seeks to solve a specific problem in a specific reality. difficulties of students of junior and the freshman of engineering at the Autonomous University in learning subjects such as Mathematics, Chemistry, Physics and procedures for resolving problems with the use of equations, formulas and numerical substitution, is a concern of the professors of the Faculty of Science and Engineering, which gives rise to the realization of a diagnosis to determine their causes and propose relevant strategies to help overcome their deficiencies.

Key words: training, learning, strategies, problem solving

Introducción

Las matemáticas juegan un papel central en la cultura, es indispensable un conocimiento básico de ellas para la formación de la cultura científica de la sociedad en general y en la formación profesional de los futuros científicos y/o profesionales del área de las ciencias naturales y las ingenierías en particular. Para lograrlo, tanto los docentes como los estudiantes deben valorar que las matemáticas forman parte del quehacer científico, comprender la naturaleza del pensamiento matemático y familiarizarse con las ideas y habilidades de la disciplina, para poder transferir los conocimientos adquiridos a las demás disciplinas, muy especialmente al área de las ciencias naturales.

De acuerdo a Ortiz (2004) el conocimiento matemático se alcanza con los contenidos referidos a los pensamientos numéricos, algebraicos, geométricos y probabilísticos que permiten el desarrollo de las capacidades para formular razonamientos matemáticos a partir de la observación, generalización y formalización de patrones: plantear, modelar y resolver problemas. Por lo que el conocimiento matemático debe ser construido por los estudiantes con el andamiaje de los docentes, con la finalidad de desarrollar el referente conceptual adecuado que permita lograr un aprendizaje significativo tanto de las matemáticas como de las ciencias naturales.

Para alcanzar lo planteado anteriormente, debe emplearse una metodología centrada en: a) el planteamiento de problemas precisos en contextos de interés para los estudiantes, b) el trabajo en pequeños grupos para discutir una situación problemática que les ha sido planteada, c) generar debate de las ideas previas que tienen los estudiantes acerca del tema que se trata y evidenciar las diferentes formas de reconocer y abordar un problema que poseen los integrantes del grupo de trabajo. Las diferentes opiniones en el análisis del problema pueden ser utilizadas para la búsqueda de soluciones y promover el consenso. En ese sentido, plantea

> ... esta etapa también promueve el planteamiento de hipótesis, la producción de experiencias por parte de los profesores y los alumnos, el uso y búsqueda de materiales de apoyo que propician la indagación sobre el tema, todos estos elementos operan como constructores de conocimientos funcionales que sirven para la vida y crean una base para generar nuevos aprendizajes. (Machado Bravo, 2006, p 15)

Por los resultados que se obtienen en las áreas de Matemática, Física y Química, en las cuales alrededor de un 30% las aprueban por semestre, se puede inferir que existe un bajo rendimiento académico de los estudiantes que cursan estas asignaturas, debido en gran medida a deficiencias en el proceso de formación del nivel Medio y Básico.

El modelo educativo constructivista, incorporado al Sistema Educativo Dominicano, plantea que el principal sujeto en el proceso de aprendizaje es el alumno (véase Fundamento del Currículo Tomo I. Nivel Medio General, 2003).Esto hace necesario la aplicación de estrategias de aprendizajes, que le permitan al alumno: identificar, describir y aplicar los conocimientos adquiridos, vinculándolos con su realidad social. Esto obliga a proponer una nueva dinámica en el proceso de enseñanza-aprendizaje que promueva:

1. El aumento gradual del papel del alumno en la autodirección de su aprendizaje.
2. La aproximación del proceso de enseñanza-aprendizaje al proceso de la investigación científica.
3. El aprovechamiento de las potencialidades de los estudiantes en el incremento de su rendimiento.

En virtud de lo anterior, se realiza la presente investigación de aula (en curso) la cual pretende aportar solución, orientada a elaborar estrategias que favorezcan el aprendizaje significativo de despeje, sustitución numérica y utilización de fórmulas y ecuaciones algebraicas en la población de estudiantes del ciclo básico de la Universidad Autónoma de Santo Domingo.

Referente teórico

El referente teórico en que se apoya el presente estudio es el constructivista, pues las Ciencias Naturales y las Matemáticas inciden notablemente en la construcción, desconstrucción y reconstrucción del conocimiento científico básico para la formación de los profesionales. Por lo que resulta indispensable poseer conocimientos básicos de Física, Química y de Matemáticas en el proceso formativo del futuro profesional, de ahí que a las ciencias básicas, se le presta especial atención en cualquier sistema educativo (de Miguel Díaz, 2006). Se hace referencia en este trabajo a los aspectos básicos como son: a) el despeje de variables en fórmulas sencillas o las sustituciones numéricas, b) las expresiones fundamentales de la geometría y la trigonometría, c) las fórmulas de superficie tales como: el área, el perímetro o el volumen de las figuras geométricas regulares que resultan problemáticos para muchos estudiantes, d) el álgebra constituye un gran problema en los primeros años de las carreras.

Toda actividad humana, no importa de qué índole, involucra aprendizaje (Adúriz-Bravo y Mercè Izquierdo, 2002). Dos grandes escuelas se han ocupado de investigar cómo el sujeto que aprende se apropia del conocimiento (Paulino, 2012). Por un lado, la escuela conductista consideraba al aprendizaje como cambio de conducta, el cual ocurre por la intervención de un sujeto externo al sujeto que aprende y se originaba o producía por la repetición sistemática de programas de reforzamientos. Generándose así un aprendizaje mecánico, irreflexivo y, por lo tanto, automatizado. Por otro lado, está la escuela cognoscitivista, la cual plantea que el aprendizaje ocurre en la estructura interna del sujeto que aprende. Tres corrientes de esta escuela se conjugan para dar origen al enfoque constructivista, estas son: a) El socio-cultural de Vigotsky, b) el psico-genético de Piaget y c) el aprendizaje significativo de Ausubel.

A pesar de que el currículo dominicano tiene incorporado desde los años noventas el enfoque constructivista, todavía se mantiene en las aulas el accionar conductista. Esta situación produce deficiencias en la construcción de conceptos y operaciones matemáticas, las cuales inciden en el aprendizaje reflexivo de las demás asignaturas.

El aprendizaje intencional, según plantea Rivas (2006, pp. 27-28) en su libro "procesos cognitivos y Aprendizaje Significativo. Inspección de Educación:

> "…se produce con conciencia del aprendiz de la actividad o esfuerzo personal que realiza con el propósito de aprender algo, generalmente contando con la ayuda de otro, como la que, deliberada y sistemáticamente tiene lugar en una institución escolar (docente en presencia); o bien con la ayuda mediata, indirecta (docente a distancia), mediando un instrumento elaborado para dicha función, como el libro de texto, un programa informático, un folleto de instrucciones u otro producto cultural."

Por lo que vale resaltar que en el aprendizaje la actividad interna del aprendiz, es lo más importante, los medios, instrumentos, profesores, sólo pueden a ayudar o facilitar, desde afuera, el proceso personal de aprendizaje, creando situaciones con las condiciones pertinentes para que el aprendiz procese adecuadamente los estímulos informativos que inciden en sus órganos sensoriales. El aprendizaje se produce en y sólo en la cabeza del aprendiz, es el aprendiz quien realiza el procesamiento de la información recibida, sin que nadie pueda realizarlo por él (Óp. Cit.).

Según plantea Ausubel (1989) el aprendizaje es *un proceso de construcción de nuevos conocimientos a partir de los ya existentes, y no como un simple copiado de contenidos*. Para resolver un problema de cualquier índole es necesario identificarlo y comprenderlo. Si por algún motivo en determinado nivel educacional no se ha propiciado el proceso de apropiación de los conocimientos indispensables para vencer cursos posteriores (programas inadecuados, políticas educativas) o si por alguna otra razón (fraudes, paternalismo, promoción) el estudiante logra llegar a niveles educativos superiores sin estar preparado para ello, el porcentaje de conocimientos adquiridos de forma mecánica se incrementará drásticamente. Como la adquisición de conocimientos mecánicos es acumulativa, a partir de determinados límites esta situación conduce a cualquier estudiante normal a una incapacidad generalizada.

La posibilidad de graduar un profesional con capacidades muy limitadas, con pobre retención de conocimientos e incapaz de utilizarlos de forma novedosa o innovadora, con importantes perjuicios tanto individual como para la sociedad se hace cada vez mayor, debido a que el proceso enseñanza-aprendizaje sigue, en nuestro país, desconectado de la realidad del estudiante.

Metodología

Para realizar esta investigación de aula se procedió de la manera siguiente: En una primera etapa se seleccionó una muestra de: tres secciones de Física Básica, dos de Física Experimental, una Física para estudiantes de Educación Mención Biología y Química, tres secciones de Química Básica y dos docentes uno de Física y uno de Química, para el período lectivo

2012/01, dos secciones de Química Básica, dos secciones de Física para el Curso de Verano 2012. Las secciones de Química y Física Básica, son conformadas por estudiantes de distintas carreras y niveles.

Descripción del procedimiento

En un primer momento, se realizó un diagnóstico de los conocimientos y dominio en la aplicación de las operaciones de matemática y álgebra de los estudiantes, para lo que se les asignó como tarea despejar las incógnitas o variables en ecuaciones de primer grado y realizar sustituciones numéricas. En segundo lugar, se les instruyó para realizar en el aula sólo las que les fueran posible y entregarlas al final de la sección de clases, las demás las traerían realizadas en la próxima clase a fin pudieran retroalimentarse; todos los grupos recibieron la misma tarea con las mismas condiciones. Luego se procedió a informarles que no habría penalización en caso de no entregar la tarea completa o de no realizarla. Por último, se implementaron estrategias para estimular el aprendizaje significativo basada en:

- Formación de grupos de trabajos.
- Preguntas y tareas dirigidas. Las tareas estaban dirigidas a incidir, en la búsqueda de la información, desarrollo de habilidades, la formación de puntos de vista, juicios, a la realización de valoraciones, que permite que se apropie de conocimientos, contribuye al desarrollo de su pensamiento y a la formación de valores.
- Explicaciones y ejemplos del profesor para clarificar inquietudes e interrogantes.

A partir de los planteamientos de Núñez (2008) en que explica el vínculo del contenido de aprendizaje con la práctica social y estimular la valoración por el alumno en el plano educativo es que surgen las estrategias planteadas. Esto tiene como propósito que el alumno identifique las cualidades del objeto de estudio y efectúe su propia valoración. Es indiscutible el efecto que se produce en el estudiante, respecto al aprendizaje de un contenido, cuando identifica la utilidad social y la utilidad individual que puede reportarle el conocimiento adquirido.

Análisis de situaciones concretas que facilitan las generalizaciones

La implementación de las estrategias anteriores partió de las siguientes situaciones:

- Diseño de situaciones que permiten hacer conexiones a los contextos diferentes.
- Realización de conexiones explícitas entre lecciones o unidades.
- Enseñar estrategias de organización, tales como abordar el problema en partes.
- Dar retroalimentación frecuente para las operaciones de despeje, en el transcurso de las clases donde hay que utilizar fórmulas.

- ❖ Necesidad de promover la identificación de patrones en los procedimientos.
- ❖ Familiarización con el vocabulario necesario antes de cada unidad.
- ❖ Establecimiento del procedimiento académico y las expectativas para la promoción.
- ❖ Los roles del docente y las del grupo de estudiantes.

Criterios para realizar el diagnóstico

Para arribar a los resultados anteriores, se procedió asignarle a cada grupo la tarea de resolver varias ecuaciones y fórmulas, para sus soluciones, la cuales tenían distintos niveles de complejidad concebidas de la manera siguiente:

1- Nivel de complejidad 1: Ecuaciones o Fórmulas de tres variables,

2- Nivel de complejidad 2: Ecuaciones o Fórmulas cuatro variables

3- Nivel de complejidad 3: Ecuaciones o Fórmulas de cinco variables y más.

A continuación se presentan algunas de las ecuaciones y fórmulas empleadas para determinar los hallazgos ya mencionados:

a) $V = D/T$

b)) $V = Pa\ 2P+V$ b) $M= X.V /2-n$ c) $D = v.t + ½ at^2$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Variables Variables Variables

d) $PV=N.R.T$ e) $P_1.V_1/T_1=P_2.V_2/T_2$

↓ ↓ ↓ ↓

Variables Variables

El siguiente cuadro describe los resultados:

a) Información de entrada

Área	Acierto inicial Promedio %	Complejidad 1 %	Complejidad 2 %	Complejidad 3 %
Química	18.13	14.11	6.69	4,24
Física	7.4	8.8	3.6	1.47

Fuente: Diagnóstico

Tabla 1

Los resultados obtenidos muestran

a) El conocimiento básico en el área de matemáticas y álgebras es muy deficiente.

b) Las dificultades para realizar operaciones matemáticas se potencializan cuando hay presentes signos de agrupación, radicalización y potenciación de manera general.

c) El no uso de la memoria a corto, mediano y largo plazo dificultad el proceso de desarrollo de la retentiva y por ende del aprendizaje.

d) Los estudiantes presentan dificultad en la aplicación del procedimiento y a seguir las instrucciones.

e) Muchas deficiencias en la identificación de las variables y el establecimiento de relaciones entre ellas a partir de las ecuaciones o fórmulas.

Resultados evaluación al final

Las tablas 2 y 3 muestran los resultados finales de la aplicación de las estrategias para favorecer la superación de las deficiencias encontradas en el diagnóstico:

Área	Números de acierto de la evaluación final			
	Complejidad 1 %	Complejidad 2 %	Complejidad 3 %	Acierto Promedio %
Química	39.0	18.0	11.7	50.11
Física	25.0	21.0	6.0	55.0

Fuente: Resultados obtenidos

Tabla 2

Área	Acierto general Promedio %	Aciertos Por problemas %
Química	2.0	63.0
Física	1.5	55.0

Fuente: 20% de la muestra.

Tabla 3

Conclusiones

Al finalizar el presente estudio se concluye de la manera siguiente:

1. El incremento observado en el porcentaje de estudiantes que logró incorporar el proceso de aplicación del despeje y sustitución numérica, con la aplicación de las estrategias de enseñanzas-aprendizajes adecuadas a las características del grupo de estudiantes en cuestión demuestra que es posible contribuir a minimizar las deficiencias en las aéreas de matemáticas y ciencias naturales.

2. Con la utilización de estrategias de enseñanzas-aprendizajes apropiadas es posible estimular a los estudiantes para que asuman el compromiso de superar las deficiencias identificadas por el mismo.
3. Resaltar la necesidad de que un mayor número de docentes implementen de manera sistemáticas estrategias de enseñanza- aprendizaje al proceso formativo de los estudiantes de Educación, los del ciclo básico y de ingeniería.

Referencias bibliográficas

Adúriz-Bravo A. y Mercè Izquierdo A. (2002). Acerca de la didáctica de las ciencias como disciplina autónoma. *Enseñanza de las ciencias 1* (3), 130-140.

Ausubel, D, P. (1989). *Psicología y Educativa*. México. Trillas.

De Miguel Díaz, M. (2006). *Modalidades de enseñanza centradas en el desarrollo de competencias* Ediciones Universidad de Oviedo. Oviedo, España

*Fundamentos del Currículo Tomo 1, Nivel Medio General (*2003). Ministerio Educación. Editora Taller, 2ª Edición. República Dominicana.

Machado, E. (2006). *Estrategia didáctica para integrar las formas del experimento químico docente con un enfoque investigativo*. Editorial Félix Varela, La Habana, Cuba.

Núñez, J. (2008).*Ciencia, Tecnología y Sociedad.* Editorial Feliz Varela. La Habana, Cuba.

Ortiz, R. (2004). *Aprendizaje y Didáctica de las Matemáticas en la perspectiva de la Epistemología Genética*. Recuperado el 05 de noviembre de 2011 http://www.aprendes.org.co/Aprendizaje-y-Didactica-de-las

Ontoria, A. (2001).*Mapas conceptuales: una técnica para aprender.* Narcea, S. A. Madrid, España.

Paulino, P. R. (2012). *La planificación docente*. Editorial Somos Literatura: República Dominicana.

Rivas, M. (2006). *Procesos cognitivos y Aprendizaje Significativo Inspección de Educación*. Editado por Comunidad de Madrid y Consejería de Educación

ANÁLISIS HISTÓRICO Y EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE SEMEJANZA

Hermes Nolasco Hesiquio, Santiago R. Velázquez Bustamante
Universidad Autónoma de Guerrero México
nolascohh@hotmail.com, sramiro@prodigy.net.mx

Resumen. En este trabajo realizamos un análisis histórico epistemológico del concepto de semejanza, tratando de identificar rupturas y filiaciones que hayan sido históricamente resistentes a la evolución, a la generalización y que, por tanto, puedan describirse como obstáculos epistemológicos. La distinción de los tres momentos en la evolución histórica de la semejanza ha permitido identificar tres aproximaciones al concepto cuando se considera como objeto de enseñanza.

Palabras clave: obstáculo epistemológico, análisis histórico, semejanza, media superior

Abstract. In this paper, we carry out an historical, epistemological analysis of the concept of similarity, trying to identify divisions and affiliations that have been historically resistant to evolution and generalization and which, as a result, can be described as epistemological obstacles. The differentiation of the three moments in the historic development of similarity allows to identify three approaches to the concept when it is considered as a teaching objet.

Key words: epistemological obstacles, historical analysis, similarity, high school

Introducción

En la actualidad, los textos escolares definen la «semejanza» como un objeto muy elaborado; visión que es consecuencia de las numerosas generalizaciones que se han hecho sobre el concepto a lo largo de los siglos. Lo anterior, conlleva la necesidad de revisar la evolución histórica-epistemológica del término, así como de las transformaciones geométricas vinculadas por él.

Estudiaremos, en una primera parte, el desarrollo histórico del concepto de «semejanza», deteniéndonos en los problemas más significativos a los que ha estado ligado el curso de su evolución, y evidenciaremos su potencialidad como articulador del conocimiento matemático a través de su contextualización en la didáctica actual (Rondero, 2006).

En una segunda parte, hemos realizado un análisis epistemológico en el que presentamos una descripción de los obstáculos más representativos que han estado asociado a su evolución histórica.

Marco teórico-metodológico

La noción de obstáculo epistemológico, que aparece por primera vez en el ámbito de la epistemología de las ciencias experimentales (Bachelard, 1938), fue retomado e introducido por Brousseau (1976) al campo de la didáctica de la matemática, acercándose a las causas que conducen a errores: "el error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado" (p. 104). De este modo, al hacer mención a los obstáculos epistemológicos, no se refiere necesariamente a los conocimientos erróneos; sino al tipo de conocimiento que están obstaculizando la adquisición (construcción) de uno nuevo.

Dentro de esta perspectiva, nos permitirá identificar rupturas y filiaciones que hayan sido históricamente resistentes a la evolución, a la generalización y que, por tanto, puedan describirse como obstáculos epistemológicos:

> El mecanismo de la adquisición de conocimientos, puede aplicarse tanto a la epistemología o historia de la ciencia, como al aprendizaje o la enseñanza. Tanto en un caso como en el otro, la noción de obstáculo es fundamental para plantear el problema del conocimiento científico (Brousseau, 1983, p. 38).

La noción de obstáculo epistemológico es de suma importancia en nuestra investigación, ya que aportará un conocimiento imprescindible para la comprensión de los factores determinantes de procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de «semejanza» en las matemáticas que se ofrecen en la Educación Media Superior del Sistema Educativo Mexicano. Un primer punto de interés es la identificación de los principales momentos en que la semejanza tuvo una fuerte presencia, aquéllos en que convivió con otras nociones matemáticas, como la proporcionalidad y el teorema de Thales; conceptos que incidieron en su transformación y en la emergencia del concepto, así como en sus representaciones simbólicas asociadas.

La metodología empleada en este estudio permite analizar una noción matemática en los que la identificación de los obstáculos epistemológicos se hace a partir de las ideas de Bachelard (1938), quien establece que un obstáculo epistemológico es un conocimiento previo que se identifica como causa que provoca estancamientos, regresiones o inercias en el desarrollo del conocimiento matemático.

Respecto al estudio de la evolución histórica del concepto de semejanza, coincidimos con los trabajos realizados por Lemonidis (1991), quien ha realizado revisiones históricas del concepto, el cual relaciona con la situación correspondiente en la enseñanza, identificando tres grandes periodos:

Aportaciones de la antigua Grecia

La primera demostración del teorema de Thales y de algunos otros relativos a figuras semejantes se encuentra en *Los Elementos* de Euclides (s. IV a. C.). Es menester destacar en este período la influencia de la geometría euclidiana respecto a la idea de que las transformaciones no existen como tales.

La noción de semejanza ha estado estrechamente vinculada con la geometría desde los orígenes de ésta. Thales de Mileto, reconocido pensador griego, es considerado el primer geómetra y uno de los siete de sabios de la Grecia antigua. Si esta interpretación es justa, tenemos que considerar a Thales como el iniciador del método deductivo que hace de la Geometría una ciencia racional, independiente del empirismo, pero que se adapta a la realidad física de una manera perfecta, estableciendo el inicio para el razonamiento geométrico que habría de culminar con Euclides. Además, al involucrar el concepto semejanza en el razonamiento proporcional, se precisan los conceptos de razón y proporción.

Los historiadores atribuyen a los griegos, y en particular a los Pitagóricos, el desarrollo de la teoría de las proporciones, aunque reconocen que sus orígenes pueden rastrearse en los babilonios. Esta evidencia la proporciona una tabla que se encuentra en el Museo Británico y que remite a varios problemas relacionados con la proporcionalidad (Comin, 2000).

La concepción de la escuela Pitagórica, en sintonía con el pensamiento babilónico, se basaba en la idea de que «todo es número». Así, para los Pitagóricos un número podía relacionarse con cualquier magnitud. "Aunque estos dos conceptos eran bien distintos, el número correspondía a la aritmética y teoría de números, y a la magnitud a la geometría, sin embargo, reinaba una voluntad de unificar el número y la magnitud en la escuela pitagórica" (René de Cotret, 1985, p. 34). Intentaron relacionar los números y las magnitudes por medio de proporciones, lo que les permitía resolver algebraicamente los problemas geométricos.

Para resolver ciertas ecuaciones de segundo grado, los pitagóricos utilizaban principalmente el método de las proporciones. Ahora sabemos que con dicha teoría podemos encontrar segmentos lineales que cumplen proporciones como:

A) $a : b = c : x$

B) $a : x = x : b$

Donde *a, b* y *c* son segmentos lineales dados. Mediante el teorema de la proporcionalidad es posible encontrar el valor de *x,* además de saber la solución de A).

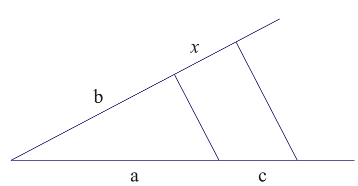


Figura 1

Si atendemos al dibujo de la figura 2, nos daremos cuenta de que *x* es la solución de B).

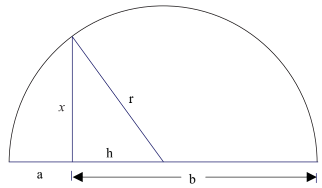


Figura 2

Nótese que para éste último, lo que tenemos que hacer ver es que $x^2 = ab$. Pero, a través de la aplicación del teorema de Pitágoras, obtenemos que

$$x^2 = r^2 - h^2$$

Esto, por última observación de la sección anterior, es igual a

$$x^2 = (r+h)(r-h) = b \cdot \mathrm{a}$$

Teóricamente, en un principio, el razonamiento anterior era aplicable a magnitudes conmensurables. El descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados, hecha por los mismos Pitagóricos, puso fin a la adecuación del mundo de los números enteros, lo que contribuyó a separar el estudio de los números y el de las magnitudes, puesto que los números son discretos y las magnitudes continuas. Esta separación del estudio del número del de las magnitudes, pudo ser un obstáculo de la noción de semejanza. Lo anterior se hace patente en los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), pues la aritmética y las magnitudes se trabajan de manera independiente: el libro VII se refiere a los números proporcionales, y el libro V a las magnitudes proporcionales.

Del período que va desde el siglo XVI hasta el XVIII. Los problemas de representación del espacio

Después de la desaparición de la sociedad antigua, específicamente con la destrucción del Museo de Alejandría, la matemática en general cayó en un gran abismo, cuya producción fue escasa y pobre aproximadamente durante un milenio.

Las obras de Euclides, de Apolonio y de Arquímedes –sólo conocidas a través de traducciones– pudieron ser leídas en fuentes directas, y se despertó una nueva curiosidad por la Geometría, cuyos progresos fueron lentos al principio; pero, transcurrida la etapa de asimilación, las ideas geométricas adquirieron el carácter abstracto y general.

A lo largo del siglo XVI y una buena parte del siglo XVIII la atención de los matemáticos se dirigió especialmente al álgebra y el cálculo descubierto por Newton y Leibniz. También lo es para los geómetras renacentistas que se preocuparon de dar a la ciencia que cultivaban la generalidad de que carecía, centrándose en los problemas de la representación del espacio.

Los problemas de representación que surgieron en el Renacimiento se convertirían en un importante punto de apertura para el estudio de las transformaciones. Durante tal momento histórico se resaltó la función de la transformación como herramienta útil en la resolución de problemas prácticos, sobre todo en pintura y arquitectura.

Girard Desargues (1591-1662) fue uno de los primeros que intentó la tarea de proporcionar una base sólida a las reglas utilizadas por los pintores renacentistas. De esta manera, abrió una vía completamente nueva al tratar los problemas del diseño arquitectónico a partir de procedimientos puramente geométricos. A pesar de utilizar los recursos de la geometría descriptiva, su nomenclatura era con frecuencia complicada, y no encontró la oportunidad ni el apoyo necesario para que sus luminosas ideas se propagaran adecuadamente.

Uno de los primeros descubrimientos en la geometría proyectiva fue el famoso Teorema de los triángulos de Desargues: *si dos triángulos ABC y A´B´C´ están en perspectiva desde un punto O (es decir, si AA´, BB´ y CC´ concurren en O), entonces las intersecciones de los lados correspondientes pertenecen a la misma recta (es decir,* $P = AB \cap A'B'$, $Q = BC \cap B'C'$ *y* $R = CA \cap C'A'$ *son colineales).*

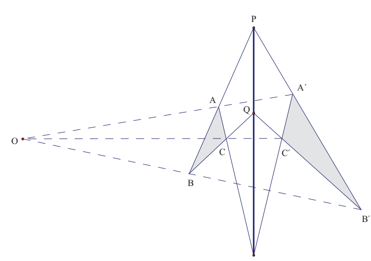


Figura 3

La importancia del Teorema de Desargues en el presente análisis radica en las propiedades de las figuras que pueden ser clasificadas como *métricas* y *proyectivas*, estableciendo aquellas propiedades necesariamente relacionadas, ya sea directa o implícitamente. Un ejemplo de las primeras son: la igualdad de segmentos de línea, la semejanza de triángulos; de las segundas, la concurrencia de líneas y la colinealidad de puntos.

Podemos considerar a Desargues como el iniciador de la geometría proyectiva, su teorema, junto con otros resultados, fue escrito por él en una obra que tuvo la mala fortuna de no encontrar las circunstancias ni el momento oportuno para su difusión y desarrollo. A esto se le aúna el creciente interés hacia otras ramas de las matemáticas recién creadas, tales como el cálculo diferencial e integral, que derivó en que las ideas aportadas por Desargues cayeran en el olvido.

Siglos XIX y XX. Dicho periodo destacó debido a la estructuración y algebrización de la geometría

En el siglo XIX se consideraron la homotecia y la semejanza como objetos matemáticos, debido, en gran parte, al desarrollo que experimentó la geometría a partir de la fecha de publicación de la geometría descriptiva de Monge (1820) y del Programa Erlangen de Felix Klein (1872).

Primeramente, en la Escuela Normal de París y luego en la Politécnica Garpard Monge (1746-1818) tomó parte activa. En su *Tratado de Geometría Proyectiva*, Monge sustentó los primeros ejemplos de la fecundidad de la transformación de las figuras espaciales en planos, que permite demostrar muchas proposiciones de la geometría plana a través de la consideración de figuras que resultan de ambas proyecciones, así como de la mayor parte de los teoremas de transversales y de casi todas las propiedades de las cónicas. En este sentido, la semejanza jugó un papel importante en este periodo, en tanto herramienta útil para la solución de problemas, aunque no se le dio el reconocimiento como objeto matemático, preservando el sentido estático. Este sentido de la semejanza como objeto matemático fue un obstáculo que la mantuvo por varios siglos en estado de hibernación. Tal proceso culminó en el siglo XIX con Hilbert, con la formulación de los axiomas euclidianos y valorización del sistema deductivo.

Los acontecimientos matemáticos ocurridos en la primera mitad del siglo XIX ejercieron su influencia hasta los comienzos del XX. Ellos dominaron el campo de la geometría hasta el momento en que surgieron las ideas de Sophus Lie y de F. Klein.

Klein (en su Programa Erlangen en 1872) logró la síntesis de las geometrías, basándose en la noción de grupo de transformaciones, que le permite introducir distinciones precisas entre tipos diferentes de geometrías. El grupo principal de transformaciones del espacio está constituido por el conjunto de todas las transformaciones que dejan invariantes las propiedades geométricas de las figuras. Diversos grupos de transformaciones caracterizan a las distintas geometrías, permitiendo estudiar los entes que las integran desde el punto de vista de las propiedades invariantes en las transformaciones de cada grupo. El mismo Klein explica:

> Hay transformaciones del espacio que no alteran en nada las propiedades geométricas de las figuras. Por el contrario, estas propiedades son, efectivamente, independientes de la situación ocupada en el espacio por la figura considerada, de su tamaño o magnitud absoluta, y finalmente también el sentido en el cual estas partes están dispuestas. Los desplazamientos del espacio, sus

> transformaciones con similitud, así como aquellas con simetría, no alteran pues las propiedades de las figuras más que las transformaciones compuestas con las precedentes *[…]* (Klein, 1872, citado en Piaget y García, 1982, p.102).

Bajo esta óptica, se concibe el concepto semejanza como objeto matemático de una transformación caracterizada porque existe un tratamiento en que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

Identificación de obstáculos epistemológicos

El estudio de las situaciones problemáticas tratadas en los distintos períodos históricos, las invariantes de los que se han tomado conciencia colectiva y las diferentes representaciones simbólicas usadas nos han permitido identificar los siguientes obstáculos epistemológicos que describimos a continuación:

a) Obstáculo separación del estudio del número del de las magnitudes

Esta separación del estudio del número del de las magnitudes, pudo ser un obstáculo de la noción de semejanza. Lo anterior se hace patente en los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), pues la aritmética y las magnitudes se trabajan de manera independiente: el libro VII se refiere a los números proporcionales, y el libro V a las magnitudes proporcionales.

Actualmente asociamos de forma natural a cualquier cantidad de una magnitud una cierta medida numérica, pero en el pensamiento griego magnitudes y números eran objetos bien distintos. Los números eran discretos, mientras que las magnitudes continúas.

b) Obstáculo de la concepción estática

La idea primitiva de la semejanza estaba contenida entre las relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas, esta concepción estática de la geometría, originó una visión intrafigural de la geometría, pues la idea de transformar una figura en otra estuvo ausente, como se puede observar en el libro VI de *Los Elementos* de Euclides.

c) El reconocimiento tardío como objeto matemático

Utilización de la semejanza como una herramienta útil para la resolución de problemas gráficos, preservando el sentido estático. Este sentido de la semejanza como objeto matemático fue un obstáculo que la mantuvo por varios siglos en estado de hibernación. Tal proceso culminó en la época actual con Hilbert, quien ha reformulado los axiomas euclidianos y valorizado el sistema deductivo.

d) Obstáculo de la razón y proporción

Las proporciones se expresaban «retóricamente» a las relaciones establecidas (por ejemplo: el teorema de Thales), pasando posteriormente a expresiones como a:b : c:d perdurando desde la matemática Helénica hasta el siglo XV.

e) Obstáculo la algebrización de la geometría

Se considera a la semejanza como una simple traducción algebraica de la relación entre los elementos de una figura en un problema geométrico específico. Las relaciones que pueden establecerse por este método, corresponden estrictamente a las relaciones internas entre los elementos de una figura dada.

La semejanza como objeto de enseñanza

En cuanto al tratamiento del tema en la Educación Media Superior, la semejanza, aparece como un método para resolver problemas de construcciones geométricas desde el punto de vista sintético. Se aprecia una cierta influencia de la Geometría Euclidiana, donde el teorema de Thales genera nuevos conceptos, aunque no en todos los casos se alude a éste, puesto que, la justificación de los criterios de triángulos semejantes se apoyan en él, sin incluir el estudio de las figuras homotéticas.

Hemos identificado en este nivel educativo la aproximación a la semejanza dentro de la relación intrafigural. Las figuras que abundan en los textos revisados aparecen en configuraciones de Thales y posiciones separadas.

En síntesis, para el estudio de la semejanza como objeto de enseñanza, tomamos en cuenta los resultados del análisis histórico-epistemológico, en donde identificamos tres momentos distintos en el concepto «semejanza», desde ellos es posible determinar tres aproximaciones que, creemos, deben tenerse presentes cuando se considera la semejanza como objeto de enseñanza:

a) Relación intrafigural. Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante en ausencia de la idea de transformar una figura en otra.

b)Transformación geométrica vista como una herramienta. La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en sí mismo. Se utiliza la semejanza como una herramienta en la resolución de problemas gráficos.

c)Transformación geométrica como objeto matemático. Caracterizada porque hay un tratamiento en que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

El estudio pretende poner de manifiesto la cantidad de restricciones que pesan en la enseñanza del concepto de «semejanza», así como su desplazamiento, el cual se ha hecho a voluntad de los cambios curriculares que se han impulsado en México en el marco de la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. México: Siglo XXI

Bell, E. T. (1999). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In J. Vanhamme y W. Vanhamme (Eds.). La problématique et l´enseignement des mathématiques. *Comptes Rendus de la XXVIIIe Rencontre organisée par la CIEAEM*, (pp.101-117). Louvian la Neuve.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problemes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 164-198.

Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Thèse pour obtenir le grade de docteur. France. Université Bordeaux 1.

Hilbert, D. (1902). *The foundations of geometry*. USA: Kessinger Publishing.

Klein, F. (1872). *Le programme d´Erlangen: considerations comparatives sur les recherches géométriques modernes*. París: Prefacio de J. Dieudonné.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d´une expérience d´enseignement de l´homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 11 (2.3), 295-324.

Monge, G. (1820). *Géométrie descriptive*. Paris: Courcier, imprimeur-Libraire pour les sciences.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis* e *historia de la ciencia*. México: Siglo XXI

René de Cotret, S. (1985). *Etude historique de la notion de foction: analyse épistémologique et expérimentation didactique*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Québec, Montreal, Canadá.

Rondero, C. (2006). Propuestas didácticas acerca de la articulación de saberes matemáticos. En: R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), I*nvestigación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un Reporte Iberoamericano,* (pp. 151-162). México: Díaz de Santos- CLAME, A.C.

PRÁTICAS PEDAGÓGICAS PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO: O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS DO ARQUIVO LUCÍLIA BECHARA SANCHEZ?

Nara Vilma Lima Pinheiro
Universidade Federal de São Paulo – UNIFESP – GHEMAT Brasil
naravlp@yahoo.com.br

Resumo. Este texto apresenta os resultados de pesquisa que investiga práticas pedagógicas para o ensino do conceito de número. O trabalho situa-se no que é possível denominar era cognitivista no ensino de matemática (1960-1980). Levou-se em conta o Arquivo Lucília Bechara Sanchez - APLBS como fonte de pesquisa para dar resposta à seguinte questão: De que modo o Movimento da Matemática Moderna - MMM concretizou propostas para o ensino do conceito de número nas séries iniciais?

Palavras chave: conceito de número, ensino primário, matemática moderna

Abstract. This paper presents the results of research that investigated the pedagogical practices for teaching of the number concept. The work is situated on what is possible styling was cognitivist in mathematics teaching (1960-1980). It was taken into account the Archive Lucília Bechara Sanchez - APLBS as a research resource to respond to the following question: How does the Movement of Modern Mathematics - MMM concretized proposals for teaching the concept of number in the early grades?

Key words: number concept, primary school, modern mathematics

Introdução

Este estudo busca compreender como, a partir da segunda metade do século XX, foi abordado o tema da numeração, em sala de aula, e como se desenvolveram as mudanças de tratamento do conceito de número nas séries iniciais da Escola Vera Cruz na década de 1970. Trata-se de um conteúdo que sempre esteve presente nas séries iniciais, desde as primeiras leis educacionais (Leme da Silva, 2010).

Tendo como foco o conceito de número o material para a investigação foram os documentos do Arquivo Pessoal Lucília Bechara Sanchez - APLBS. Justifica-se a escolha deste acervo pelo fato da professora Lucília Bechara Sanchez, ter sido uma das pioneiras a trazer para as salas de aula paulistas, as concepções do matemático Zoltan Dienes sobre a aprendizagem matemática no ensino primário. Soma-se a isto ter sido co-autora do primeiro livro didático de matemática para o ensino primário que incluiu Matemática Moderna.

Nas últimas décadas, a produção historiográfica no âmbito da educação tem despendido considerável interesse à problematização das fontes para investigar a cultura escolar. A diversidade de documentos passou a ser valorizado enquanto fonte de pesquisa histórica, na tentativa de entender os bastidores do cotidiano escolar.

Neste contexto, aos poucos os arquivos pessoais vão ganhando relevância "como ingredientes fundamentais para a escrita do trajeto histórico que o ensino de Matemática seguiu em nosso país" (Valente, 2004, p. 36). Assim, torna-se de fundamental importância consultar os arquivos privados de professores de matemática, em especial, aqueles que tiveram uma participação mais ativa no desenvolvimento da educação matemática. Este tipo de fonte vem complementar aquilo que se pode obter dos arquivos das escolas, onde os professores exerceram sua prática docente, tornando-se valiosa fonte de pesquisa para a História da Educação.

O trabalho do pesquisador com este tipo de documentação permite refletir sobre a cultura escolar e as modificações do ensino nas práticas dos docentes. Nesta perspectiva, o interesse no arquivo pessoal da professora Lucília Bechara Sanchez é justamente entender o desenvolvimento das novas propostas pedagógicas para a Matemática das séries iniciais divulgadas por esta professora. Nesta direção, Gomes (1998) reforça que:

> A documentação dos arquivos privados permitiria, finalmente e de forma muito particular, dar vida à história, enchendo-a de homens e não de nomes, como numa historie *evenementielle*. Homens que têm a sua história de vida, as suas virtudes e defeitos e que os revelam exatamente neste tipo de material (Gomes, 1998, p.125).

Dessa forma, os documentos de arquivos pessoais tornam-se objetos de investigação de grande importância, pois muitos procedimentos e comportamentos podem ser compreendidos e interpretados quando analisados sobre esta ótica. Fazem parte do APLBS, livros, agendas, cadernos, trabalhos de alunos, correspondência de cunho profissional e pessoal, cartões, documentos institucionais relativos à profissão da professora Lucília enquanto docente e autora de livros didáticos, recortes de jornais, apostilas de cursos, dentre outros.

A organização de tal arquivo auxiliou a elaboração deste trabalho por meio do qual se procurou investigar de que modo o Movimento da Matemática Moderna - MMM concretizou propostas para o ensino do conceito de número nas séries iniciais da Escola Vera Cruz.

Movimento da matemática moderna

No período pós-guerra, por volta de 1950, à discussão sobre a necessidade de uma reforma no ensino de matemática que atendesse a demanda da sociedade começava a ganhar consistência. Naquele tempo os avanços na área da Matemática e Psicologia deram um novo rumo ao ensino de matemática, em especial as pesquisas empreendidas por Piaget sobre a gênese do número na criança deram origem a "possiblidades [até então] desconhecidas em pedagogia" (Stone apud Guimarães, 2007, p.23).

Na área da Psicologia, Piaget verificou que as estruturas fundamentais da matemática desenvolvidas pelos boubarkistas correpondiam as mesmas estruturas do pensamento da criança. De fato, as ideias piagetianas e os estudos bourbakistas foram de fundamental importância para justificar uma reforma no ensino de matemática que ficou conhecida como Movimento da Matemática Moderna- MMM. Tal Movimento teve por objetivo varrer do cenário educacional o modo tradicional de se pensar o ensino de matemática. Esta mudança de enfoque alterou a forma de representar a matemática e isto implicou em novos modos de saber, raciocinar e representar o ensino desta disciplina (Valente, 2009, p. 04).

Influenciado pelos estudos de Piaget e pelas teorias do grupo Bourbaki, o matemático húgaro Zoltan Dienes desenvolveu inúmeras experiências em vários países, com a colaboração de pesquisadores que trabalhavam sob a égide do International Study Group for Mathematics Learning – ISGML, grupo presidido por Dienes. Suas experiências foram fundamentais na construção de um novo sentido para o ensino e aprendizagem da matemática nas séries iniciais. Para tanto defendia uma reforma no programa de matemática em nível elementar, de modo a torná-lo coerente com as pesquisas nas áreas da Matemática, Psicologia e Pedagogia.

Nesta perspectiva, Dienes dedicou-se a estudar a evolução da capacidade do desenvolvimento intelectual da criança, em especial, como a criança aprende matemática. Em seus estudos, defendia que a aprendizagem matemática se desenvolvia pela participação ativa da criança na manipulação de uma grande variedade de materiais concretos. Neste sentido, as brincadeiras e os jogos desempenhavam um papel fundamental na formação e na compreensão de um conceito matemático. Inicialmente, a criança devia desenvolver seus conceitos intuitivamente por meio de suas próprias experiências. Era a partir destas experiências que os conceitos matemáticos eram construídos. Além disso, para que a aprendizagem de um conceito matemático ocorresse se fazia necessário que a criança fosse exposta a uma variedade de situações concretas. Entretanto, esta variedade de situações deveria variar quanto à aparência externa, devendo manter a mesma estrutura conceitual básica.

A justificativa de Dienes para uma mudança na maneira de se ensinar os conceitos matemáticos, era que no ensino daquela época, era considerado "como um adestramento em processos mecanizados" e as ideias matemáticas abstratas eram apresentadas às crianças antes que elas tivessem realizado suas próprias experiências de forma concreta (Dienes et al, 1969, p. 3).

A nova maneira de ensinar matemática "considerava que esses processos formavam um tecido de estruturas de complexidade crescente". Neste sentido, as crianças deveriam "descobrir essas estruturas e o modo como elas se entrelaçam, o que se conseguirá colocando-as perante situações que ilustrem concretamente tais estruturas" (Dienes, 1967, p. 8).

No nível elementar para se ensinar os conceitos matemáticos se fazia necessário uma variedade de materiais concretos, pois segundo Dienes (1975, p. 2) "as abstrações são derivadas pelas crianças de uma grande variedade de situações concretas, envolvendo o uso de modelos e outros auxílios físicos como base para uma aprendizagem precoce". Preocupado com o ensino de Matemática Moderna para as crianças, Dienes (1975) propunha a aprendizagem deveria iniciar-se pela introdução dos conjuntos. E era partir dele que o conceito de número ia ser construído.

No Brasil, as pesquisas de Dienes(1975) foram divulgadas, especialmente, pelas professoras Ester Grossi, por meio do Grupo de Estudos do Ensino de Matemática de Porto Alegre – GEEMPA, e Lucília Bechara Sanchez, integrante do Grupo de Estudos do Ensino de Matemática GEEM, de São Paulo. Ambas fizeram parte do ISGML.

Os projetos experimentais sobre o ensino de matemática para as séries iniciais desenvolvidos pelos educadores membros do ISGML eram apresentados nas sessões sul-americanas por meio de relatórios. Os encontros dos membros deste grupo tinham por finalidade a discussão de processos de aprendizagem matemática, a formação de professores, a elaboração de currículos e o planejamento de ações concretas na área.

Tratava-se de um espaço destinado a discussão de práticas de ensino de matemática que eram aplicadas por cada membro do grupo em suas instituições de origem. Tais práticas eram provenientes das experiências realizadas por Dienes e pelo ISGML.

A Secretaria de Educação de São Paulo também teve uma importante participação na divulgação destas ideias. Por meio de uma parceria entre Secretaria e a Embaixada Francesa alguns integrantes franceses do ISGML vieram a São Paulo realizar cursos para os professores e técnicos da secretaria (Palma Filho apud Souza, 2005, p.108).

Nos cursos os professores aprendiam como trabalhar os novos conteúdos matemáticos na escola básica. Tratava-se de aprender "o que fazer" e "como fazer". Ao que tudo indica os cursos eram destinados aos professores de matemática que seriam responsáveis, posteriormente, por transmitir aos professores do ensino básico as novas propostas e possibilidades de se trabalhar as concretizações de alguns conteúdos matemáticos elementares. De modo geral, os cursos proporcionavam aos professores possibilidades de novos conhecimentos sobre a metodologia do ensino de matemática numa perspectiva dos estudos de Dienes.

A participação de Lucília nos encontros do ISGML, nos cursos promovidos pela Secretaria de Educação e pelo GEEMPA era considerada por ela como um aperfeiçoamento de sua prática de ensino, pois tudo que era apreendido Lucília ensinava nos cursos que ministrava para os professores da escola Vera Cruz.

A escola Vera Cruz era vista por Lucília como uma classe piloto, onde toda teoria, principalmente a de Dienes, era aplicada. A intenção desta escola era justamente a de fazer uma experiência com as seis etapas da aprendizagem matemática divulgadas por Dienes. Todos os conceitos trazidos por este pesquisador sobre a etapa da formalização, da generalização, da variabilidade perceptiva e variabilidade matemática, eram discutidos por Lucília nos cursos que ministrava em especial naqueles realizados na escola Vera Cruz.

Em entrevista realizada em 2011 Lucília Bechara dizia que estes cursos dividiam-se em dois momentos. Na primeira parte, em geral, Lucília pegava um conceito, por exemplo, se o tema era conjuntos, trabalhava algumas atividades de intersecção, de reunião, notação e depois discutia com os professores como é que eles poderiam repassa-las aos alunos. Em seguida tinha-se o treinamento de professores onde eles preparavam as atividades para os alunos. Posteriormente, estas seriam as atividades que os alunos fariam em sala de aula.

O ensino moderno de matemática na Escola Vera Cruz

A Escola Experimental Vera Cruz iniciou suas atividades no ano de 1963, com o jardim da infância e o pré-primário. O projeto inicial era criar uma instituição onde a prática pedagógica levasse em consideração o processo particular de aprendizado de cada criança. Para tanto, oferecia uma educação focada na aprendizagem significativa do aluno. Na época, o que havia de mais moderno para o ensino-aprendizagem de matemática no primário eram os estudos de Dienes.

As práticas pedagógicas orientadas por Dienes privilegiavam "a introdução de uma determinada sequência de exercícios artificiais, capazes de guiar as crianças ao longo do desenvolvimento lógico-matemático dos conceitos aparentados com a noção de número" (Dienes, 1967, p. 14). Para tanto a aprendizagem matemática nas séries iniciais deveria iniciar-se pela introdução de conjuntos para sobre eles construir o conceito de número, pois o número era por ele considerado como uma propriedade dos conjuntos. A este tempo, o ensino de número era visto como algo tão sofisticado que não poderia mais ser ensinado como primeiro assunto nas aulas de matemática. Para ensinar este conceito seria preciso introduzir um novo conteúdo matemático de caráter universitário, mas adequado ao ensino elementar, tratava-se da Teoria dos Conjuntos (Valente, 2012).

Pela documentação disponível no acervo da professora Lucília, foi possível conjecturar como isto funcionou na prática. Nas atividades desenvolvidas pelos alunos verificou-se que não se tratava de um ou outro material concreto era preciso uma diversidade de materiais para se trabalhar o mesmo conceito matemático. Neste sentido, todas as atividades desenvolvidas necessitavam da utilização, pelos alunos, de materiais como: blocos lógicos, blocos multibase, Trimath, Quadrimath, formas geométricas de acrílico. A variedade de condições adequadas ao ensino de matemática tinha por foco a participação ativa do aluno na manipulação de materiais concretos para a construção de conceitos matemáticos.

Entretanto, o ensino-aprendizagem de matemática não se resumia apenas aos materiais concretos. Também eram apresentadas aos alunos atividades lúdicas, como por exemplo, para a noção de cardinalidade foram desenvolvidas atividades com um trenzinho onde cada vagão tem *um a mais* na sequência. Atividades desse tipo permitiam a criança construir as primeiras noções de sucessor. Para Dienes (1974, p. 54), o estudo do conceito de sucessão, era necessário, por ser considerado como "umas das prévias condições para uma compreensão eficaz dos números é a associação da ordem na qual eles se sucedem, com as quantidades que eles representam, enquanto propriedades dos conjuntos".

Para se ensinar o sistema de numeração decimal era necessário que se estudasse, primeiramente, diferentes bases para sobre elas consolidar os fundamentos matemáticos da numeração, em especial, os referentes ao valor posicional. Depois de várias atividades sobre contagem nas diferentes bases, a recomendação era para associar a noção de quantidade à de ordem.

A intenção inicial era que as crianças desenvolvessem seus conceitos intuitivamente por meio de suas próprias experiências, pois era a partir delas que os conceitos matemáticos eram construídos. Neste sentido, para a aquisição do conceito de número as crianças deveriam desenvolver atividades de classificação, seriação/ordenação, sequência lógica e contagem em diferentes bases.

A utilização desta variedade de material permitiria desenvolver o processo de abstração infantil tão necessário para a compreensão do conceito de número. Lembrando que a este tempo Número era tratado pedagogicamente, por Dienes, como uma abstração.

Considerações finais

Inicialmente, a escola Vera Cruz foi criada com a intenção de desenvolver uma prática pedagógica que considerasse como foco o processo particular de aprendizagem de cada criança. Na época, o que havia de mais moderno para o ensino-aprendizagem de matemática no primário eram as teorias de Dienes.

Formada em Matemática, membro do GEEM e divulgadora da Matemática Moderna Lucilia foi vista como uma das pessoas adequada para experimentar, na escola Vera Cruz, as novas teorias desenvolvidas por Dienes. A melhor maneira encontrada, por Lucília, foi ministrar cursos para os professores da referida escola. Por meio destes cursos foi possível ensinar aos professores a matemática moderna adequada à educação básica e ao mesmo tempo discutir o "como fazer" através das concretizações múltiplas, as quais seguiram os modelos do material Mathemàtique Vivante.

Na documentação do APLBS foi possível perceber que os professores da escola Vera Cruz se apropriaram das ideias divulgadas nos cursos e aplicaram nas salas de aulas os estudos desenvolvidos por Dienes. Notou-se que os professores seguiram de perto a recomendação de introduzir uma sequência de exercícios artificiais capazes de guiar as crianças ao longo do desenvolvimento lógico-matemático dos conceitos aparentado com a noção de número.

Com esta intenção foi criada uma variedade de condições adequadas ao ensino de matemática, a qual tinha por foco a participação ativa do aluno na manipulação de materiais concretos para a construção de conceitos matemáticos. É importante dizer, que para cada conceito matemático trabalhado existia uma variedade de atividades a ser desenvolvida com o auxilio de diversos materiais concretos Neste sentido, todas as atividades desenvolvidas necessitavam da utilização, pelos alunos, de diversos materiais como: blocos lógicos, trimath, quadrimath, material multibase e formas geométricas de acrílico. Somam-se a isto as atividades lúdicas, como por exemplo, o uso de estórias.

Na tentativa de responder a questão inicial deste trabalho conclui-se que a Escola Vera Cruz encontrou nos estudos de Dienes um modelo educacional pedagogicamente justificável para o ensino primário. Tal modelo estava fundamentado na utilização de uma variedade de materiais manipuláveis e concebido especialmente para o ensino de matemática. A utilização deste tipo de material permitia desenvolver o processo de abstração infantil tão necessário para a compreensão do conceito de número. Lembrando que naquele tempo o conceito de número era tratado pedagogicamente como uma abstração.

Referências bibliográficas

Dienes, Z. P. (1967). *A Matemática Moderna do Ensino Primário*. Livros Horizonte, Rio de Janeiro.

Dienes, Z. P. (1975). *O poder da Matemática: um estudo da transição da fase construtiva para a analítica do pensamento matemático da criança*. EPU, São Paulo.

Dienes, Z. P.(1974) *Conjuntos, números e potências: primeiros passos em matemática.* EPU, São Paulo.

Dienes, Z. P.; Gaulin. C. e Lunkenbein, D. (1969). *Un programme de mathématique pour Le niveau Élementare (1ére partie)*. Bulletin de l'A.M.Q., automme-hiver.

Gomes, A de C. (1998). Nas malhas do Feitiço: O historiador e os encantos dos Arquivos Privados. *Revista Lua Nova*, 21, 121-127.

Guimarães, M. H. (2007). Por uma matemática nova nas escolas secundárias – perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna. En M. J. Matos y W. R. Valente (Eds.), *A Matemática Moderna nas escolas do Brasil* e *de Portugal: primeiros* e*studos* (pp. 21-45). São Paulo: Da Vinci.

Leme da Silva, M. C. (2010). *O número hoje e ontem: reflexões acerca da história desse conteúdo*. [Mimeo]. Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, SP.

Souza, G. L. D. (2005). *Educação Matemática na Cenp: um estudo histórico sobre condições institucionais de produção cultural por parte de uma comunidade prática*. Tese de Doutorado não publicada. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Valente, W. R. (2004). *Documentos de professores como fontes para a história da Educação Matemática: o Arquivo Pessoal Euclides Roxo – APER***.** *Revista Zetetiqué*, *12* (21), 35-56. Campinas, SP: Cempem – FE – Unicamp.

Valente, W. R. (2009). *O que é número? Passado e presente do ensino de matemática para crianças*. Projeto de Pesquisa, CNPq. Edital Universal.

Valente, W. R. (2012). O que é número? Produção, circulação e apropriação da Matemática moderna para crianças. *Bolema. Boletim de Educação Matemática, 27* (1), 312 -340.

A LINGUAGEM ENQUANTO COMPONENTE DO PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO POR MEIO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NA 5ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Lêda Ferreira Cabral
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP Brasil
ledafcabral@gmail.com, ledafc@rc.unesp.br

Resumo. Este trabalho apresenta reflexões sobre as possibilidades da linguagem enquanto componente na aprendizagem de conceitos e ideias inerentes a problemas matemáticos da 5ª série do Ensino Fundamental. A análise foi realizada com base nas perspectivas teóricas de Vygotsky (2001), Bakhtin (2000, 2003) e Benjamin (2004). Os achados revelaram que o uso de problemas em sala de aula, possibilita a utilização de diferentes esferas da linguagem e pode levar o educando a construir determinadas estratégias de soluções que muitas vezes difere das costumeiramente apresentadas como solução em um ambiente formal. Algumas preocupações nesse sentido contribuíram para o desenvolvimento dessa investigação que contou com o estudo da linguagem enquanto componente do processo de construção do conhecimento matemático, tendo foco na metodologia da Resolução de Problemas. Assim, apresento um recorte desta investigação que aponta a relevância da linguagem na aprendizagem significativa de matemática.

Palavras chave : inguagem, construção do conhecimento, resolução de problemas, experiência e sentido

Abstract. The present work shows the reflections about the possibilities of language as a component in the learning of concepts and ideas inherent in mathematical problems of the 5th grade of elementary school. The analysis was based on theoretical perspectives of Vygotsky (2001), Bakhtin (2000, 2003) and Benjamin (2004). The findings showed that the use of problems in the classroom, allows the use of different levels of language and the student can take certain strategies to build solutions that often differs from the usually presented as a solution in a formal setting. Some concerns in this regard contributed to the development of this research included the study of language as a component of the construction of mathematical knowledge, with focus of troubleshooting methodology. Thus, I present an excerpt of this research that points to the importance of language in meaningful learning of mathematics.

Key words: language, knowledge construction, problem solving, experience and meaning

Introdução

O presente texto traz algumas reflexões sobre as possibilidades da linguagem enquanto componente na aprendizagem dos conceitos e ideias matemáticas por meio de problemas matemáticos na 5ª série do Ensino Fundamental. Ao investigar o processo de conhecimento no espaço pedagógico, com base na perspectiva histórico-cultural do desenvolvimento humano, a sala de aula é considerada em seus múltiplos aspectos. Para tanto o trabalho fundamenta-se, entre outros nas perspectivas teóricas de Vygotsky (2001), Bakhtin (2000, 2003) e Benjamin (2004) e de pesquisadores da Educação Matemática, bem como nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Apresentamos aqui um recorte dessa investigação que aponta a relevância da linguagem enquanto componente do processo de construção do conhecimento matemático, tendo como foco a utilização de problemas matemáticos.

Das ideias de Larrosa (2002) emanam possibilidades de pensar na educação uma associação que vai além do par teoria / prática, fazendo nos perceber a educação a partir do par experiência/ sentido. O autor argumenta que pensar não é só raciocinar, mas, sobretudo dar sentido as coisas, e ao que somos experiência concebida como algo que nos passa, que nos acontece, o que nos toca, uma ideia de acontecimento (Larrosa, 2002).

Em Bakhtin (2003), encontramos modos de pensar na dinâmica da sala de aula, bem como, na relação professor-aluno como uma relação dialógica onde se enfrentam dois sujeitos. Neste sentido a construção do conhecimento passa a ser uma construção partilhada, coletiva, onde o outro é sempre necessário. Segundo Freitas (1996), o outro pode ser o professor ou qualquer um dos alunos, isso vai depender da situação, ou seja, as circunstâncias é que determinam. Neste contexto a "aprendizagem acontece a partir da interação de dois sujeitos: o professor e o aluno. Assim o conhecimento é elaborado, disputado no concreto das interlocuções. E a linguagem é o lugar dessa construção; a palavra, a ponte por onde transitam significados" (Freitas, 1996, p. 173).

Nas ideias de Bakhtin (2000, 2003) encontramos que o diálogo pode ser manifestado de várias formas diferentes. Esse não restringe apenas a uma relação "face a face, é muito mais amplo. Há diálogo entre pessoas, entre textos, autores, disciplinas escolares, escola e vida" (Freitas, 1996, p. 173). Assim, a vida dos atores do processo educacional deve ser incorporada ao cotidiano da escola. Neste contexto o uso de problemas matemáticos pode possibilitar as diferentes formas de diálogo, pois os alunos utilizam estratégias de linguagem que manifestam seu pensamento e dessa forma estabelecem comunicação tanto com o professor, quanto com os demais alunos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) definem um problema matemático como uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la (PCN, 1998). Assim, o uso das diversas estratégias de escritas para solucionar problemas está intimamente ligado às experiências de cada indivíduo, suas percepções e impressões do mundo que o cerca.

Segundo Augustine (1976) resolver problemas é o processo de reorganizar conceitos e habilidades, aplicando-os a uma nova situação, atenta a um objetivo. Sobre essa temática, Carvalho (1994) reitera que problema é uma situação onde ocorre um desequilíbrio, ou seja, que exige uma solução não imediata, mas para a qual dispõe-se de meios intelectuais para a resolução. Neste sentido, ambos concordam que um problema deve se constituir um desafio para o aluno e que o mesmo esteja no nível de suas capacidades intelectuais. Uma vez que apresentar a um aluno uma situação problema que não esteja dentro de suas possibilidades de resolução, pode constituir-se em desestímulo para este aluno.

Fundamenta em Onuchic e Allevato (1999) podemos perceber o movimento de mudança que o ensino de Resolução de Problemas, foi passando enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática, desde o inicio de sua investigação de forma sistemática sob a influência de Polya, nos Estados Unidos, na década de 60. No fim da década de 70, quando essa área ganha espaço no mundo inteiro o que culminou com o movimento a favor do ensino de resolução de problemas. Nesta dinâmica em 1980 nos Estados Unidos é editada uma publicação do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics – An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's1, que era um chamamento às pessoas e grupos a buscar uma melhor educação matemática para todos.

Nessa direção, a utilização de problemas em sala pode configurar-se como uma estratégia de ensino que valoriza as questões sócio-político-cultural dos educandos, ou seja, considera a experiência vivida dos educandos e um espaço onde a linguagem pode ser considerada nos seus múltiplos aspectos.

Interfaces entre matemática e linguagem

No que tange a abordagem dos conceitos matemáticos e sua construção por meio da resolução de problemas corroboramos com o pensamento de Pironel (2002), que nos diz que a abordagem da Resolução de Problemas, como uma metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, preocupa-se muito mais com a aprendizagem de um campo de conceitos matemáticos por parte dos alunos do que com o aprender a resolver problemas, apesar de que, enquanto aprende matemática, o aluno aprende também a resolver problemas. Onde se faz uso da resolução de um determinado problema ou de uma situação problema a fim de que o aluno possa construir sua própria aprendizagem, com significado e compreensão. Nesse contexto, a utilização de problemas em sala deve configurar-se como uma estratégia de ensino que valoriza a experiência vivida dos educandos, o que corrobora com a perspectiva Bakhtiniana que nos diz:

> O desconhecimento da natureza do enunciado e a relação diferente com as peculiaridades das diversidades de gênero do discurso em qualquer campo da investigação linguística redundam em formalismo e em uma abstração exagerada deformam a historicidade da investigação, debilitam as relações da língua com a vida (Bakhtin, 2003, pp. 264-265).

Nessa linha de reflexão, apontamos que a natureza do enunciado está diretamente ligada à vivência de mundo dos sujeitos, o que poderá ser decisivo no processo de produção do conhecimento (Sampaio, 2008). Assim, por meio dos enunciados concretos a língua passa integrar a vida e por meio deles a vida entra na língua (Bakhtin, 2003). Neste sentido considerar as situações vivenciadas pelos alunos para a escola pode favorecer o entendimento dos enunciados.

Pautado nos estudos de Benjamim (2004) tomamos como base a ideia de que todo conhecimento [...] deve conter um mínimo de contra senso, como os antigos padrões de tapetes ou de frisos ornamentais, onde sempre se pode descobrir, nalgum ponto, um desvio insignificante de seu curso normal. Em outras palavras: o decisivo não é o prosseguimento de conhecimento em conhecimento, mas o salto que se dá em cada um deles (Benjamim, 2004). A fala de Benjamin é um convite a pensar a aprendizagem de crianças que é carregada de significados, pois o processo de aprendizagem na criança é singular. Deste modo, precisamos levar em conta suas características, e isso implica todas as áreas de conhecimento.

Fundamentado nos estudos de Polya (1986), entendemos que o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas, se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Neste sentido, o educando só aprende a pensar por si próprio se tiverem oportunidade de explicar os seus raciocínios em sala de aula, ao professor e aos colegas. Pois, negociando soluções é que se aprende a respeitar sentimentos e ideias dos demais.

Deste modo, a abordagem de situações problemas em todos os níveis de ensino, pode contribuir no desenvolvimento de habilidades cognitivas, afetivas e motoras, além de competências e habilidades matemáticas tão importantes no contexto atual.

Pressupostos metodológicos

O presente trabalho foi desenvolvido por meio de pesquisa bibliográfica e de campo com base nos pressupostos da pesquisa qualitativa. Moura (2010, p.43) compreende que "[...] o pesquisador está em atividade de pesquisa quando organiza suas ações de forma intencional e consciente, buscando encontrar procedimentos teórico-metodológicos que permitam explicar suas indagações a respeito do objeto investigado". Assim, a organização das ações que permitem a objetivação de seus motivos de investigação implica a escolha de determinadas ferramentas que viabilizam a condução da pesquisa.

Os dados foram constituídos por meio dos métodos investigativos: observação, entrevista e questionários. Para compor o cenário da investigação foram selecionados estudantes da 5ª série de uma escola pública da rede municipal de ensino do município de Caxias, estado do Maranhão para participar das atividades de pesquisa. As atividades desenvolvidas junto aos estudantes selecionados constituíram-se de aplicação de situações problema. Na oportunidade foram realizadas observações das estratégias dos estudantes no processo de resolução dos problemas, atividades de pesquisas de preços, grupos de trabalhos para construção de tabelas, análise das suas conjecturas e conclusões, o seu desempenho e as suas dificuldades no desenvolvimento das atividades propostas, a sua criatividade e as suas concepções prévias em relação à abordagem dos conceitos.

Na sequência apresento dois excertos que possibilitaram outro olhar sobre os dados e contribuíram no desenvolvimento de uma nova pesquisa com enfoque na construção de conceitos, sendo esta, direcionada agora para as séries iniciais.

Resultados e discussões

Neste trabalho, apresento um recorte do trabalho de conclusão de curso intitulado: Ensinando Matemática através de Problemas na 5ª série do Ensino Fundamental. O mesmo foi desenvolvido mediante as seguintes etapas: aplicação de questionários e entrevista com os professores e alunos; aplicação de situações problemas práticos como medição das dependências da escola; pesquisa em supermercado, e em seguida aplicação de questionários abordando situações problemas. Assim, apresento uma analise de dois excertos que nos revelou algumas estratégias de resolução de problemas diferenciadas.

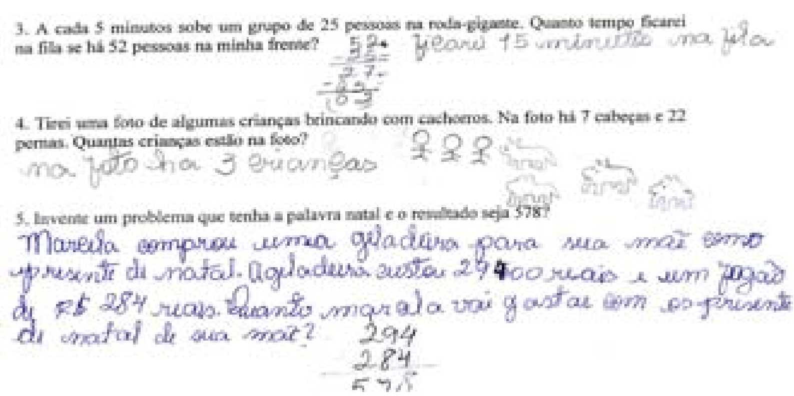


Figura 1- Solução apresentada por uma aluna

As respostas dos alunos nos revelam que um problema como este desenvolve no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, tirando-o de uma situação passiva e receptiva, colocando-o como um agente ativo e construtor no processo de ensino-aprendizagem.

Segundo Bakhtin (2000, p.279) "cada esfera de utilização da língua elabora seus tipos relativamente estáveis de enunciados". Ou seja, isso implica que cada tipo de situação de interação, da língua impregna em si sentidos e significados, o uso da língua em matemática em especial é de fundamental importância e no uso de situação problemas, há um dialogo constante com os diferentes usos da linguagem. Isso contribui para a aprendizagem, pois o conhecimento avança quando o aluno enfrenta situações interessantes e desafiadoras sobre as quais ainda não havia parado para pensar, quando tem a oportunidade de trocar ideias e experiências de aprendizagens com outros, compartilhando e defendendo seu ponto de vista.

Conforme Rego (1996), na perspectiva vygotskiana, ensinar o que o aluno já sabe ou aquilo que está totalmente longe de sua possibilidade de aprender é totalmente ineficaz. A escola desempenhará bem seu papel, na medida em que, partindo daquilo que a criança já sabe, e proporcionando que ela seja capaz de aplicar e desafiar a construção de novos conhecimentos. Assim, a abordagem com enfoque na resolução de problema pode se configurar como um aliado nessa construção, uma vez que o desenvolvimento pleno do educando passa pelo respeito às características peculiares de cada etapa de ensino.

Nesta direção, corroboramos com pensamento de Onuchic e Allevato (1999), que afirma sobre o ensino de matemática com enfoque na resolução de problemas:

> O ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática (Onuchic e Allevato, 1999, p.208)

Assim, é importante que o professor permita que os alunos tenham o máximo de experiências com resolução de problemas dos mais variados tipos, problemas onde o aluno possa construir diferentes estratégias de resolução, partindo tanto do reportório formal quanto de suas experiências fora da escola, mas, que possibilite a construção significativa de soluções para os problemas propostos.

Neste sentido, a utilização de problemas pode configurar-se como um método bastante eficiente para um ensino-aprendizagem significativo da matemática, tendo foco a valorização e manifestação das diversas esferas da linguagem. Segundo Dante (2000), o uso de resolução de problemas promoverá no aluno o desenvolvimento da autoconfiança, criatividade e um prazer por pesquisas e novas descobertas que implicará numa capacidade de aprender, além de criar significados dos conceitos e ideias matemáticas.

Nestas situações é importante o uso de problemas abertos, pois exigem do aluno mais criatividade, experimentação de estratégias e raciocínio, o que facilitará consequentemente a compreensão básica das estratégias a serem adotadas para a resolução de problemas posteriores, conforme demostrados no excerto apresentados.

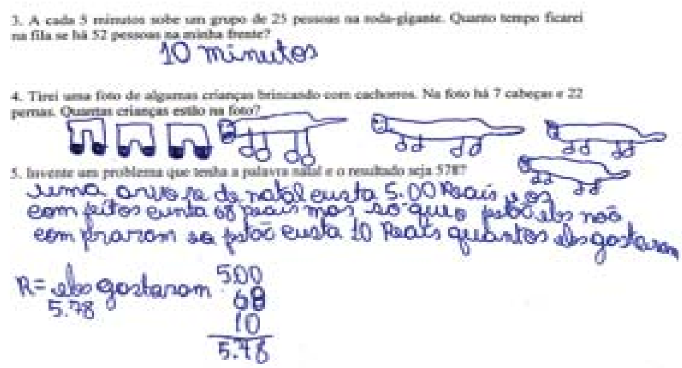


Figura 2- Solução apresentada por uma aluna

A resposta apresentada no excerto acima denominado de figura 2 que mostra a estratégia de resolução de uma das alunas da 5ª série mostra-nos, entre outros, que as diversas estratégias utilizadas pelos seres humanos para solucionar seus problemas, sejam eles matemáticos ou não, também evidencia a historicidade humana e as mudanças nas formas de manifestação, fruto das vivências e experiências.

Assim os excertos apresentados (Figura 1 e Figura 2) podem corroborar com o seguinte pensamento “Texto sobre texto, discurso sobre discurso, encontro de saberes, de experiências, de culturas, de sujeitos. Conhecimento produzindo vida, vida produzindo conhecimento. Conhecimento que gera compromissos de transformação e constitui o sujeito enquanto cidadão” (Freitas, 1996, p.173).

Neste sentido, fundamentada na mesma autora que afirma que “Fazer do trabalho pedagógico uma elaboração conjunta, não de formas predeterminadas de representar, significar e conhecer o mundo, mas formas culturalmente elaboradas de observar, aprender e compreender a dinâmica da sala dessa relação” (Freitas, 1996, p.173). É um desafio que se apresenta no trabalho do professor. Assim observar as diferentes maneiras que os alunos manifestam suas respostas aos problemas matemáticos propostos passa pela valorização das experiências de vida dos educandos.

Acreditamos que a perspectiva teórica de Bakhtin, Vygotsky e Benjamin pode contribuir para o entendimento das respostas dos alunos quando nos apresentam seu pensamento, uma vez que estes autores nos oferece uma construção teórica que coloca a linguagem como ponto de partida na investigação das questões humanas e sociais, além de ser também um desvio que permite que as ciências humanas transitem para fora dos paradigmas cientificistas (Jobim e Souza, 1994).

Algumas conclusões

A utilização de problemas matemáticos pode despertar a criatividade, o raciocínio e o uso de diferentes estratégias de linguagem, fruto de suas experiências e vivencias. A abordagem de problemas também privilegia as experiências sócio-político-culturais. Neste sentido, buscou-se abordar algumas impressões que podem surgir quando pensamos no par experiência/ sentido, quando consideramos as formas de produzir sentido das crianças para as coisas e principalmente o que as crianças nos apresentam ou ainda como nos apresentam no processo de conhecimento, quando é respeitada em sua singularidade.

Nesta linha de pensamento, acreditamos que o uso das diversas estratégias de escritas para solucionar problemas matemáticos está intimamente ligado às experiências de cada indivíduo, cabendo à escola explorar o universo dos estudantes, pois despertam a curiosidade e o interesse dos alunos, e pode promover a aprendizagem de conceitos e ideias matemática. Além disso, é de extrema importância que o professor oportunize aos alunos o trabalho com problemas matemáticos de diferentes tipos, pois auxilia no desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas tão importantes no contexto atual.

Referências bibliográficas

Augustine, C. H. d'. (1976). *Métodos Modernos para o ensino de Matemática*. Tradução de Maria Lucia F. E. Peres. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico.

Bakhtin, M. (2000). *Estética da criação verbal.* 3.ed.Tradução de Maria Ermantina Galvão. São Paulo: Martins Fontes.

Bakhtin, M. (2003). *Estética da criação verbal.* Trad. Paulo Bezerra. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes.

Benjamin, W. (2004). *Obras escolhidas II. Rua de mão única*. São Paulo: Editora Brasiliense.

Brasil, Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília*: MEC/SEF.

Carvalho, D. L. (1994). *Metodologia do ensino de Matemática*. 2 ed. São Paulo: Cortez.

Dante, L. R. (2000). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Editora: Ática.

Freitas, M. T. A. (1996). Bakhtin e a psicologia. In Faracco, Tezza e Castro (Orgs.). *Diálogos com Bakhtin* (pp.165-187). Curitiba: Ed. da UFPR.

Jobin e Souza. (1994) Solange. *Infância e Linguagem: Bakhtin, Vygotsky e Benjamin.* Campinas, SP: Papirus.

Larrosa, J. B.(2002). *Notas sobre a experiência e o saber da experiência*. *Revista Brasileira de Educação* (19), 20-28.

Moura, M. O. (2010). *Atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília: Liber Livro.

Onuchic, L.R. e Allevato N. S. G. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In M. A. V. Bicudo (Org.), *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectiva* (pp.199-218). São Paulo: UNESP.

Pironel, M. A. (2002). *Avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Estadual Paulista. Brasil.

Polya, G. (1986). *A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático.* Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. –Rio de Janeiro: Interciência.

Rego, T.C. (1996). *Vygotsky: Uma Perspectiva Histórico-Cultural da Educação*. Petrópolis, RJ: Vozes.

Sampaio, C. S. (2008). *Alfabetização e Formação de professores: aprendi a ler (...) quando misturei todas aquelas letras ali*. Rio de Janeiro: Wak editora.

Secretaria de Educação Fundamental do Brasil. (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília (PCN): MEC/SEF.

Vygotsky, L. S. (2001). *A construção do pensamento e da linguagem.* (Paulo Bezerra, Trad.). São Paulo: Martins Fontes.

CATEGORIZANDO AS TENDÊNCIAS DAS PESQUISAS EM HISTÓRIA DA MATEMÁTICA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA DA UFRN

Davidson Paulo Azevedo Oliveira; Maria Maroni Lopes; Bernadete Barbosa Morey
Instituto Federal de Minas Gerais - IFMG, Campus Ouro Preto; Brasil
Secretaria de Estado, da Educação e Cultura do Estado do Rio Grande do Norte - SEEC/RN
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
davidson.oliveira@ifmg.edu.br;marolopes@gmail.com;bernadetemorey@gmail.com

Resumo. Este texto visa analisar e discutir as tendências das pesquisas em História da Matemática desenvolvidas junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática - PPGECNM/UFRN, tomando como base as dissertações defendidas no período de 2004 a 2011. Objetivou-se com esse estudo caracterizar os argumentos teóricos e metodológicos dos estudos em História da Matemática. Realizamos inicialmente uma pesquisa em estado da arte, em seguida fizemos a descrição, análise e avaliação da produção acadêmica do referido programa em ensino da Matemática e investigamos algumas das contribuições na formação continuada dos egressos para a melhoria da qualidade da Educação Básica. A partir das análises constatamos que 57% das pesquisas, dezenove delas, têm como foco a História da Matemática. Destacamos duas vertentes: História da Matemática; E História da Matemática na Educação Matemática.

Palavras chave: produção acadêmica, história da matemática, formação continuada

Abstract. This text aims to analyze and discuss some of the results obtained in the dissertations and theses developed by the Program Graduate School of Natural Sciences and Mathematics - PPGECNM / UFRN. Initially we conducted a survey on state of the art, then we did the description, analysis and evaluation of academic production of the program about mathematics teaching and investigate some of the contributions to the ongoing training of graduates in order to improve the quality of basic education. From the analysis we found that 57% of searches, nineteen of them, have focused on the history of mathematics. We highlight two aspects: History of Mathematics and History of Mathematics in classroom.

Key words: academic production, history of mathematics, continued formation

Introdução

O presente estudo surgiu a partir do nosso interesse em buscar argumentos que fundamentassem algumas das possíveis contribuições que a utilização da História da Matemática por professores na sala de aula pode trazer para o ensino e para a aprendizagem da Matemática. Nesse contexto, acrescenta-se a nossa participação no Núcleo de Estudos em História e Pedagogia da Matemática, e a atuação de uma das autoras como bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) do observatório de pesquisa e formação em ensino de ciências e matemática (2008 - MEC/CAPES/DEB): um recorte da produção acadêmica no Nordeste e panorama de ação formativa na Educação Básica. Vinculado à Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) em parceria com a Universidade Federal Rural de Pernambuco e Universidade Estadual da Paraíba.

Buscamos, inicialmente, realizar uma pesquisa em estado da arte que consiste em uma investigação que analisa, em dado recorte temporal, as características da evolução histórica e os movimentos de um determinado campo de pesquisa (Megid Neto e Pacheco, 2001). Este trabalho está restrito às dissertações defendidas no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da UFRN, no período de 2004 a 2011. Em 2004 foi realizada a primeira defesa de dissertação do referido programa, tendo como título "A matemática sob a ótica do Tarô: Uma experiência com a educação de jovens e adultos", defendida por Regina Lúcia Tarquínio de Albuquerque.

A autora apresentou um trabalho alternativo para o ensino de Matemática, numa perspectiva transdisciplinar, no sentido de desenvolver a aprendizagem significativa de alunos jovens e adultos. Descreve os resultados obtidos em sua pesquisa por meio de uma intervenção com atividades com cartas de tarô como recurso didático em sala de aula. Assim, pretendia mostrar que tal instrumento pode ser um facilitador da aprendizagem de conteúdos da Matemática, por exemplo, como sistemas de numeração, números inteiros e geometria, tomando a Matemática numa perspectiva histórico-cultural e com um tratamento holístico ao complexo ato de aprender.

Realizamos a descrição, análise e avaliação da produção acadêmica em ensino da Matemática e investigamos algumas das contribuições das pesquisas em História da Matemática na formação continuada, sobretudo, de alunos egressos do programa, a fim de entendermos acerca da melhoria da qualidade da Educação Básica, pois o programa é profissional e visa a formação continuada de professores que atuam nas salas de aula da Educação Básica. Na análise do trabalho tomamos como referência os descritores do Centro de Documentação em Ensino de Ciências (CEDOC).

Entre as 79 dissertações que compõem o acervo do programa encontram-se: 28 em ensino da Física; 11 em ensino de Química; 08 em ensino de Ciências e Biologia e 33 em ensino de Matemática, das quais 19 são referentes à História da Matemática, nosso foco. Nossa principal coleta de dados se deu a partir da leitura das dissertações e de entrevistas com os egressos do programa.

Metodologia: apresentação dos dados coletados

A escolha metodológica do presente estudo tem como base uma abordagem qualitativa, pois se pretende caracterizar as tendências das pesquisas em História da Matemática do PPGECNM e compreender, a partir das análises realizadas, as contribuições para a formação continuada e melhoria da qualidade da Educação Básica.

Este estudo faz parte de um projeto em rede do Observatório da Educação, financiado pela CAPES, intitulado "Pesquisa e Formação em Ensino de Ciências e Matemática: um recorte da produção acadêmica no Nordeste e panorama de ação formativa na educação básica", que envolve pesquisadores da Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN e Universidade Estadual da Paraíba – UEPB e seus respectivos Programas de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

Nesse sentido, a coleta de dados adotada se deu a partir da leitura das dissertações dos egressos do referido programa na área de Ensino de Matemática, no período de 2004 a 2011 – esse período se justifica, por ter as primeiras dissertações defendidas, em 2004 – além de entrevistas semi-estruturadas. Com as entrevistas, pretendíamos aprofundar nossa interpretação, através da utilização de recortes advindos das leituras das dissertações. Agimos dessa forma por considerarmos que essa ferramenta é bastante relevante para o propósito de nosso estudo, notadamente pelo fato de que a mesma permite que haja um aprofundamento das análises.

Para tanto, adotamos os mesmos descritores utilizados na produção dos catálogos da USP/IFUSP - Instituto de Física da Universidade de São Paulo - (1992, 1996) e da UNICAMP/FE/CEDOC - Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas - (1998) que tem permitido estudos sistemáticos das produções da área além de se constituírem também como um banco de dissertações e teses. O CEDOC particularmente organiza seus dados por meio dos seguintes descritores: autor e orientador do trabalho; grau acadêmico e instituição em que foi produzido/defendido; ano da defesa; área de conteúdo do currículo escolar; foco temático; subfoco; nível escolar abrangido pelos estudos (sujeitos da pesquisa); referenciais teóricos e metodológicos e resumos das dissertações defendidas.

A leitura das dissertações foi realizada em conjunto com os demais participantes do Observatório da Educação da UFRN. Inicialmente o grupo de 12 bolsistas foi dividido em subgrupos com dois bolsistas, para os quais eram definidas as dissertações a serem lidas – independentemente da área – e utilizadas para preencher a ficha de descritores. Após o preenchimento das fichas, essas eram enviadas aos coordenadores do projeto para a tabulação e organização geral para uma visão ampla dos trabalhos. Dando continuidade as atividades, buscávamos o contato com os egressos na perspectiva de obter entrevistas com os mesmos que eram transcritas e encaminhadas para tabulação.

Nossa ação no tocante ao uso das entrevistas visava, especialmente, investigar acerca da metodologia que fora utilizada no decorrer da pesquisa e quais as consequências geradas pela dissertação no campo prático, ou seja, se algum produto dela advindo está sendo aplicado nas salas de aula da Educação Básica. Procuramos saber se o egresso, através de uma auto-avaliação de sua prática, verificou se houve mudanças na sua formação advindas de sua participação no programa de mestrado. E mais, era papel do egresso verificar se a sua pesquisa teve como consequência alguma ação por parte do corpo docente ao qual ele esteve inserido.

Após essa etapa, organizamos as fichas e entrevistas por área de ensino. Assim sendo, passamos a analisar o acervo em ensino da Matemática em específico as fichas e entrevista que tratam das investigações na linha de pesquisa História da Matemática.

Aspectos gerais das dissertações analisadas

O fluxo da produção do programa em História da Matemática pode ser observado no quadro 1 que nos mostra a existência de uma regularidade e crescimento de pesquisas por ano de defesa o que nos leva a acreditar que a História da Matemática é uma linha de pesquisa consolidada no referido programa.

Pesquisas em Ensino de Matemática	
Linha de pesquisa	Quantidade/ Ano da defesa
História da Matemática	01/2004; 01/2005; 03/2006; 02/2007; 04/2008; 01/2009; 02/2010 e 05/2011

Quadro 1- Dissertações defendidas em História da Matemática do PPGECNM por ano de defesa.

A partir das leituras realizadas verificamos que duas vertentes foram definidas entre as 19 dissertações defendidas, cujo tema central era a História da Matemática: (1) História da Matemática como recurso didático em sala de aula, ou seja, trabalhos que propõem um método alternativo para o ensino de Matemática, ou que descrevem e avaliam práticas pedagógicas e a metodologia de ensino nelas presente; (2) E História da Matemática por meio de pesquisa documental que propõem análises e traduções de obras específicas, nas quais são realizadas estudos com fontes originais.

No que se refere aos conteúdos presentes nas dissertações desenvolvidas pelos pesquisadores, encontramos: Números Complexos; Trigonometria; Logaritmos; Geometria Analítica; Funções; Equação do 2° grau; Secções Cônicas; Ternos Pitagóricos; Números Negativos e Proporcionalidades.

O quadro 2 apresenta os focos sob os quais as pesquisas que apresentam como vertente a História da Matemática foram categorizadas, sendo conteúdo-método e recursos didático os que apareceram com maior frequência. Vale salientar que uma mesma dissertação pode ser classificada em mais de um foco, por exemplo, a pesquisa de Gomes (2011) que elaborou uma sequência de ensino tendo como pano de fundo a história da trigonometria. As atividades de seu estudo foram planejadas, construídas, testadas em vários cursos de curta duração, sendo estes cursos realizados com professores de matemática do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino.

Focos	Quantidade de pesquisas
Conteúdo-Método	14
Recursos didáticos	12
Currículo e Programas	01

Quadro 2 - Focos das dissertações.

De acordo com o que pode ser inferido do quadro 2, o conteúdo-método constitui o foco de investigação de 14 das dissertações analisadas. Nessa categoria incluímos os trabalhos que propõem métodos alternativos para o ensino de Matemática, ou que descrevem e avaliam práticas pedagógicas e metodologias de ensino nelas presentes.

Por outro lado 12 dissertações constituem o foco de investigação de recursos didáticos que são estudos de avaliação de materiais ou recursos didáticos no ensino de matemática, tais como textos, livros didáticos, materiais de laboratório, filmes, computadores, jogos, brinquedos e mapas conceituais. Enfim, trabalhos que propõem e/ou desenvolvem e avaliam novos materiais, kits experimentais, *softwares* ou outros recursos e meios pedagógicos em situações de ensino formal ou extracurricular. Nesses dois focos estão categorizadas também as pesquisas de Machado (2011) que apresentou uma proposta de vídeo aula de História da Matemática para professores do Ensino Fundamental e Médio como forma de contribuir para o desenvolvimento de suas aulas. E ainda na mesma perspectiva Costa Junior (2010) que abordou a História da Matemática como fonte de atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade por meio de um bloco de atividades desenvolvidas com professores da rede pública de ensino da Paraíba.

Esses focos nos revelam uma preocupação dos pesquisadores com os problemas vivenciados em suas salas de aulas, pois eles são, ao mesmo tempo, professores-pesquisadores e os temas estão voltados para o seu cotidiano.

Em seu estudo sobre a formação pós-graduada em ensino de ciências naturais e matemática do Instituto Federal de Educação do Rio Grande do Norte e as implicações na prática docente desses egressos, Prado (2011) destaca questões micro e macro de pesquisas. O fluxo da produção das pesquisas do programa estão mais voltados para ações específicas da sala de aula, segundo a autora, esse tipo de questão é classificada como micro de pesquisa. Por outro lado, as questões macro, como análise de organização curricular, formação de professores, políticas públicas, voltados para o ensino de ciências naturais e matemática ainda não são discussões consolidadas nas pesquisas desenvolvidas no programa (Prado, 2011, p. 50).

Referencial teórico e metodológico utilizados

Direcionamos o nosso olhar, após um mapeamento geral, para o primeiro grupo de trabalhos (História da Matemática como recurso didático para sala de aula) na busca do referencial teórico e metodológico que fundamentaram esses trabalhos. O quadro a seguir apresenta o referencial teórico e metodológico dos trabalhos.

Referencial teórico	
História da Matemática como recurso didático em sala de aula	Brito (1995, 1996, 2003); D'Ambrósio (2001); Fauvel (1999); Fossa (2001; 2006); Gutierre (2003); Mendes (2001; 2009); Miguel (1994); Miguel e Brito (1996); Miguel e Miorim (2004; 2005); Miorim e Miguel (2002); Nobre (1996); Nobre e Baroni (1999); Schubring (1999).
Estudo Documental em Fontes Originais	Almouloud e Bastian (2003); Aaboe (2002); Bahier (1916); Brummelen(2009); Beatrice Lumpkin (1996), Jeans Hoyrup (2001); Martzloff (1996); Naux (1966); Parshall (1988), Pycior (1997).
Tecnologias da Comunicação e Informação no Ensino de Matemática	Borba e Penteado (2007); Borba e Villarreal (2005); Penteado (2002).
Teoria intuicionista da educação matemática	Fossa (1998)
Construtivismo	Fossa (1998, 2001); Gómez-Granell (1998); Martí (1998); Skemp (1980); Tolchinsky (1998);

Quadro 3 – Referencial teórico e metodológico das pesquisas.

Em algumas das dissertações pesquisadas, que utilizaram a História da Matemática como recurso didático para sala de aula de matemática, foram empregados como referencial teórico autores que tratam de elementos da História da Matemática referente ao objeto de estudo da pesquisa, presente em obras específicas tais como: Brummelen (2009); Naux (1966); Beatrice lumpkin (1996), Martzloff (1996).

Por outro lado, sete dissertações utilizaram autores que destacam a relevância da História da Matemática na Formação de Professores e na aprendizagem do aluno. Encontramos nas dissertações abordagens que articula a História da Matemática e Tecnologias da Comunicação e Informação no Ensino de Matemática; História da Matemática e Construtivismos e História da Matemática por meio de atividades investigativas.

Constatamos, nas produções acadêmicas analisadas, a ausência de referencial teórico metodológico específico que aborda a História da Matemática como metodologia de ensino. Percebemos ainda que a questão metodológica parece ser uma fragilidade nas produções dessa linha de pesquisa, pois não há uma discussão clara sobre a metodologia utilizada por parte de algumas das dissertações. Elas se enquadram dentro de uma abordagem qualitativa com pesquisas históricas, estudos exploratórios, pesquisas bibliográficas e análise de conteúdo (Prado, 2011, p. 50).

Com base nas entrevistas, com alguns dos pesquisadores egressos do PPGECNM, constatou-se em suas falas que a formação continuada tem proporcionado um trabalho diferenciado em suas salas de aula da Educação Básica ou na formação inicial com alunos da Licenciatura em Matemática. Os egressos destacaram ainda a relevância dos resultados das pesquisas que realizaram e a implicação delas na elaboração de atividades para a prática pedagógica deles.

Produtos educacionais em História da Matemática

A elaboração dos produtos educacionais nos mestrados profissionais é feito coletivamente, com idas e vindas nas salas de aula. O produto apresenta os resultados obtidos na pesquisa com fundamentação teórico-metodológica.

Como resultado desta investigação, percebemos que as dissertações até o ano de 2009 trazem, no corpo da dissertação ou em anexo, um bloco de atividades que fizeram parte da pesquisa e aparecem como sugestão de uso para sala de aula. Entretanto, a partir de 2010, as dissertações trazem o produto educacional destacado das dissertações em forma de caderno de atividades, vídeo aulas, *softwares*, kits, DVD, como proposta pedagógica para os professores interessado em utilizar a História da Matemática como recurso metodológico de ensino. Tem-se três cadernos de atividades nessa perspectiva: Gomes (2011), que traz a discussão de atividades sobre trigonometria numa abordagem histórica; Soares (2011) propõe um bloco de atividades com os recursos da História da Matemática sobre o conteúdo de logaritmos e Machado (2011) que trata sobre vídeo aula de História da Matemática para sala de aula do Ensino Fundamental e Médio.

Considerações finais

As pesquisas aqui citadas apresentam um panorama geral dos aspectos do programa analisado PPGECNM e nos fornece subsídios e embasamentos que justificam o nosso objetivo de entender a relevância e o potencial do uso da História da Matemática em sala de aula. Identificamos, também, a necessidade de aprofundamento tanto em relação ao referencial teórico quanto ao referencial metodológico nas pesquisas realizadas. Assim sendo, iniciamos uma busca por esse referencial com estudos de autores nacionais (Miguel e Miorin, 2008), e em artigos internacionais: (Radford, 1997; Kjeldsen, 2010 e Jankvist, 2009) que apresentam argumentos favoráveis e questionamentos quanto ao uso da História da Matemática na construção do conhecimento matemático do aluno. Estes textos estão sendo estudados e analisados tanto do ponto de vista dos referenciais metodológicos e teóricos utilizados quanto da utilização na prática da sala de aula.

Referências bibliográfcas

Brummelen, H.V. (2009). The mathematics of the heaven and the earth: the early of trigonometry. Princeton, Princeton University Press.

Costa, J. R., Jr. (2010). *Atribuições de significados ao conceito de proporcionalidade: contribuições da história da matemática*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.

Gomes, S. C. (2011). Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino de trigonometria numa abordagem histórica. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.

Jankvist, T. U. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. Educational Studies in *Mathematics* 71(3), 235–261.

Kjeldsen, T.H. (2010). A multiple perspective approach to the history of the practice of mathematics in a competency based mathematics education: history as a means for the learning of differential equations. In Katz, V., & Tzanakis, C. (Eds.). *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* 25, 121–157.

Machado, B. F. (2011).Video-aula de história da matemática – uma possibilidade didática para o ensino de matemática. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.

Megid, J., Neto, e Pacheco, D. (2001). Pesquisas sobre o ensino de Física no nível médio no Brasil: concepção e tratamento de problemas em teses e dissertações. In: Nardi, R. *Pesquisas em ensino de Física*. São Paulo: Escrituras, p. 15-30.

Miguel, A. & Miorim, M. A. (2008). História na educação matemática: Propostas e desafios, Belo horizonte, autêntica.

Naux, C. (1966). *Histoire des logarithmes de Neper a Euler*. Paris, Librairie A. Blanchard.

Prado, M. R. M. (2011). A formação pós-graduada em ensino de ciências naturais e matemática de docentes do IFRN: implicações na atuação docente. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 26-33.

ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: SIGNIFICADO DA CONTEXTUALIZAÇÃO DO CONHECIMENTO MÁTEMÁTICO

Luciene da Silva Pereira, Carmen Teresa Kaiber
Universidade Luterana do Brasil Brasil
lu.tk@hotmail.com, kaiber@ulbra.br

Resumo. Destacam-se, neste artigo, resultados parciais de um trabalho que se constitui em uma investigação sobre o significado da contextualização do âmbito da Matemática, do seu ensino e aprendizagem, considerando o currículo de Matemática no Ensino Médio, tendo como foco de análise a matriz de competências do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e as provas de Matemática desse exame. A investigação está sendo desenvolvida em uma perspectiva qualitativa, estando focada, no momento, na realização de uma análise crítico reflexiva das questões de Matemática e suas Tecnologias das provas do ENEM de 2009 e 2010, com o objetivo de identificar as competências e habilidades requeridas na solução das questões, bem como os conteúdos e contextos a que se referem.

Palavras chave: contextualização, resolução de problemas, conhecimento matemático

Abstract. This paper reports the partial results of an investigation on the meaning of contextualization in the scope of the teaching and learning of mathematics, considering the high school mathematics syllabus in Brazil and emphasizing official directives for the national high school general assessment (Matriz do Exame Nacional do Ensino Médio, ENEM) and the mathematics tests applied therein. The first stage of this investigation is being carried out from a qualitative perspective focused on a critical-reflexive analysis of the questions on mathematics and mathematical technologies in the 2009 and 2010 editions of ENEM. The aim is to identify the skills and abilities required to solve the test's questions, and to discuss the contents and contexts these skills refer to.

Key words: contextualization. problem solving, mathematical knowledge

Introdução

O termo *contextualizar* é citado como algo que necessita ser explorado para a compreensão das ideias, conceitos e procedimentos em Matemática, evidenciando a aplicação prática desses em situações próximas à realidade do aprendiz. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio [PCNEM] (Ministério da Educação, 2000) mencionam:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (Ministério da Educação, 2000, p. 43)

Destaca-se que a contextualização é evidenciada como um princípio norteador do Ensino Médio, entendendo-se, assim, como necessário a discussão sobre o que de fato é a contextualização em Educação Matemática, bem como a interdisciplinaridade que, no documento citado, aparece articulada a contextualização. Surge, então, a necessidade de se buscar uma educação que oportunize uma reflexão profunda sobre o quão convergentes podem ser os saberes formais e cotidianos se forem trabalhados como complementares, o que pode levar a uma diminuição do distanciamento existente entre a Matemática desenvolvida na escola e suas aplicações, no contexto em que os indivíduos estão inseridos.

Pavanello (2004), inspirada nas ideias de Brousseau, pondera que contextualizar significa apresentar ao aluno determinado componente curricular, de forma problematizadora e vinculada a uma situação real, com a atribuição de significado a elementos matemáticos. Já os PCNEM (Ministério da Educação, 2000) destacam que conhecer o contexto, em que determinado saber foi concebido, oportuniza a compreensão da dimensão histórico-filosófica da produção científica, bem como, seu caráter de verdade científica. Além disso, o Ensino Médio deve garantir o espaço para aprofundamento dos conhecimentos, desenvolvendo habilidades como a resolução de problemas, apropriando-se dos aspectos relevantes da linguagem simbólica, validação de argumentos, descrição de modelos e, especialmente, a capacidade de utilizar a Matemática como instrumento para interpretação e intervenção do real. O desenvolvimento de componentes curriculares de Matemática, a partir de um conjunto de circunstâncias, caracteriza a adoção de contextos de ensino, contextos esses que são construídos a partir de uma rede de significados, devendo-se destacar que é indispensável a formulação de caminhos conceituais para que haja embasamento teórico para o desenvolvimento dos componentes curriculares. Nesse sentido, Machado (2009) pondera que não há um percurso conceitual único a ser percorrido. É possível construir vários percursos, mesmo partindo de um mesmo contexto e, na composição desses, revela-se a importância do papel do professor, o qual deve oportunizar a construção de pontes conceituais entre várias áreas do saber, para que seja possível a construção de conhecimento com base na relação de múltiplos contextos e de diferentes características.

Desse modo, entende-se como importante e necessário uma reflexão, sobre qual é, de fato, a essência da contextualização na e da Matemática, em seus aspectos intuitivos e lógicos e, principalmente, no que se refere à perspectiva de promoção da cidadania e responsabilidade dentro da sociedade, por meio da ampliação dos conhecimentos matemáticos.

Nesse sentido, o presente trabalho se constitui em uma investigação sobre o significado da *contextualização* no âmbito da Matemática no Ensino Médio, do seu ensino e aprendizagem, e como essa contextualização pode ser levada para a sala de aula na construção de conhecimentos específicos. A investigação vai se desenvolver a partir da análise das provas de Matemática e suas Tecnologias dos anos de 2009 e 2010 do Exame Nacional do Ensino Médio

[ENEM] (Ministério da Educação, 2010), considerando a matriz de referência que o subsidia, tomando como foco de análise os conhecimentos matemáticos abordados, competências e habilidades exigidas e a presença de questões que envolvam situações contextualizadas.

Parâmetros Curriculares Nacionais e o Exame Nacional do Ensino Médio

O documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio–Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias [OCENEM] (Ministério da Educação, 2006) evidencia que a contextualização efetiva não se resume à composição de cenários e narrativas que apresentem os conceitos em situações fictícias, destacando que a contextualização pode ser feita através de resolução de problemas que evidenciem o desenvolvimento de estratégias para solução, as quais mobilizem uma diversidade de competências, a fim de realizar tentativas, estabelecer e testar hipóteses para, assim, validar e comprovar suas respostas.

Nesse sentido, os PCNEM (Ministério da Educação, 2000) estabelecem que o Ensino Médio deve buscar a formação do indivíduo em uma perspectiva global, enfatizando o saber fazer e a capacidade de reflexão diante de situações problema, e não somente a simples memorização. Considera-se que o documento aponta para uma convergência e integração entre as disciplinas da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, o que está presente, também, na perspectiva interdisciplinar expressa pelo ENEM. Assim, considera-se que o ENEM, com sua matriz de competências e habilidades, se constitui em importante aporte para investigações de questões relativas ao Ensino Médio; razão pelo qual se passa a discutir aspectos do mesmo.

Na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, o PCNEM (Ministério da Educação, 2000) destaca que o sentido de compatibilidade das áreas reunidas representa uma medida intencional na busca pela interdisciplinaridade e contextualização efetiva. Em consonância com o que está estabelecido no documento, o Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira [INEP] (2010a) instituiu o ENEM, que consiste em uma prova, criada pelo *Ministério da Educação* – MEC, utilizada como ferramenta para avaliar a qualidade geral do *Ensino Médio* no país, como exame de acesso ao *Ensino Superior* em universidades brasileiras e como ingresso em universidades privadas pelo Programa Universidade para Todos [PROUNI]. O exame está estruturado a partir de competências definidas como modalidades estruturais da inteligência, ações e operações, as quais são utilizadas para estabelecer relações com e entre objetos, situações, fenômenos e pessoas. A Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias, de acordo com o INEP (2010b) está organizada em sete competências, as quais se subdividem em distintas habilidades, conforme descrição apresentada na Figura 1.

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES
Área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.	H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais. H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem. H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos. H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas. H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
Área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.	H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional. H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais. H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma. H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
Área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida. H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano. H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas. H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente. H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.
Área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas. H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais. H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação. H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
Área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.	H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas. H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas. H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos. H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação. H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Área 6- Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.	H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências. H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos. H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
Área 7- Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinar amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.	H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos. H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade. H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação. H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Fonte: Matriz de Referência do ENEM disponível em: http://enem.inep.gov.br

Figura 1 - Competências e habilidades – Matriz do ENEM.

Ainda, tomando como referência o que o INEP preconiza para o exame, destaca-se que a matriz de referência demonstra uma evolução importante no processo de avaliação dos estudantes, sendo pautado com ênfase nas habilidades consideradas essenciais, que enfatizam a relação teórico-prática, o aprender a pensar, o saber- fazer e o saber- conhecer.

Metodologia da Investigação

Embasado na perspectiva dos autores e documentos supracitados e, em consonância com os objetivos da investigação, a perspectiva metodológica adotada é de base qualitativa (Ludke e André, 1986). Essa perspectiva prevê que os dados serão coletados e analisados buscando averiguar os significados, a compreensão e a interpretação sobre os aspectos investigados, complementados por informações quantitativas, sendo que a pesquisa está organizada em três etapas. A primeira consiste na articulação teórica da investigação, onde foram abordadas concepções de conhecimento matemático, bem como, a análise do significado da *contextualização* no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e suas possibilidades de concretização no âmbito do Ensino Médio. Na segunda etapa, realizou-se uma análise crítica e reflexiva sobre as questões que compõem as provas de Matemática e suas Tecnologias do

Exame Nacional do Ensino Médio, no que se refere aos conhecimentos matemáticos abordados, competências e habilidades exigidas e a presença de questões que envolvam situações contextualizadas. Foram analisadas as provas dos anos de 2009 e 2010 do referido exame a partir da utilização de técnicas de análise de conteúdo, conforme proposto por Bardin (2002). De acordo com a autora, essa análise consiste em um processo criterioso com inúmeros aspectos observáveis, oportunizando uma compreensão abrangente sobre os fatores implícitos em determinada situação observada.

A última e terceira etapa da investigação se constitui no desenvolvimento e aplicação de intervenções didáticas experimentais referentes a Números Complexos e Logaritmos, tendo como foco a *contextualização*. Essas intervenções estão sendo elaboradas e serão aplicadas junto a turmas de alunos do Ensino Médio noturno do Instituto Estadual de Educação Pereira Coruja, localizado no município de Taquari-RS. No que se refere ao presente artigo, serão destacados os resultados da pesquisa produzida no âmbito da segunda etapa.

A Contextualização no Enem 2009 e 2010

Os resultados aqui apresentados referem-se a um recorte da análise das provas de Matemática e suas Tecnologias dos anos de 2009 e 2010, sendo, cada uma delas, composta por 45 questões de múltipla escolha. Essa análise tem como foco a identificação das competências e habilidades envolvidas nas questões, os conteúdos conceituais matemáticos ou blocos de conteúdos a que se referem, além da presença de situações e problemas contextualizados.

A análise realizada permitiu identificar que, no que se refere aos conteúdos conceituais, foram enfatizadas questões que envolvem conhecimentos elementares de aritmética (soma, subtração, multiplicação, divisão e regra de três simples e composta) as quais exigiam, basicamente, leitura e interpretação de dados. Em contrapartida, escassas foram as questões que necessitavam de conhecimentos algébricos.

Com relação às competências e habilidades, a análise apontou que estas não foram exploradas de forma equitativa nas provas em estudo, havendo, em uma mesma prova, repetidas vezes uma determinada habilidade em detrimento de outra.

Tomando como base o que os documentos oficiais preconizam, os autores citados e, a partir da análise de conteúdo proposta por Bardin (2002), elaboraram-se três categorias para classificação das questões analisadas, em relação à contextualização:

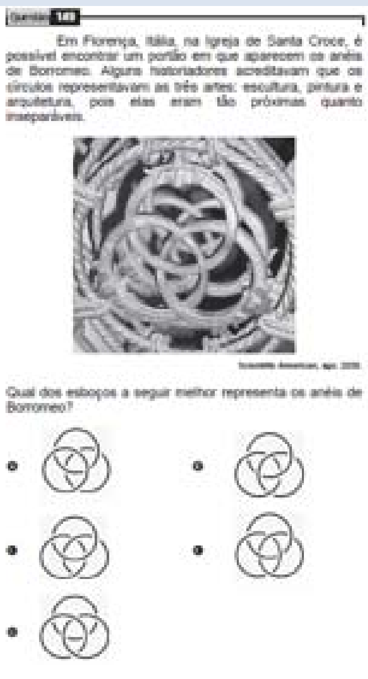
- Aplicação do conhecimento matemático-ACM - nessa categoria enquadram-se as questões onde o componente curricular é apresentado sob uma visão simplista, com ênfase na memorização acrítica de dados, datas, fórmulas e outras informações e pouca ênfase na solução de problemas, utilização de capacidades analíticas e processos criativos.

- Descrição do conhecimento matemático-DCM - questões onde os conhecimentos matemáticos estão postos de modo a fornecer explicações para fatos, porém não existem evidências de que esses dados sejam verídicos, tratando-se de uma situação hipotética que não possui conexão direta com informações reais.

- Compreensão do conhecimento matemático e transformação do contexto em que o conhecimento matemático está inserido-CCMT – categoria que abrange as questões em que existe uma ligação direta com a realidade, envolvendo fatos reais, cuja base tem seus dados extraídos de fontes como jornais e revistas.

A partir da categorização elaborada, e analisando aspectos da contextualização citados, destaca-se na figura 2 uma situação onde é possível evidenciar as ambiguidades existentes no que se refere ao significado da contextualização:

ENEM 2009	ENEM 2010



Em Florença, Itália, na Igreja de Santa Croce, é possível encontrar um portão em que aparecem os anéis de Borromeo. Alguns historiadores acreditavam que os círculos representavam as três artes: escultura, pintura e arquitetura, pois elas eram tão próximas quanto inseparáveis.

Scientific American, ago. 2008.

Qual dos esboços a seguir melhor representa os anéis de Borromeo?

Questão 144

A resistência elétrica e as dimensões do condutor

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma secção transversal (A);
- resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ) e
- comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (ℓ), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,

A) direta, direta e direta.
B) direta, direta e inversa.
C) direta, inversa e direta.
D) inversa, direta e direta.
E) inversa, direta e inversa.

Figura 2: Questões das Prova do ENEM de 2009 e 2010

Analisando a questão da prova de 2009, independente do objetivo avaliativo com que foi concebida, observa-se que, para sua resolução, é necessário apenas a observação do plano da imagem, não sendo incorporados aspectos pertinentes, tais como, por exemplo, a Teoria dos

Nós. Não é exigida do estudante uma compreensão sobre conhecimentos específicos relacionados à questão, bem como estabelecimento de vínculos sobre sua origem e aplicação, o que, conforme o PCNEM (Ministério da Educação, 2000), caracterizaria a contextualização, o que levou a questão ser classificada como uma questão de descrição do conhecimento matemático-DCM.

Em contrapartida, embora a questão extraída da prova de 2010 exija para sua resolução apenas conhecimentos básicos sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais, apresenta-se articulada outra área de conhecimento. Tem como tema central aspectos relativos a eletromagnetismo, envolvendo uma situação-problema transversal, configurando-se, assim, em uma situação de contextualização, conforme preconizam os PCN+ Ensino Médio (Ministério da Educação, 2002), classificada, no âmbito desta investigação, como uma questão de compreensão do conhecimento matemático e transformação do contexto em que o conhecimento matemático está inserido-CCMT.

Considerações finais

A preparação básica para o trabalho, a construção da cidadania e o desenvolvimento da capacidade de aprender continuamente são considerados como finalidades do Ensino Médio. Esse deve garantir espaço para o desenvolvimento de habilidades que enfatizem a utilização da Matemática como instrumento para interpretação e intervenção do real, onde o contexto é apontado como meio privilegiado para atribuição de significado ao que se pretende ensinar. Conjectura-se que a contextualização consiste em uma situação, na qual o conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto, onde existe uma relação com os conhecimentos pertinentes ao universo do aprendiz e vínculo a conhecimentos matemáticos de estrutura formal.

Nesse contexto, o recorte dos dados da análise das provas do ENEM do ano de 2009 e 2010, aqui apresentados, chama a atenção para o que Santos e Mortimer (2000, p.8) denominam como "dourar a pílula", isto é, "[...] introduzir alguma aplicação apenas para disfarçar a abstração excessiva de um ensino puramente conceitual, deixando, à margem, os reais problemas sociais". A análise produzida dá indícios de uma falta de articulação com relação à compreensão do que é a contextualização no âmbito da Matemática, expressa nos documentos oficiais e preconizada como uma das características do trabalho com a disciplina nesse nível de ensino, que perpassa das provas do ENEM. Embora as questões sejam apresentadas, via de regra, mediante enunciados longos que buscam ir além da apresentação de uma questão do tipo "calcule, resolva ou determine", nem sempre se constitui, de fato, em um problema contextualizado no âmbito da realidade do estudante ou que apresente relações com outras áreas do conhecimento. Destaca-se, porém, que se tratam de considerações efetuadas com base em uma investigação que está em andamento, o que pode estabelecer um caráter de transitoriedade às sínteses realizadas.

Referências bibliográficas

Bardin, L. (2002). *Análise de conteúdo***.** (Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro, Trad.). Lisboa: Edições 70.

Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira-INEP. (2010a). *Exame Nacional do Ensino Médio.* Brasília: MEC.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira-INEP. (2010b). *Eixos cognitivos do ENEM. 2010.* Recuperado em 03 de maio, 2012 de http://enem.inep.gov.br

Ludke, M., & André, M. (1986). *A Pesquisa em Educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU

Machado, N.J. (2009). *Educação: Competência* e *Qualidade.* São Paulo: Escrituras.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais-INEP. (2010). *Eixos cognitivos do ENEM. 2010. Recuperado em 03 de maio, 2012 de* http://enem.inep.gov.br

Ludke, M., & André, M. (1986). *A Pesquisa em Educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU

Machado, N.J. (2009). *Educação: Competência* e *Qualidade.* São Paulo: Escrituras.

Ministério da Educação. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Ensino Médio. Brasília: MEC/ Semtec.

Ministério da Educação. (2002). *PCN+ Ensino Médio:* orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/ Semtec.

Ministério da Educação. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio.* Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/ Semtec.

Pavanello, R.M. (2004). *Contextualizar, o que é isso?* In *C.* Nogueira e R. Barros (Orgs.), *Conversas e experiências de quem gosta de ensinar Matemática* (pp.17-27). Maringá, PR: Manoni.

Santos, W.L.P. & Mortimer, E.F. (2000). Uma análise de pressupostos teóricos da abordagem C-T-S (Ciência - Tecnologia - Sociedade) no contexto da educação brasileira. *Ensaio: Ensaio- Pesquisa em Educação em Ciências 2* (pp.1-23). Belo Horizonte-MG: UFMG.

CONVERSIÓN DE REGISTROS EN EL CÁLCULO INTEGRAL: LA PROBLEMÁTICA DE LOS SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Melissa Andrade Molina, Alex Montecino Muñoz
Cinvestav del IPN México
mandrade@cinvestav.mx, montecino@cinvestav.mx

Resumen. En esta investigación se indagaron las dificultades al determinar el volumen de un sólido de revolución. Detectamos que los estudiantes no conciben los diferentes significados de f(x) por lo que un papel del docente será resignificarlo como un objeto de imagen o altura y no sólo como la función "a integrar". Asimismo, generar mentalmente un sólido provoca conflictos en el traspaso entre dimensiones. Se evidenció que la enseñanza escolar chilena no enfatiza procesos cognitivos como el razonamiento y visualización espacial, soslayando la tercera dimensión que es necesaria para rotar una figura en dos dimensiones en torno a un eje.

Palabras clave: Representaciones semióticas, resignificación, representación, transformación

Abstract. In this research we investigated the difficulties in determining the volume of a revolution solid. We detected that students do not conceive the different meanings of f (x), thus, the teacher's role will be resignify -resignificado- it as an image or height object and not just the function to be "integrate". In the same way, mentally generate a solid leads to cognitive conflicts transferring between dimensions. Was evidenced that the Chilean school education does not emphasize cognitive processes such as reasoning and spatial visualization, ignoring the third dimension is needed to rotate a figure in two dimensions around an axis.

Key words: Semiotic representation, resignification, representation, transformation

Introducción

En esta investigación se indagan las dificultades que presentan algunos estudiantes para determinar el volumen de un sólido de revolución mediante integrales definidas. El problema fue detectado a partir de una experiencia en aula –en una asignatura de Cálculo II– cuando se produce un debate entre el profesor y un estudiante respecto a ¿qué se hace girar al calcular el volumen de un sólido de revolución con hueco? Lo cual es abordado usualmente por el método de las capas cilíndricas o de la arandela.

En una primera indagación se generó y aplicó un instrumento que corroboró la presencia de obstáculos, de tipo didáctico y epistemológico (Brousseau, 1983), además de conflictos cognitivos, en el sentido de Aguilar y Oktaç (2004, p.3), quienes señalan que la noción del conflicto cognitivo se relaciona con *"un estado de desequilibrio que surge cuando una concepción que tiene un individuo entra en conflicto con alguna otra concepción que lleva el mismo individuo, o bien con el ambiente externo"*.

Detectamos que los estudiantes presentan limitaciones al establecer los diferentes significados que toma $f(x)$ en el cálculo integral (*imagen, altura, segunda coordenada de un par ordenado, expresión algebraica de una función*), coartando de esta manera, el traspaso del registro gráfico al registro algebraico. Por lo que un papel primordial del docente, para el caso del tratamiento de la integral definida, será resignificar *f* (*x*) como un objeto de imagen o altura (aspecto geométrico implícito en la gráfica de la función) y no quedarse sólo con el hecho de que *f* (*x*) representa una "función a integrar", además de enfatizar procesos cognitivos como el razonamiento y visualización espacial.

Del análisis del instrumento y de la revisión bibliográfica recabada, se concluye que a los estudiantes les dificulta cambiar de un registro algebraico a uno gráfico, al momento de generar mentalmente el sólido, una de las causas es la ausencia del eje z en el plano cartesiano al hacer rotar una región en torno a un eje, tanto en libros escolares, como en libros de texto e incluso en algunos softwares matemáticos (Andrade y Montecino, 2009).

Lo anterior permite suponer que el no realizar o proponer actividades que involucren un cambio de registros entre los diferentes tipos de representaciones semióticas (Duval, 1999), puede conllevar a conflictos cognitivos al momento de cambiar dimensiones, o más específicamente, en el salto del plano al espacio, lo que denominamos *transformación* (Andrade y Montecino, 2011).

Problemática

El tema a investigar deriva de una experiencia de aula vivida el año 2005, mientras cursábamos la actividad curricular o asignatura de Cálculo II (Contenidos: Integral indefinida; métodos de integración; integral definida; aplicaciones de la integral definida; integrales impropias; integración múltiple), de la Licenciatura en Educación, mención en Matemáticas e Informática Educativa de la Universidad Católica Silva Henríquez en Santiago de Chile. Un estudiante inició una discusión con el docente con respecto a qué es lo que se hace girar para conformar un sólido de revolución con hueco.

El conflicto que presentó el estudiante radica en el momento de identificar la expresión que debía ser integrada para obtener, en este caso, el volumen de un sólido con hueco, proponiendo una expresión que corresponde al cálculo del volumen de un sólido sin hueco, lo cual se puede apreciar en la siguiente figura.

Forma general:	**Propuesta por del estudiante:**
$\pi\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx$	$\pi\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]^2 dx$

Figura 1: Fórmulas para calcular el volumen del sólido de revolución
(Andrade y Montecino, 2009, p. 28)

Este suceso develó ciertos conflictos cognitivos, que conllevaron a realizar un estudio en torno a identificar las dificultades que presentan los estudiantes al calcular el volumen de un sólido de revolución, mediante integrales definidas. Donde se busca vislumbrar conflictos para: identificar los significados o roles que está cumpliendo *f* (*x*) y *g* (*x*); al manipular y transitar en los diferentes registros; y cuando se transita del plano al espacio, es decir en la *trasformación*.

Aproximación

Para abordar la problemática mencionada anteriormente, se diseñó un cuestionario que fue aplicado a estudiantes de segundo año del Programa de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de la Universidad Católica Silva Henríquez, en Chile, basado en el cálculo de áreas y volúmenes de diferentes sólidos de revolución (con y sin hueco), el que corroboró la presencia de conflictos, en primer lugar, al identificar la "expresión algebraica" que debía ser integrada para obtener el valor numérico del volumen del sólido, y en segundo lugar, al formular imágenes mentales y representación del sólido que se forma.

En ambos caso se hace indispensable una interacción entre los registros algebraico y gráfico, además de identificar los roles de *f* (*x*) y tener la capacidad de manipular mentalmente los cambios de registros y la trasformación.

Como podemos ver, en una pregunta del cuestionario, se le pidió a los estudiantes que calcularan el área de la región comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, lo cual se resuelve mediante la integral definida $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$. Posteriormente, se les pidió que calcularan el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer rotar esa región en torno a $y = 0$, obteniendo en la mayoría de los casos $\pi \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]^2 dx$. Sin embargo, al pedirles que graficaran dicho sólido se obtuvo la siguiente respuesta:

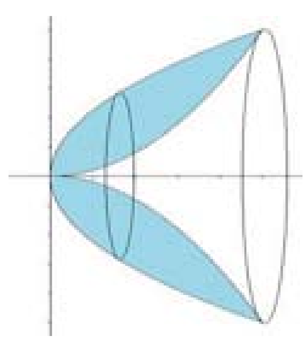


Figura 2: Gráfica propuesta del sólido.

Se puede observar que la integral que corresponde al sólido de la figura 2 es $\pi\int_0^1[\sqrt{x}]^2-[x^2]^2dx$, lo que se contrastó con el sólido con el que realmente estaban trabajando los estudiantes, es decir, el correspondiente a la integral $\pi\int_0^1[\sqrt{x}-x^2]^2dx$ (figura 3).

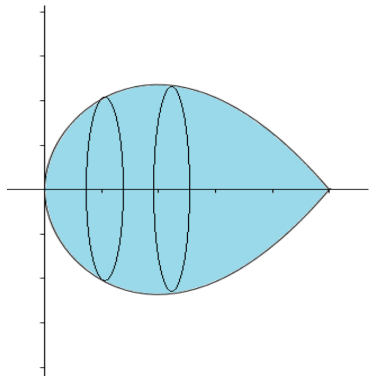


Figura 3: Volumen que calcularon los estudiantes

De las respuestas dadas podemos suponer que:

- no se profundiza en la construcción geométrica de un sólido de revolución con hueco;
- no se propicia instancias que favorezcan a un razonamiento y visualización espacial;
- no se consideran los cambios que suceden al momento de aplicar una transformación.

Por ejemplo en el caso anterior, en el cálculo de área, el *f* (*x*) se entiende como las alturas que se encuentran bajo la curva de ancho *dx*, pero cuando el problema pasa al cálculo de volumen las *f* (*x*) representan el radio de las arandelas de ancho *dx*, es decir lo que se debe entender por *f* (*x*) cambia según el contexto en que se esté trabajando, lo que conlleva a otorgar un nuevo significado, es decir, *resignificarlo*; además existe ideas previas que son generalizadas debido al modo que son presentadas dentro del curriculum, podemos ver en diferentes textos que el tratamiento de área y volumen se presentan de forma consecutiva, es decir primero se calculan áreas de figuras planas para luego trabajar con el cálculo de volumen, lo que podría inducir a pensar, que es el área lo que se hace girar, o lo que se mueve, para obtener el sólido (Andrade y Montecino, 2009), esta idea es reforzada por algunos libros sin detenerse a analizar lo que está presentado.

> […] se presenta la definición de este concepto con entendimientos erróneos y confusos para el estudiante, por ejemplo: *"Un sólido de revolución es generado al hacer girar el área de una figura*" (Ayres, 1991), dejando nula claridad respecto a un eje de rotación, …, más aún, sabiendo que el área representa sólo el valor numérico de una región o superficie, entonces ¿De qué forma podríamos hacer

girar un número para obtener un sólido de revolución? (Andrade y Montecino, 2009, p. 32).

Conclusiones

La aplicación del instrumento llevó a concluir que generar mentalmente los sólidos de revolución no es un proceso inmediato, ya que, lo que produce mayores conflictos es el traspaso entre dimensiones, *trasformación*, tanto mental como escrito. Ante esta dificultad, Piaget (1970) señala que, como seres humanos, estamos limitados a visualizar la abstracción de la matemática en dos dimensiones, lo cual, claramente es diferente a nuestra cotidianeidad.

Por otra parte, se hace primordial poder transitar entre registros algebraico y geométrico, pero como se pudo observar no es algo que sea natural entre los encuestados, permitiéndonos suponer que, el no realizar o proponer actividades que involucren un cambio de registros entre los diferentes tipos de representaciones semióticas y el no fomentar el razonamiento y visualización espacial, puede conllevar a conflictos cognitivos al momento de cambiar dimensiones, o más específicamente, en el *salto del plano al espacio* (Andrade y Montecino, 2009).

Además, se identificó que las herramientas que actualmente están inmersas en los salones de clases permiten hacer dibujos bidimensionales que representen un objeto tridimensional o cuerpo geométrico, mediante el uso de perspectiva. Sin embargo, algunas de estas herramientas, tales como calculadoras graficadoras, softwares matemáticos, entre otras, permiten otorgar una visualización dinámica, pero no asegura el logro en la representación mental del cuerpo. Una de las causas es la ausencia del eje z, en el plano cartesiano, al hacer rotar una región en torno a un eje, dificultando la visualización del sólido que se conforma (figura 4). Por ejemplo, Artigue (2004) advierte que el uso de estos recursos se torna insuficiente si no existe un adecuado resguardo por la dimensión epistemológica del objeto a enseñar.

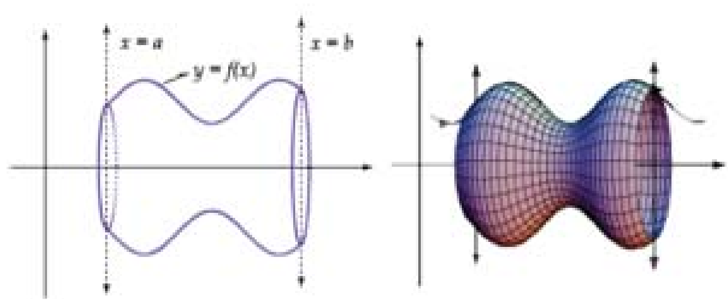


Figura 4: Representación de un sólido de revolución mediante un software matemático. (Andrade y Montecino, 2009, p. 35)

Es así como el abrir un debate sobre el proceso que hemos denominado *trasformación*, permitiría revertir situaciones como las encontradas al indagar sobre temáticas geométricas previas a la enseñanza del cálculo integral, que estuviesen interviniendo en la adquisición y apropiación de este contenido, donde se detectó que en la enseñanza escolar, específicamente en el tratamiento de algunas actividades de las Unidades de: Primer Año Medio, contenido: "Transformaciones Isométricas", Segundo Año Medio, contenido "Semejanza de triángulos"; cuarto Año Medio, Contenido: "Áreas y volúmenes", se da poco énfasis a procesos cognitivos como el razonamiento y visualización espacial, dando poca o nula importancia a la tercera dimensión que necesariamente se utiliza para rotar una figura en dos dimensiones en torno a un eje imaginario, es decir se soslaya el traspaso necesario por una tercera dimensión.

En la evidencia recabada en esta investigación se lograron observar dificultades en representar imágenes o figuras tridimensionales en dos dimensiones y, por consiguiente, la complejidad en plasmarlas en un papel. Por lo que sostenemos que la *transformación* implica, imponer al estudiante un desafío necesario, el cual generaría un conflicto cognitivo al momento de resolver ejercicios que involucren este salto implícito del plano al espacio, es decir de 2 dimensiones a 3 dimensiones.

Por otra parte, se concluye que al abocarse a generar mentalmente los sólidos, a los encuestados les dificultó la conversión de un registro algebraico a uno gráfico, al graficar las funciones para obtener los límites de integración de una región encerrada por dos o más curvas, y viceversa, al encontrar la expresión algebraica a integrar de una superficie. Así también, se detectó que la mayoría de los estudiantes no logra identificar los diferentes papeles que representa $f(x)$, específicamente al calcular el volumen del sólido. Por lo que se considera necesario y primordial para el caso del tratamiento de la integral definida, resignificar $f(x)$, es decir dotar de nuevos significados a $f(x)$, donde se especifiquen aquellos roles que toma por ejemplo en el proceso de transformación o conversión de registros, en otras palabras, dar énfasis a su aspecto dinámico.

Finalmente, sostenemos que aún queda mucho trabajo por hacer en este campo, ya que del presente estudio se desprenden ciertas interrogantes que se espera resolver en investigaciones posteriores:

i) ¿Los estudiantes recurren a la tridimensionalidad para enfrentarse a problemas que requieran de ésta?

ii) ¿es viable construir una propuesta de trabajo, aplicable al aula, que logre potenciar la visualización espacial en los estudiantes?

Referencias bibliográficas

Aguilar, P., y Oktaç, A. (2004). Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (2), 117-144

Andrade, M. y Montecino, A. (2009). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano: Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo.* Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Católica Silva Henríquez, Chile.

Andrade, M. y Montecino, A (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano, *Actas del XIII CIAEM-IACME* 2011. En: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2405.pdf.

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática* 16(3), 5-28.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 135-149.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Peter Lang.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking*. Basic Issues for Learning. Proceedings of the 21st PME-NA Annual Meeting. Cuernavaca, Mexico.

Piaget, J. (1970). Piaget's theory. En PH Mussen (Ed.), *Carmichael's manual of child psychology* 1, 703-732. New York: Wiley.

Pulido, R. et al. (2001). *Elementos del cálculo. Reconstrucción para el aprendizaje y su enseñanza*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Stewart, J. (2001). *Cálculo: Conceptos y Contextos*. México: Thomson Learning.

LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL COMO HERRAMIENTA EN EL ENTENDIMIENTO DE LO TRIDIMENSIONAL

Alex Montecino Muñoz, Melissa Andrade Molina
Cinvestav del IPN México
montecino@cinvestav.mx, mandrade@cinvestav.mx

Resumen. El objetivo de este estudio, converge en detectar las dificultades asociadas al uso de la visualización espacial. Realizamos observaciones de campo -desprendidas de un análisis previo- con la finalidad de identificar si la visualización espacial es utilizada como herramienta en actividades que involucran lo tridimensional. En los resultados podemos encontrar que los estudiantes tienen grandes dificultades en el trabajo y representación de lo tridimensional y, más aún, acudir a ella para encontrar la solución de una problemática determinada, por otra parte podemos vislumbrar que no se formaliza la tridimensionalidad durante la enseñanza escolar, lo que obstaculiza la comprensión de ésta.

Palabras clave: visualización espacial, recurso pedagógico, representación

Abstract. The objective of this study converges detect the difficulties associated with use of the space visualization. We conducted field observations - emerged from a previous analysis, in order to identify whether spatial visualization is used as a tool in activities that involve three-dimensional. In the results, we find that students have great difficulty at work and three-dimensional representation further, go to her to find solving of a given problem, besides the three-dimensionality is not formalized during school education, which hinders the understanding of this.

Key words: spatial visualization, educational resource, representation

Introducción

El objetivo de este estudio converge en detectar las dificultades asociadas al momento de recurrir al uso de la visualización espacial en situaciones de problemas. Con este fin, se realizó un trabajo de observación de campo –desprendido de un análisis previo– el que tuvo como finalidad identificar si la visualización espacial es utilizada como herramienta, por parte de los estudiantes, al enfrentarse a situaciones que pongan en juego sus conocimientos sin involucrar fórmulas algebraicas o patrones de solución para la solución de estas situaciones.

Para llevar a cabo el objetivo del estudio se analizaron los Planes y Programas propuestos por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), de Primer Año Básico (NB1) a Cuarto Año Medio (NM4); los textos del Estudiante otorgados por el MINEDUC desde Séptimo Año Básico (NB5) a Cuarto Año Medio (NM4); el Texto de Apoyo del Docente correspondiente a NM4. Siendo el análisis de éstos el sustento para establecer la relación entre los distintos niveles escolares frente a cómo se abordan objetivos, aprendizajes esperados, actividades y contenidos mínimos, para posteriormente identificar si están direccionados a generar o propiciar una visualización espacial en los alumnos.

Resultados del análisis de los Planes y Programas y Textos Escolares

De la revisión se identificó que no existe un trabajo profundo que propicie cambios de registros entre los diferentes tipos de representaciones, conllevando a conflictos al momento de cambiar dimensiones, más específicamente, el salto del plano al espacio. Así mismo, de este análisis se logra evidenciar que se priorizan ciertos contenidos, poniendo especial énfasis en desarrollar las competencias necesarias en los estudiantes para que logren desenvolverse exitosamente en pruebas estandarizadas a las que deberán enfrentarse durante su formación escolar. Por consiguiente, se puede concluir que no se ahonda en las representaciones bidimensionales de cuerpos tridimensionales, conllevando a que los estudiantes no desarrollen sus habilidades para la manipulación de lo tridimensional. Por ejemplo, en aquellas actividades que se centran en el trabajo con cuerpos geométricos o sus representaciones en el plano sólo se remiten al cálculo de áreas y volúmenes, identificación de redes y descomposición de cuerpos.

Teniendo en consideración estos antecedentes se aplicaron dos problemas, a estudiantes de NB5, NB6, NM3 y NM4, que involucran el uso de la tridimensionalidad.

Muestra y actividades aplicadas

La muestra en total fue de 76 estudiantes, de los cuales 59 se encontraban cursando séptimo y octavo básico y 17 cursaban tercero y cuarto medio. El desarrollo de la experiencia fue registrado mediante observaciones de campo de tipo descriptiva, ya que se narró, mediante notas de campo, los sucesos tal y como ocurrieron durante su transcurso, destacando sólo la información que se estimó relevante para llevar a cabo el análisis.

Las actividades aplicadas consistieron fundamentalmente en enfrentar a los alumnos a dos situaciones en las que fuese vital, como herramienta o recurso de solución, la visualización espacial. La primera actividad involucra un problema de ingenio propuesto en jornadas de educación matemática, cuya solución subyace en el pensamiento tridimensional, siendo este pensamiento el que propicia buscar solución en un contexto tridimensional. La segunda, corresponde a un problema de construcción geométrica que se resuelve mediante la manipulación de materiales tangibles, por lo que la carencia de visualización mental del espacio propicia dificultades que, en algunos casos, impiden aproximarse a la solución.

Se seleccionaron estos problemas a fin de dar cuenta que a una parte no menor de estudiantes, ya en niveles finales de enseñanza básica y de enseñanza escolar, no les es inmediata la visualización mental de cuerpos tridimensionales, por lo que creemos tienden a trabajar y a pensar en dos dimensiones, es decir, sobre el plano, a pesar de que el mundo que les rodea tiene a lo menos tres variables: anchura, altura y profundidad. Por consiguiente, ambas actividades requieren un quiebre al pasar del plano al pensamiento espacial.

La primera actividad se aplicó a los niveles de séptimo y octavo año básico, con el fin de establecer un punto de referencia sobre las habilidades para desenvolverse en el espacio. Por otro lado, al indagar acerca de la visualización espacial de los estudiantes que se encuentran cursando los últimos años de enseñanza escolar, consideramos que el primer problema no era muy adecuado ya que anticipamos, por experiencias previas, que los estudiantes se entramparán en algunas propiedades como que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°, distinguiendo la presencia de obstáculos que pudiesen impedir hallar la solución del problema planteado. Es por esta razón que se decide aplicar el segundo problema a los estudiantes de tercero y cuarto medio. Teniendo en cuenta que vivimos personalmente esta situación pudiendo constatar que no sólo a estudiantes de enseñanza escolar o superior les es difícil pensar en tres dimensiones, sino que también a profesores, filósofos, psicólogos, que compartieron esa experiencia con nosotros. Sin embargo, para corroborar nuestras conjeturas iniciales sobre el primer problema, decidimos aplicarlo, durante el transcurso de la clase, a tercer año medio.

Los resultados obtenidos pusieron en manifiesto ciertas falencias respecto a hacer uso de la tridimensionalidad como recurso o herramienta para la solución de una situación problemática, ya que sólo surge ésta luego de agotar todas las posibles soluciones en el plano. Esto puede deberse a que durante la enseñanza escolar los problemas, ejemplos y trabajos se entrelazan con el contenido que está siendo institucionalizado, por otra parte la centralización existente a las pruebas estandarizadas, la que favorece a un carácter utilitario de las matemáticas, es decir, hace ver a la matemática como una herramienta para resolver problemas que pueden situarse dentro de la matemática o de otros contextos, pero no permite la visión de que el conocimiento se construye para transformar la realidad, por ende, no se reflexiona sobre su construcción ni su funcionalidad, teniendo como consecuencia la existencia de un predominio dentro del discurso matemático escolar (dME) que deriva en una memorización de algoritmos, propiedades y conceptos, conllevando a que no se propicien instancias donde los constructos que se están construyendo tengan una significación que dependa de un contexto determinado (Soto, 2010).

Resultados de la aplicación de la primera actividad

En el caso de la primera actividad, el problema fue planteado de la siguiente forma: "*Un hombre se encuentra con un oso, para escapar de él corre 10 kilómetros hacia el sur, luego gira en 90° hacia el este y corre 10 kilómetros en esa dirección, luego gira 90° hacia el norte y corre otros 10 kilómetros* *y finalmente se encuentra con el mismo oso. ¿De qué color es el oso?"* (Andrade y Montecino, 2009, p. 103), las respuestas giraron principalmente en torno a:

- Las que se limitan a dar cuenta del recorrido que realiza el sujeto, distinguiéndose al menos dos tipos: el recorrido del hombre según los ángulos (ver Figura 1) o bien el recorrido del hombre según los tramos recorridos (ver Figura 2).

"R// Es café porque el resultado de caminar tanto(…) una C de cafe"

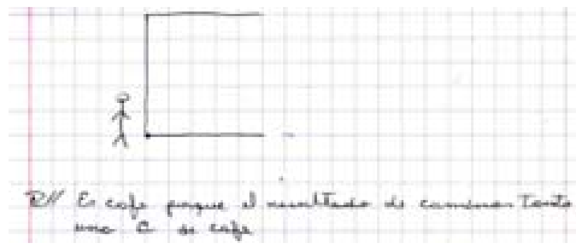


Figura 1: Recorrido del hombre según los ángulos
(Andrade & Montecino, 2009, p. 105)

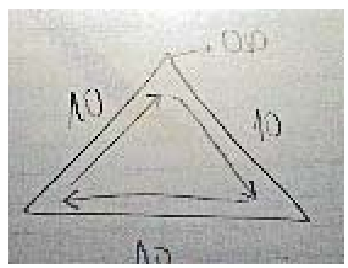


Figura 2: Recorrido del hombre según los tramos recorridos
(Andrade y Montecino, 2009, p. 105)

Por ejemplo unos estudiantes dijeron: *"esto fue lo primero que hicimos, pero nos dimos cuenta que el oso debía cambiar de lugar"; "Entonces, para que el oso sea el mismo, el hombre debe haber hecho este movimiento, o sea un triángulo"* (Andrade y Montecino, 2009, p. 105).

- En algunos casos se obtuvieron respuestas que revelaban el uso de lo tridimensional (ver Fig.3), tales como: *"la única forma es que si camina en la tierra, entonces hace un movimiento así (dibuja una curva del centro a uno de los polos) entonces ahí sí se puede, pero no sabemos de qué color es el oso"; "El hombre camina en forma de triángulo, porque recorre tres veces 10 kilómetros y llega al mismo punto, para que los ángulos sean de 90° entonces debería ser con las capas de la tierra"* (Andrade y Montecino, 2009, p. 105).

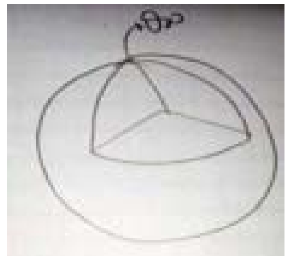


Figura 3: Superficie esférica

(Andrade y Montecino, 2009, p. 105)

En total una minoría de alumnos convergieron a la solución correcta, sin embargo, el objetivo de proponer esta actividad era ver si los alumnos utilizaban la visualización espacial como recurso para obtener la solución a un problema. Si bien en muchas ocasiones se pude apreciar que parte de los estudiantes vislumbraban que no era factible encontrar una solución en el plano, no fueron capaces de dar el salto a lo tridimensional.

En términos generales, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes no logran desprenderse de un pensamiento bidimensional, es decir, abandonar el plano, y menos aún, intuir la posibilidad de un trabajo sobre una superficie esférica, por ejemplo, una vez finalizada la actividad, un estudiante manifestó: *"Nunca se me hubiese ocurrido hacer el movimiento en la tierra"* (Andrade y Montecino, 2009, p. 106).

Además, se detectó que en los estudiantes hay conceptos arraigados que en esta ocasión, generan un *obstáculo* (Brousseau, 1983, 1986) para el trabajo asignado, como lo es el haberse apropiado de que toda suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, enseñada y enfatizada durante la presentación y trabajo de triángulos durante la enseñanza escolar, por ejemplo al momento de presentar las soluciones surgen cometarios como: *"pero no que la suma de los ángulos interiores de un triángulo debe ser 180°, y ahí se pasa"* (Andrade y Montecino, 2009, p. 128).

Resultados de la aplicación de la segunda actividad

En el caso de la segunda actividad, presentado de la siguiente forma: "*Construir cuatro triángulos congruentes con seis segmentos del mismo largo (la medida de los palitos)"* (Andrade y Montecino, 2009, p. 106), sus materiales eran 6 palitos de igual medida, forma y tamaño. Este problema revela que los estudiantes no son capaces de utilizar la tercera dimensión como primer recurso para su solución, los estudiantes tienden a solucionar el problema utilizando figuras planas, surgiendo luego la necesidad de utilizar la tridimensionalidad para converger a la resolución de éste. Coincidiendo con lo que plantean Lowenfeld y Brittain-Lambert (1980) al señalar que lo tridimensional surge por la necesidad de representar su entorno en tres dimensiones.

Cabe resaltar que este proceso no es inmediato, para algunos alumnos no se hace evidente el uso de la visualización espacial. Viéndose esto reflejado por ejemplo en lo comentado por un estudiante el que manifiesta: *"Que extraño que en lo primero que uno piensa es en buscar figuras que sean familiares, yo no llegué al tetraedro y nunca se me pasó por la cabeza salir del plano"* (Andrade y Montecino, 2009, p. 106).

Por otra parte se puede evidenciar la manipulación de las propiedades de figuras planas a fin de obtener la solución del problema. Por ejemplo, al dibujar un cuadrado y trazar sus diagonales, afirmando que se forman cuatro triángulos congruentes, revela que el estudiante está comprendiendo que un triángulo rectángulo puede tener todas las medidas de sus lados de igual longitud. Por el contrario, algunos a pesar de no confluir a una solución, son capaces de contraponer los resultados de sus compañeros con las propiedades de la geometría euclidiana. Por ejemplo un estudiante confronta a su otro compañero diciendo: *"pero las diagonales de un cuadrado no miden lo mismo que sus lados"* (Andrade y Montecino, 2009, p. 107).

Las figuras obtenidas en la aplicación de esta actividad, en terceros y cuartos medios, fueron las siguientes:

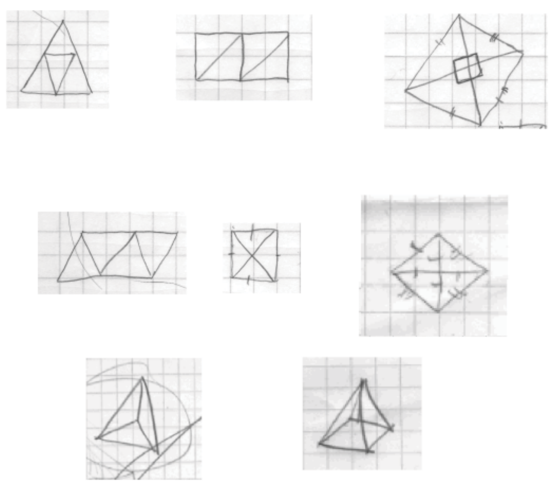


Fig. 4: Figuras planas y cuerpos obtenidos por los estudiantes

(Andrade y Montecino, 2009, p. 107)

Conclusiones

En los resultados de esta investigación podemos encontrar, por una parte, que los estudiantes tienen grandes dificultades en el trabajo y representación de lo tridimensional y, más aún, acudir a ella para solucionar una problemática, se evidenció que los estudiantes utilizan la tridimensionalidad luego de agotar todas las posibles soluciones en el plano. Y, por otra parte, no se formaliza la tridimensionalidad durante la enseñanza escolar, lo que obstaculiza aún más la comprensión de ésta. Es por ello que Andrade y Montecino (2009, 2011) concluyen que es indispensable un desarrollo de la visualización espacial y su uso como recurso pedagógico, el cual propicie y dé herramientas para entender lo tridimensional.

Dentro de los textos analizados –planes y programas de estudio, textos escolares para el estudiante y para el docente– podemos concluir que no se profundiza en las representaciones bidimensionales de cuerpos tridimensionales, lo que implicaría que los estudiantes no desarrollen sus habilidades para la manipulación de lo tridimensional. Las actividades que se centran en el trabajo con cuerpos geométricos o sus representaciones en el plano se remiten al cálculo de áreas y volúmenes, identificación de redes, descomposición de cuerpos, además, se identifica la presencia de figuras prototipos. Creemos que es necesario establecer un trabajo interdisciplinario con el Subsector de Artes Visuales, donde se torna de vital importancia el disponer de una visualización espacial que permita desenvolverse en el uso de la perspectiva, para que el estudiante desarrolle sus capacidades y habilidades en torno a trazar en el plano la realidad que le rodea, lo que implica que se hará más fluido el visualizar las representaciones bidimensionales de cuerpos geométricos (Andrade y Montecino, 2011).

En algunos niveles de enseñanza escolar, no se profundiza en el desarrollo de la visualización espacial en los estudiantes, sino que se propicia el cálculo de áreas y/o volúmenes, mediante fórmulas. Por otro lado no se proponen actividades a fin de evaluar lo tridimensional en los estudiantes, como se dijo anteriormente se prioriza el trabajo con algoritmos y memorización de propiedades, por sobre el desarrollo, en este caso, de un pensamiento geométrico.

Se hace necesario profundizar en un pensamiento geométrico, donde se construyan herramientas para manipular e interpretar la realidad, ya que éste se utiliza como recurso para la solución y comprensión de ejercicios de otros saberes matemáticos, por ejemplo, simetría de cuadriláteros. Además podemos ver que el dME privilegia algunos tipos de argumentaciones, significados y procedimientos, imponiendo una situación que no permite la inclusión del estudiante en su construcción del conocimiento matemático (Soto 2010).

Así mismo, podemos ver que dentro del dME no se propician la visualización de cuerpos geométricos desde distintas perspectivas, ya que en diferentes textos conllevan a la misma imagen del cuerpo, representándolos desde un mismo punto de vista (prototipo). Lo que interviene en que se aprenda o memorice sólo una representación para cada cuerpo.

De la aplicación de los problemas de tridimensionalidad, se detectó que gran parte de los estudiantes que participaron en la actividad, presentan dificultades en el trabajo y representación de lo tridimensional, en otras palabras, en manipular y acudir a ésta para solucionar una situación problema. Uno de los factores que, creemos, influye directamente es que los estudiantes no son capaces o no les es inmediato desarraigarse de las preconcepciones heredadas del trabajo en dos dimensiones, además que durante la enseñanza escolar los problemas, ejemplos y trabajos se entrelazan con el contenido que está siendo institucionalizado y no con el bagaje y preconcepciones que el estudiante tiene.

Se puede evidenciar que el estudiantado presenta dificultades referentes a la manipulación de las representaciones en el plano de cuerpos geométricos tridimensionales, sobre todo al dibujarlas. En consecuencia, es indispensable que los estudiantes desarrollen las habilidades y competencias para dibujar e interpretar las representaciones en el plano de los cuerpos tridimensionales y, de esta manera, obtener las herramientas necesarias para comprender, visualizar y manipular las representaciones icónicas y/o gráficas de la geometría espacial y con ello el estudio de saberes matemáticos avanzados.

Es por lo anterior mencionado que se hace indispensable incluir nuevas formas de enseñanza o apoyo para el aprendizaje del estudiante, que favorezca percibir las matemáticas, específicamente lo referente a lo geométrico, de manera dinámica y variable (Andrade & Montecino, 2009, 2011).

Referencias bibliográficas

Andrade, M. y Montecino, A. (2009). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano: Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo.* Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Católica Silva Henríquez, Chile.

Andrade, M. y Montecino, A (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano, *Actas del XIII CIAEM-IACME* 2011. En: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2405.pdf.

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, DIE-Cinvestav.

Brousseau, G. (1986). Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. La problématique et l'enseignement des mathématiques*, Actas del XXVIII CIEAEM.*

Lowenfeld, V. y Brittain-Lambert, W. (1980). Desarrollo de la capacidad creadora. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Ministerio de Educación (2004). Programas de Estudios de Educación Matemática, desde Primer Año Básico a Cuarto Año Medio. Chile.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

CAPITULO 2

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo de Propuestas para la enseñanza de las matemáticas

Olga Lidia Pérez González

Universidad de Camagüey (Cuba)
olguitapg@gmail.com

Aunque los educadores matemáticos aún tiene problemas abiertos y retos científicos que abordar (Cantoral, 2010) es innegable el desarrollo vertiginoso del movimiento latinoamericano de dichos educadores, lo que se hace evidente por el creciente número de propuestas para la enseñanza de la Matemática que se presentan en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa, las cuales no sólo están diseñadas para el beneficio de la formación matemática de los estudiantes, sino también para el perfeccionamiento del trabajo didáctico de los maestros.

En este capítulo se presentan numerosas propuestas que están relacionadas directamente con la actividad matemática, y aportan descripciones, explicaciones y sugerencias, desde diferentes puntos de vistas.

La mayor cantidad de ellas están relacionadas con la Estadística, las Probabilidades y la Geometría, encontrándose, además, propuestas referidas al Álgebra Lineal, las operaciones de adición, multiplicación y cociente, la matemática numérica, los números decimales, la integral de una función, la noción de variación, la optimización, el Álgebra, el estudio de magnitudes (masa y longitud), la ecuación de segundo grado y la convergencia de secuencias finitas.

Más de la mitad de las propuestas son estudios cualitativos, muchos de ellos denominadas estudios de casos, que investigan sobre la comprensión de conceptos, el aprendizaje cooperativo, los modos de evaluar el conocimiento de los futuros maestros, la evaluación de competencias matemáticas, las estrategias de los alumnos, el análisis de estrategias de aprendizaje y de resolución de problemas, análisis de errores, entre otros estudios. Además de los estudios cualitativos se proponen estrategias didácticas, tipos de evaluación final, secuencias didácticas, descomposición genética de conceptos, así como herramientas orientadoras para el aprendizaje.

Conscientes de que no tenemos un paradigma único que dirija a las investigaciones en la Matemática Educativa (Cantoral, 2011) se aprecia que los estudios que se presentan en este capítulo se realizan desde diversas perspectivas teóricas, entre las que se destacan la etnomatemática, el enfoque histórico cultural, el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, la metacognición, la teoría de Duval (tratamientos y conversiones), la teoría de los modelos mentales, el aprendizaje significativo y la teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas).

Otras argumentan teóricamente sus estudios desde la perspectiva de los niveles de Van-Hiele, la ingeniería didáctica, el aprendizaje cooperativo, los modos de expresión del pensamiento matemático, la comprensión de conceptos matemáticos, las competencias y modelación matemática.

Estas importantes propuestas constituyen obligadas fuentes de referencias para que maestros e investigadores debatan, reflexionen, contextualicen y generalicen los resultados que aquí se presentan, con respeto a las tradiciones educativas y contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región y con un fin común: perfeccionar la enseñanza de la Matemática..

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2010). La Matemática Educativa: Una disciplina de múltiples perspectivas. *Revista Latinoamericana de matemática Educativa 13*(2), 123-128.

Cantoral, R. (2011). La Escuela latinoamericana de matemática Educativa. *Revista Latinoamericana de matemática Educativa 14*(1), 6-8

A MODELAGEM MATEMÁTICA E SUAS POSSIBILIDADES PARA A AÇÃO PEDAGÓGICA DO PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA

Daniel Clark Orey
Universidade Federal de Ouro Preto Brasil
oreydc@cead.ufop.br

Resumo. Neste artigo, o autor procura discutir as perspectivas sobre a possibilidade da utilização da modelagem matemática como uma ação pedagógica para o ensino e aprendizagem da matemática. Essa discussão emerge em virtude da necessidade de se vincular a modelagem matemática como uma ação pedagógica para o programa etnomatemática no ensino e aprendizagem da matemática.

Palavras chave: modelagem matemática, modelos matemáticos, ethnomathematics

Abstract. In this article, the author discusses the perspectives about the possibilities of utilization of mathematical modeling as pedagogical action for the teaching and learning of mathematics. This discussion emerges because of the necessity to tying mathematical modeling as pedagogical action for the ethnomathematics as a program for the teaching and learning of mathematics.

Key words: mathematical modeling, mathematical models, ethnomathematics

Introdução

O programa etnomatemática se identifica com o pensamento contemporâneo, pois registra ideias, fatos, procedimentos e práticas que estão inseridas em um sistema de pensamento matemático sofisticado. Esse sistema visa o entendimento, a compreensão e o desenvolvimento das técnicas e habilidades matemáticas que estão presentes no *saber-fazer* matemático dos membros de grupos culturais distintos. O entendimento do como *fazer* matemática e a compreensão do processo de matematização desenvolvido por esses grupos podem ser obtidos por meio da utilização das práticas da modelagem, que são consideradas como as maneiras, os modos, as técnicas e os procedimentos utilizados nos grupos culturais com o objetivo de explicar, conhecer, entender, compreender, lidar e conviver com a própria realidade por meio da tradução de situações-problemas enfrentadas no cotidiano (Rosa e Orey, 2007).

Então, a matemática é uma atividade inerente ao ser humano, praticada com plena espontaneidade, resultante de seu ambiente sociocultural e, consequentemente, determinada pela realidade material na qual o indivíduo está inserido (D'Ambrosio, 1990). Assim, a etnomatemática pode ser considerada como uma estratégia desenvolvida pela humanidade no decorrer de sua história para explicar, entender, compreender, manejar e conviver com a realidade nos contextos natural, social, cultural, político e econômico, utilizando técnicas e procedimentos diferenciados para lidar com estes ambientes.

Diante desse contexto, Rosa e Orey (2010) entendem que a etnomatemática pode ser caracterizada como uma forma de entendimento do pensamento matemático de diferentes grupos culturais que procura compreender as ideias e os conceitos matemáticos utilizados em grupos culturais distintos para que tenhamos uma melhor compreensão das práticas matemáticas utilizadas no cotidiano desses grupos e entender como determinados grupos culturais utilizam os sistemas matemáticos alternativos que desenvolveram para solucionar os problemas relacionados com as próprias experiências cotidianas.

Por outro lado, Rosa e Orey (2010) argumentam que a modelagem procura entender as ideias e os conceitos matemáticos utilizados nos sistemas matemáticos alternativos para que tenhamos uma melhor compreensão das práticas matemáticas desenvolvidas nos grupos culturais, validando-as no contexto cultural no qual foram geradas e desenvolver procedimentos e técnicas que possam proporcionar a tradução e a contextualização das ideias, dos conceitos e das práticas matemáticas desenvolvidas nos grupos culturais por meio da elaboração de modelos.

Dessa maneira, se um sistema matemático é utilizado constantemente por um determinado grupo cultural, como um sistema baseado em ideias, conceitos e práticas matemáticas cotidianas que sejam capazes de resolver situações-problema retiradas da própria realidade, então, esse sistema de resolução de problemas, pode ser caracterizado como modelagem (Rosa e Orey, 2006). Nessa perspectiva, "todos estarão fazendo modelagem, cada grupo utilizando os recursos intelectuais e materiais próprios, isto é, a sua própria etnomatemática" (D'Ambrosio, 2000, p. 142). Então, entendemos que nesse processo, a matemática acadêmica tradicional e o sistema de pensamento matemático de um determinado grupo cultural podem ser utilizados, simultaneamente, como abordagens pedagógicas no ensino e aprendizagem da matemática.

A Modelagem e a Etnomatemática

A educação matemática tradicional tem como objetivo o ensino e a transmissão de procedimentos e técnicas que são utilizadas em situações artificiais e descontextualizadas, muitas vezes, apresentadas como situações-problema. Nessa abordagem, os problemas formulados somente utilizam técnicas operatórias que favorecem a memorização de certas habilidades procedimentais pelos alunos. As técnicas operatórias utilizadas na resolução desses problemas são, geralmente, tediosas, desinteressantes, obsoletas, e não possuem uma relação direta com o mundo externo à escola e nem com a sociedade moderna. Em nosso ponto de vista, essas características da educação matemática tradicional podem ser responsáveis pela diminuição da motivação, do interesse, do rendimento e pelo grau de satisfação escolar que os alunos apresentam no ensino-aprendizagem da matemática.

Diante desta realidade, a procura de:

> (...) novas visões do ensino que vivenciamos na virada do milênio fez surgir a necessidade de se criar novas formas de pensar e encaminhar métodos de ensino para a Matemática. Sendo assim, temos a opção de refletir sobre a Resolução de Problemas Matemáticos, que através da etnomatemática, são diferenciados da forma tradicional. (Scandiuzzi e Miranda, 2000, p. 251)

Seguindo essa tendência educacional, uma das abordagens pedagógicas que pode ser utilizada no ensino e aprendizagem da matemática é a implantação da modelagem nas salas de aula com a utilização da etnomatemática, que está presente no cotidiano dos grupos culturais, para a elaboração de atividades curriculares que nortearão os caminhos pedagógicos dessa disciplina. A utilização da etnomatemática e da modelagem no ensino e aprendizagem da matemática tem como objetivo a ampliação e o aprimoramento do conhecimento matemático que foi adquirido e acumulado pelos membros de grupos culturais distintos. Dessa maneira, essa abordagem pedagógica tem como meta o fortalecimento das raízes e a valorização da identidade cultural desses indivíduos (Rosa e Orey, 2003).

Nesse direcionamento, a etnomatemática pode ser definida como a maneira pela qual os indivíduos pertencentes a grupos culturais específicos (*etno)* desenvolveram ao longo da história; as ideias, os conceitos, os procedimentos, as técnicas e as práticas (*ticas)* matemáticas necessárias para aprender a trabalhar com medidas, cálculos, inferências, comparações, classificações, e modos diferentes de modelar os ambientes social, natural, econômico, político e ambiental *(matema)*, para que esses indivíduos possam explicar e compreender os fenômenos que ocorrem nesses ambientes (D’Ambrosio, 1990). Então, sendo a matemática o produto de um grupo cultural específico na busca de soluções para os problemas enfrentados no próprio cotidiano, esse programa também se identifica com a história, a filosofia e a pedagogia da matemática.

Então, a etnomatemática pode ser entendida como a área de intersecção entre a antropologia cultural e a matemática acadêmica, que utiliza a modelagem matemática para solucionar problemas reais, propomos a modelagem como uma das ações pedagógicas para o programa etnomatemática (D’Ambrosio, 1993; Rosa, 2000). A figura 1 mostra a etnomatemática como a intersecção entre a matemática acadêmica, a antropologia cultural e a modelagem.

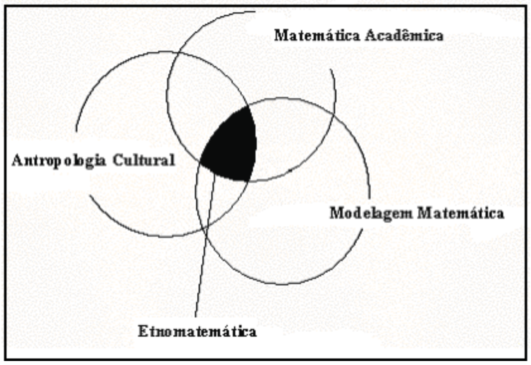


Figura 1: A etnomatemática como a área de intersecção entre três campos de estudo

Nessa perspectiva, a modelagem matemática é uma metodologia essencial ao programa etnomatemática, pois as suas técnicas proporcionam a contextualização da matemática acadêmica ao fornecer as condições necessárias para que os indivíduos pertencentes a grupos culturais distintos adquiram as mesmas ferramentas educacionais utilizadas pela classe dominante, para que possam atuar competitivamente na sociedade contemporânea e no mundo globalizado (D'Ambrosio, 1993).

Ao observamos a história da matemática, podemos perceber que a modelagem pode ser considerada como o pilar sobre o qual a matemática se desenvolveu e ainda se desenvolve por meio de um processo de abstração que é construído sobre os modelos matemáticos, que são representações aproximadas do mundo real, que podem ser elaborados com a utilização de práticas etnomatemáticas (Rosa e Orey, 2003). Nesse contexto, o programa etnomatemática não rejeita os conceitos apresentados pela matemática acadêmica e utiliza a modelagem para aprimorar essas concepções para incorporá-las aos valores de ética, respeito, solidariedade e cooperação que fazem parte do sistema sociocultural de qualquer grupo cultural (D'Ambrosio, 2000). No entanto, enfatizamos que a ênfase do programa etnomatemática é conceitual enquanto que a ênfase da modelagem é o desempenho crítico sobre os procedimentos que são adotados na resolução de situações-problema especificas de cada grupo cultural. Em ambos os casos, o conceito e o desempenho crítico podem auxiliar de um modo significativo o desenvolvimento e o aprimoramento do currículo matemático escolar.

Historicamente, os modelos que têm origem na realidade dos grupos culturais podem ser considerados como uma ferramenta pedagógica que é utilizada para a abstração das ideias, conceitos, procedimentos e das práticas matemáticas adquiridas e acumuladas, de geração em geração, pelos indivíduos pertencentes a esses grupos culturais. Dessa maneira, a etnomatemática pode servir-se da manipulação desses modelos como estratégia de ensino e aprendizagem ao utilizar as manifestações e as codificações culturais, concomitantemente, com a linguagem formalizada da matemática acadêmica. Então, os modelos são concebidos de maneiras diferenciadas, pois podem ser idealizados e descritos de acordo com as visões de mundo de cada grupo cultural.

Nessa concepção, os modelos não podem se restringir "em termos de uma representação matemática ideal" (Klüber, 2007, p. 97), pois podem adquirir, em sua elaboração "outras peculiaridades, como um simples procedimento a ser seguido, uma tabela representativa, em relação ao objeto estudado e outros" (Klüber, 2007, p. 97). De acordo com essa perspectiva, quando consideramos os modelos matemáticos, existe uma aproximação da modelagem com a etnomatemática, pois os "pressupostos da multiplicidade de fenômenos, de aspectos quantitativos quando encontrados na concepção da Modelagem vão ao encontro dos pressupostos que a etnomatemática tem ao analisar formas peculiares de conhecimento e produção de conhecimento em diferentes culturas, comunidades e contextos" (Klüber, 2007, p. 97).

Então, ao se trabalhar com o programa etnomatemática, a modelagem pode estar presente, pois os recursos utilizados pela modelagem, que são as noções conceituais e a aplicação crítica das técnicas e dos procedimentos matemáticos, são aspectos importantes na resolução dos problemas que se encontram no currículo da matemática tradicional. Assim, concordamos com Klüber (2007) quando diz que é importante desenvolvermos a modelagem em uma perspectiva sócio-humanística mostrando a sua consonância com os pressupostos da etnomatemática.

A modelagem matemática como ação pedagógica para o programa etnomatemática

Ao utilizarmos o processo da modelagem para modelarmos um determinado fenômeno da realidade com o objetivo de compreender esse fenômeno, então os pressupostos da etnomatemática estão presentes, pois esse programa é composto por um conjunto de saberes, ideias, procedimentos e práticas matemáticas que um determinado grupo cultural desenvolveu, acumulou e transmitiu através das gerações. Dessa maneira, modelagem pode ser considerada como "a metodologia de acesso da etnomatemática enquanto que a etnomatemática é uma ação pedagógica que permite a compreensão das potencialidades matemáticas da comunidade trabalhada" (Klüber, 2007, p. 15). Convém salientarmos que muitas vezes os dados obtidos na modelagem matemática são de natureza essencialmente etnomatemática, pois podem ser provenientes dos costumes dos grupos culturais que os utiliza sem qualquer preocupação com a cientificidade de sua origem, pois estão presentes nas manifestações culturais desses grupos (Bassanezi, 2002).

De acordo com este contexto, apresentamos três estudos que explicitam a proximidade entre a etnomatemática e a modelagem. O estudo realizado por Caldeira (1992) teve por objetivo direcionar a matemática às reflexões social, cultural e política, buscando um interrelacionamento entre a matemática acadêmica e os procedimentos etnomatemáticos que eram utilizados pelos integrantes de uma comunidade rural. Partindo do pressuposto de que existe a necessidade de que a aprendizagem da matemática esteja vinculada ao contexto cultural, esse pesquisador buscou um direcionamento sobre a possibilidade de trabalhar a matemática acadêmica a partir de práticas matemáticas utilizadas pelos indivíduos que as praticam no cotidiano. Dessa maneira, os conteúdos matemáticos que foram trabalhados em sala de aula surgiram de uma prática inserida no contexto cultural do grupo, pois estavam relacionados com situações-problemas provenientes de uma horta na zona rural.

A partir das elaborações decorrentes da utilização da horta e em função da necessidade resolver situações-problema relacionadas com esse tema, surgiram alguns conceitos etnomatemáticos que foram utilizados na prática pedagógica escolar. Assim, por meio da interação entre o pesquisador e os alunos e com a utilização da modelagem, as ideias matemáticas encontradas nessas situações foram se transformando em conceitos matemáticos utilizados pela matemática acadêmica. Os resultados desse estudo mostraram que os alunos vivenciaram aspectos gerais da cultura na qual estavam inseridos apesar de terem uma compreensão própria da matemática acadêmica. Isso significa que a matemática representa mais do que um corpo de conhecimento elaborado e sistematizado pelos matemáticos, pois é possível encontrar uma matemática não sistematizada, que possui uma maneira própria de representação, dependendo da cultura na qual as suas ideias e procedimentos foram desenvolvidos. Por outro lado, é importante salientarmos que Caldeira (1992) verificou junto à comunidade local se os modelos surgidos em sala de aula estavam vinculados com o contexto cultural do grupo em estudo ou se esses modelos foram somente elaborações decorrentes de um momento pedagógico compartilhado pelos alunos em sala de aula.

Em outro estudo, Orey (2000) utilizou a modelagem para discutir a importância do simbolismo do círculo para os povos das Grandes Planícies da América do Norte. Nesse estudo, foram elaborados modelos matemáticos que buscavam entender, compreender e explicar os métodos conceituais e os procedimentais matemáticos que são utilizados por aqueles povos indígenas, que preferem utilizar uma estrutura tripé *(tripodal*), para a construção das cabanas Tipi ao invés de uma estrutura quadripé (*quadripodal*). Os métodos que foram utilizados para determinação da altura das cabanas Tipi, os estudos geométricos de sua base e as suas conexões com a área lateral e a área da seção circular do cone oferecem exemplos interessantes da utilização da modelagem como uma aplicação do conhecimento matemático acadêmico baseado no conhecimento etnomatemático do grupo cultural estudado. Esse fato demonstra que a etnomatemática pode ser caracterizada como uma maneira de entendimento do pensamento matemático utilizado pelos indivíduos nos grupos culturais e que a modelagem pode atuar como uma ferramenta que se torna importante para que esses indivíduos possam atuar, agir e interagir no mundo contemporâneo.

De acordo com essa asserção, Rosa, Silva, Beraldo, Vialta e Del Conti (1999) estudaram as conexões da etnomatemática com a cultura cafeeira por meio dos modelos matemáticos oriundos da plantação de café e de suas aplicações na prática. Nesse estudo, os pesquisadores, em visita a uma fazenda de café no interior do Estado de São Paulo, estudaram um aspecto etnomatemático que pode ser modelado matematicamente. Na fazenda visitada, os colhedores de café fabricam e utilizam cestos elaborados artesanalmente para a colheita e transporte desse produto. Dessa maneira, os colhedores recebem o pagamento por todo o café que conseguem colher em um dia de trabalho. Quando os colhedores foram indagados sobre a maneira de pagamento utilizada, os pesquisadores foram informados que o fazendeiro utilizava o cesto que fabricavam como unidade de medida para o pagamento da colheita diária. Em conversa com o fazendeiro, os pesquisadores foram informados que o volume do cesto era equivalente a 60 litros.

Diante dessa situação, três questionamentos emergiram:

1. Como verificar se o fazendeiro estava efetuando o pagamento correto para cada cesto de café colhido?
2. Quais são os procedimentos que devem ser adotados se o pesquisador verificar que com a aplicação de um determinado modelo, etnomatemático ou acadêmico, os colhedores de café estão sendo explorados?
3. Como os pesquisadores podem auxiliar os colhedores a terem uma colheita maximizada?

Dessa maneira, os pesquisadores queriam verificar se o fazendeiro estava realizando o pagamento correto aos colhedores de café. Assim, por meio da elaboração de um modelo matemático para determinar o volume do cesto com a utilização de uma fórmula matemática acadêmica, os pesquisadores puderam verificar que o volume desse cesto era de aproximadamente 59,7 litros (Rosa e Orey, 2003). Dessa maneira, os dois modelos, o acadêmico e o etnomatemático, foram validados no contexto no qual foram elaborados.

Nesse aspecto, entendemos que a matemática, por meio da modelagem, é uma ferramenta importante que visa auxiliar os indivíduos pertencentes a grupos culturais diversos, a entender, compreender, analisar e refletir sobre a própria realidade. De acordo com Rosa e Orey (2006), ser proficiente na utilização da modelagem é de fundamental importância para que os indivíduos possam, por meio de suas ações, transformarem a realidade, de modo a incluí-los no processo de transformação social. Entendemos que a implantação da perspectiva da modelagem e da etnomatemática no currículo matemático escolar pode renovar e revitalizar o ensino e aprendizagem da matemática.

Diante desse contexto, os trabalhadores rurais, os índios Sioux e os colhedores de café utilizam ideias e procedimentos matemáticos nas atividades que realizam em seus respectivos cotidianos. Na realidade, o *saber-fazer* matemático que os indivíduos desses grupos culturais adquiriram e acumularam se apresenta naturalmente nos afazeres diários confundindo-se com a realização das atividades do cotidiano. Então, destacamos que o conhecimento matemático previamente adquirido pelos indivíduos pertencentes a esses grupos culturais transitam com naturalidade pelo conhecimento matemático acadêmico conforme as exigências das atividades que desenvolvem em suas comunidades.

Considerações finais

Existe a necessidade de termos consciência de que cada grupo cultural desenvolveu um conjunto de ideias, procedimentos e práticas matemáticas próprias, as suas etnomatemáticas, dentre as quais se destacam algumas ferramentas básicas que são utilizadas no processo da modelagem. Essas ferramentas podem ser entendidas como as maneiras que os membros de cada grupo cultural desenvolveram para lidar, matematizar e modelar a própria realidade, utilizando nesse processo, a medida, a comparação, a quantificação, a classificação, a inferência e a modelagem.

Um aspecto primordial desse processo é auxiliar os alunos a perceberem o potencial matemático que possuem por meio do reconhecimento da importância dos aspectos culturais para a valorização da própria identidade, pois esses aspectos podem influenciar a maneira como cada indivíduo pensa, aprende, reflete e toma decisões. Isto significa que nas aulas de matemática, devemos auxiliar os alunos a valorizar, entender e compreender a influência que determinada cultura tem sobre a matemática para que os alunos possam perceber como culturas diversas podem influenciar as diferentes maneiras pelas quais a matemática é pensada, comunicada, difundida e transmitida.

Esse objetivo pode ser conseguido com a utilização da modelagem matemática como uma ação pedagógica para o programa etnomatemática.

Referências bibliográficas

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo, SP, Brasil: Editora Contexto.

Caldeira, A. D. (1992). *Uma proposta pedagógica em etnomatemática na zona rural da fazenda Angélica em Rio Claro*. Dissertação de mestrado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, SP, Brasil: Universidade Estadual de São Paulo.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*. São Paulo, SP, Brasil: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática: um programa. *A Educação Matemática em Revista 1*(1), 5-11.

D'Ambrosio, U. (2000). Etnomatemática e modelagem. In M. C. S. Domite (Ed.), *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática - Cbem1* (pp.142-143), São Paulo, SP, Brasil: Faculdade de Educação - Universidade de São Paulo.

Klüber, T. E. (2007). *Modelagem matemática e etnomatemática no contexto da educação matemática: aspectos filosóficos e epistemológicos.* Dissertação de mestrado. Faculdade de Educação. Ponta Grossa, PR, Brasil: Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orey, D. C. (2000). The ethnomathematics of Sioux tipi and cone. In: H. Selin, (Ed.). *Mathematics Across Cultures: The History of Non-Western Mathematics* (pp. 239-253), Norwell, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rosa, M. (2000). *From reality to mathematical modeling: a proposal for using ethnomathematical knowledge*. Dissertação de Mestrado. College of Education. California State University, Sacramento (CSUS). California, United States of America.

Rosa, M.; Silva, C. M.; Beraldo, R. M. N.; Vialta, R.; Del Conti, M. I. A. (1999). *Café: modelagem matemática e etnomatemática.* Monografia de especialização em educação matemática não publicada, Pontifícia Universidade Católica (PUCC), Campinas, Brasil.

Rosa, M. e Orey, D. C. (2003). Vinho e queijo: etnomatemática e modelagem! *BOLEMA*: Boletim de Educação Matemática *16*(20), 1–16.

Rosa, M. e Orey, D. C. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delineando-se um caminho para a ação pedagógica. *BOLEMA*: Boletim de Educação Matemática *19*(26), 19–48.

Rosa, M. e Orey, D. C. (2007). Cultural assertions and challenges towards pedagogical action of an ethnomathematics program. *For the Learning of Mathematics* 27(1), 10-16.

Rosa, M. e Orey, D. C. (2010). Alho e sal: etnomatemática com modelagem. *Perspectivas da Educação Matemática 2*, 149-162.

Scandiuzzi, P. P. e Miranda, N. (2000). Resolução de problema matemático através da etnomatemática. In M. C. S. Domite (Ed.), *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática - CBEm1* (pp. 251-254). São Paulo, SP, Brasil: FE/USP.

ASPECTOS DESTACADOS DE LAS TEORÍAS COGNITIVAS DEL APRENDIZAJE, COMO ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA YAPRENDIZAJE DE CONCEPTOS DEL CÁLCULO VECTORIAL

Viviana Angélica Costa
IMApEC, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata Argentina
NIECyT, Univeridad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
vacosta@ing.unlp.edu.ar

Resumen. Este trabajo se centra en la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial. Se sitúa esta rama de la matemática en el contexto de la ingeniería y sus orígenes. Se exponen aspectos destacados de algunas teorías cognitivas del aprendizaje: la teoría de los modelos mentales de Johnson-Laird y la teoría del aprendizaje significativo subversivo. Proponemos considerar las mismas como marco referencial en el desarrollo de estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos mencionados.

Palabras clave: teorías cognitivas, cálculo vectorial, ingeniería

Abstract. This paper focuses on the problems of teaching and learning Vector Calculus. It places this branch of mathematics in engineering context and origins. Contributions are presented in this research lines from considering highlights of cognitive learning theories: the theory of mental models of Johnson-Laird and theory subversive meaningful learning. We propose to consider them as a framework in developing didactic strategies for teaching and learning of mathematical concepts mentioned.

Key words: cognitive theories, vector calculus, engineering

Introducción

Este trabajo se centra en la problemática de la *enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial* en carreras de *ingeniería*. El *Cálculo Vectorial* es una rama de las matemáticas referidas al análisis real de funciones de dos o más variables. Sus orígenes se encuentran a fines del siglo XVIII y a principios del siglo XIX, fuertemente ligados con los inicios de la *física- matemática*, la *termodinámica*, la *hidrodinámica*, la *mecánica de los fluidos,* la *electricidad,* el *magnetismo,* la *teoría del potencial y* la *Ecuación de Laplace* (Crowe, 1994; Wussing, 1998; Mankiewicz, 2005). Su estudio es esencial para alumnos de carreras de ingeniería. Les proporcionará herramientas básicas que los ayudarán en la modelización matemática de diversos *fenómenos físicos* de los sistemas en ingeniería que podrán ser analizados a partir de una representación *vectorial* (Feynman, 1987).

La enseñanza y aprendizaje de los conceptos del *Cálculo Vectorial* no es sencilla debido a la complejidad y alto grado de abstracción de los objetos matemáticos de estudio, por lo que el alumno requerirá de un *pensamiento matemático avanzado* (Azcárate Giménez y Camacho Machín, 2003). Esta problemática ha sido abordada en contextos más simples del *Cálculo* a nivel universitario (Moreno, 2005; Guzmán, 2007; McCartan, Hermon & Cunningham, 2010). Ellos expresan que la enseñanza tradicional, mecanicista, descontextualizada y técnica, obstaculiza la comprensión de los significados de los objetos matemáticos de estudio y sus vínculos con otras ciencias. Algunos investigadores proponen contextualizar el estudio, vinculándolo con la *ingeniería* y la *física* (Ramos & Font, 2006; Font, 2008; Dunn & Barbanel, 2000; Kümmerer, 2002; Camarera, 2009; Zúñiga, 2007; Willcox & Bounova, 2004). Otros proponen el uso de Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) para generar imágenes externas con el objeto de vincular *conceptos del Cálculo Vectorial* con sus *aplicaciones físicas* (Costa, Di Domenicantonio y Vacchino, 2010; Perjési, 2003; Álvarez, 2010). Estas últimas propuestas se basan en que la visualización de imágenes juega un rol central en el aprendizaje de las ciencias (Zimmerman & Cunningham, 1991; Hitt, 1998). Por ello es importante que el profesor busque para la enseñanza y aprendizaje de los objetos bajo estudio, diversas *estrategias didácticas,* integrando no sólo *qué se enseña* si no *cómo se enseña* (Salinas y Alanís, 2009).

Teorías cognitivas de aprendizaje

Las *teorías cognitivas del aprendizaje* describen los procesos mediante los cuales los seres humanos aprenden, en como ingresa la información al aprender y como se transforma en el individuo (Gardner, 1988). En lo que sigue exponemos aspectos destacados de alguna de estas teorías: la teoría de los *modelos mentales de Johnson-Laird* y la teoría del *aprendizaje significativo subversivo*. Las mismas pueden ser adoptadas como marco referencial en la investigación en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial, servir de base para el desarrollo e implementación de situaciones didácticas en el aula y obtener resultados que permitan afirmar su utilidad.

Teoría del aprendizaje significativo subversivo

Postman y Weingartner (1969) proponen un *aprendizaje significativo* como *actividad subversiva* (Moreira, 2005). Relatan las problemáticas de los tipos de enseñanza que no educan para las necesidades actuales del mundo, donde se espera tener personas con personalidad, inquisitivas, creativas, innovadoras que enfrenten la incertidumbre y que construyan significados nuevos. Esto constituiría un proceso de búsqueda y de construcción de significados que podríamos llamar *aprender a aprender*. Moreira (2005) considera que para sobrevivir en la sociedad contemporánea, el término *aprendizaje significativo crítico* puede ser más adecuado. Entiende por *aprendizaje crítico*: aquella perspectiva que permite al sujeto formar parte de su cultura y, al mismo tiempo, estar fuera de ella. Se trata de una perspectiva antropológica en relación a las actividades de su grupo social, que permite al individuo participar de tales actividades, pero, al mismo tiempo, reconocer cuándo la realidad se está alejando tanto que ya no se está captando por parte del grupo. Considera que a través del aprendizaje significativo crítico el alumno podrá formar parte de su cultura y, al mismo tiempo, no ser subyugado por ella, por sus ritos, sus mitos y sus ideologías. A través de ese aprendizaje es como el estudiante podrá lidiar, de forma constructiva, con el cambio, sin dejarse dominar, manejar la información sin sentirse impotente frente a su gran disponibilidad y velocidad de flujo, beneficiarse y desarrollar la tecnología, sin convertirse en tecnófilo. Por medio de este aprendizaje podrá trabajar con la incertidumbre, la relatividad, la no causalidad, la probabilidad, la no dicotomización de las diferencias, con la idea de que el conocimiento es construcción nuestra, que apenas representamos el mundo y nunca lo captamos directamente.

¿Cómo podemos los profesores facilitar el *aprendizaje significativo crítico*? Para ello Moreira destaca los siguientes puntos:

1. Aprender/enseñar preguntas en lugar de respuestas
2. Aprender a partir de distintos materiales educativos
3. Aprender que somos perceptores y representadores del mundo
4. Aprender que el lenguaje está totalmente involucrado en todos los intentos humanos de percibir la realidad
5. Aprender que el significado está en las personas, no en las palabras.
6. Aprender que el hombre aprende corrigiendo sus errores
7. Aprender a desaprender, a no usar los conceptos y las estrategias irrelevantes para la sobrevivencia
8. Aprender que las preguntas son instrumentos de percepción y que las definiciones y las metáforas son instrumentos para pensar.

En el contexto de la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de ingeniería, se considera de interés proponer estrategias didácticas centradas en el ítem 1. ¡Enseñar a preguntar! Cuando un alumno, se está formulando una pregunta, está utilizando su conocimiento previo de forma no arbitraria y eso evidencia un *aprendizaje significativo*. En relación a esto, Moreira (2005) se pregunta cómo hacer para provocar esta acción en los estudiantes. Dice que más que una cuestión de motivación es hacer que el alumno perciba como relevante el nuevo concepto que queremos que construya. Expresa que el camino para ello, podría ser enseñar a los alumnos a preguntar, a formular preguntas significativas, en el contexto en que se está trabajando.

En relación al *Cálculo Vectorial*, como se menciona en la introducción, un estudiante puede aprender (*qué hacer*) mecánicamente las técnicas de cálculo para obtener las magnitudes escalares y vectoriales como son: *circulación*, *flujo*, *trabajo*, *rotor* y *divergencia*, sin un análisis de los procedimientos utilizados, ni de interpretación de resultados, constituyendo esto un aprendizaje no significativo (*cómo hacer*). El conocimiento de esas magnitudes es importante para alumnos de ingeniería pues a partir de las mismas les será posible describir y comprender fenómenos naturales, leyes del electromagnetismo y de la mecánica de los fluidos, entre otros (Feynman, 1987).

Nos preguntamos entonces, ¿Cómo lograr un *aprendizaje significativo crítico* de éstos conceptos en el estudiante? Una propuesta para la enseñanza y aprendizaje de esos conceptos consiste en desarrollar e implementar actividades para que el alumno se pregunte y a partir de las respuestas construya los significados de las magnitudes mencionadas. Preguntas tales como: ¿Cómo y porqué surgió la necesidad de calcular esas magnitudes en un contexto histórico? ¿Qué miden esas magnitudes según sea el campo vectorial: un campo de velocidades de un fluido (aire, agua), de propagación del calor, eléctrico, magnético, gravitatorio? ¿Existe alguna relación entre el *flujo* de un *campo vectorial* a través de una superficie con la cantidad de líneas de fuerza que la atraviesan? ¿Tiene algún significado físico el *flujo* a través de una superficie si la misma es cerrada? ¿Cuál, si la superficie encierra *fuentes* en su interior? ¿Cómo interpretar la *circulación* según sea su valor: positivo, negativo, o nulo, en relación con las características intrínsecas del campo vectorial? ¿Cuál es la *circulación* si el campo es *conservativo*?

La teoría de los modelos mentales de Johnson-Laird

La *Teoría de los Modelos Mentales* desarrollada por *Johnson-Laird* pretende dar una explicación de los mecanismos involucrados en el razonamiento, postulando que los humanos representan el mundo con el cual interactúan a través de *modelos mentales* (Johnson-Laird, 1983, 1990).

La *mente* es representacional y computacional. La representaciones mentales, son las maneras de nuestra mente de "re-presentar" internamente el mundo externo. Las imágenes corresponden a visiones de los modelos.

Un *modelo mental* está compuesto por elementos y relaciones que representan un estado de cosas específico, estructurados de una manera adecuada al proceso sobre el que deberán operar. Hay varias teorías sobre modelos mentales, pero la de Johnson-Laird es hasta hoy la más completa y articulada. Un modelo mental puede contener proposiciones pero estas pueden existir como representación mental en el sentido de Johnson-Laird, sin formar parte de un modelo mental.

En este sentido, la conexión con el mundo se establece a partir de una equivalencia entre un modelo mental y las partes del mundo que son designadas. A partir de esto se postula que el razonamiento científico está basado en modelos (Johnson-Laird, 1983).

Los *modelos mentales* por lo tanto, constituyen una representación o "estructura análoga" del mundo-real o de una situación-imaginada específica. Un modelo mental construye a su vez imágenes, que corresponden también a modelos mentales particulares y constitutivos de ese modelo mental. Se pueden representar principalmente a partir de tres fuentes: de percepción visual, analógica y sobre experimentos del pensamiento (Johnson-Laird, 1983). Johnson-Laird establece que no puede explicarse el razonamiento sin recurrir a la idea de modelo mental. Su Teoría de los Modelos Mentales para el razonamiento (Johnson-Laird, 1983, 1990) establece que el proceso de inferencia no puede reducirse a la lógica ni al empleo de reglas formales que operan sobre las representaciones proposicionales.

Entonces, *el razonamiento consistiría en la construcción y manipulación de Modelos Mentales de naturaleza analógica*. Johnson-Laird postula que existen por lo menos tres clases de representaciones mentales distintas: *las representaciones proposicionales*, definidas como cadenas de símbolos, similares al lenguaje natural, en el sentido que necesitan de reglas sintácticas para combinarse, pero que no se confunden con él; *los modelos mentales*, análogos estructurales del mundo y *las imágenes*, definidas como visuales del modelo (Moreira, 1999).

¿Qué aplicaciones tiene lo anterior en la enseñanza?

Las representaciones externas, son pictóricas o lingüísticas y las internas, o representaciones mentales, son proposicionales o analógicas. No existe una relación directa entre la representación externa y la representación interna. La investigación acerca del uso educativo de las imágenes externas es variada y es un campo abierto de gran importancia.

Hay diversas opiniones sobre los beneficios que tiene el uso de imágenes externas como recurso educativo en la enseñanza, y en cómo, cuánto y de qué manera, contribuyen a la comprensión. Las opiniones difieren también si el campo de aplicación es la física o la matemática. Pues si bien estas ciencias se entrelazan, tienen distintos objetos de estudio. La física, trabaja con objetos reales que ocupan un espacio y un tiempo y la matemática con objetos abstractos, que son creados por el hombre, que existen en su mente. Las representaciones que se tienen de los objetos de estudio son de distinta naturaleza en cada disciplina.

Unos y otros, parecen adherir a un conjunto de eslóganes que sostienen las ventajas y bondades del uso de representaciones visuales para: mejorar el aprendizaje, reducir la abstracción de los conceptos científicos, facilitar la comprensión, mejorar el recuerdo, promover la imaginación, introducir los fenómenos científicos de una forma vinculada a la "vida cotidiana", facilitar la resolución de problemas, motivar a los estudiantes y a los lectores en general, y podría continuarse enumerando (Otero, 2004).

Eslóganes como "una imagen vale más que mil palabras" se interpretan a partir de la idea de que las imágenes provocan una forma de comunicación más libre y menos formalizada y que permiten al vulgarizador concretizar las ideas científicas, porque ellas tienen un valor sinóptico y ayudan a considerar varios elementos y sus relaciones en una misma representación. En la práctica, algunos científicos y editores de libros de texto y un número considerable de profesores consideran ventajoso y ¡simple! reemplazar el discurso verbal por otro imagínistico. Así, poseedores de un formidable optimismo epistemológico, cognitivo y didáctico, adhieren al destierro de las palabras para ¡ahora sí! explicar sencillamente con imágenes a los niños (Otero, 2004).

Desde la Psicología Cognitiva, algunas investigaciones muestran que ciertas imágenes externas podrían afectar la comprensión y el razonamiento. Las investigaciones (Kosslyn, 1986, 1996; Johnson-Laird, 1983, 1996) muestran que el sistema cognitivo desarrolla un proceso interpretativo de las imágenes externas, que comienza con la percepción, pero "mirar" una imagen, no implica que será "almacenada" directamente en nuestra mente. Para interpretar y entender el discurso visual y verbal (imágenes y palabras), se construye una representación mental en la memoria de trabajo, a partir de la interacción entre representaciones internas y externas se desarrolla un proceso interpretativo de naturaleza estratégica.

En el campo de la matemática muchos conceptos y procesos se ligan al potencial didáctico de la visualización y la forma en que ésta, puede favorecer el aprendizaje. La visualización posibilita crear en la mente una imagen visual de un concepto abstracto. A partir de gráficos realizados con diversos recursos, diferentes procesos permiten "ver" las matemáticas. Esto ha generado diversas investigaciones en relación con el potencial didáctico de la visualización, la forma como ésta puede favorecer al aprendizaje y bajo qué condiciones utilizarla.

En matemática, un mismo objeto es posible que tenga múltiples representaciones (diferentes significantes del mismo objeto). Hablar de representación (significado y comprensión) implica necesariamente hablar del conocimiento matemático. La representación se caracteriza mediante una correspondencia abstracta entre dos entidades que son puestas en alguna relación referencial una con otra, por un actor o un observador.

La comprensión de un objeto matemático se entiende en términos de integración de *representaciones mentales*. Esta integración es la que aseguraría la competencia en el uso de las representaciones externas asociadas al objeto. Un objetivo central en la enseñanza de las matemáticas consistiría en conseguir que los alumnos sean capaces de pasar desde una representación a otra. Se reconoce que este objetivo es difícil de lograr (Font, Godino & D'Amore, 2007).

Un aspecto importante en la enseñanza de la matemática de conceptos abstractos es el de vincular éstos con aplicaciones a la física u con otros objetos según el contexto, produciendo un determinado significado.

¿Qué aplicaciones tiene lo anterior en la enseñanza y aprendizaje del *Cálculo Vectorial*?

En particular, para el estudio del concepto *campo vectorial*, se propone desarrollar actividades con el objetivo que el alumno asocie las distintas representaciones (gráficas, simbólicas, u otras) y de distinta naturaleza, física (campo gravitatorio, campo magnético, campo de gradientes de un campo escalar) y matemática, de un mismo objeto (Figura 1).

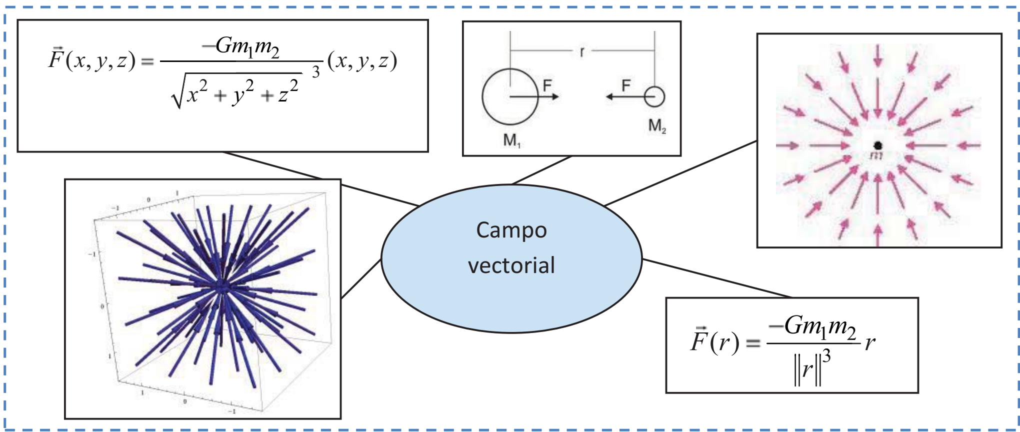


Figura 1: Campo vectorial gravitatorio. Diversas representaciones de un mismo objeto.

Referencias bibliográficas

Álvarez, T. (2010). La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo. *Latin-American Journal of Physics Education*, *4* (1), 143-148.

Azcárate Giménez, C. y Camacho Machín, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 135-150.

Camarera, G. P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación educativa 9* (48), 15-25.

Costa, V. A., Di Domenicantonio, R. M. y Vacchino, M. C. (2010). Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del Cálculo Integral y Vectorial. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 21*, 173-185.

Crowe, M. (1994). *A history of vector analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Mineola, N.Y.: Courier Dover Publications.

Dunn, J. W. & Barbanel, J. (2000). One model for an integrated math/physics course focusing on electricity and magnetism and related calculus topics. *American Journal of Physics*, 68 (8), 749-757.

Feynman, R. P. (1987). *Física, Vol II (Electromagnetismo y materia).* Massachusetts: Addison-Wesley Iberoamericana.

Font, V., Godino, J. D. & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2 -7.

Font, V. (2008). Enseñanza de la matemática. Tendencias y perspectivas. En C. Gaita (Eds). *III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 21-62), Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, Departamento de Ciencias, Maestría en la enseñanza de las matemáticas.

Gardner, H. (1988). *La nueva Ciencia de la Mente. Historia de la Revolución Cognitiva, Las primeras décadas de la Ciencia Cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Guzmán, M. de. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista iberoamericana de educación 43*, 19-58.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, nuevas representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista de Educación Matemática 10*, 23-45.

Johnson-Laird, P. (1983). *Mental models*. Cambridge: Cambridge University Press.

Johnson-Laird, P. (1990). *El ordenador y la mente*. Barcelona: Paidós.

Johnson-Laird, P. (1996). Images, Models, and Propositional Representations. En M. de Vega, M. J. Intons Peterson, P. Johnson-Laird, M. Denis & M. Marschark (Eds), *Models of Visuospatial Cognition* (pp. 90-126), New York: Oxford University Press.

Kosslyn, S. (1986). *Image and Mind*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Kosslyn, S. (1996). *Image and Brain*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Kümmerer, B. (2002). Trying the Impossible: Teaching Mathematics To Physicists And Engineers. En D. Holton (Eds. *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study* (pp. 321- 334). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow:

Mankiewicz, R. (2005). *Historia de las Matemáticas, del cálculo al caos*. Barcelona: Paidós Ibérica.

McCartan, C. D., Hermon, J. P. & Cunningham, G. (2010). A Validated Approach to Teaching Engineering Mathematics. *Engineering Education 2010, "Inspiring the Next Generation of*

Engineers", Aston University. Recuperado el 1 de Julio de 2010 de http://www.engsc.ac.uk/downloads/scholarart/ee2010/105_GP_McCartan.pdf

Moreira, M. A. (1999). *Modelos mentales*. Recuperado el 4 de febrero de 2013 de http://moreira.if.ufrgs.br/modelosmentales.pdf

Moreira, M. A. (2005). Aprendizaje significativo crítico. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación,* 6, 83-101.

Moreno M, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 81-96), Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Otero, M. R. (2004). El uso de imágenes en la Educación en Ciencias como Campo de Investigación. *Revista de Enseñanza de la Física* 17(1), 9-22.

Perjési, I. H. (2003). Application of CAS for teaching of integral-transforming theorems. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* , 35(2), 43-47.

Postman, N. & Weingartner, C. (1969). *Teaching as a subversive activity*. New York: Dell Publishing Co.

Ramos, A. B. & Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica 20*(4), 535-556.

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(3), 355-382.

Willcox K. & Bounova G. (2004). *Mathematics in Engineering: Identifying, Enhancing and Linking the Implicit Mathematics Curriculum.* Recuperado el 4 de febrero de 2013 de http://acdl.mit.edu/WillcoxASEE04.pdf

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas.* Madrid: Siglo XXI de España Editores.

Zimmerman, W. & Cunningham S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington DC: Mathematical Association of America.

Zúñiga, S. L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10*(1), 145-155.

EL GEOPLANO: UNA ALTERNATIVA PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Ana Duarte Castillo
Universidad Nacional Abierta Venezuela
aduarte@una.edu.ve

Resumen. El propósito de este trabajo es presentar una investigación de campo de tipo descriptiva en donde el empleo del geoplano como recurso didáctico contribuyó de manera positiva en la comprensión de objetos geométricos estudiados en la clase matemática. Teniendo que una de las tareas del profesor de matemáticas es conseguir que sus estudiantes comprendan los diversos conceptos que están en juego, no de una forma mecánica, sino que puedan operar con ellos en diversos contextos. (Serrazina y Matos, 1968). La intención de este modesto trabajo es ayudar a los docentes en servicio a la hora de escoger recursos didácticos y elaborar actividades que favorezcan la comprensión en los estudiantes. Este trabajo se efectúo a la luz de los niveles de Van Hiele. Se realizó en un Liceo ubicado en el Municipio Zamora del Estado Miranda con estudiantes pertenecientes a primer año de educación media general, durante el período académico 2010-2011. Se obtuvo que la mayoría de los estudiantes se ubican en el nivel de análisis del modelo antes nombrado.

Palabras clave: geoplano, geometría, modelo van hiele

Abstract. The purpose of this paper is to present an investigation of descriptive field where the use of geoboard as a teaching resource contributed positively in the comprehension of geometric objects studied in mathematics class. Given that one of the tasks of the mathematics teacher is to get students to understand the various concepts that are in a play, not in a mechanical way, but can operate with them in various contexts (Serrazina & Matos, 1968). The target of this modest work is to assist teachers in service in choosing teaching resources and develop activities that promote student understanding. This work was carried out in light of Van Hiele levels. In a High School located in the Zamora Municipality Miranda State was performed, with students from first year high school, during the 2010/2011 academic period. It was found that most of the students are placed in the level of analysis model (Van Hiele) above.

Key words: geoboard, geometry, van hiele model

Introducción

Las matemáticas están presentes a lo largo de todo el sistema educativo, lo cual evidencia que la sociedad las considera importantes en la formación académica de nuestros niños, niñas y jóvenes. Además, están presentes en diversos campos de nuestra sociedad, como por ejemplo: La música, la arquitectura, la medicina, la computación y muchos otros más. Pero la escuela, hasta ahora ha propiciado una enseñanza de las matemáticas mecánica, descontextualizada, con prácticas educativas que impiden el acceso a experiencias significativas y de calidad en el aprendizaje de esta fascinante ciencia. En este mismo sentido se expresa Skovsmose (1994) cuando señala que la escuela reproduce el conocimiento, las rutinas y las competencias, al igual que sustenta las creencias ideológicas, ocasionando un sentimiento de exclusión, porque sin saber matemáticas no se puede formar parte de ese porcentaje de personas privilegiadas en este mundo. Por lo cual, la investigación en el contexto de la Educación Matemática tiene como uno de sus objetivos promover metodologías que fortalezcan los procesos de enseñanza-aprendizaje y la evaluación de las matemáticas en sus distintos niveles educativos. Una alternativa la constituye la manipulación de recursos didácticos auxiliares en el aula, los cuales permitan al docente la producción de actividades innovadoras, motivantes y versátiles que conduzcan a los alumnos a la exploración y descubrimiento de conceptos y propiedades de objetos geométricos. (Mariño, 2000)

En el presente escrito se describirá el trabajo realizado por estudiantes de primer año de educación media general, utilizando el geoplano en la clase de geometría. Todo esto a la luz del modelo de los esposos Van Hiele. En donde el objetivo es Describir el desempeño de los estudiantes del Educación Media General de primer año en la comprensión de contenidos geométricos, específicamente figuras geométricas y propiedades, empleando el geoplano en la clase.

¿Cuál es el problema?

Teniendo presente que uno de los fines de la educación establecidos en la Ley Orgánica de Educación (2009, p.11), de la República Bolivariana de Venezuela, establece "Desarrollar la capacidad de abstracción y el pensamiento crítico mediante la formación en filosofía, lógica y matemáticas, con métodos innovadores que privilegien el aprendizaje desde la cotidianidad y la experiencia". Para cristalizar este fin es necesario la comprensión, por parte de los estudiantes, de los contenidos matemáticos, por ser esta el área de formación de la autora, establecidos en el currículo vigente de la educación media general.

Muchas veces son utilizados métodos expositivos, creyendo en la eficacia de la trasmisión del saber, en vez de comprender que el conocimiento matemático no se transmite, más bien, este es esencialmente construido por los estudiantes. Tal visión de la matemática aleja a muchos estudiantes de la comprensión de los conceptos, y muchas personas, aunque no recuerdan una disciplina preferida en el tiempo en que andaban en la escuela, recuerdan ciertamente cuanto la matemática les fue penosa (Serrazina y Matos, 1968)

De todas las ramas de la Matemática, la Geometría es una de las más intuitiva, concreta y ligada a la realidad que conocemos. Por ello, existen numerosas posibilidades para experimentar, mediante materiales adecuados, sus métodos, conceptos, propiedades y problemas. Además, los conceptos geométricos han estado presentes en diversas culturas (Bishop, 1999). Con relación a esto último existen diversas actividades relacionadas con el entorno y la cultura matemática. Una de ellas se refiere a la de diseñar. Todas las culturas diseñan cosas, cada una las diseña de manera diferente y la cantidad de formas diseñadas también difiere notablemente de una cultura a otra. Lo que se diseña depende de la necesidad percibida. El diseño de objetos ofrece la posibilidad de imaginar formas, figuras y pautas en el entorno (Bishop, 1999)

Otras investigaciones también se han sorprendido ante la potencialidad geométrica y matemática de mucha de las formas diseñadas que se encuentran en todas las culturas. Zalavsky (1973, citado en Bishop 1999) documenta la rica tradición geométrica de lo diseños decorativos de las sociedades africanas. Describe la arquitectura de los pueblos africanos, mostrando que las casas suelen tener formas circulares o rectangulares con algunos diseños más sofisticados basados en éstos. Gerdes (1986, citado en Bishop 1999) nos ofrece ejemplos de ideas matemáticas inherentes al trabajo de diseño de los artesanos mozambiqueños y apoya con fuerza el reconocimiento de este trabajo matemático en su currículo escolar.

Por otra parte, Senechal (2008, citado en Stenn 2008) plantea que la popularidad creciente de los rompecabezas y de los juegos basados en la interacción de formas y posiciones, ilustra las formas geométricas y sus relaciones en muchas personas, además los patrones geométricos pueden servir como modelos relativamente simples para muchos tipos de fenómenos, y su estudio es posible y deseable en todos los niveles. El estudio de la forma se ha incluido históricamente en la geometría. Sin embargo, a pesar de su importancia fundamental los estudiantes aprenden muy poco acerca de las formas en la escuela.

Una de las tareas del profesor de matemáticas es conseguir que sus estudiantes comprendan los diversos conceptos que están en juego, no de una forma mecánica, sino que puedan operar con ellos en diversos contextos. Diversas propuestas han sido señaladas como necesarias para modificar este estado (Serrazina y Matos, 1968):

1. La utilización de una gestión en el salón de clases que contribuya para que los estudiantes construyan su propio conocimiento.
2. La utilización de materiales que permitan una buena base para la formación de conceptos.
3. Una conexión de la matemática y la realidad.
4. Un abordaje de la matemática volcada hacia la resolución de problemas.

Para el desarrollo de este trabajo, nos centraremos en el aspecto referido a la utilización de materiales que permitan una buena base para la formación de conceptos. En la actualidad se conoce muchos materiales que pueden emplearse en el trabajo de aula. Algunos de ellos han sido diseñados específicamente para estudiar Geometría y otros pueden ser adaptados para utilizarse en su enseñanza (Villarroel y Sgreccia, 2011). Uno de esos recursos es el geoplano del que hablaremos más adelante.

Sumado a todo esto, primer año de la Educación Media general es una etapa de transición para los estudiantes. Transición que se refleja el siguiente cuadro (Gimeno, 1998):

Primaria	Secundaria
• Curriculum más integrado	• Curriculum más especializado
• Modelo de organización comunitario	• Modelo de organización, burocrática
• Tareas más circunscritas al Centro	• Mayor desplazamiento de trabajo a casa
• Clima más englobante, personal	• Clima más centrado en lo académico
• Sistema monodocente	• Plan docente: varios estilos
• Seguimiento más directo del estudiante	• Mayor autocontrol del alumno
• Mayor contacto con los padres	• Menor contacto con los padres
• Círculo de amistades ligado al Centro	• Círculos diferenciados de amigos

Geoplano

De acuerdo con Gattegno, (citado en Verdugo, Vásquez, Briseño y Palmas, 2000, p. 2-3), el geoplano es un material multivalente (puede servir para diversos propósitos) que "permite tomar conciencia de las relaciones geométricas". Con los geoplanos se pueden enseñar teoremas de la geometría plana, con algunas ventajas sobre el pizarrón, pues las figuras obtenidas son claras y no dependen de la habilidad del maestro; como los geoplanos son pequeños, pudiéndose girar para mostrar que las propiedades en cuestión no dependen de la posición.

Adicionalmente Serrazina y Matos (1968) señalan que una de las grandes ventajas del geoplano en su movilidad para que los estudiantes visualicen figuras en diferentes posiciones. Otras de las ventajas específicas del geoplano es que, al contrario de la hoja de papel, es un aparato dinámico que permite diseñar y borrar fácilmente y posibilita la realización rápida de conjeturas.

Un geoplano es una herramienta didáctica construida generalmente con una base cuadrada de madera, unos clavos fijados a la madera en diversos tipos de arreglos y un conjunto de ligas, preferiblemente de colores. Existen versiones comerciales del geoplano construidos totalmente de plástico.

Modelo Van Hiele

Según los Van Hiele, el pensamiento matemático sigue un modelo concreto que consta de dos partes. Una descriptiva, en la que identifica una secuencia de tipos de razonamientos llamados los "niveles de razonamiento", y otra, instructiva que sugiere a los profesores directrices para que puedan ayudar a sus alumnos a alcanzar con más facilidad un nivel mayor de razonamiento, denominada "fases de aprendizaje"(Afonso, 2004, p.6).

Son numerosos las publicaciones, que hacen referencia al modelo Van Hiele (véanse, por ejemplo Jaime 1993; Bunger y Shaughnessy, 1986) en ellas se pueden encontrar listas muy completas de cada uno de los niveles de razonamiento. Ahora veamos algunas características de cada uno de los niveles:

Nivel 1: Reconocimiento (Visualización). Los alumnos perciben las figuras geométricas globalmente por su forma y no por sus propiedades.

Nivel 2: Análisis. Los alumnos son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas.

Nivel 3: Clasificación. (Abstracción). Los alumnos comienzan a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático, son capaces de realizar razonamientos deductivos y entienden el significado de una definición.

Nivel 4: Deducción formal (Deducción). Los alumnos pueden realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones de varios pasos ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación.

Nivel 5: Rigor. Los alumnos son capaces de trabajar en distintos sistemas axiomáticos, prescindiendo de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad matemática. Este último nivel es que menos investigaciones ha promovido.

Tal como se ha indicado, los Van Hiele recomiendan a los profesores que organicen esta enseñanza siguiendo unas determinadas pautas que reciben el nombre de "fases de aprendizaje", por todas y cada una de ellas ha de pasar el alumno para alcanzar un nivel de razonamiento superior:

Fase 1: Información: El profesor indica a sus alumnos sobre el campo de estudio que van a trabajar, como por ejemplo conceptos que van a manejar, problemas, materiales.

Fase 2: Orientación dirigida. Los alumnos comienzan a explorar el campo de estudio, resolviendo problemas y actividades basadas en el material proporcionado por el profesor.

Fase 3: Explicitación: Los alumnos intercambian sus experiencias, comentan lo que han observado, explican cómo han resuelto las actividades, todo ello ocurre en un contexto de dialogo en el grupo.

Fase 4: Orientación libre. Los alumnos deben ahora aplicar y combinar los conocimientos que han adquirido en las fases anteriores para resolver actividades más complicadas. En esta fase los alumnos conocen el campo de estudio, pero todavía deben perfeccionar el conocimiento del mismo, tanto de contenido como de habilidades de razonamiento.

Fase 5: Integración. Los nuevos conceptos y habilidades que los alumnos han aprendido en las fases anteriores están asimilados, pero aún deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente.

Fuys, Geddes y Tischler (1988) resumieron las características principales de los niveles de van Hiele de razonamiento geométrico indicando que:

- Los niveles son secuenciales.
- Cada nivel tiene su propio lenguaje, una serie de símbolos y una red de relaciones
- Lo que es implícito en un nivel llega a ser explícito en el siguiente nivel
- El progreso de un nivel al siguiente es más dependiente de la instrucción que de la edad o maduración biológica

Terminado el marco conceptual pasaremos a describir la manera de llevar a cabo la investigación, es decir el diseño metodológico de la misma.

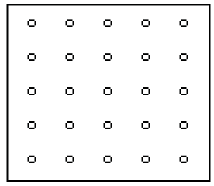
Metodología

En este estudio se realizaron las siguientes fases:

1. Se procedió a construir un geoplano, junto con los estudiantes en el salón de clases, lo cual es una actividad sencilla pero requiere de cierto cuidado, debido a la manipulación de los materiales. Para ello, se les solicito a los estudiantes que fijen una plantilla de puntos sobre la tabla con cinta plástica. Era necesario que la plantilla estuviese a la misma distancia de todos los bordes la tabla. Seguidamente se clavó perpendicularmente a la tabla un clavo en cada uno de los puntos indicados en la plantilla. Fue necesario asegurarse de calvar los clavos hasta que quede menos de un centímetro de distancia desde la cabeza hasta la superficie de la tabla. Luego se removió la plantilla

2. Se procedió a realizar diferentes figuras empleando ligas de colores. En donde se estudiaron las propiedades de los polígonos de tres, cuatro, cinco, seis lados. Esto se realizó con base a una batería de actividades seleccionadas. Entre las que se encuentran:

1. Coloca sobre tres clavos una liga, la forma que hiciste es denominada_____________. Esta figura se caracteriza por tener _______lados. Dibuja la figura en el geoplano de papel



2. En un geoplano de dimensiones 5x5 (de papel). ¿Cuántos triángulos puedes formar?
3. Si Fijas una liga en un clavo. ¿Cuántos triángulos puedes formar, en un geolano de 5x5?. Dibújalos en el geoplano de papel
4. En un geoplano de dimensiones 2x2 (de papel). ¿Cuántos triángulos puedes formar?

Cuadro 1. Actividad #1 aplicada a los estudiantes

En la actividad #1 (Cuadro 1), inicialmente se pudo apreciar que los estudiantes no variaban la posición de los triángulos en el geoplano. Es decir, la base del triángulo paralela al lado inferior del geoplano.

Utilizando solo dos ligas construya en el geoplano:

a) Tres triángulos
b) Dos cuadrados
c) Cinco triángulos
d) Un pentágono.

<u>Comentario</u> Al igual que las figuras denominadas triángulos, los cuadriláteros deben ser visualizados por los alumnos y luego representados en su cuaderno cuadriculado, en hojas punteadas o en su geoplano 5x5.

Cuadro 2. Actividad #2 aplicada a los estudiantes

En la actividad #2 (Cuadro 2), se pudo apreciar que los estudiantes intentaron diversas formas para representar lo solicitado, con tan solo dos ligas.

3. Finalmente para la evaluación, se procedió a elaborar un instrumento sobre la base de preguntas que respondan al nivel 1 del modelo de Razonamiento Van Hiele.

Parte I

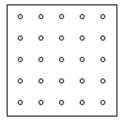
Instrucciones: Lea cuidadosamente cada una de las preguntas que se presentan a continuación, y responda correctamente.

1. Mencione al menos tres diferencias entre figuras geométricas y cuerpos geométricos.
2. ¿Podemos afirmar que cualquier cuadrilátero es un cuadrado? Argumente su respuesta
3. ¿Será posible que cualquier triángulo presente dos ángulos de 90°? ¿Por qué?
4. Menciona al menos tres características de un triángulo rectángulo.
5. ¿Podemos negar que un trapecio es un cuadrilátero? ¿Por qué?

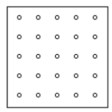
Parte II

Instrucciones: A continuación se le presenta una serie de características, referidas a figuras geométricas. Es necesario que realice la representación de la figura en los diferentes geoplanos y coloque el nombre en la columna correspondiente.

- Polígono regular (lados de igual longitud, ángulos interiores de igual medida).
- Cinco lados.
- Cinco ángulos interiores.



- Figura Geométrica.
- Cuatro lados. En donde, los lados paralelos son de igual medida.
- Cuatro ángulos



Cuadro 3. Actividad evaluativa

En esta actividad evaluativa (cuadro 3) se pudo apreciar que los estudiantes perciben los componentes y propiedades de las figuras. Además describieron las figuras por sus propiedades y relacionan unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Elaboraron definiciones de algunas figuras.

Resultados

Entre los resultados se encuentran:

- Esta manipulación, con el geoplano de las figuras geométricas, condujo a una buena comprensión de lo que significa clasificar figuras, esto es agruparlas según aquello que tengan semejante.
- Se evidencio que los estudiantes reconocen partes y propiedades de las figuras estudiadas (Triángulos, cuadriláteros, otros polígonos)
- Los estudiantes se habituaron a observar figuras en diversas posiciones y comprendieron que la posición no cambia los elementos.
- Los estudiantes claramente se pueden ubicar en el nivel de análisis con presencia de algunas habilidades del nivel de clasificación, según lo arrojado en la evaluación, del modelo de los esposos Van Hiele, debido a que estos distinguían partes, reconocían propiedades y experimentaron, lo que les ayudo a generalizar.

Referencias bibliográficas

Afonso, M. (2004). Sobre los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele y la formación de profesores en activo. *Revista Números*, *58*(1), 2-35

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática*. Barcelona, España: Paidós.

Burger, W. y Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31-48

Fuys, D., Geddes, D. y Tischleer, R. (1988). The Van Hiele models of thinking in Geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1), 41-46

Gimeno, J. (1998) .La diversidad de la vida escolar y las transiciones. *Kikirikí 48* (1), 16-20

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis de doctorado no publicada, Valencia. Universitat de Valencia

Ley Orgánica de Educación (2009). Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela Nº 5.929 Extraordinaria.

Mariño, A. (2000). El geoplano un recurso manipulable para la comprensión de la geometría. *Anuario Educación Integral, 3*(3-4), 49-75

Senechal, M. (2008). Formas. En Steen, L. (Ed.), La Enseñanza Agradable de las Matemáticas. (149-192). México: Limusa

Serrazina, L. y Matos, J. (1968). *O Geoplano na sala de aula*. Associação de Professores de Matemática. Portugal:Grua

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education.* Kluwer: Academic Publishers

Steen, L. (2008). *La Enseñanza Agradable de las Matemáticas*. México: Limusa

Verdugo, J., Vásquez, R., Briseño, L. y Palmas, O. (2000). Área de figuras en el Geoplano. Recuperado 15 de Enero 2013 de: http://www.cneq.unam.mx/programas/actuales/cursos_diplo/diplomados/seiem_mate/0/03_material/01_modulo/archivos/Geoplano%20Luis%20brise_o.pdf

Villarroel, S. y Sgreccia N. (2011). Materiales didácticos concretos en geometría en primer año de secundaria. *Revista Números, 78* (1), 73-94

ENSEÑANZA Y COMPRENSIÓN FORMAL DE LAS TABLAS DE CONTINGENCIA

Gustavo R. Cañadas, Juan J. Ortiz, José M. Contreras, María M. Gea
Facultad de Educación, Universidad de Granada España
grcanadas@ugr.es

Resumen. En este trabajo, se describe una experiencia de enseñanza de las tablas de contingencia, evaluando el aprendizaje de uno de los temas (Tablas de contingencia, lectura e interpretación) en una muestra de 93 estudiantes del primer año de la licenciatura de Psicología. Se presentan los resultados en 6 ítems de opción múltiple y un problema abierto, que indican un aprendizaje satisfactorio, adquisición de estrategias formales y superación de la concepción local y causal sobre la asociación.

Palabras clave: tablas de contingencia, dificultades, materiales de enseñanza

Abstract. In this research, we describe an experience of teaching contingency tables, and assess the learning of a lesson (Contingency tables, reading and interpretation) in a sample of 93 students in the first year of Psychology. Results are presented for six multiple-choice items and an open problem, indicating a successful learning, acquisition of formal strategies and overcoming the local and causal conception of the association.

Key words: contingency tables, difficulties, teaching materials

Introducción

Las tablas de contingencia son una forma común de resumir datos categóricos. En general, el interés se centra en estudiar si existe asociación entre una variable fila y otra variable columna y/o calcular la intensidad de dicha asociación. A pesar de su importancia, se presta poca atención a este tema, suponiendo que su comprensión es sencilla.

En este trabajo se describe una experiencia de enseñanza; se analiza también la evaluación del aprendizaje del tema: "Tablas de contingencia, lectura e interpretación", utilizando, como marco teórico el enfoque onto-semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) en que la comprensión formal se concibe como correspondencia entre el significado institucional de un concepto (en matemáticas) y el significado personal adquirido por el estudiante. Se comienza analizando la investigación previa y se describe el método y resultados.

En los antecedentes, así como en nuestra investigación, se entiende como estrategia la información que usan los sujetos para llegar al juicio de asociación y la forma en que la combinan. Distinguimos entre estrategias intuitivas (las usadas antes de la enseñanza) y formales (basadas en conceptos aprendidos después de la enseñanza).

Investigaciones previas

Inhelder y Piaget (1955) inician la investigación sobre juicios de asociación, describiendo las estrategias de los chicos a partir de 13 años. Para explicar sus resultados utilizan una la Tabla 1, indicando que en una primera etapa, sólo se usa la celda *a* (presencia de los caracteres *A* y *B*) sin comprender que la celda *d* (ausencia de los dos caracteres) tiene el mismo peso en relación a la asociación. En una segunda etapa (entre los 13 y15 años), se comparan las celdas dos a dos (por ejemplo *a* con *b*, o *a* con *c*). El tercer paso, sería comprender cuales son los casos favorables (*a* y *d*) y desfavorables (*b* y *c*) de la asociación, sin compararlos y finalmente, el sujeto establece las relaciones diagonales, comparándolas entre sí o con el total (*a*+*b*+*c*+*d*).

Posteriormente autores, como Smedlund (1963) y Shaklee y Mins (1982) han analizado las estrategias de sujetos adultos, concluyendo que, en contraposición con lo supuesto por Piaget e Inhelder, algunos continúan con estrategias propias de niños, por lo que el desarrollo del concepto de asociación no sería espontáneo en los sujetos. La dificultad de la tarea la muestran Jenkins y Ward (1965), indicando que incluso la estrategia de comparar las diagonales, considerada como correcta por Inhelder y Piaget, sólo llevaría a un juicio de asociación correcto, si las frecuencias marginales por filas o por columnas en la Tabla 1 fuesen iguales, pero no en el caso general. La estrategia correcta para el caso general consiste en comparar la diferencia entre las probabilidades *P(B|A)* y *P(B|no A)*.

	A	No A	Total
B	A	b	a+b
No B	C	d	c+d
Total	a+c	b+d	

Tabla 1. Tabla de contingencia 2x2

Pérez Echeverría (1990) clasifica dichas estrategias en niveles de dificultad (niveles 1 a 3 si se usan sólo 1 a 3 de las 4 celdas de la tabla; nivel 4 si se usan las 4 celdas con estrategias aditivas y nivel 5 si se usan las 4 celdas con estrategias multiplicativas).

Otro problema es que muchas personas forman sus propias teorías sobre la relación entre variables en la tabla de contingencia que les impide evaluar correctamente la asociación (Chapman y Chapman, 1969), fenómeno conocido como “correlación ilusoria”. Por otro lado, Estepa (1993) describe la concepción causal, según la cual el sujeto sólo considera la asociación entre variables si puede adjudicarse a la presencia de una relación causal entre las mismas. También define la concepción unidireccional donde el estudiante no admite la asociación inversa y la local, cuando el sujeto basa su juicio en sólo una parte de los datos.

Una experiencia de enseñanza

Para contribuir a superar los problemas anteriores, se desarrollaron materiales didácticos para facilitar la comprensión de las tablas de contingencia en estudiantes universitarios de ciencias sociales, que fueron experimentados (Cañadas, 2011) dentro de dos grupos de clase regulares de primer curso de Psicología (en total 94 alumnos). Se dedicó a la enseñanza 6 sesiones de 1 hora; cuatro de ellas en el aula tradicional en los grupos mencionados, dedicadas a la presentación de los temas. Otras dos sesiones fueron prácticas en el laboratorio de informática, donde cada alumno trabajó independientemente con el ordenador utilizando unas hojas de Microsoft Excel, preparadas para las prácticas. Cada grupo de teoría se dividió en tres de 15 alumnos, todos ellos impartidos por el mismo profesor. El material del curso con las actividades detalladas se encuentra disponible en la página web: http://www.ugr.es/~analisisdedatos/webcurso/presentacion.html. El contenido se ha organizado en cuatro lecciones:

1. *Tablas de contingencia, lectura e interpretación.* Se trata que los alumnos aprendiesen a: (a) Resumir datos sobre dos variables estadística en una tabla de contingencia; (b) Identificar las frecuencias dobles (c) Calcular las frecuencias relativas dobles, marginales y condicionales e interpretarlas; (d) Representar gráficamente los datos mediante diagrama de barras adosadas, diagrama de barras apiladas y gráfico tridimensional y (e) Calcular probabilidades simples, compuestas y condicionales a partir de datos de una tabla de contingencia.

2. *Asociación estadística, dependencia funcional e independencia.* Se trató de que los alumnos aprendiesen a: (a) Diferenciar la asociación estadística, dependencia funcional e independencia; (b) Reconocer el tipo de relación entre dos variables comparando las frecuencias condicionales; (c) Calcular las frecuencias esperadas en caso de independencia y (d) Analizar posibles explicaciones de una asociación estadística: relación causal, interdependencia, tercera variable explicativa o asociación espuria.

3. *El estadístico Chi-cuadrado y contrastes asociados.* La tercera lección, se dedicó a: (a) Dar una medida de la diferencia entre frecuencias observadas y esperadas en caso de independencia; (b) Calcular e interpretar el estadístico Chi-cuadrado y sus grados de libertad; (c) Comprender los pasos para llevar a cabo el contraste de independencia y el contraste de homogeneidad y (e) Comprender los supuestos del contraste Chi-cuadrado.

4. *Medidas de asociación*. Se trató de que los alumnos aprendiesen a: (a) Interpretar la intensidad de la dependencia entre dos variables en una tabla de contingencia; (b) Calcular e interpretar medidas de asociación en tablas 2x2: Coeficiente Phi de Pearson, Riesgo relativo y Razón de productos cruzados; (c) Calcular e interpretar medidas de asociación en tablas rxc; Coeficiente de contingencia de Pearson y *V* de Cramer y (d) Calcular e interpretar medidas de reducción del error de predicción de una variable, cuando se conoce el valor de la otra: Lambda de Goodman y Kruskal.

Para asegurar la validez del estudio las clases fueron observadas. Las interacciones en la clase también fueron grabadas en audio, para posteriormente poder comparar con la observación y anotar las principales incidencias y dudas planteadas por los estudiantes. Los profesores habituales de los cursos también asistieron a las sesiones.

Evaluación

También se prepararon diferentes pruebas de evaluación, para ser utilizadas en tres momentos del proceso de estudio, en cuya construcción se han seguido las recomendaciones psicométricas habituales para asegurar su calidad. El aprendizaje se evaluó con un cuestionario, compuesto de 6 ítems para cada uno de los temas y algunos problemas abiertos. En este trabajo presentamos los resultados obtenidos en relación con el tema 2 "asociación estadística, dependencia funcional y aleatoria". Su comprensión fue evaluada con los 6 ítems que se reproducen a continuación, marcando en negrita las respuestas correctas en cada ítem y un problema abierto.

El ítem 1 evalúa el conocimiento que el estudiante adquiere de propiedades sencillas que permiten evaluar si dos variables de una tabla de contingencia son independientes: Las opciones a) y b) son correctas, pues en caso de independencia, todas las distribuciones condicionales por fila o columna coinciden. La c) es igualmente correcta, ya que la independencia implica esta relación de igualdad entre las frecuencias condicionales y las frecuencias marginales.

Ítem 1. Para que dos variables de una tabla de contingencia sean independientes, han de ser iguales:

a. *Las frecuencias relativas condicionales por columnas.*

b. *Las frecuencias relativas condicionales por filas.*

c. *Las frecuencias relativas condicionales y frecuencias relativas marginales.*

El ítem 2 evalúa el conocimiento del procedimiento de cálculo de las frecuencias esperadas en una tabla de contingencia. La respuesta correcta es la c), pues $e_{ij} = \frac{f_{i.} \times f_{.j}}{n}$. En la respuesta a) se confunde las frecuencias absolutas dobles con las frecuencias absolutas marginales, en el cálculo de las frecuencias esperadas; en la b) se cambia las frecuencias relativas dobles por las frecuencias absolutas marginales, en el proceso de cálculo y en la d) se confunde las frecuencias relativas marginales con las frecuencias absolutas marginales, además de que falta el total de la muestra, en el cálculo.

Ítem 2. Las frecuencias esperadas se calculan mediante:

a. Las frecuencias absolutas dobles y el total de la muestra.

b. Las frecuencias relativas dobles y el total de la muestra.

c. Las frecuencias absolutas marginales y el total de la muestra.

d. Las frecuencias relativas marginales

Evalúa el conocimiento de la relación entre frecuencias relativas y marginales en caso de independencia. La respuesta correcta es la b), pues en caso de asociación podría darse la igualdad en un caso. La respuesta a) es incorrecta, ya que describe una propiedad de la independencia y no de la asociación. Asimismo lo es la respuesta c), puesto que puede ocurrir que en caso de asociación en unos casos se cumpla esta igualdad y en otros no.

Ítem 3. En caso de que haya asociación entre variables, las frecuencias relativas dobles:

a. En todas las celdas son iguales al producto del total por fila y columna que le corresponda, es decir $h_{i,j}= h_{i\cdot}\, h_{\cdot j}$

b. Puede ocurrir que coincida en alguna celda al producto del total por fila y columna que le corresponda, es decir $h_{i,j}= h_{i\cdot}\, h_{\cdot j}$

c. Nunca son iguales al producto del total por fila y columna que le corresponda, es decir nunca se cumple $h_{i,j}= h_{i\cdot}\, h_{\cdot j}$

En el ítem 4 se desea conocer la interpretación que dan los alumnos a la relación existente entre diferentes celdas en la tabla 2x2 y el signo de la asociación. La respuesta adecuada es la b), pues en la diagonal principal están los valores que informan de dependencia directa, referidos a la presencia-presencia (*A*-*B*), y ausencia-ausencia (no *A*-no *B*). Por el contrario en las otras dos celdas, se da un solo carácter y el otro no y serían las celdas favorables a una asociación inversa. Las otras opciones son incorrectas.

Ítem 4. En las siguientes tablas 2x2 indicamos el tipo de asociación que informan las diferentes celdas ¿Cuáles de las siguientes tablas es correcta?

a.

	B	No B
A	Dep. directa	Dep. directa
No A	Dep. directa	Dep. inversa

b.

	B	*No B*
A	*Dep. directa*	*Dep. inversa*
No A	*Dep. inversa*	*Dep. directa*

c.

	B	No B
A	Dep. directa	Dep. inversa
No A	Dep. inversa	Dep. inversa

Este ítem trata de detectar la concepción causal de la asociación (Estepa,1993). La respuesta adecuada es la c), pues si *A* es causa de *B*, entonces habrá asociación. La respuesta a) es incorrecta, pues causa si implica asociación, pero puede ser positiva o negativa. Asimismo es errónea la respuesta b); aquí aparece la falacia "correlación implica causalidad".

Ítem 5. Indica cuál de las siguientes frases es cierta:

a. Si hay una relación causal entre A y B, entonces habrá asociación positiva entre A y B
b. Si al tomar datos de A y B encontramos asociación entre las variables, entonces habrá una relación causal entre A y B
c. Si hay una relación causal entre A y B, entonces habrá asociación, que puede ser positiva o negativa.

Este ítem analizar la comprensión de la diferencia entre dependencia funcional y aleatoria. La respuesta correcta es la b), pues la dependencia aleatoria no implica un único valor de la variable dependiente al variar la independiente. La respuesta a) es incorrecta, pues da la definición de dependencia funcional. La respuesta c) es asimismo incorrecta, puesto que la dependencia funcional no es siempre directa.

Ítem 6. La diferencia entre la dependencia funcional y la dependencia aleatoria consiste en:

a. En la dependencia aleatoria a cada valor de la variable independiente X le corresponde sólo un valor de la variable dependiente Y
b. En la dependencia aleatoria, al variar X suele variar Y, pero no siempre
c. La dependencia aleatoria puede ser directa o inversa, pero la funcional siempre es directa

También se propuso sobre este tema el siguiente problema abierto, que trata de evaluar la competencia del estudiante para establecer un juicio de asociación y sus estrategias

Problema. Un grupo de 200 personas aquejadas de ansiedad fue dividido aleatoriamente en dos subgrupos. Al primer grupo se ofreció un medicamente realmente efectivo y al otro se ofreció un placebo (medicamento sin efecto). Al cabo de un mes fueron interrogados sobre la eficacia conseguida, con el siguiente resultado:

	Su ansiedad ha disminuido	Siguen con mucha ansiedad
Medicamento	50	15
Placebo	96	39

¿Hay asociación entre el tipo de tratamiento (medicamento o placebo) y el efecto producido (la ansiedad disminuye o no)? ¿O son las variables independientes? Indica cómo has llegado a esta conclusión (puedes usar el método que prefieras)

Resultados y discusión

En la Tabla 2 se resumen las respuestas a los ítems correspondientes al Tema 2. Estos resultados muestran un alto grado de aprendizaje, que se refleja en las pocas respuestas en blanco y el alto porcentaje de respuestas correctas. Los mejores resultados se obtienen en el ítem 4 (identificación de celdas que informan del signo de la asociación en la tabla 2x2); ítem 5 (diferencia entre asociación y causalidad) y opción a) del ítem 6 (dependencia funcional). Por otro lado, los mayores errores se producen en la opción b) del ítem 3 (no se reconoce que en caso de independencia en alguna celda puede ser igual las frecuencias esperadas y observadas y la opción c) del ítem 1 (confusión de una propiedad de independencia).

	Apartado	Correcto	Incorrecto	En blanco
Ítem 1	a (Verdadera)	67 (71,3)	24 (25,5)	3 (3,2)
	b (Verdadera)	69 (73,4)	22 (23,4)	3 (3,2)
	c (Verdadera)	27 (28,7)	64 (68,1)	3 (3,2)
Ítem 2	a (Falsa)	74 (78,7)	18 (19,1)	2 (2,1)
	b (Falsa)	80 (85,1)	12 (12,8)	2 (2,1)
	c (Verdadera)	59 (62,8)	33 (35,1)	2 (2,1)
	d (Falsa)	87 (92,6)	5 (5,3)	2 (2,1)
Ítem 3	a (Falsa)	39 (41,5)	51 (54,3)	4 (4,3)
	b (Verdadera)	17 (18,1)	73 (77,7)	4 (4,3)
	c (Falsa)	59 (62,8)	31 (33)	4 (4,3)
Ítem 4	a (Falsa)	91 (96,8)	1 (1,1)	2 (2,1)
	b (Verdadera)	90 (95,7)	2 (2,1)	2 (2,1)
	c (Falsa)	91 (96,8)	1 (1,1)	2 (2,1)
Ítem 5	a (Falsa)	89 (94,7)	5 (5,3)	0 (0)
	b (Falsa)	80 (85,1)	13 (13,8)	1 (1,1)
	c (Verdadera)	79 (84)	15 (16)	0 (0)
Ítem 6	a (Falsa)	77 (81,9)	12 (12,8)	5 (5,3)
	b (Verdadera)	43 (45,7)	46 (48,9)	5 (5,3)
	c (Falsa)	60 (63,8)	29 (30,9)	5 (5,3)

Tabla 2. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas en los ítems (n=94)

		Frecuencia	Porcentaje
Correcta	Contraste Chi-cuadrado	16	17,2
Correcta	Cálculo del coeficiente Phi de Pearson	14	15,1
Correcta	Cálculo de otros coeficientes	3	3,2
Correcta	Cálculo de dos coeficientes	3	3,2
Correcta	Compara las distribuciones condicionales	12	12,9
Correcta	Compara frecuencias observadas y esperadas	2	2,1
Parcialmente correcta	Comparar la suma de las diagonales	2	2,1
	No responde	41	44,1
Total		93	100

Tabla 3. Frecuencias y porcentajes de estrategias en el problema.

El problema planteado presenta una asociación moderada y los estudiantes en su mayoría lo han reconocido (74 estudiantes, 79,6%). La mayoría también indica que la dependencia es directa (60 estudiantes, es decir 64,5%), mostrando de nuevo un buen aprendizaje. En la Tabla 3 se presentan las estrategias utilizadas, la mayoría correctas; un 21% utiliza estrategias formales fruto del aprendizaje, un 17,1% estrategias intuitivas (estrategias producidas antes de la enseñanza sin formalidad matemática), pero todas ellas de nivel 5 en la clasificación de Pérez Echeverría; un 44,1% no indica la estrategia, posiblemente debido a falta de capacidad de argumentación, pues como se ha indicado la mayoría de estudiantes responde correctamente a la asociación y su signo.

Conclusiones

En este trabajo hemos descrito una experiencia de enseñanza de la asociación en tablas de contingencia, presentando un breve resumen de la evaluación del aprendizaje en uno de los temas. Los resultados indican un aprendizaje satisfactorio, y competencia en la detección de asociación en un problema abierto, con uso tanto de estrategias formales (estrategias producidas posteriores a la enseñanza), como de estrategias de nivel 5 en la clasificación de Pérez Echeverría. Se superan las concepciones causal y local, descritas por Estepa (1993). Ha sido menor la capacidad de argumentación de los estudiantes, muchos de los cuáles no fueron capaces de explicar su estrategia en el problema abierto. Como consecuencia, aunque el material se ha relevado de interés al usarlo con alumnos de Psicología, se plantea, así el reto de continuar este trabajo con nuevas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las tablas de contingencia.

Agradecimiento: Proyecto EDU2010-1494; Beca FPU-AP2009-2807 y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Cañadas, G. R. (2011). *Las tablas de contingencia para Psicología*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Granada.

Chapman, L. J., & Chapman, J.P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid Psychodiagnostic signs. *Journal of Abnormal Psychology*, 74, 271-280.

Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent*. Paris: Presses Universitaires de France.

Jenkins, H. M. y Ward, W. C. (1965). Judgment of the contingency between responses and outcomes, *Psychological Monographs, 79,* 1-17.

Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico.* Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Shaklee, H. y Mins, M. (1982). Sources of error in judging event covariations: Effects of memory demands, *Journal of Experimental Psychology Learning, Memory and Cognition, 8*(3), 208-224.

Smedlund, J. (1963). The concept of correlation in adults. *Scadinavian Journal of Psychology,* 4, 165-174.

PROPUESTA DE TRABAJO DE CURSO: TIPO DE EVALUACIÓN FINAL PARA LA ASIGNATURA MATEMÁTICA NUMÉRICA EN LA UNIVERSIDAD DE LAS CIENCIAS INFORMÁTICAS

Julián Sarría González, Sandy Díaz Ramos, Pedro Victoriano Pérez González, Augusto César Rodríguez Medina, Yinimary Ortega Montoya
Universidad de las Ciencias Informáticas Cuba
jsarria@uci.cu, pvperez@uci.c

Resumen. Esta investigación presenta una propuesta de trabajo de curso como tipo de evaluación final para la asignatura de Matemática Numérica del ingeniero informático de la Universidad de las Ciencias Informáticas de Cuba. En esta actividad se produce la integración interdisciplinaria de la Matemática con asignaturas que se imparten en años precedentes y en el propio segundo año de la carrera, con el objetivo de elevar la formación integral de los estudiantes a través del desarrollo de habilidades técnico-profesionales, que permitirá a los educandos cumplir mejor con su encargo social.

Palabras clave: evaluación, trabajo de curso, integración interdisciplinaria

Abstract. This paper introduces a proposal to work in a class in the moment of a final evaluation for a course of Numerical Mathematics in a Computing Engineering Career at University of Sciences Information of Cuba. The activity presented aims to achieve the interdisciplinary integration of Mathematics with other subjects studied in the previous years and at the same time as the one central for this study; with the purpose of strengthening the integral development of the students through the development of technical-professional skills that will allow them to fulfil their social responsibility at their best..

Key words: evaluation, course work, interdisciplinary integration

Introducción

La evaluación del aprendizaje constituye uno de los procesos más importantes dentro del programa de cualquier asignatura, es una categoría de la didáctica que requiere la mayor atención por parte de los profesores a la hora de responder a las exigencias del plan de estudio, en particular de un Ingeniero Informático; omitirla o no aplicarla correctamente pondría ser contraproducente para con los estudiantes. Por otra parte la evaluación debe ser formativa y educativa, determinar en gran medida lo que los alumnos aprenden y como lo aprenden, y medir el contenido que los profesores enseñan y como lo enseñan (Álvarez, 2008).

La evaluación, más que un instrumento para calificar, debe ser un medio que permita corregir algunas fallas y procedimientos, retroalimentar los mecanismos del aprendizaje, dirigir la atención del alumno, mantenerlo consciente de su grado, avance o nivel de logro y reforzar oportunamente algunas áreas de estudio en el aprendizaje que se perciban como insuficientes (González, 2000). El aprendizaje de los estudiantes es más efectivo cuando ellos se sienten retados a alcanzar metas altas y a la vez responsables de su propio conocimiento. Varios autores plantean que los estudiantes deben ser parte activa y consciente en el proceso evaluativo, conjuntamente con sus profesores (Álvarez, 2008; Bermúdez, 2001 y González, 2000).

La evaluación es un control que se hace en los momentos finales de cualquiera de las instancias organizativas del proceso docente-educativo, como pueden ser, la clase, el tema, la asignatura, etcétera, y que sirve para determinar el grado en que se aprendió, en que se cumplieron los objetivos, es por tanto un componente que caracteriza el estado de una instancia dada, etc., como pueden ser los objetivos y el contenido, a diferencia del método y la forma, que caracterizan al proceso en su desarrollo; la evaluación está estrechamente vinculada al objetivo y a sus características, ya estudiadas, que en este eslabón lo fundamental consiste en hacer uso de las relaciones que ofrecen las leyes de los procesos conscientes, en especial aquellas que establecen los vínculos entre el resultado y el resto de los componentes del proceso, entre el resultado y la necesidad social (el problema) que generó el desarrollo de todo el proceso, entre el resultado y el diseño del proceso docente y entre el resultado y la ejecución del proceso, la evaluación mide en qué grado se elaboraron bien los objetivos, se escogieron los contenidos, se seleccionó el método a desarrollar, los medios a emplear, la misma evaluación del aprendizaje y debe ser un proceso eficiente y eficaz (Álvarez, 1999).

Pérez (2000) define algunos principios básicos para la evaluación del aprendizaje en matemáticas, en primer lugar, la relación tareas–autopreparación–evaluación mediante el uso del libro de texto, teniendo en cuenta una buena planificación a largo plazo de las actividades de la evaluación y su adecuada distribución en el tiempo, en segundo lugar, independencia de las habilidades a evaluar y por último, la gran importancia que reviste el control de las habilidades antes del producto final, sobre este aspecto, la autora comenta que hay tendencias entre muchos maestros de dirigir el proceso sólo a través de las evaluaciones, sin la realización de controles; es decir, se evalúa cuando ya no hay remedio de rectificar el proceso, agrega además que esta situación provoca que la evaluación pierda su calidad en el sistema de dirección del proceso docente–educativo. La autora puntualiza sobre tres premisas fundamentales a tener en cuenta para el desarrollo de la evaluación del aprendizaje en matemáticas de la siguiente manera:

1. La evaluación debe buscar un equilibrio en su significación, tanto para los alumnos como para los maestros.
2. Evaluar el proceso de avance al objetivo y no sólo el objetivo, determinando lo que falta para lograrlo, concebir la evaluación que siempre permite la posibilidad de mejorar una calificación.
3. La evaluación debe estar basada en un sistema de tareas.

Principalmente bajo estas premisas hemos realizado la propuesta de trabajo de curso para la asignatura de Matemática Numérica en la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI), teniendo en cuenta el Reglamento de Trabajo Metodológico para la Educación Superior en Cuba, que en sus artículos 121 y 122 expresa lo siguiente : “Trabajo de Curso es un trabajo investigativo que les permite a los estudiantes solucionar problemas o tareas profesionales para profundizar, ampliar, consolidar y generalizar los conocimientos adquiridos; aplicar, con independencia y creatividad, las técnicas y los métodos adquiridos en otras formas organizativas del proceso docente educativo, desarrollar los métodos del trabajo científico. Además permite el acercamiento a otras áreas del conocimiento, la búsqueda de varias alternativas de solución para estos problemas y el carácter interdisciplinario de este proceso docente”.

La interdisciplinariedad presente en estas tareas asegura la búsqueda de nuevos conocimientos científicos, necesarios para interpretar y resolver los problemas planteados de manera creadora. En la actualidad un elemento importante que ha incidido en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la asignatura Matemática Numérica, para la carrera de Ingeniería Informática, es la presencia y uso de los entornos virtuales de aprendizajes y de los asistentes matemáticos como lenguajes de programación (González, 2010).

La propuesta de trabajo de curso que resultó de esta investigación no es únicamente una forma de evaluación del aprendizaje en el semestre, sino también una forma de consolidar los conocimientos estudiados en las asignaturas involucradas, mediante un trabajo investigativo y así alcanzar una mayor sistematización y generalización de habilidades que debe cumplir el estudiante en el año académico. Para esto, ha de utilizar métodos y técnicas de investigación que lo acerquen a su futura actividad profesional, consultando literatura especializada, utilizando el entorno virtual de aprendizaje como medio de orientación. Esto estimula el trabajo independiente, el trabajo en equipo, la interdisciplinariedad y un control personalizado por parte del profesor a través del entorno virtual.

Proponemos además la utilización del Entorno Integrado para el Desarrollo Matemático EIDMAT v. 0.3 como herramienta de cálculo y programación, desarrollada en la UCI, durante los años 2007-2011, que consiste en una interfaz gráfica para Octave 2.9 o superior, variante libre para programadores del Matlab (Quarteroni, 2006) .

Este entorno (EIDMAT) contempla funcionalidades que ofrece el asistente numérico Matlab, por ejemplo el propio diseño de la interfaz, el Editor-Depurador y la Ayuda e incluso agregando algunas con las que no cuenta el Matlab como la integración Maxima(asistente simbólico libre) ofreciéndole a los estudiantes un espacio de trabajo único para desarrollar todo tipo de cálculo, implementar y algoritmizar las soluciones de los problemas planteados en el trabajo de curso.

Esta investigación incide sobre dos elementos de la carrera en Ingeniería en Ciencias Informáticas, el primero es el programa analítico de la asignatura Matemática Numérica y el segundo, la evaluación, porque incluso este trabajo de curso trasciende las fronteras de esta asignatura por la alta integración que implica, sobre todo con las asignaturas precedentes de la disciplina, pudiéndose ver como un trabajo de cierre de disciplina.

La metodología de trabajo utilizada en este caso contiene tres fases: la primera fase es el diseño del trabajo de curso, la segunda, la inclusión de problemas que tributen al vínculo interdisciplinario con las asignaturas precedentes y finalmente el análisis de las técnicas de investigación a aplicar por los estudiantes en su solución.

Desarrollo

Para muchos problemas prácticos es imposible obtener una solución analítica, por otra parte una característica distintiva de los métodos numéricos es el hecho de tener un mayor alcance a la hora de resolver problemas, que de forma analítica se hace imposible. Estas y otras razones, antes mencionadas, incentivan la propuesta de trabajo de curso, con los siguientes objetivos:

- Utilizar los conocimientos adquiridos en la disciplina matemática, para la resolución de problemas prácticos.
- Utilizar la vía del trabajo colaborativo o en equipo como la más exitosa para lograr investigaciones más acabadas y abarcadoras.
- Obtener modelos matemáticos a partir de una situación real, teniendo en cuenta la propagación de errores.
- Emplear el Entorno Integrado para el Desarrollo Matemático EIDMAT en la resolución de problemas reales.
- Integrar a través de la solución de un problema varias asignaturas de la carrera.

Todos los trabajos deben seguir una estructura estándar, en el cual vamos a definir un conjunto de exigencias para su presentación:

- El trabajo se debe de desarrollar en equipos de no más de 5 personas.
- Las soluciones estarán adaptadas al problema en cuestión; pero se debe conocer el ámbito en que se encuentra el mismo y la forma general en que debe modelarse.

- Cada equipo debe presentar, como parte de la solución de su problema, un análisis de posibles alternativas. Con esto nos referimos a analizar casos límites (siempre que lo amerite). Por ejemplo realizar corridas con muchas o pocas iteraciones analizando que es lo que ocurre en cada caso.
- Los resultados o soluciones obtenidas deben ser avalados por la pertinente comparación con la solución analítica, en caso de ser posible, y si no a partir de la obtención de la solución utilizando funciones del propio asistente.
- Cada equipo debe presentar un informe en formato digital (*.pdf), editado en Latex a partir de una plantilla situada en la plataforma.
- Para presentar los resultados se debe utilizar una plantilla elaborada en Latex utilizando el paquete Beamer.

El profesor chequeará el estado del trabajo mediante tres cortes parciales y durante el desarrollo del proyecto, los profesores deben convertirse en facilitadores del conocimiento. La realización del trabajo de curso por parte de los estudiantes debe apoyarse con actividades complementarias en el entorno virtual de aprendizaje, ofreciéndole una metodología de investigación necesaria para realizar el proyecto, implícito en los requisitos necesarios para el informe final.

A continuación se ilustran dos prototipos de problemas que pueden formar parte de la propuesta de trabajo de curso (Colectivo de autores, 2010):

Problema I

Un paracaidista de 50.0 *kg* de masa salta desde un avión y cae hacia la tierra sometido a la fuerza aerodinámica resistiva del aire, directamente proporcional al cuadrado de su velocidad instantánea. La constante resistiva de proporcionalidad tiene un valor b = 0.2 *kg/m* con el paracaídas cerrado y de b = 20 *kg/m* con el paracaídas abierto. El paracaidista comienza su descenso a 1000*m* por encima del suelo y cae durante 10.0*s* antes de que se abra el paracaídas. Considere $g = 9.8 \mathrm{m}/s^2$.

a) Realizar el análisis y las consideraciones simplificadoras para plantear el modelo físico-matemática asociado a las condiciones del problema.
b) Realizar el análisis necesario para obtener un modelo diferencial del movimiento y represéntelo mediante un problema de Cauchy con condiciones iniciales.
c) Realizar el análisis para obtener las expresiones analíticas de la velocidad en función del tiempo y de la velocidad final (constante).

d) Determinar la velocidad final del paracaidista en ambas configuraciones, antes y después de abrirlo.

e) Utilizar en la resolución del problema un método numérico de paso múltiple y tomando un incremento temporal (paso) de 0.1s, calcular la posición, velocidad y aceleración del cuerpo como funciones del tiempo desde el instante que el paracaidista sale del avión hasta el instante en que llega al suelo.

f) Para la situación donde el paracaídas se abre, investigue qué magnitud cinemática debe experimentar un crecimiento grande y súbito. En estas condiciones sería o no aconsejable variar el incremento temporal (paso). ¿Cómo? ¿Por qué? Explique justifique su respuesta.

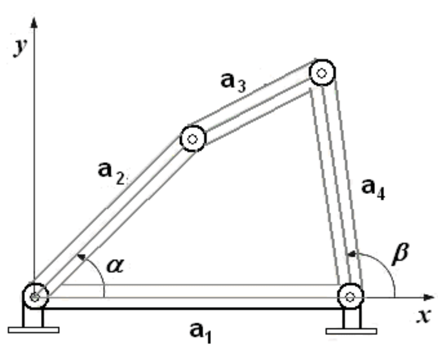
g) Validar los resultados utilizando funciones propias de Octave a través de EIDMAT.

Problema II

Consideremos el sistema mecánico representado por las cuatro barras rígidas a_i de la Figura I. Para cualquier valor admisible del ángulo β, se desea obtener el valor del correspondiente ángulo α entre las barras a_1 y a_2. A partir de la identidad vectorial $a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = 0$ y observando que la barra a_1 está siempre sobre el eje x, se puede deducir la siguiente relación entre α y β

$$\frac{a_1}{a_2}\cos(\beta) - \frac{a_1}{a_4}\cos(\alpha) - \cos(\beta - \alpha) = \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2}{2a_2 a_4}$$

a_i es la longitud conocida de la i-'esima barra. Esta es la Ecuación de Freud-einstein **(**para los mecanismos de cuatro barras, probablemente la técnica de síntesis más utilizada en los problemas de diseño donde se requiere el movimiento coordinado entre el eslabón de entrada y el de salida**)** de la cual se conoce la solución explicita para valores específicos de β. La solución para ciertos valores de β no es única.



FiguraI: Sistemas de cuatro barras

a) Realizar el análisis necesario para obtener el modelo matemático no lineal que permite calcular el valor del ángulo α si son conocidas las restantes variables.

b) Realizar el análisis necesario que permite obtener el valor aproximado de α a parir de verificar si se cumplen las hipótesis del método de Regula-Falsi para esta ecuación si $\beta \in [0, 2\pi/3]$, a_1 =10*cm*, a_2 =13*cm*, a_3 = 8*cm* y a_4 = 10*cm* con una tolerancia de 10^{-5}.

c) Determinar el valor de α utilizando para esto el método de Newton-Rahpson tomando como aproximación inicial $\alpha^{(0)} = 0.1\pi$ y $\alpha^{(0)} = 2\pi/3$ con una tolerancia de 10^{-5}, teniendo en cuenta los datos del inciso anterior.

d) Comparar ambos resultados.

e) Validar los resultados utilizando funciones propias de Octave a través de EIDMAT.

Conclusiones

El trabajo de curso, que aquí se propone, como tipo de evaluación del aprendizaje de la asignatura Matemática Numérica, potencia la independencia, la creatividad y el vínculo interdisciplinario con asignaturas precedentes del año, además de obtener la solución de problemas reales que enfrenta el ingeniero en ciencias informáticas, empelando el EIDMAT. Implícitamente es una actividad que permite hacer un cierre de la disciplina Matemática.

Permite a los profesores que imparten la asignatura Matemática Numérica, poder medir técnicas de investigación científicas desarrolladas por los estudiantes y el uso de herramientas para la elaboración de textos científicos como el Latex.

Mediante el trabajo de curso se puede lograr un alto grado de motivación en los estudiantes que se revierte en la adquisición de capacidades que rebasan el marco de los objetivos de la asignatura y que podrán manifestarse creadoramente en su vida profesional.

Referencias bibliográficas

Álvares, C. (1999). *La escuela en la vida: Didáctica*. La Habana: Pueblo y Educación.

Álvarez, I. (2008). La evaluación del aprendizaje en la universidad: una mirada retrospectiva y prospectiva desde la divulgación científica. *Revista electrónica de investigación Psicoeducativa*. 6(14). 235-272

Bermúdez, R. (2001). Aprendizaje formativo: una opción para el crecimiento personal. *Revista cubana de Psicología*. 18(3).

Colectivo de autores (2010). *Colección de ejercicios y problemas de Matemática Numérica*. Facultad 10. Universidad de las Ciencias Informáticas. Cuba

Chirino, M.V. (2005). *El trabajo independiente desde una concepción desarrolladora del proceso de enseñanza-aprendizaje.* La Habana: Pueblo y Educación.

González, L., Lopetegui, M., Valdés, J., González, O., (2010). Propuesta metodológica para el desarrollo de la asignatura matemática numérica en las carreras de perfil informático. *Revistas Iberoamericana de Educación Matemática 21*, 127 - 132

González, M. (2000). *La evaluación del aprendizaje en la enseñanza universitaria.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior. Universidad de la Habana. Cuba

Pérez, O. L. (2000). *La evaluación del aprendizaje como elemento del sistema de dirección del proceso de enseñanza aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas para ciencias técnicas*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Camagüey, Cuba.

Quarteroni A., Saleri F. (2006). *Cálculo científico con MatLab y Octave*. Milán: Springer.

IDEAS DE PROBABILIDAD EN LUGARES GEOMÉTRICOS SIMPLES: EXPLORACIÓN CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Jesús Salcedo Prado, Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav México
jsalcedo@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. Durante un curso de Geometría Analítica se exploraron, mediante la aplicación de un cuestionario a 32 estudiantes de bachillerato tecnológico, ideas de combinatoria y de probabilidad planteadas en situaciones simples de lugar geométrico y se entrevistó a un estudiante por sus respuestas al instrumento. Los estudiantes desconocían técnicas de conteo y no emplearon de forma consistente algún recurso figurativo para determinar el número total de posibilidades; predominó en sus respuestas el enfoque clásico de la probabilidad sobre el frecuencial; confundieron segmento de recta y recta y prevaleció la idea de simetría al ubicar al azar puntos en el plano y trazar las rectas que ellos determinan.

Palabras clave: combinatoria, probabilidad, geometría analítica

Abstract. During a course of Analytical Geometry a questionnaire was applied to a group of technological high school students, involving ideas of combinatorics and probability in situations of simple locus. One student was interviewed about his answers given to the questionnaire. The students were unaware of counting techniques; the appeal to frequency probability prevailed in their answers instead of the classical view. In addition, they did not distinguish between a straight line segment and a straight line, the idea of symmetry interfered to locate points at random in the plane and to draw the lines that those points determined..

Key words: combinatory, probability, analytical geometry

Introducción

La reducción de la práctica de los estudiantes a la unidad de aprendizaje que estén cursando, sin interrelacionar las distintas unidades, ha sido uno de los motivos de la reforma del nivel medio superior. Este reporte recoge los primeros resultados obtenidos en una investigación cuyo objetivo es conocer el estado de conocimientos respecto a las ideas fundamentales de estocásticos que tienen los estudiantes de un Bachillerato tecnológico, mediante su identificación o no de esas ideas de entre las implicadas en los cursos de matemáticas a los que asisten. Por un lado, este informe es previo a la enseñanza de estocásticos en el bachillerato, que se ubica en el sexto semestre; y, por otro, toda la investigación la incluye y vincula las distintas unidades de aprendizaje. En lo que corresponde a este reporte, aplicamos un cuestionario a estudiantes de Geometría Analítica del tercer semestre, que planteó preguntas referidas a conteo y probabilidad mediante la presentación de situaciones sencillas de lugar geométrico; por sus respuestas, se seleccionó a un estudiante y se le entrevistó.

Referencias teóricas

La presente investigación está fundamentada en el planteamiento de investigadores en los campos epistemológico y cognitivo para la educación en probabilidad y en estadística.

Ideas Fundamentales de Estocásticos

Desde un punto de vista epistemológico y pragmático, en el sentido de Bruner, Heitele (1975) ha propuesto ideas fundamentales de estocásticos para la enseñanza de probabilidad y de estadística en todos los niveles siguiendo un curriculum en espiral. Considera las ideas fundamentales como:

> […] aquéllas que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, tan eficientes como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración (Heitele, 1975, p. 188).

Su propuesta considera cuatro puntos de vista:

- El marco de la concepción de Bruner:
  - El principio decisivo de la instrucción en un tópico es la transmisión de ideas fundamentales.
  - Las ideas fundamentales son necesarias como una guía desde la educación preescolar hasta la universitaria para garantizar cierta continuidad.
  - Las ideas fundamentales y los conceptos se abordan en los distintos niveles cognoscitivos y lingüísticos a lo largo de un curriculum en espiral.
  - La transición a un nivel cognoscitivo más alto se facilita si durante las primeras etapas cognoscitivas se ha diseñado una presentación apropiada del tópico principal.
- Los resultados de la psicología del desarrollo con respecto a las ideas estocásticas.
- Las diversas fallas de los adultos en situaciones estocásticas.
- La historia de la probabilidad.

En esta perspectiva, el autor propone como ideas fundamentales: Medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, combinatoria, variable estocástica, modelo de urnas y simulación, ley de los grandes números y muestra. Este listado es un modelo para construir un curriculum coherente en estocásticos, más que para resolver problemas. La utilidad de este modelo se muestra al aplicarse en la enseñanza a todos los niveles. Heitele propone integrar en la educación básica, lo más temprano posible, actividades de estocásticos a las de aritmética y geometría, para desarrollar conexiones significativas con la realidad y prevenir sesgos del pensamiento. Para ello, señala, es necesario que los profesores sepan lo que es realmente fundamental en estocásticos.

Modelos intuitivos y enseñanza

Desde un punto de vista cognitivo, Fischbein (1977) establece la hipótesis de que los modelos didácticos, específicamente los modelos intuitivos, deben tener una capacidad heurística, como sucede con los modelos científicos, porque los modelos, científicos o didácticos, deben constituir una componente viable para el pensamiento productivo. Esto lo plantea igualmente para los modelos pictóricos:

> […] un buen modelo es, necesariamente, generativo. Un modelo es genuinamente útil al pensamiento productivo si puede representar correctamente un número ilimitado de situaciones diferentes, usando un número limitado de elementos o reglas. El sistema de reglas que establece un modelo para expresar unívoca y estructuralmente al original, constituye la sintaxis del modelo (Fischbein, 1977, p. 155).

Heitele (1975) señaló también la pertinencia de los modelos pictóricos en la enseñanza básica de estocásticos. La importancia de las operaciones combinatorias es clara en el caso discreto, pues al asignar probabilidades es relevante la tendencia a subestimar la cardinalidad de los eventos (Fischbein, 1975). Con el uso de los diagramas de árbol, basado siempre en las mismas convenciones, se obtiene respuesta a las posibles preguntas referentes a combinatoria y pertenecientes a la misma clase, donde se pide la cantidad de arreglos posibles en la ordenación de objetos. El modelo es consistente internamente; expresa un principio, un método para construir los arreglos. El modelo es una herramienta intelectual: con él se resuelve el problema y no sólo se describe la solución. Con un modelo tal se aprende a pensar efectivamente y a comprender activamente. Los diagramas de Venn también constituyen una técnica consistente para expresar operaciones con conjuntos. Es una técnica visual generativa, que usa una lógica figurativa; la solución a las operaciones con conjuntos, qué representan, se puede obtener usando consistentemente el lenguaje figurativo.

En relación a las gráficas, la comprensión del *producto cartesiano* ha sido tema de varias investigaciones. Por ejemplo, Acuña (2006) indica que:

> Durante la construcción y tratamiento de las gráficas, los estudiantes no se percatan de sus propiedades no ostensivas, como la disposición homogénea de las unidades marcadas sobre los ejes, la prolongación infinita de las rectas o la posibilidad de reconstruir marcas sobre los ejes (p. 233).

En el tratamiento de la gráfica como dibujo y no como figura interviene la interpretación visual o la construcción de una relación gestalt particular.

Enfoques de la probabilidad

Se han adoptado varios enfoques para clarificar la asignación de probabilidades a eventos. En la enseñanza de probabilidad es particularmente importante el enfoque que se elija. Konold (1991) refiriéndose a las interpretaciones clásica, frecuencial y subjetiva, argumenta que según la primera, *a priori*, la probabilidad de un evento es la razón del número de alternativas favorables a ese evento, en relación al total de alternativas, siempre y cuando éstas sean igualmente probables. Esta definición es circular: la probabilidad se define en términos de alternativas igualmente probables. Según la interpretación frecuencial, derivada de la empiria, la probabilidad de un evento es el límite de su frecuencia relativa de ocurrencia en un número infinito de ensayos. De acuerdo a las interpretaciones subjetivistas, la probabilidad es la medición de la creencia en la verdad de una proposición. El significado del valor de la probabilidad en una interpretación subjetivista se puede concebir como: a) descripción de ese valor según la creencia que una persona tiene de lo que puede acontecer en una apuesta; b) consideración de todos los eventos a los cuales se les asigna una probabilidad como una colección (Konold, 1991).

Propuesta institucional

En el bachillerato tecnológico, la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística se imparte en el sexto semestre, la de Geometría Analítica en el cuarto semestre. El programa de estudios respectivo propone, para la primera, el siguiente objetivo principal:

> […] preparar al estudiante para que desarrolle competencias en las que el proceso metodológico debe reflejar la aplicación de la estadística descriptiva, la probabilidad y las distribuciones probabilísticas; donde los resultados justifiquen la solución del problema relacionado con los ámbitos académico, social y global, según se indica en cada una de las unidades, atendiendo a las tres ramas del conocimiento. Lo anterior implica abordar concepciones analíticas para comprender su espacio y su hábitat, apoyando su formación propedéutica y tecnológica (DEMS, 2009, p. 2).

El programa de estudios señala una relación entre la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística con otras unidades de aprendizaje de matemáticas y con otras disciplinas:

> [...] la Probabilidad y Estadística está directamente relacionada con las siguientes unidades de aprendizaje: Álgebra, Geometría y Trigonometría, y Cálculo Integral e indirectamente con Física, Química, Biología, Comunicación Oral y Escrita,

> Ciencias Sociales, Habilidades del Pensamiento, entre las principales; además de apoyar la formación integral del estudiante (DEMS, 2009, p. 2).

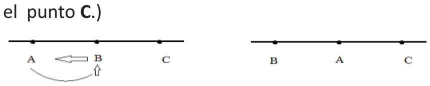
Sin ebargo, el programa de estudios no considera una relación directa entre Geometría Analítica y Probabilidad y Estadística. Los resultados de aprendizaje propuestos (RAP) para la unidad didáctica de Geometría Analítica y las competencias pretendidas son:

> [...] las competencias disciplinares (general y particulares) implican como principales objetos de conocimiento: lugares geométricos, línea recta, cónicas, coordenadas polares y ecuaciones paramétricas, para movilizar diferentes capacidades humanas relacionadas con: analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales; razonar correctamente en forma deductiva e intuitiva; representar, abstraer, relacionar, clasificar y aplicar conocimientos de la Geometría Analítica que permita identificar y resolver problemas teóricos y reales, utilizando los diferentes lenguajes de representación (verbal, gráfico y/o simbólico). (DEMS, 2009, p. 2)

Métodos e instrumentos

Participaron en la investigación 32 estudiantes de la unidad de aprendizaje de Geometría Analítica del tercer semestre de un bachillerato tecnológico, público bivalente. Se les aplicó un cuestionario impreso, para su contestación individual en a lo más 50 min., que se refirió a situaciones geométricas simples, que incluyeron puntos en el plano, colinealidad, recta, plano cartesiano y sus cuadrantes, para plantear, respecto a cuatro situaciones distintas, preguntas abiertas referidas a ideas fundamentales de probabilidad (véase la Figura 1).

1. Dado que dos puntos determinan una recta,
   a) ¿cuántas rectas se pueden trazar en un plano donde hay seis puntos (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**) y nunca hay tres de ellos alineados?
   b) Si se selecciona una de esas rectas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pase por el punto **C**?
   c) ¿La probabilidad de que pase por el punto **C** es la misma que la de que pase por el punto **E**?
   d) ¿Cómo se ubicarían los puntos en el plano para que sea más probable que una recta que tomemos al azar pase por alguno de los seis puntos?
2. Los puntos **A**, **B** y **C** son colineales y están incluidos en la recta **R.** Los tres puntos se pueden mover a lo largo de la recta (como en la figura, en la que cambiamos de lugar los puntos **A** y **B**, pero también podemos mover el punto **C**.)



   a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar los tres puntos en la recta?
   b) Si los tres puntos se acomodan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el punto **C** quede entre los puntos **A** y **B**?
3. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar los cuatro puntos **E, F, G** y **H** alrededor de un cuadrado, si sólo puede haber uno por cada lado del cuadrado?
4. Si en el plano cartesiano hay 13 puntos en el primer cuadrante y 7 en el segundo cuadrante:
   a) ¿De cuántas maneras se puede formar un conjunto de 2 puntos del primer cuadrante y 3 puntos del segundo cuadrante?
   b) Si no importa la ubicación de los puntos en los cuadrantes, ¿de cuántas maneras se puede formar el conjunto de 5 puntos?
   c) Si los 5 puntos del conjunto deben ubicarse en el mismo cuadrante, ¿cuántas maneras de integrar el conjunto hay?

Figura 1. Presentación de reactivos en el cuestionario.

La Tabla 1 resume la caracterización del cuestionario.

Reactivos	Medida de Probabilidad	Espacio muestra	Adición de probabilidades	Combinatoria	Equiprobabilidad
1 a)					
1 b)					
1 c)					
1 d)					
2 a)					
2 b)					
3					
4 a)					
4 b)					
4 c)					

Tabla 1. Ideas fundamentales implicadas en el cuestionario.

Posteriormente, a un estudiante que se mantuvo en la tendencia general en cuanto al tipo y cantidad de respuestas que dio al instrumento, se le interrogó sobre los principios de conteo e ideas de probabilidad implicados en los reactivos. Fue una entrevista semiestructurada, se le videograbó y el estudiante registró sus procedimientos y respuestas en hojas de papel.

Resultados

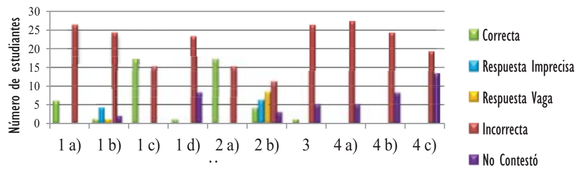
Las respuestas de los estudiantes se clasificaron de acuerdo a la formalidad con que fueron expresadas; una respuesta correcta es aquélla que lo estuvo en forma y precisión; una respuesta imprecisa expresa la relación entre cantidad de éxitos y cardinalidad del espacio

muestra, pero no formalmente; una respuesta vaga sólo manifiesta la cantidad de eventos favorables y no toma en cuenta al espacio muestra; una respuesta incorrecta lo fue del todo, aún si se le escribió correctamente. Dado que el diseño del cuestionario implica la relación de cardinalidades (o tamaño) de posibilidades favorables al evento en cuestión con las (o el) del total del espacio muestra como la probabilidad de ese evento, las respuestas correctas de los estudiantes exhibirían su comprensión de esa relación en distintos grados de precisión, según la forma de la expresión numérica asentada. Si bien el instrumento no incluyó preguntas referidas al enfoque frecuencial, las respuestas expresadas mediante porcentajes equivalentes a la correcta así se consideraron, pues exhibieron un acercamiento intuitivo, salvo cuando no se pudo asegurar que el uso del signo % implicara la identificación del espacio muestra y la del evento complementario.

Cuestionario

La Figura 2 muestra la distribución de los tipos de respuestas obtenidas.

Figura 2. Distribución de los tipos de respuestas dadas al cuestionario



El cuestionario fue difícil para los estudiantes. No obstante, trataron de contestar a las preguntas planteadas y el último reactivo, el 4c), fue para el que más respuestas se omitieron. La Figura 3 muestra una respuesta del tipo "imprecisa" al reactivo 2b). Una respuesta "vaga" es la de la Figura 4, dada al reactivo 1b).

2 b). Si los tres puntos se acomodan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el punto **C** quede entre los puntos **A** y **B**?

2 de 6

Figura 3. Tipo de respuesta imprecisa.

1 b). Si se selecciona una de esas rectas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pase por el punto **C**?

Hay 5 posibilidades

Figura 4. Tipo de respuesta vaga.

Medida de probabilidad. 68% de los jóvenes no asignaron correctamente la probabilidad a los eventos indicados en los reactivos 1b) y 2b). Dentro de este porcentaje se consideran las respuestas incorrectas (55%) y las vagas (13%). Estas últimas son de la forma: "2 veces" o "Hay 5 posibilidades"; expresan sólo la cardinalidad del evento, pero no la relacionan con la cardinalidad del espacio muestra. Sólo 8% de las respuestas (cinco estudiantes) fueron correctas, de las cuales cuatro evocaron al enfoque frecuencial y una el clásico. 16% de las respuestas fueron imprecisas, pues aunque relacionaron lo favorable con el total de posibles resultados, parecieron permanecer en el espacio muestra y no en una asignación numérica declarada como probabilidad: "1 de 3" o "5 entre 15", si bien dejaron entrever la noción de relación y proporción, características de las magnitudes probabilísticas.

Espacio muestra. 19% de los estudiantes omitieron en sus expresiones de probabilidad al espacio muestra, lo que exhibe su desconocimiento de los conceptos de espacio muestra y de evento. 40% de los estudiantes alteraron la cardinalidad del espacio muestra al tratar la expresión de probabilidad como una fracción, "simplificándola".

Adición de probabilidades. Dado que para el reactivo 1d) (véase la Figura 1) sólo se obtuvo una respuesta correcta, se podría afirmar que los estudiantes desconocen la adición de probabilidades. No obstante, la pregunta se interpretó por 22% de los estudiantes como si se refiriera a un acomodo lineal de puntos, más que un acomodo al azar, ya que al alinear los seis puntos se generaría sólo una línea recta, como única posibilidad.

Combinatoria. No se obtuvo evidencia de que los estudiantes conocieran el principio fundamental del conteo, implicado en seis de los diez reactivos presentados (véase la Tabla 1). Basaron sus respuestas en dibujos de la situación planteada y en el conteo uno a uno de los diferentes acomodos posibles, tanto para combinaciones como para permutaciones.

Equiprobabilidad. Ya que el reactivo 1c) (véase la Figura 1) se puede contestar afirmativa o negativamente y no solicita justificar la respuesta, fue el que obtuvo mayor número (17) de respuestas correctas. Sólo se dio una explicación de lo igualmente probable para el reactivo 1d): "Se puede poner de cualquier manera porque una recta son [se determina por] dos puntos, entonces cualquiera pasará por uno de los seis puntos"; la estudiante primeramente aclaró que no importa el orden en que se acomoden, pues dos puntos determinan una recta y, con la última frase, pareció expresar que si tomamos una de ellas al azar es igualmente probable que pase por cualquiera de los seis puntos.

Expresiones figurales. Los estudiantes se ayudaron con el trazo de planos cartesianos, rectas y puntos para contestar a las preguntas en que estaban implicados estos conceptos (conjunto de reactivos 1 y 4), pero en sus dibujos no pusieron de manifiesto la propiedades no ostensivas de estos objetos, como la prolongación infinita de las rectas y los ejes coordenados, o la disposición homogénea de las unidades marcadas sobre los ejes.

Entrevista

Nueve días después de la aplicación del cuestionario se entrevistó al estudiante seleccionado. De sus respuestas durante el interrogatorio señalamos lo siguiente:

Indicó las rectas como segmentos de recta, sin prolongar sus líneas más allá de los puntos extremos. Contó una por una las líneas, ante la pregunta de cuántas rectas se pueden trazar en arreglos de 4, 5 y 6 puntos en el plano, lo que indica su desconocimiento de técnicas de conteo (combinaciones). Ubicó los puntos simétricamente y no en una configuración que pareciera al azar. Expresó el enfoque clásico de probabilidad. A la pregunta acerca de la diferencia entre las expresiones "uno de tres" y "una entre tres", contestó que con esta última llegaba a la interpretación frecuencial de probabilidad. Entendió la expresión "una entre tres" como dividir un segmento de recta en tres partes iguales y tomar una de esas secciones, que es una idea distinta a la que se hubiera esperado por las ideas previas expresadas, que es tomar una recta de entre tres. Inicialmente expresó la probabilidad como 1-3. Después afirmó que la podría expresar como una división. Posteriormente afirmó que la probabilidad era de un tercio, a partir de su expresión como una división. El entrevistado dijo que la probabilidad también se podía tomar como una parte de un pastel dividido en varias partes, asentando la idea de su expresión inicial "una de tres". Para que indicara la cantidad de arreglos diferentes de cuatro puntos, uno por cada lado de un cuadrado (reactivo 3; véase la Figura 1), inicialmente no identificó que las opciones de acomodo disminuyen de uno en uno para los sucesivos elementos a ordenar; con una pregunta posterior el estudiante advirtió el decremento de uno en uno en esas ordenaciones sucesivas, pero no se percató de que el primer punto que se acomoda en el cuadrado es referencial y no se le considera para el cálculo. No distinguió acomodos iguales sólo porque estaban rotados de manera distinta, pero al final cambió esta consideración.

Conclusiones y comentarios

Los resultados muestran desconocimiento de los estudiantes de las ideas fundamentales implicadas en el cuestionario; para la solución de los problemas de conteo no utilizaron los métodos matemáticos correspondientes, expresaron medidas de probabilidad de un enfoque clásico mediante porcentajes, en su mayoría incorrectamente. Esto y los errores restantes implican que la enseñanza de estocásticos en la educación básica ha sido deficiente dando lugar a una serie de imprecisiones en las interpretaciones conceptuales y la solución de problemas por parte de los sujetos, por lo que, en acuerdo con Heitele (1975), proponemos la implementación del modelo de ideas fundamentales de estocásticos a lo largo de los distintos niveles de enseñanza como método para revertir las deficiencias de aprendizaje observadas. En corroboración de lo señalado por Acuña (2006) respecto a las gráficas, rectas y puntos, en los resultados se manifestó la incomprensión de los estudiantes de los objetos de conocimiento implicados en las competencias disciplinares indicadas por el programa de estudios de Geometría Analítica, exhibida mediante problemas combinatorios y probabilísticos; en los reactivos de combinatoria los estudiantes mostraron una subvaloración del número de arreglos y de combinaciones solicitados (en acuerdo con Fischbein, 1975). De nuestra entrevista derivaría también el resultado, ya avanzado por otros investigadores (de León, 2002), de que ante la idea de azar prevalece lo equiprobable debido al predominio de la idea de simetría física. Nos preguntamos qué respuestas se obtendrían aplicando el instrumento a estudiantes que cursaran la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística, del sexto semestre.

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2006). Tratamientos como dibujo y como figura de la gráfica en tareas de construcción e interpretación por estudiantes de bachillerato, el caso de los ejes cartesianos. En E. Filloy (Ed). *Matemática educativa, treinta años* (pp. 215-236). México: Santillana.

De León, J. (2002). *Comprensión de la Ley de los Grandes Números de estudiantes de Ciencias Sociales*. Tesis de doctorado no publicada. México: Cinvestav.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Geometría Analítica*. México, D. F.: IPN.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística*. México, D. F.: IPN.

Fischbein, E. (1975). *Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies of Mathematics*, *8*, 153-165.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6(2), 187-205.

Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. En E. von Glasersfeld (Ed). *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Netherlands: Kluwer.

DISTRIBUCIONES CENTRADAS Y UNIFORMES: UNA INTRODUCCIÓN EN LA EDUCACIÓN ESPECIAL

José Marcos López-Mojica, Ana María Ojeda Salazar
CAM 18 México
DME; Cinvestav-IPN
jmlopez@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. Para dar respuesta a las preguntas de cuáles esquemas compensatorios favorecen el pensamiento probabilístico de niños de educación especial y cómo caracterizar su desempeño, consideramos los ejes epistemológico, cognitivo y social. De las tres fases de la investigación, en parte de la segunda enfocamos la introducción de la distribución de probabilidad para un grupo de sexto grado (13-15 años), con la instrumentación de guiones de enseñanza y de bitácora; los datos se registraron con videograbación y con escritura en papel. Para profundizar en la comprensión de los niños de las ideas fundamentales implicadas, en parte de la tercera fase se aplicaron dos entrevistas a niños con retraso mental. Los resultados conciernen a la diversidad de afecciones, tanto en sus grados como en sus características, a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos y a los esquemas compensatorios identificados que favorecen el pensamiento probabilístico.

Palabras clave: estocásticos, diversidad, desempeños, educación especial

Abstract. To answer the questions 'what compensation schemes favor the probabilistic thinking of special education children and how to characterize their performance', we considered the epistemological, cognitive and social points of view. Among the three phases of the research, in part of the second one a group of sixth grade (13-15 years) was introduced to the probability distribution; the instruments used were teaching scripts and script log, the data were recorded videotape and writing on paper. To deepen in children's understanding of stochastics fundamental ideas, in part of the third phase two children with mental retardation were interviewed. The results relate to the diversity of conditions, both to their level of affection and to their traits, to the understanding of fundamental ideas of stochastics and to the compensatory schemes identified that favor the probabilistic thinking.

Key words: stochastic, diversity, performance, special education

Introducción

Con esta investigación se pretende identificar en la educación especial básica las maneras en que los niños con discapacidad compensan las ausencias o disfunciones y promover su aplicación para el desarrollo de su pensamiento probabilístico. La pregunta en foco es cuáles esquemas compensatorios favorecen el pensamiento probabilístico de los niños.

La investigación, cualitativa y *en curso*, se organiza en tres fases. El objetivo de la primera es caracterizar el tratamiento de la probabilidad en la propuesta institucional de la educación especial. La segunda fase se interesa en el diseño y aplicación de actividades de enseñanza sobre la probabilidad. El objetivo de la tercera fase es identificar la comprensión de los niños de ideas fundamentales de probabilidad después de su enseñanza. Para este informe enfocamos, en la fase II, la noción de distribución de probabilidades y, en parte de la fase III, la comprensión de los niños de ideas fundamentales revelada en entrevistas semiestructuradas.

Perspectiva teórica: tres ejes rectores

En el orden *epistemológico*, Heitele (1975) ha propuesto diez ideas fundamentales de estocásticos como guía para un curriculum en espiral, las que define como aquéllas que proporcionan al individuo modelos explicativos tan eficientes como sea posible. Para ello consideró, entre otros aspectos, las etapas de la constitución de la idea de azar en el niño que plantearon Piaget e Inhelder (1951), quienes incluyeron en sus pesquisas situaciones regidas por distribuciones centradas y por uniformes.

En el orden *cognitivo*, Vygotski (1997) consideró a los esquemas compensatorios como los que asumen la función de los que por ciertas circunstancias no fueron desarrollados o son deficientes y señaló que el desempeño de los niños se ajusta a su contexto social, acondicionado para un ser humano normal; en ese sentido, la insuficiencia se considera ante el tipo de tarea y en un ambiente dado. Por ejemplo, las memorias a corto y a largo plazo y la noción de cantidad, son deficientes en síndrome Down (Bower & Hayes, 1994) y pueden ser compensadas con actividades donde se le otorgue mayor carga a lo visual y a la repetición de las instrucciones con su correspondiente acción. La referencia a las funciones del cerebro (Luria, 2005) permite interpretar la ficha médica de cada caso; como ejemplo, la ficha médica de un participante en la investigación de este informe reporta un daño a nivel de la corteza prefrontal, área donde se localiza la memoria de trabajo.

Fischbein (1975) argumenta que para la formación de intuiciones probabilísticas, se debe considerar como una necesidad la importancia de lo incierto relacionado con la acción, que produce frecuencias relativas, se establecera un comportamiento de la situación aleatoria refiriéndose a "más probable", "menos probable" o "igualmente probable". Por intuición se entiende un conocimiento que se deriva de la experiencia, no susceptible al análisis, de recuperación inmediata, sintético y que se extrapola (Fischbein, 1975).

En el orden *social*, Steinbring (2005) propone la constitución del concepto matemático según el triángulo epistemológico, que resulta de un balance de las relaciones entre sus vértices [objeto, signo y concepto], de modo que se pueda deducir el significado del conocimiento matemático, de esta manera el conocimiento matemático es perfectible.

Lo anterior proporciona un referente para examinar las interacciones en el aula de educación especial básica promovidas durante la enseñanza de estocásticos.

Método

Complementada con la bitácora, la *experienciación* del investigador se desarrolló, en el sentido de Maturana (2003), durante su enseñanza de estocásticos, impartida a un grupo de sexto grado de educación especial básica ante su docente titular. Por enseñanza se entiende en la investigación al proceso intencional para la adquisición del conocimiento por el otro. La instrumentación consistió en guiones de clase que articularon el uso de material concreto para ejemplificar las distribuciones. Para obtener datos sobre la comprensión de los niños de ideas fundamentales de estocásticos, se realizaron entrevistas semiestructuradas. En esta investigación, se entiende por entrevista la interacción que se produce entre dos individuos cuando uno le plantea preguntas al otro para alcanzar un objetivo —aquí, el de obtener datos de la comprensión del segundo respecto a una situación o a conceptos implicados en ella— por lo que es relevante el tipo de comunicación posible con cada caso debido al síndrome o afección. Las técnicas para registrar datos fueron el video, la escritura y dibujos en hojas de control con croquis del material utilizado.

La *célula de análisis de la enseñanza* (Ojeda, 2006) se aplicó a los datos recopilados para identificar: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos referidos a estocásticos y la situación de referencia.

Participantes

El *aula alterna* (Ojeda, 2006) es una alternativa al aula tradicional. En ella confluyen la enseñanza y la investigación, de manera que la docente se inicia en la indagación de su propia enseñanza, de las relaciones entre el contenido matemático y las producciones de los niños. Desarrollaron la actividad propuesta por el investigador en el aula alterna nueve niños (13-15 años) con diversos niveles y afecciones (véase Tabla 1). La actividad se aplicó en una sesión de 40 minutos en los tiempos institucionales establecidos.

	Síndrome Down			**Retraso Mental**					**Epilepsia**
	GM	**MM**	**MA**	**AL**	**AR**	**IS**	**K**	**LU**	**IL**
Nivel de afección	Medio	Medio	Medio	Superficial	Medio	Medio	Medio	Superficial	Medio
Oralización	Palabras aisladas	Palabras aisladas	Sonidos guturales	Conversa	Sonidos guturales	Palabras aisladas	Sonidos guturales	Conversa	Palabras y gutural

Tabla 1. Características individuales en el aula alterna del sexto año

La situación de referencia

El fin de la actividad fue introducir la idea de azar con distribuciones uniformes, centradas y sesgada, además de otros conceptos matemáticos como conteo y proporción. Para ello, en bandejas rectangulares con embudos en la parte superior y casillas igualmente distribuidas en la inferior (véase la Figura 1), frente al grupo se liberaron por los embudos canicas del mismo tamaño y color, que se distribuyeron al azar en las casillas. Se utilizaron tres conjuntos de 20 canicas para las bandejas I, II y V; cuatro conjuntos de 20 canicas para la bandeja III y diez conjuntos de 20 canicas para la bandeja IV. El *fenómeno aleatorio* en foco en cada caso es el acomodo azaroso de las canicas en las casillas después de su vaciado por los embudos. El *espacio muestra* son las posibles casillas en las que pueden caer las canicas. La *medida de probabilidad* se considera, cualitativamente, con la relación de la posibilidad de que una canica caiga en una del total de casillas posibles. El número de canicas por cada casilla es una variable aleatoria; la *frecuencia relativa* de una casilla es el número de canicas ocupantes de esa casilla respecto al total de canicas liberadas por el embudo. Se apela a la *ley de los grandes números* con la distribución de un número grande de canicas después de su vaciado.

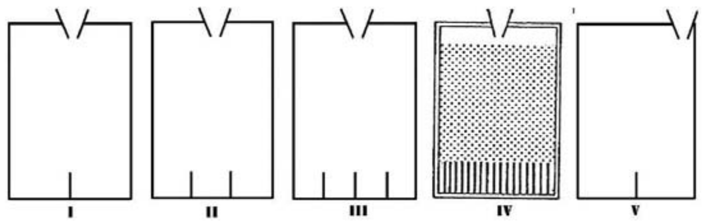


Figura 1. Esquemas de las bandejas (Piaget e Inhelder, 1951, p. 28)

Gradualmente por el número de casillas en las bandejas, se pasó de una distribución uniforme (bandeja I), a distribuciones centradas (bandejas II, III y IV) y a una sesgada (bandeja V).

La Tabla 2 caracteriza la enseñanza desarrollada según los criterios perfilados en la célula de análisis (Ojeda, 2006). Se presentaron a los niños las bandejas y se les pidió predecir, mediante dibujos, las posiciones finales de las canicas al cabo de su vaciado.

Situación	*Ideas fundamentales de estocásticos*	*Otros conceptos matemáticos*	*Recursos semióticos*	*Términos empleados*
Distribución aleatoria de cani-cas en casillas.	Espacio muestra, medida de probabilidad, variable aleatoria, ley de los grandes números.	Números naturales, proporción.	Figuras, lengua natural escrita.	Quedan, acomodan distribuyen, curva, caen, chocan, más fácil que.

Tabla 2. Caracterización de la actividad sobre distribuciones uniformes y centradas

Distribuciones centradas y uniformes en la enseñanza

La enseñanza consistió en presentar a los niños, una por una, las bandejas y las canicas que se liberarían por los embudos. Para cada bandeja, se proporcionó a los niños el esquema respectivo, en el que dibujarían su anticipación de las posiciones finales de las canicas; luego se procedería a realizar el vaciado efectivo para que compararan la distribución obtenida con su anticipación dibujada en el esquema. El investigador inició con el vaciado de las canicas en la bandeja I; a partir de la bandeja II, fueron los niños quienes vaciaron las canicas.

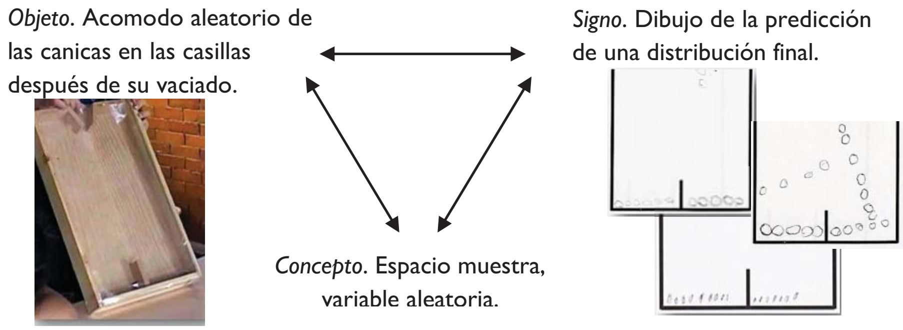


Figura 2. Triángulo epistemológico en la actividad

En el desarrollo de la actividad de enseñanza, se pudieron distinguir los vértices del triángulo espistemológico. A un nivel de *objeto* interesaba la distribución aleatoria de las canicas después de su vaciado en las bandejas, a nivel de *signo* interesaba que los niños distinguieran que su dibujo de las predicciones de las posiciones finales de las canicas correspondía a una de muchas posiciones posibles, de manera tal que se fueran introduciendo nociones de *espacio muestra* (lo posible) y, cualitativamente, de *medida de probabilidad* (véase la Figura 2).

Espacio muestra: síndrome Down y retraso mental

Los niños identificaron las casillas de algunas bandejas. Los casos con Síndrome Down (*GM, MM* y *MA*) dibujaron la misma cantidad de canicas en ambas celdas de la bandeja I (véase la Figura 3). Además, su dibujo de canicas desde el embudo hasta la base de la bandeja sugiere la comprensión de las instrucciones y la advertencia de las casillas posibles. En su dibujo, *GM* (síndrome Down) advirtió que una canica podía caer en una de las dos casillas, por ello realizó una secuencia de canicas también hacia la casilla de la izquierda. Si bien el dibujo se debió a una petición, los dibujos de *GM* y *MM* (ambas síndrome Down) de las canicas (a manera de ir cayendo), sugiere una forma de compensar el problema de lenguaje para comunicar su anticipación del proceso.

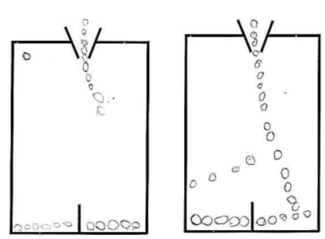


Figura 3. Producción de los casos síndrome Down, MM y GM (respectivamente)

Los niños con retraso mental **(***Lu* y *Al*) identificaron, para cada una de las bandejas II y IV, las casillas en las que podrían caer las canicas. En sus dibujos presentaron más canicas en las celdas centrales (véase la Figura 4).

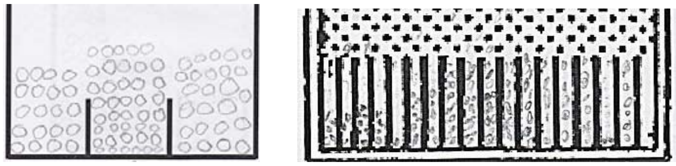
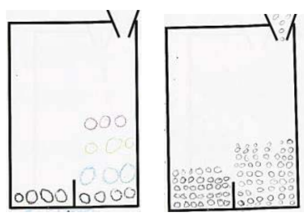


Figura 4. Acomodos aleatorios centrales de LU, retraso mental

Variable aleatoria: síndrome Down y retraso mental

Al proponer el número de canicas por cada celda en su acomodo aleatorio después de su caída, *LU* y *AL* (ambos retraso mental) realizaron acciones que apelan a la idea de variable aleatoria. Por ejemplo, en sus dibujos, *LU* mostró un amontonamiento central para la bandeja IV. Además, trataba de mantener la misma cantidad de canicas que serían vaciadas en la bandeja.

A partir de las bandejas III y IV, podríamos decir que *LU* puso en juego la memoria de trabajo, pues recuperaba elementos importantes de la actividad, como el número de canicas en cada celda, las trayectorias y choques entre canicas y contra las paredes de las casillas.



(Izq. Síndrome Down: GM; Der. Retraso mental: LU)

Figura 5. Amontonamiento de las canicas en la bandeja sesgada

Para la bandeja V no pareció haber confusión alguna, pues dos casos de síndrome Down (*GM* y *MM*) y dos casos de retraso mental (*AL* y *LU*) dibujaron acomodos sesgados (véase la Figura 5).

Al preguntar a los niños *en qué casilla era más fácil que quedaran las canicas*, de los casos con retraso mental sólo *LU* contestó que para las bandejas II y III era más fácil que cayeran las canicas en las casillas centrales, sin dar más argumentos. En tanto *AL* señaló la casilla del extremo izquierdo en la bandeja III.

De los casos con síndrome Down, *MM* señaló la casilla central de la bandeja II. El caso de epilepsia *IL* señaló las casillas centrales de la bandeja III. Por tanto, se obtuvieron indicios de nociones de medida de probabilidad. Aunque algunos niños no conservaron en sus dibujos la cantidad de canicas utilizadas, sí mantuvieron la misma cantidad de canicas dibujadas en las hojas de control (15 en promedio). Sólo *LU*, dibujaba más de 15 canicas.

Un acercamiento a la idea de azar

De todos los casos presentes en el aula, sólo *LU,* con retraso mental, dio evidencia de haber advertido que las canicas chocan entre sí, con las paredes de las bandejas y con los muros que separan las casillas. Para el caso *MA* (síndrome Down), al preguntarle en qué casillas de la bandeja III era más fácil que quedaran las canicas, señaló las separaciones entre ellas e hizo un movimiento indicando las dos casillas centrales. Lo anterior sugiere que *MA* identificó los choques de las canicas con las separaciones (véase la Figura 6).

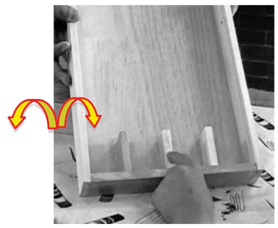


Figura 6. Señalamiento de los muros por parte de *MA*.

Distribuciones centradas y uniformes en la entrevista

Después de la enseñanza en el aula alterna, con modalidad semiestructurada se entrevistó a dos casos con retraso mental. Se eligió a *LU*, debido a su mejor desempeño en relación al de sus compañeros de aula, al advertir que en las celdas centrales era más fácil que cayeran las canicas, además de haber dado indicios del uso de la memoria de trabajo. El otro caso, *AL*, se eligió por manifestar indicios de nociones de espacio muestra en la enseñanza; en la entrevista se corroboró su noción de espacio muestra, además de que se identificaron las de medida de probabilidad y de variable aleatoria; también mostró un acercamiento a la idea de azar.

Ausencia de la idea de probabilidad: Caso LU

Cuando se preguntó por la casilla o casillas en las que era más fácil que cayeran las canicas, *LU* respondió que en las bandejas I, II y III las canicas caerían en la casilla de la izquierda, lo cual plasmó en sus dibujos (véase la Figura 7).

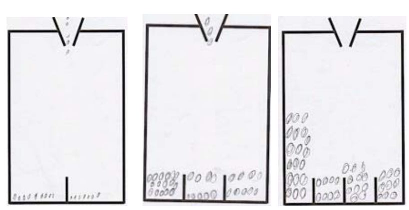


Figura 7. Sesgo en la producción de LU

Al realizar el vaciado efectivo de las 40 canicas y preguntarle por qué no resultó lo que él había dibujado momentos antes, *LU* en un principio dio como respuesta "porque aquí hay más [refiriéndose a la bandeja]".

Espacio muestra: Caso AL

Al preguntarle a *AL* (retraso mental) en qué casillas era más fácil que cayeran las canicas, él contestó que en la casillas centrales [para las bandejas II, III y IV] era más fácil y justificó su respuesta según el resultado del vaciado de canicas de la bandeja anterior a la bandeja que se le preguntaba. Sus dibujos no correspondían a lo indicado (véase la Figura 8), al parecer sólo dibujaba las canicas en las celdas de las bandejas, por llenar esos espacios.

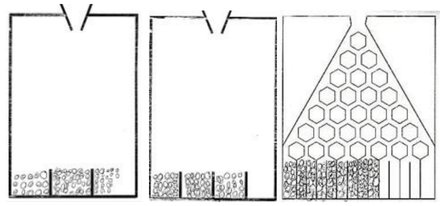


Figura 8. Producciones de AL.

Variable aleatoria: Caso AL

Una vez que identificó la cantidad de canicas en cada una de las celdas, en el siguiente episodio, en que se habían liberado 10 canicas en la bandeja III, inmediatamente *AL* inició el conteo en cada una de las casillas:

In: AL, vamos a lanzar las canicas, ¡Mira! [suelta las canicas en el embudo].

AL: Cayó una canica aquí, cuatro canicas aquí [señala las dos casillas de la izquierda]…

In: Ajá, ¿qué más?

AL: … Cinco canicas aquí, acá no hay canicas [señala las dos casillas de la derecha].

Identificación de trayectorias: LU y AL

A pesar de que *LU* no identificó todas las posibles casillas en las que podía caer una canica, sí pudo identificar, para la bandeja IV, que una canica podía seguir una variedad de trayectorias. *LU* señaló con el dedo índice algunas de esas trayectorias (véanse las Figuras 9.a y 9.b).

a. LU señala dos posibles trayectorias b. AL señala posibles trayectorias

Figura 9. Indicando las trayectorias de algunas canicas

Experienciación del investigador proveniente del aula

Si bien se identificaron nociones de los niños de espacio muestra, medida de probabilidad y variable aleatoria, es decir, la estrategia de enseñanza logró su principal objetivo, es necesario afinar los esquemas en las hojas de control y proporcionar espacio suficiente para que los alumnos puedan dibujar las canicas en las casillas, principalmente el de la bandeja IV. También parece pertinente la incorporación de algunas canicas de otro color, tantas como a lo más el número de casillas, para facilitar la identificación de posibles trayectorias, de choques entre las canicas, entre los lados de las bandejas y contra las separaciones de las casillas, así como de la mezcla de canicas y de posibles acomodos en las celdas. Aunque la docente intervenía cuando el investigador presentaba dificultades en la comunicación con los niños, ella expresó no sentirse segura para desarrollar la actividad.

Resultados del análisis: heterogeneidad en el aula y las ideas fundamentales

Para los casos con síndrome Down, al parecer el esquema visual, articulado con los dibujos, compensan la dificultad en la comunicación presente en estos casos; sus dibujos sugieren la identificación de las posibles casillas donde pueden caer las canicas. De los casos con retraso mental, *LU* presentó mejor desempeño que sus demás compañeros. Identificó las casillas en las que podrían caer las canicas y trayectorias; dibujó más canicas en las casillas centrales y en la casilla de la derecha para la bandeja sesgada (V). De las interacciones entre los niños, se identificó que las niñas con síndrome Down auxiliaban a un caso de retraso mental (*IS*). En la tabla 3 se presentan los esquemas compensatorios y las ideas fundamentales según los casos del aula alterna.

	Síndrome Down			*Retraso Mental*					*Epilepsia*
	GM	*MM*	*MA*	*AL*	*AR*	*IS*	*K*	*LU*	*IL*
Ideas fundamentales de estocásticos	Espacio muestra Variable aleatoria	Espacio muestra Variable aleatoria	---	Espacio muestra Variable aleatoria	---	Algunas posiciones finales	---	Espacio muestra Variable aleatoria	Algunas posiciones finales
Esquemas compensatorios	Visual y motor, para superar ausencia de memorias: corto y largo plazo		---	Sin evidencia	---	Dibujos para comunicar	---	Dibujos para comunicar Repetición de instrucciones	Sin evidencia

Tabla 3. Características individuales en el aula alterna del sexto año.

Conclusiones y comentarios

En el desarrollo de la actividad se tuvo un acercamiento a la idea de azar al considerar posibles acomodos, es decir, los dibujos de los acomodos indicaron que las posiciones finales de las canicas dependerían de varios factores, como los choques entre ellas y con las divisiones entre las celdas. Sólo dos niños identificaron que las casillas centrales tenían mayor facilidad de ser ocupadas. Los dibujos fomentaron la comunicación en los casos de problemas de lenguaje, pues además de responder a lo solicitado sugieren la comprensión de lo sucedido con el vaciado efectivo de las canicas. Según los resultados de Piaget e Inhelder (1951), los desempeños de los niños correspondieron al estadio de las operaciones concretas.

De la entrevista no se tuvo evidencia de la idea de probablidad ni de la idea de azar, por el episodio de alteración que presentó el entrevistado. Sería necesaria otra entrevista referida a una situación de decisión, como elegir una urna de entre dos o tres según sus contenidos.

Es favorable aplicar actividades de enseñanza con énfasis en fenómenos aleatorios en la educación especial. Según Fischbein (1975) la *experiencia* deviene en intuición. Entre más experiencias sobre estocásticos tengan los niños desde pequeños, según Heitele (1975) más se fomentará el desarrollo de las ideas fundamentales y se prevendrán los sesgos en el pensamiento probabilístico identificados por Kahneman, Slovic & Tversky (1982).

Referencias bibliográficas

Bower, A. & Hayes, A. (1994). Short-term memory deficits and Down syndrome: A comparative study. *Down Syndrome Research and Practice* 2(2), 47-50.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holanda: Reidel.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6(2), 187-205.

Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (1982). *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge: CUP.

Luria, A. R. (2005). *Las funciones corticales superiores del hombre*. México: Fontamara.

Maturana, H. (2003). *Desde la Biología a la Psicología*. Argentina: Lumen.

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La Génèse de l´idée de Hasard Chez l´enfant*. París: PUF.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. USA: Springer.

Vygotski, L. S. (1997). *Fundamentos de la Defectología. Obra Escogidas V*. España: Visor Dis.

A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO NAS AULAS DE MATEMÁTICA EM TURMAS DE PROEJA

Mauricio Ramos Lutz, Jussara Aparecida da Fonseca, João Feliz Duarte de Moraes
Universidade Federal do Rio Grande do Sul Brasil
mailiffmauricio@gmail.com, jussara.mat@gmail.com, 00008450@ufrgs.br

Resumo. O presente trabalho teve como objetivo principal elaborar, implementar e analisar uma sequência didática composta por atividades de Estatística para o Ensino Médio na modalidade PROEJA. Foram desenvolvidas e analisadas as habilidades dos alunos em relação à coleta dos dados e ao tratamento, à interpretação e à crítica de informações retiradas de situações cotidianas. Esse estudo foi idealizado devido à carência de material didático voltado especificamente a esse público. A abordagem metodológica adotada foi de natureza qualitativa, com base nos princípios da Engenharia Didática, a fim de realizar um acompanhamento do processo de ensino e aprendizagem, bem como uma análise dos resultados obtidos.

Palavras chave: sequência; didática; ensino; aprendizagem; engenharia

Abstract. The present study aims at developing, implementing and analyzing a didactic sequence consisting of Statistics activities for secondary education in *PROEJA* level. Students' skills were developed and analyzed in relation to data collection and in relation to information processing, interpretation and critique drawn from everyday situations. This study was designed considering the lack of teaching material addressed specifically to this audience. The methodological approach adopted was qualitative in nature, based on the principles of Didactical Engineering in order to monitor the teaching and learning process and to analyze the results obtained.

Key words: sequence; didactic; learning; teaching; engineering

Introdução

Atualmente vivemos um momento em que o fluxo de informações é constante, crescente e seu acesso está cada fez mais fácil. Basta abrir um jornal, uma revista ou mesmo assistir à televisão para perceber que a Estatística está inserida no nosso cotidiano e no de nossos educandos. Existem informações a esse respeito que passam rapidamente diante de nossos olhos e de diversas formas, como por exemplo, os gráficos e as tabelas que fazem parte do nosso dia-a-dia (Rotunno, 2007).

Contudo, nem sempre é possível ao educando perceber que aquilo que é trabalhado na escola está presente em seu cotidiano. Isso se deve principalmente pelo fato do ensino de Matemática ser desenvolvido de forma abstrata e descontextualizada, gerando inúmeras dificuldades, fazendo com que essa disciplina seja cotada como uma das responsáveis pela retenção ou até exclusão dos jovens das escolas.

Quando analisamos o ensino da Estatística e da Probabilidade percebemos que esse quadro é ainda pior. Apesar das orientações dos documentos oficiais para que esses conhecimentos sejam desenvolvidos desde o início da escolarização básico, essa nem sempre é a realidade.

Essa problemática, muitas vezes, já começa pela organização dos livros didáticos, nos quais os conhecimentos referentes à Estatística e Probabilidade, são deixados para os capítulos finais ou são apresentados por meio de conceitos complexos e exemplos descontextualizados.

Mais grave ainda é a situação do desenvolvimento desses conhecimentos na Educação de Jovens e Adultos (EJA), pois muito raramente, encontramos material didático destinado a esse público, fazendo com que professores utilizem o mesmo livro didático adotado nas turmas regulares, desconsiderando as peculiaridades da EJA. Entretanto, segundo Fonseca (2007), na EJA o professor deve buscar a negociação entre as demandas apresentadas pelos alunos e o currículo escolar a ser implantado e desenvolvido para a produção do conhecimento matemático.

Buscando contribuir para melhorias do ensino e aprendizagem da Estatística na EJA pensamos em uma pesquisa acadêmica, desenvolvida junto a alunos do Programa de Integração da Educação Profissional ao Ensino Médio na Modalidade de Jovens e Adultos (PROEJA) Informática – Etapa I, do Instituto Federal Farroupilha – Câmpus Alegrete /RS.

A pesquisa teve por objetivo a elaboração, implementação e validação de uma sequência didática, envolvendo conhecimentos estatísticos, de maneira a desenvolver habilidades que auxiliassem os alunos na coleta, organização, representação e interpretação de dados.

Para tanto, durante as aulas, priorizamos a utilização do cotidiano dos alunos e sempre que possível procuramos aperfeiçoar as habilidades e competências adquiridas no Ensino Fundamental, acerca dos conceitos da Estatística.

Matemática, probabilidade e estatística no ensino médio

A estatística é uma ferramenta que possibilita e estimula a aprendizagem e a formulação de perguntas que podem ser atendidas com coleta de dados, organização, representação e interpretação. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, o ensino de Estatística a ser contemplado no Ensino Médio deve viabilizar a aprendizagem da formulação de questionamentos que podem ser resolvidos através da coleta, organização e representação de dados. É recomendado dar atenção na construção e na representação de tabelas e gráficos (Brasil, 1999).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006) sugerem que, durante este período de estudo, os alunos necessitam adquirir a habilidade sobre o propósito e a lógica das investigações estatísticas, bem como sobre o processo de investigação. É quase que uma obrigação capacitar estes alunos para o entendimento formal e intuitivo das ideias matemáticas envolvidas nas representações estatísticas, procedimentos ou conceitos. Ainda sugere a necessidade de trabalhar a compreensão sobre as medidas de posição (média, moda e mediana), as medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão) e a realização de trabalhos com ênfase na construção e na representação de tabelas e gráficos, analisando sua conveniência e utilizando tecnologias, quando possível.

> [...] o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos (Brasil, 2006, p. 69).

Assim, a Estatística também deve ser uma ferramenta a ser utilizada para resolver problemas do cotidiano. Para isso, seu ensino não deve priorizar apenas o ensino de fórmulas e cálculos, mas sim visar o desenvolvimento de habilidades de coletar, organizar, interpretar e tomar decisões frente a um conjunto de dados.

Nesse sentido, o trabalho do professor deve estar pautado não apenas no conhecimento estatístico, mas também na diversidade do grupo de alunos com o qual trabalha, em especial, às estâncias de cunho cultural e social.

Método

O trabalho foi desenvolvido sob o viés da Engenharia Didática. Originado na década de 80 na França, o termo Engenharia Didática teve inspiração no trabalho do engenheiro. Essa relação se deve ao fato de que o engenheiro deveria possuir sólido conhecimento científico, básico e essencial e ter capacidade de resolver problemas de caráter práticos, no qual não existisse teoria prévia, sendo assim, sem uma teoria é necessário elaborar uma nova, ou mesmo reinventar ou ampliar alguma já existente. Analogamente tem-se o educador que busca em seu trabalho soluções ou melhorias para as dificuldades que nem sempre existe, uma teoria prévia (Artigue, 1996).

A Engenharia Didática pode ser definida de duas maneiras fundamentais. Na primeira pode ser encarada como uma metodologia de pesquisa baseado em experiências de sala de aula e, na segunda, pode ser vista como uma proposta de ensino que é trabalhada a partir dos resultados de pesquisa realizada. A partir da união de conhecimento teórico e prático, acaba-se desenvolvendo novos produtos didáticos, sendo este o referencial da Engenharia Didática (Artigue, 1996). A Engenharia Didática pode ser aplicada em qualquer disciplina, não somente à Matemática, pois ela é um referencial de pesquisa que visa à união da pesquisa com a prática, porém inicialmente teve o seu foco no ensino de Matemática.

Uma engenharia didática, conforme Artigue (1996) é desenvolvida em quatro fases

A primeira fase são as análises prévias, esta deve estar fundamentada num quadro teórico didático geral e em conhecimentos didáticos já obtidos no domínio estudado, tendo como objetivo a análise e funcionamento do ensino habitual do conteúdo para propor uma intervenção que modifique positivamente o seu ensino em sala de aula.

A segunda é a concepção e análise *a priori* das situações didáticas da engenharia, esta fase acondiciona uma parte descritiva e uma parte preditiva. É necessário descrever as escolhas efetuadas no âmbito global, mais amplo e mais geral (proposta didática e a explicação dos objetivos), e no âmbito local, descrevendo cada atividade proposta, explicitando os recursos a serem utilizados, o público e o tempo de duração da proposta.

A terceira é o desenvolvimento da experimentação, é a parte em que o professor coloca em prática sua proposta didática, elaborada a partir da fase um e dois, fazendo relatos de como foi ministrada, as observações e anotações realizadas a partir das aulas aplicadas e também realiza a análise das produções dos alunos feitas dentro e fora da sala de aula.

A última fase são a análise *a posteriori* e a validação é a fase onde se realiza a análise de tudo que foi considerado como hipótese pelo professor/pesquisador e o que foi validado ou não com a experiência.

Segundo Carneiro (2005), em uma investigação de Engenharia Didática, a fase de análises prévias deve estar fundamentada num quadro teórico didático geral e em conhecimentos didáticos já obtidos no domínio estudado, tendo como objetivo a análise e o funcionamento do ensino habitual de conteúdos para propor uma intervenção que modifique positivamente o ensino em sala de aula. Entretanto esta análise é elaborada a fim de explicar os efeitos da prática de ensino, as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que marcaram a evolução das concepções pedagógicas. O pensamento sobre estas falhas é o marco inicial no trabalho dos educadores, trabalho esse em que se podem determinar modificações no modelo já existente para obter condições mais satisfatórias de ensino e aprendizagem, ou seja, aperfeiçoar, adaptar ou mesmo reorganizar a prática pedagógica de uma maneira que pareça mais satisfatória ao professor/pesquisador.

Artigue (1996) indica que esta análise deve incluir a distinção de três dimensões: dimensão epistemológica, dimensão didática e dimensão cognitiva. A primeira está associada às características do saber; a segunda às características do funcionamento de ensino e a terceira às características do público para o qual o ensino é direcionado.

Entretanto, nas análises prévias, estamos buscando compreender quais aspectos do ensino podem ou devem ser sustentados e também quais poderiam e/ou deveriam ser mudados para tornar o estudo deste conhecimento epistemologicamente ou cognitivamente mais satisfatório e quais os constrangimentos que impedem ou dificultam tais mudanças.

É importante salientar que a não validação de uma ou mais hipóteses não implica na invalidação da engenharia, pelo contrário, a partir desta verificação da não validade de uma hipótese, o professor/pesquisador pode sugerir uma nova reescrita desta hipótese, o que gera uma nova reflexão sobre a proposta de sua pesquisa e, consequentemente aumenta seu conhecimento sobre o tema proposto. Ainda em relação à validação da engenharia, devem-se fazer considerações sobre a reprodutibilidade da engenharia. Nestas considerações podem ser indicadas novas ideias acerca do conteúdo ou tema da pesquisa realizada (Gomes, 2008).

Na Figura 01, apresentamos o diagrama das principais ideias envolvidas na Engenharia Didática.

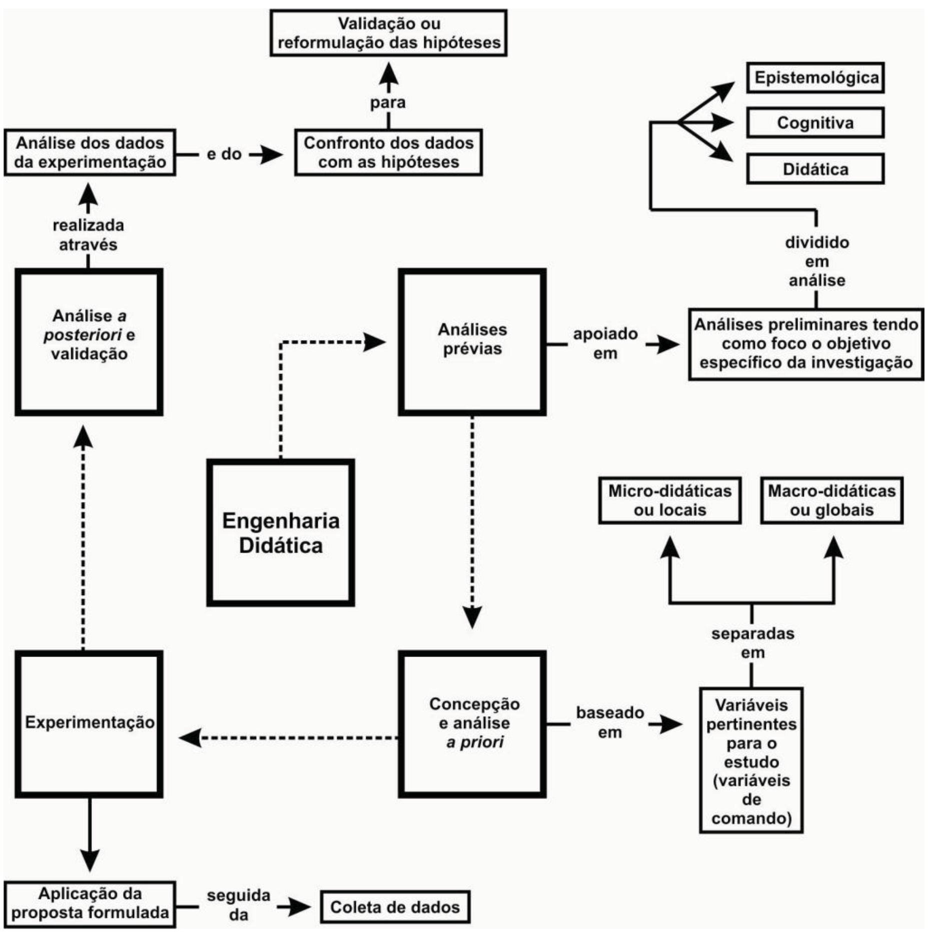


Figura 01 – Diagrama de ideias destacando os princípios da Engenharia Didática

Resultados

Após a implementação da sequência didática, analisamos os dados coletados por meio das atividades respondidas, das observações diárias e de um questionário avaliativo respondido pelos alunos ao final da pesquisa, que nos permitiram chegar a algumas conclusões.

A partir da análise *a posteriori* constatamos que nossas hipóteses previamente levantadas foram confirmadas, validando nossa sequência. A maioria dos alunos não apresentou dificuldade na resolução das atividades propostas. Esse fato foi observado, inclusive quando algum aluno faltava e ao buscar o que havia sido tratado, conseguia resolver as atividades propostas, o que nos levou a concluir que nosso objetivo de elaborar um material com linguagem clara, objetiva e dialógica fora alcançado.

Percebemos também que ao pesquisar atividades a serem incluídas nas propostas, nos detemos ao cotidiano do aluno, o que fez com que o material proposto fizesse sentido ao mesmo, favorecendo o processo de ensino e aprendizagem e a ligação entre a matemática escolar e a matemática do cotidiano.

A avaliação dos alunos acerca do material também foi positiva. A maioria dos alunos classificou o material como bom e interessante, diferentes das aulas habituais. Destacaram que gostariam que atividades assim fossem desenvolvidas em outros momentos.

Ao final do trabalho, indicamos referências complementares de sítios e vídeos como forma de motivar o aluno, fazendo com que ele buscasse novas informações e conhecimentos.

Considerações finais

De modo geral, este trabalho proporcionou verificar que a maneira como trabalhamos os conteúdos em sala de aula influencia na compreensão que o aluno faz do conteúdo. Entretanto, a metodologia utilizada é fator importante, pois cada vez mais percebemos que, utilizando os conhecimentos prévios e o cotidiano destes alunos, auxiliamos na construção dos conceitos, mas quando simplesmente reproduzimos material que os livros didáticos trazem, estamos priorizando a memorização.

É importante destacar que o trabalho do educador está diretamente ligado ao sucesso da aprendizagem dos alunos. Portanto, faz-se necessária a constante preocupação com esta aprendizagem, buscando novas ferramentas e referências teóricas para a construção de soluções.

Contudo, queremos ressaltar que a proposta aplicada, não está em hipótese alguma, almejando encontrar a verdade sobre algum método de ensino, e sim buscando uma maneira que, talvez, seja produtiva e eficaz para um grupo de alunos de ensino médio na modalidade PROEJA.

Salientamos a importância dos estudos realizados nas instituições de ensino brasileiras, que tencionam ir ao encontro das necessidades pedagógicas dos docentes. Para futuros trabalhos e pesquisas, destinadas ao ensino e aprendizagem de Matemática, em especial de Estatística, recomendamos o uso da Engenharia Didática, por estar baseada em etapas que facilitam a aplicação e a análise de uma sequência didática.

Referências bibliográficas

Artigue, M. (1996). Engenharia didática. In: J. Brun (org.), *Didáctica das matemáticas* (pp. 193-217). Lisboa: Instituto Piaget.

Brasil, M.E.C. (1999). *Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio: Ciências da natureza, matemática* e *suas tecnologias.* Brasília: MEC, SETEC.

Brasil, M.E.C. (2006). *Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática* e *suas tecnologias.* Brasília: MEC, SETEC.

Carneiro, V. C. G. (2005). Engenharia didática: Um referencial para ação investigativa e para a formação de professores de matemática. *Revista Zetetike*, *13* (23), 85-118.

Fonseca, M. C. F. R. (2007). *Educação de jovens* e *adultos.* Belo Horizonte: Autêntica.

Gomes, H. C. M. (2008). *Reflexões sobre uma prática de ensino: Uma engenharia didática.* Monografia de trabalho de conclusão de curso não publicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Rotunno, S. A. M. (2007). *Estatística* e *probabilidade: Um estudo sobre a inserção desses conteúdos no ensino fundamental.* Dissertação de Mestrado em Educação não publicada, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Barsil.

UN REPORTE DE LA INVESTIGACIÓN: CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LOS CONCEPTOS ESPACIO VECTORIAL R^2 Y R^3 DESDE LA TEORÍA APOE

Miguel Rodríguez Jara, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
mrodriguez@upla.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. El presente artículo da cuenta de la primera etapa de nuestra investigación en curso, esto es, una construcción cognitiva llamada descomposición genética para los conceptos matemáticos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y, su respectivo tránsito. La indagación que hacemos de las ideas en torno al concepto espacio vectorial se sitúa en el marco teórico y metodológico que sustenta esta investigación, –la teoría APOE–. Como resultado de esta etapa, presentamos una descomposición genética hipotética y la explicitación de algunos elementos constitutivos de ésta; además de algunas construcciones y mecanismos mentales que estamos proponiendo con el fin de mostrar que la coordinación de los procesos asociados con el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y los cartesianos $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ podrían ayudar en la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$; donde las geometrías y sus axiomáticas estarían incidiendo en dichas construcciones.

Palabras clave: teoría APOE, descomposición genética, espacio vectorial R^2 y R^3

Abstract. This article reports on the first phase of our ongoing research, that is, a cognitive construction called genetic decomposition for mathematical concepts vector space R^2 and R^3 and their respective transit. The investigation of the ideas around the concept vector space is supported by the theoretical and methodological framework of given by APOS theory. As a result at this level of the work, we present a hypothetical genetic decomposition and explanation of some elements of it, plus some mental constructions and mechanisms that we are proposing, in order to show that the coordination of the processes associated with the vector space R^2 and Cartesian R^2 and R^3 could help build cognitive vector space R^3. Here, geometries and her axioms are influencing the constructions.

Key words: APOS theory, Genetic decomposition, vector space R^2 and R^3

Algunos antecedentes que aportan a la investigación

Para Dorier (1995a, 1995b) el concepto de espacio vectorial así como el de grupo, tiene una naturaleza distinta a la de otros conceptos. El concepto espacio vectorial, desde un punto de vista epistemológico, más que ayudar a resolver nuevos problemas es visto como un concepto unificador, generalizador y formalizador; al igual que el concepto de límite (Dorier, 2000; Artigue, 2003).

Por otro lado, pensando en su aprendizaje, (Harel, 2000) da cuenta de las dificultades de los estudiantes al ser introducidos repentinamente a los conceptos básicos de los espacios vectoriales desde una perspectiva netamente algebraica, razón por la cual se dificulta la comprensión de éstos. Para subsanar tal deficiencia, desde el punto de vista de su enseñanza, Harel propone una secuencia que está basada en el *"principio de representación múltiple"* con la idea de incorporar un componente geométrico-algebraico y permitir a los estudiantes una representación de las ideas a trabajar (Dorier y Sierpinska, 2002).

Indagar en una problemática

La enseñanza del álgebra lineal está presente en el plan de estudio de diversas carreras universitarias de nuestro país, como por ejemplo: ingenierías, licenciatura en física, licenciatura en matemática, pedagogía en matemática, por citar algunas. Además, si agregamos que los procesos cognitivos que ésta demanda, dada la naturaleza abstracta de los conceptos que están involucrados en su aprendizaje, aspecto que se reporta en las investigaciones desarrolladas en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y, en particular, de los espacios vectoriales (Dorier, 2000), se requiere de un trabajo que favorezca una construcción conceptual efectiva por parte del estudiante.

Por otro lado, desde un punto de vista matemático, cualquier espacio vectorial de dimensión dos o tres es isomorfo a R^2 y R^3 respectivamente, lo que realza la inquietud de conocer más acerca de ellos, así como también indagar cómo R^2 y R^3 incide en la generalización a R^n como espacio vectorial. Lo anterior son algunas de las razones que avalan nuestra investigación y el trabajo de una propuesta didáctica que permita un quehacer efectivo en el aula para la construcción de los espacios vectoriales en cuestión y en particular el tránsito de R^2 a R^3. A modo de ejemplo, en un estudio que realiza (Robinet, 1986) se puede apreciar que el concepto de dependencia lineal en los espacios vectoriales R^2 y R^3 no está del todo claro en estudiantes universitarios, al constatarse que la mayoría de ellos contestó positivamente a lo siguiente: *Si* u, v y w *son vectores de* R^3, *y si dos a dos no son colineales, ¿son los tres vectores linealmente independientes?*

Si a lo anterior agregamos que los conceptos que son parte del álgebra lineal, en particular los espacios vectoriales R^2 y R^3, se relacionan con otras áreas de la matemática, cálculo en dos o tres variables, por citar un ejemplo, nos alienta aún más en pensar lo importante de abocarnos a investigar en cómo se construyen los espacios vectoriales en cuestión.

Marco teórico: la teoría APOE

Considerando que nuestro objetivo para esta primera etapa de investigación se centrará en la construcción del concepto espacio vectorial R^2 para transitar al espacio vectorial R^3, desde la perspectiva de la teoría APOE. Esta teoría trata acerca de la construcción del conocimiento matemático y su desarrollo en el individuo, Dubinsky quien propone esta teoría y la ha desarrollado junto al grupo RUMEC, manifiesta lo siguiente:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996)

Si analizamos en detalle la cita anterior podemos apreciar algunos elementos que están involucrados en la comprensión de un concepto matemático, a saber las estructuras mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas y, además, tipos de abstracción reflexiva, (desde la perspectiva piagetana) que la teoría llama mecanismos mentales, a saber: interiorización, coordinación, inversión y encapsulación, las cuales se articulan con las construcciones mentales. En la Figura 1 se puede observar la relación entre las construcciones y los mecanismos que se han mencionado.

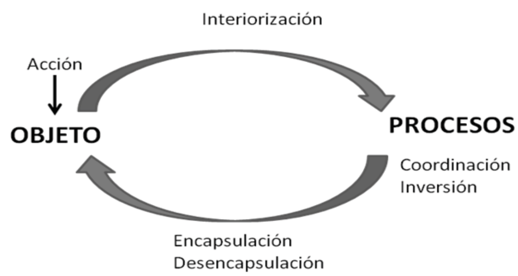


Figura 1. Construcciones y mecanismos (Asiala et al., 1996)

A continuación damos una descripción detallada de cada uno de los elementos de la teoría APOE mencionados anteriormente, y a través de algunos ejemplos iremos delineando el énfasis de nuestra propuesta en la construcción de R^2 y R^3 como espacio vectorial.

Consideremos los vectores del espacio vectorial R^2, un conjunto de acciones para el concepto de combinación lineal en dicho espacio vectorial puede ser: la multiplicación de un vector específico por un escalar específico o la adición de dos vectores específicos. Dichas acciones son relevantes como punto de partida para comenzar la construcción del concepto combinación lineal, al alero de su definición.

Volvamos sobre la combinación lineal, concepto que consideraremos fundamental en la construcción del espacio vectorial R^2. Si el estudiante reflexiona en relación a que: la multiplicación de un vector por un escalar determina un nuevo vector al igual que en la adición de vectores, independiente de cual sean éstos, y si al considerar escalares del cuerpo R y vectores de R^2 se piensa en combinarlos arbitrariamente para obtener un nuevo vector, o incluso, si dado un vector se piense en asociarle, aditivamente dos o más vectores, probablemente se esté en presencia de la combinación lineal como proceso.

Siguiendo con la misma idea, si el estudiante reflexiona respecto a la posibilidad de que dado un vector de R^2 este pueda ser escrito, de manera única, como combinación lineal de dos o más vectores dados, o, por otro lado, considerando la posibilidad de que todo vector de R^2 es una combinación lineal de vectores del mismo espacio, se piense en un álgebra de combinaciones lineales y, por ende, en la necesidad de regular, a través de axiomas, la interacción entre escalares y vectores. En este sentido estaríamos en presencia de la combinación lineal como objeto.

Finalmente, si a partir de la idea de un vector en combinación lineal de otros se piense en una ecuación vectorial y, se desprenden aspectos como: es posible caracterizar vectores a partir de de la combinación lineal asociada al vector nulo utilizando para ello, el esquema de sistema de ecuación para determinar los escalares y, a la vez, se considera el objeto matriz, y ciertas acciones y procesos asociados a los vectores en estudio (dependencia e independencia lineal), es probable que se esté en presencia de la combinación lineal como un esquema.

Para cerrar, cabe mencionar que si la acción multiplicación de un vector por escalar se reflexiona desde la clausura, como un axioma, la concepción acción que se establece, de la misma manera para la adición de vectores, permitiría avanzar en una concepción proceso, objeto o esquema de una combinación lineal. Ahora bien, desde un punto de vista del grado de inclusividad de las construcciones aludidas, podríamos pensar que éstas se desarrollan en un proceso lineal, esto en la práctica no es necesariamente así, (Trigueros y Oktaç, 2005). En definitiva, como se plantea en la siguiente Figura 2, lo importante es tener en cuenta la relación entre las construcciones mentales y los mecanismos de abstracción que están asociados y, además, cual es el papel de éstos en la construcción del concepto matemático en cuestión.

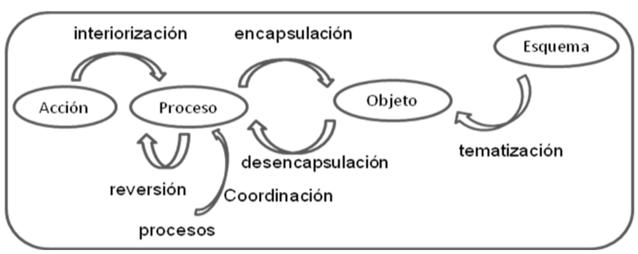


Figura 2: relación de las construcciones mentales y mecanismos de abstracción en la construcción de un concepto matemático

Ciclo de investigación de la teoría APOE

La teoría APOE nos provee de un ciclo de investigación, que se muestra en la Figura 3, el cual integra tres componentes a considerar en el proceso de investigación, a saber: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos.

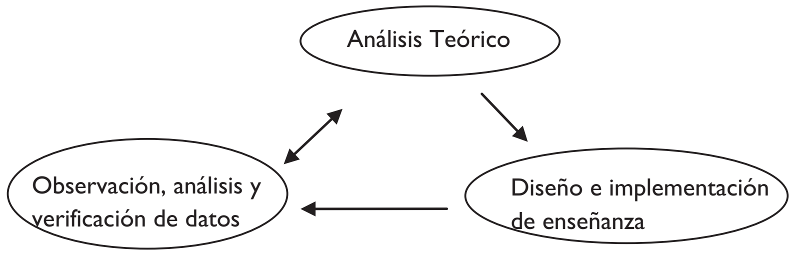


Figura 3: Ciclo de Investigación (Asiala, et al. 1996)

Como lo resaltan (Roa y Oktaç, 2010), el ceñirnos a este ciclo en el proceso investigativo permite tener una mirada más cercana y detallada del proceso de construcción del concepto en estudio y su relación con algunos otros conceptos que subyacen a su alrededor (Roa y Oktaç, 2010)

Descomposición genética hipotética de la construcción cognitiva de los espacios vectoriales R² Y R³

El diagrama que se presenta a continuación, Figura 4, pone de manifiesto nuestra reflexión de los conceptos, desde las construcciones y mecanismos mentales que se ponen de relieve en la construcción del concepto espacio vectorial R^2 como objeto, a partir del plano cartesiano R^2, y cómo se coordinan, o más bien cuál es el rol que juega el plano afín para que se alcance la coordinación de los procesos asociados a los objetos espacio vectorial R^2 y espacio cartesiano R^3, para llegar a construir el espacio vectorial R^3 como objeto, a través del espacio afín, como un camino viable.

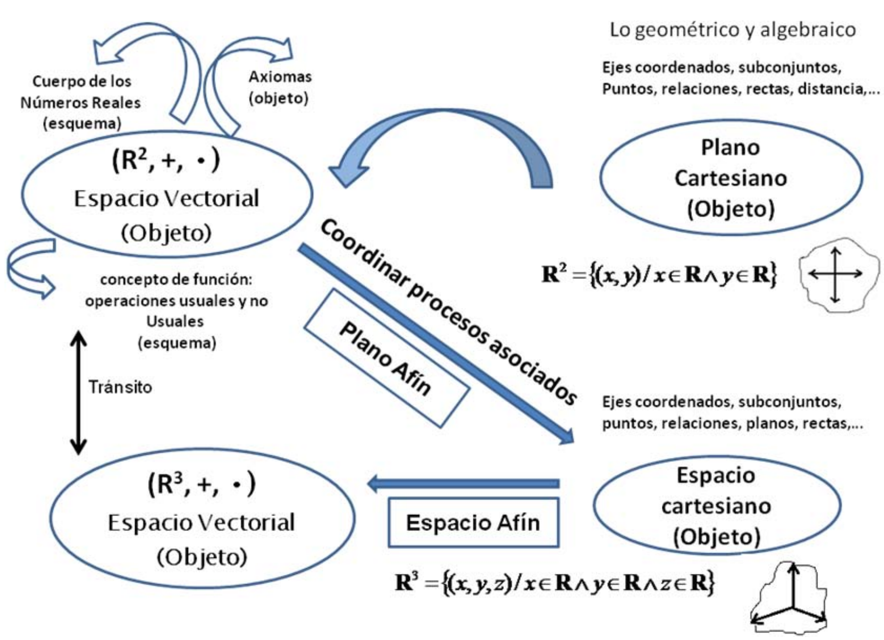


Figura 4: Diagrama de nuestra descomposición genética preliminar

En particular, centramos la atención en el papel que puede tener el cartesiano R^2 en la construcción del espacio vectorial R^2. En el siguiente diagrama, Figura 5, se resalta el papel de la parametrización como un mecanismo que ayuda a coordinar algunos procesos involucrados, teniendo como punto de partida la resolución de una ecuación lineal homogénea.

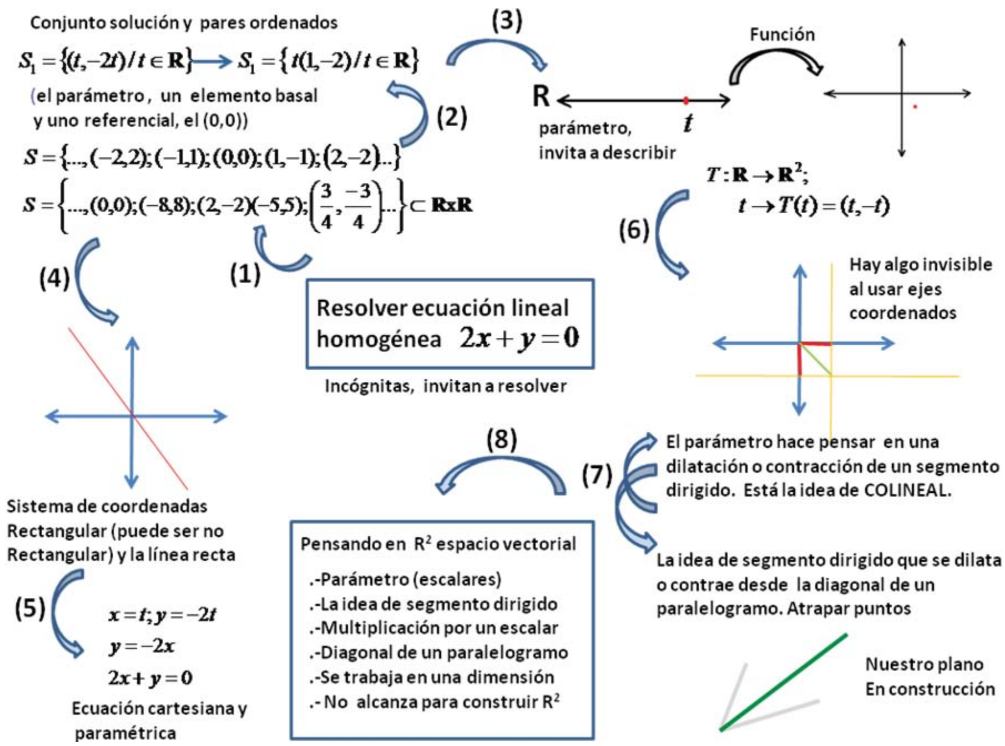


Figura 5: Sobre la incidencia del cartesiano R2 en la construcción de R2 espacio vectorial

Un primer aspecto a resaltar, considerando el diagrama anterior (Figura 5), es que al resolver una ecuación lineal homogénea con dos incógnitas nos hace destacar los pares ordenados y el conjunto solución *(1)* , el cual es no vacío pues el par (0,0) satisface dicha ecuación. Además, si se piensa en asignar un valor arbitrario a una de las incógnitas, es posible determinar el valor de la otra en función de dicho valor. Esto brinda la posibilidad de escribir el conjunto solución de dicha ecuación a través de un parámetro *(2)*. Por otro lado, si se repara respecto a que cada valor del parámetro le corresponde un par ordenado y no más de uno, a la luz de la operatoria involucrada, la idea de función se hace visible *(3)*. Más aún, si se piensa en los pares ordenados y la ecuación que los genera, desde la geometría cartesiana, el conjunto solución de una ecuación lineal homogénea se asocia a una recta que contiene el origen del sistema de coordenadas *(4)*. Luego, a partir de la ecuación cartesiana de la recta se obtienen las ecuaciones paramétricas o viceversa *(5)*.

La función y el par (0,0) sugiere tanto la idea de segmento dirigido, como la dilatación y la contracción de éste desde una triada de segmentos dirigidos anclados al origen *(6)*. Lo que conecta con la geometría vectorial desde la regla del paralelogramo *(7),* así, una componente geométrica al problema. En relación a (8), si pensamos en R^2 como espacio vectorial, se deja en evidencia un avance en la construcción de dicha estructura, con un componente algebraico y geométrico, pero a la luz de los elementos que se despliegan se puede constatar que no se logra construir la estructura R^2 espacio vectorial pues sólo es posible avanzar hacia la operación multiplicación de un escalar por un vector de R^2 *(2).*

Por último si observamos el siguiente diagrama, Figura 6, se puede apreciar como a través del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, se desprenden los elementos necesarios que dan cuenta, por un lado, de la construcción de la estructura de espacio vectorial **(**9*), (10)* y *(13)* con una carga algebraica y geométrica *(11), (12)* y **(***13)* y, por otro, desde el concepto de función y de parámetro, avanzar en la riqueza que brinda la estructura de espacio vectorial desde los endomorfismos *(14), (15)* y *(16)* y así, la aparición de otra estructura, la estructura de álgebra lineal *(17)* , que apuntará no tan sólo a dar cuenta de la importancia del papel unificador de la estructura espacio vectorial sino que además sienta las bases para avanzar en nuevas estructuras como los grupos lineales *(18)* que permiten entender el sentido de la unificación de las geometrías *(18)* y *(19)* desde el programa Erlangen propuesto por (Klein, 1872).

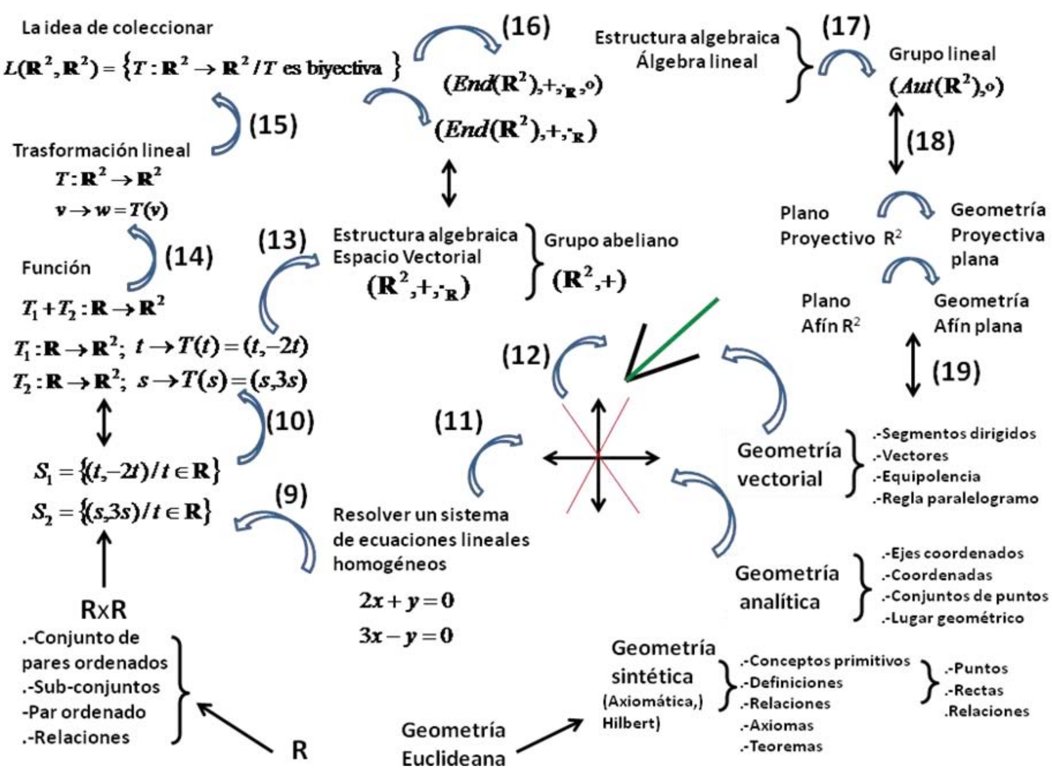


Figura 6: Una mirada del papel unificador y generalizador del espacio vectorial

A modo de conclusión

Para finalizar, consideramos que nuestra descomposición genética para la construcción cognitiva de los espacios vectoriales R^2 y R^3 se configura desde dos constructos matemáticos, la de parámetro y función, los cuales son transversales en la construcción que se persigue, y más aún son agentes coordinadores entre el espacio vectorial y el cartesiano asociado a él. La idea de parámetro permite un desarrollo algebraico, desde la resolución de un sistema homogéneo de dos ecuaciones lineales y conecta con la idea de función. Por otro lado ésta nos sitúa en una mirada geométrica, desde la idea de segmento dirigido, evocando así algunos elementos de la geometría vectorial, por ejemplo la regla del paralelogramo en la adición de vectores. En definitiva, nuestra descomposición genética adquiere la característica de unificadora y generalizadora de los conceptos dispuestos alrededor del cartesiano R^2 ó R^3, según sea el caso.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2003). ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10* (2), 117-132.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, *CBMS Issues in Mathematics Education* 6, 1-32.

Dorier, J. L. (1995a). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica, 22*(3), 227-261.

Dorier, J. L. (1995b). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 175-197.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces, in Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (pp. 3-81), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. *New ICMI Study Series, 7*(3), 255-273

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24 – 41.

Harel, G. (2000). Principles of Learning and Teaching Mathematics, With Particular Reference to the Learning and teaching of Linear Algebra: Old and New Observations. In J-L. Dorier (Ed), *On the teaching of Linear Álgebra* (pp 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Klein, F. (1872). Vergleichende Bertrachtungen uber neuere geometrische orschungen Erlangen. *in Mathematische Annalen, 43*, 63-100.

Roa, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une Genèse des Concepts d'Algèbre Linèaire. *Cahier de Didactique des Mathèmatiques, 18*(2), 191-230

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 157-176.

CONSTRUCCIONES MENTALES DE LOS CONCEPTOS ALEATORIO Y DETERMINISTA A PARTIR DE LA REGRESIÓN LINEAL

Bernardita Pérez Ureta, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
bernardita.perez01@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. Las nociones asociadas a los conceptos de aleatoriedad y determinismo tales como paradigma, variable, parámetro, parecen entrelazarse durante la enseñanza escolar y aunque es uno de los objetivos fundamentales planteados en el Marco curricular de educación media en Chile, el distinguir entre los fenómenos aleatorios y los deterministas (MINEDUC, 2009, p. 146) esto no se logra, según los antecedentes recopilados. En nuestra investigación abordamos la comprensión y las diferencias del concepto aleatorio y determinista a través de construcciones y mecanismos mentales, en torno a la variable aleatoria a partir de la regresión lineal, a la luz de la teoría APOE; de tal forma de ofrecer herramientas orientadoras a los docentes, de los aprendizajes de los conceptos de aleatoriedad y determinismo.

Palabras clave: random, deterministic, regression, linear, APOS

Abstract. The notions associated with the concepts of randomness and determinism such as paradigm, variable, parameter, seem intertwined during schooling. And although is one of the key objectives outlined in the secondary school curriculum framework in Chile to distinguish between random phenomena and deterministic (MINEDUC, 2009, p. 146) this is not achieved, according with the evidence collected. In our investigation we address the understanding and the differences between two concepts, random and deterministic trough mental constructions of random variable starting from the linear regression using the APOS theory so that the teachers get tools in learning.

Key words: aleatorio, determinista, regresión, lineal, APOE

Introducción

La estadística puede dividirse básicamente en dos ramas, estas son, la descriptiva y la inferencial, la primera se refiere al resumen de datos y la descripción de ellos, y la segunda, en la cual centraremos nuestro estudio, se relaciona con el proceso de utilizar datos en la toma de decisiones; es justamente aquí donde el concepto de aleatoriedad junto al determinismo se vuelven bases a la hora de entender la modelación estadística y matemática, esto es definir un modelo o expresión matemática que nos permita describir un fenómeno donde interviene o no el azar.

Bajo la mirada del *determinismo* es posible predecir en forma certera y exacta las consecuencias de un fenómeno antes que este ocurra no dando lugar a la incertidumbre, con esto se puede asegurar el hecho de que un experimento es reproducible ya que uno de sus supuestos es que causas iguales causan efectos iguales. En contraposición, la *aleatoriedad* se asocia a todo fenómeno o suceso que se rige bajo el azar, es decir se refiere a aquello que no se puede determinar con certeza antes que se produzca, por lo mismo, en un experimento aleatorio no es posible reproducir todas las condiciones para obtener idénticos resultados, y aunque fuese posible reproducir las condiciones del experimento, aun así no obtendríamos los mismos resultados. Bajo estas definiciones, los fenómenos de naturaleza determinista y aleatoria pueden ser estudiados mediante un modelo matemático o estadístico respectivamente, en los cuales hemos definido cuatro factores relevantes para la caracterización cognitiva del concepto de aleatoriedad y determinismo: el objeto de estudio del modelo, el objetivo que persigue la creación del modelo, el tipo de variable en juego, y restricciones y/o posibilidades que brinda el modelo. Dentro de estos factores uno que cobra especial importancia es la identificación del tipo de variable en juego, pues a través de ella se toma la decisión del modelo a trabajar, sin embargo, la variable aleatoria presenta dificultades epistemológicas, didácticas, cognitivas y pedagógicas al ser instruida durante la enseñanza escolar secundaria. Al respecto las investigaciones de Ruiz y Albert (2005), Ruiz (2006), Londoño y Montoya (2010), Azcárate, Cardeñoso y Serradó (2006), Batanero y Serrano (1995), Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998), el Informe de la SOCHE de Araneda y del Pino (2011) y el Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS-M de Ávalos y Matus (2010) coinciden en tres aspectos fundamentales que inciden en la comprensión sobre lo aleatorio, estos aspectos son:

1) Poca claridad de la noción de variable aleatoria y tendencia a asociarla con el mismo significado de variable algebraica (en el contexto matemático, determinista), lejos de relacionarla con su significado funcional (en el contexto estadístico, aleatorio).

2) Los textos no aportan a la construcción del significado de variable aleatoria, enmarcándose por lo general en un tratamiento cuantitativo de la variable y fuera de contexto lo que no permite al estudiante relacionar el concepto con el cotidiano.

3) Poca preparación de los profesores de matemática en la enseñanza de la estadística, lo que contribuye a la poca claridad de la noción de variable aleatoria.

4) Lo que muestra un denominador común que conforma nuestro problema de investigación: *"La comprensión y diferenciación de los conceptos aleatorio y determinista"*

Objetivos de investigación

En el Marco Curricular publicado por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), en enseñanza básica se establece que el eje Datos y Azar debe introducir el tratamiento de datos y modelos para el *razonamiento en situaciones de incerteza*, también se refiere al estudio de conceptos básicos que permitan *analizar y describir procesos aleatorios*, y en Educación Media, se propone en este eje desarrollar conceptos y técnicas propias de la estadística y la teoría de probabilidades que permitan realizar inferencias a partir de información de naturaleza estadística y *distinguir entre los fenómenos aleatorios y los deterministas*. (MINEDUC, 2009, p.

146). Sin embargo planteamos que estas concepciones de aprendizaje propuestas por el MINEDUC en el marco curricular no se desarrollan en el estudiante durante su enseñanza escolar básica y media, debido a que: No existe en el eje datos y azar del currículo nacional una definición que posibilite la caracterización de un razonamiento de tipo aleatorio, que permitan conducir y crear situaciones de aprendizaje orientadas a desarrollar tales características en el estudiante.

Hemos escogido la regresión lineal simple como punto de partida para ofrecer herramientas orientadoras para el aprendizaje de los conceptos aleatoriedad y determinismo, que nos permitan *caracterizar a través de construcciones y mecanismos mentales lo aleatorio y lo determinista*, debido a que se ha considerado que la enseñanza de la función lineal se presenta como un obstáculo para la enseñanza posterior de la regresión lineal simple, al respecto la investigación realizada por Agnelli, Konic, Peparelli, Zön y Flores (2009) afirma:

> Consideramos que el uso de métodos determinísticos en la resolución de problemas matemáticos opera como un obstáculo para el abordaje de problemas de naturaleza aleatoria. Por lo que la noción de obstáculo se constituye en la herramienta didáctica que nos permite el estudio de esta problemática (Agnelli et al., 2009, p. 2).

Según esta investigación el obstáculo didáctico aparece al enseñarse sin las limitaciones que posee el modelo de la función lineal, pues es válido sólo en el caso que las variables en juego sean de tipo determinista. Para lograr nuestro objetivo indagaremos a partir de una descomposición genética, las concepciones que tienen sobre la variable aleatoria y determinista, y sobre regresión lineal los alumnos de la carrera de pedagogía en matemática que cursan su último año. Una vez documentada la descomposición genética, daremos elementos a partir de ella, para diseñar una propuesta didáctica en la enseñanza del modelo de regresión lineal, que permita generar en el alumno la noción de variable aleatoria y a su vez diferenciarla claramente de la determinista.

Caracterización de las construcciones mentales del concepto de aleatoriedad y determinismo a la luz de la teoría APOE

La teoría APOE creada por Ed Dubinsky junto al grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) nos brinda un marco que permite explicar las dificultades asociadas al aprendizaje de la variable aleatoria y determinista, así como también plantear un camino de construcción de sus aprendizajes y con ello construir la caracterización cognitiva de lo aleatorio y determinista, para que esto ocurriese, según este marco teórico, el estudiante debiese mostrar a partir de comportamientos observables, las construcciones mentales

(Dubinsky, 1991): Acción, Proceso, Objeto y Esquema, dispuestas en la descomposición genética (DG), que es una modelación epistemológica-cognitiva de los conceptos en estudio. A continuación entregaremos algunos ejemplos de construcciones mentales acción, proceso y objeto, dispuestas en el diseño de la DG hipotética del concepto de variable aleatoria:

Acción. En esta fase el estudiante repite varias veces un experimento con los mismos datos de entrada. Si constata que ante reiterados intentos obtiene siempre los mismos resultados y puede predecirlos con exactitud, podrá percatarse de que está en presencia de una variable determinista, en caso contrario, de una variable aleatoria.

Proceso. El estudiante comprende que la variable aleatoria arroja una probabilidad de ocurrencia, y es capaz de estimar algún dato dentro del rango de los datos dados observando el gráfico de dispersión, entendiendo la probabilidad como una posibilidad de ocurrencia y no como una predicción exacta. En cuanto a la variable determinista, es capaz de trabajar con ella como un ente abstracto y no necesita realizar la acción para saber su valor, por ejemplo, dado $y = x + 2$, para encontrar el valor de y para cualquier valor de x simplemente dirá que y es siempre dos más que x, entendiendo que y es determinista ya que dado el valor de x puede determinar en forma exacta el valor de y.

Objeto. La variable aleatoria es entendida como una función de probabilidad y como tal es posible obtener su inversa, o es posible realizar distintas operaciones sobre ella, como por ejemplo, es posible estimar el valor de procedencia de la variable de respuesta. A su vez, la variable determinista es entendida como una magnitud que varía de acuerdo a ciertos valores que pertenecen a un dominio determinado.

Descomposición genética hipotética del concepto de variable aleatoria

Para diseñar una DG hipotética de los conceptos aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal simple, teniendo en cuenta las construcciones descritas anteriormente, realizamos una encuesta exploratoria cuya finalidad era indagar las concepciones que poseen los estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) sobre la variable aleatoria y determinista. Esta encuesta nos permitió identificar algunas concepciones o nociones que se presentan con dificultad sobre la variable aleatoria, además de identificar las diferencias entre esta variable y la determinista y los modelos asociados a ellas, función lineal y regresión lineal simple. Participaron 6 estudiantes voluntarios los que contestaron cuatro preguntas en una sesión de 30 minutos. Los resultados obtenidos fueron:

(a) En la pregunta 1 (*¿Qué elementos usted considera importantes en el aprendizaje del concepto de variable aleatoria?),* los aprendices en general no dan demasiada importancia al concepto de función al momento de instruirse en el concepto de variable aleatoria, que justamente es uno de los conceptos que consideramos más importantes, ya que la variable aleatoria es una función y no una variable como se conoce matemáticamente. Asimismo, no le asignan un gran valor al concepto de probabilidad que también juega un rol importante en la definición de este concepto.

(b) En la pregunta 2 (*¿Qué es para usted una variable aleatoria? ¿Cuál es la diferencia con una variable algebraica (determinista)?*), respecto a la definición de variable aleatoria, del total de respuestas sólo un encuestado respondió correctamente la definición, que representa el 17%; el 50% responde en forma errónea relacionándola más bien con el concepto de magnitud aleatoria y no con lo que esperábamos –una función–, y el resto que representa el 33% de los estudiantes no sabe su definición.

(c) En la pregunta 3 (*¿Cómo relaciona usted los conceptos de función lineal y regresión lineal?*), respecto a la relación entre función lineal y regresión lineal simple, el 67% de los encuestados nos entregó definiciones erróneas, entregando respuestas en las cuales consideraban la función lineal como el ajuste de la regresión lineal simple, y el 33% no sabía cómo se relacionaban.

(d) En la pregunta 4 (*¿Qué textos recomendarías de apoyo para complementar estos conceptos?*), respecto a la bibliografía estadística, sólo el 33% de los encuestados dio una referencia y el 67% restante no conoce libros en estadística respecto del tema de regresión lineal simple.

A partir de este análisis de resultados y las construcciones descritas anteriormente (Acción, Proceso y Objeto) se diseñó la descomposición genética hipotética, considerando que los estudiantes no tenían claro la relación funcional de la variable aleatoria, ni la importancia del tipo de sucesos involucrados, o de la intervención de la probabilidad, o que tampoco tenían claras las diferencias o relaciones entre la función lineal y la regresión lineal simple.

A continuación presentamos una DG de los conceptos aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal, siendo uno de los objetivos diferenciar las variables en ambos paradigmas (el aleatorio y el determinista), ya que es la variable la que permite diferenciar el modelo de la función lineal de la regresión lineal simple, pues nos entrega una conceptualización del paradigma bajo el cual estamos trabajando (Figura 1).

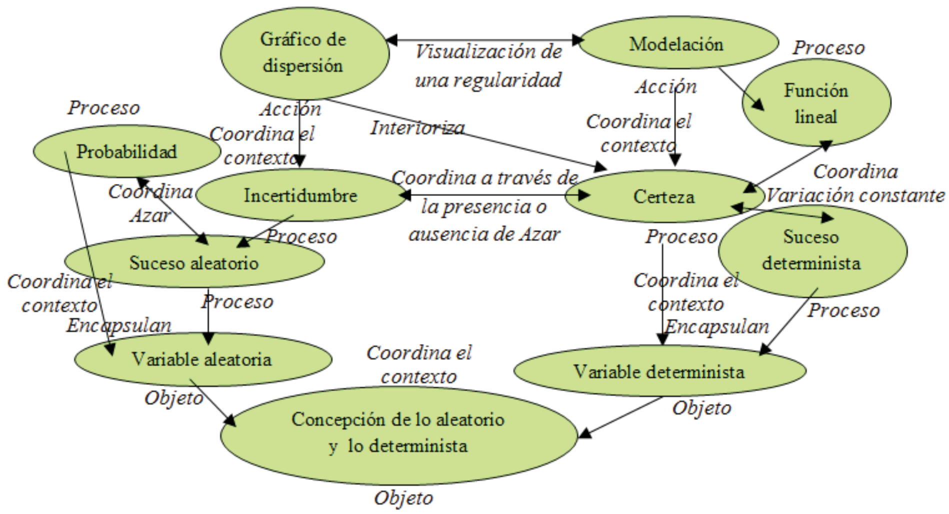


Figura 1: DG hipotética de los conceptos aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal.

Según la descomposición genética expuesta en la Figura 1, para construir el concepto funcional de la variable aleatoria un estudiante tomará los datos de entrada y salida obtenidos de un experimento e intentará modelarlos identificando si hay o no una regularidad, esa acción de modelación sobre los datos la realiza por medio del gráfico y es interiorizada en un proceso cuando el estudiante es capaz de coordinar, asociando la presencia de incertidumbre o certeza a las variables en juego, según intervenga o no el azar.

Cuando el proceso de incertidumbre y certeza se coordinan a través de la presencia o ausencia del azar forman un nuevo proceso, el de suceso aleatorio (o el de suceso determinista, dependiendo de la situación presentada). Esto se desarrolla del siguiente modo: el estudiante comprende que el valor de la variable es producto de la incertidumbre (o bien de la certeza, respectivamente), y al asociar el valor de la variable con una probabilidad como proceso, como una posibilidad de ocurrencia, construye una concepción objeto de la variable aleatoria.

Análogamente, al asociar el valor de la variable con un suceso determinista como proceso, es posible que la relacione con el modelo de la función lineal y construya una concepción objeto de la variable determinista.

En ambos casos, es capaz de entenderla como una función en el caso aleatorio donde a cada valor de la variable le asigna una probabilidad, o bien, como parte importante de la función lineal (en el caso de la determinista).

Entonces, una vez que el estudiante ha encapsulado (que consiste básicamente en la conversión de un proceso –una estructura dinámica– en un objeto –una construcción estática–) los procesos de suceso aleatorio y probabilidad como objeto, función variable aleatoria y los procesos de suceso determinista y función lineal como objeto variable determinista, el estudiante es capaz de percatarse de las diferencias conceptuales entre el modelo de regresión lineal simple y la función lineal, construyendo a su vez un nuevo objeto, el concepto de aleatorio y determinista.

Metodología y desarrollo de la investigación

Una vez definida nuestra DG la documentamos, para constatar la viabilidad del camino señalado en ella. Para esto diseñamos un cuestionario que permitiese identificar las construcciones mencionadas en la descomposición genética a través de la presentación de distintas situaciones en torno a los conceptos de aleatoriedad y determinismo. En nuestra investigación, cuyo carácter es de tipo cualitativo, se trabajó con 9 estudiantes, atendiendo a los criterios de avance curricular (alumnos que habían aprobado las asignaturas relacionadas con el método de análisis de regresión lineal simple y que estaban realizando su trabajo de tesis); estos estudiantes fueron agrupados en dos casos (basándonos en la metodología de estudio de casos) como se muestra en la tabla 2 siguiente, en la cual se presenta el desglose del diseño y aplicación de los instrumentos:

Caso 1	**Caso 2**
7 Estudiantes de Pedagogía en Matemática	2 Estudiantes que siguen ambas carreras (Pedagogía en Matemática y Estadística) en forma paralela.
Encuesta exploratoria	*Encuesta exploratoria*
Análisis teórico: DG	*Análisis teórico:* DG
Aplicación de Instrumentos: 1 cuestionario.	*Aplicación de Instrumentos:* 1 cuestionario.
Análisis y Verificación de datos	*Análisis y Verificación de datos*

Tabla 1: metodología del estudio de casos de la investigación.

La documentación de las construcciones de los conceptos aleatorio y determinista para extraer las evidencias empíricas de nuestra investigación se llevaron a cabo durante el año 2012 en dos momentos en los cuales participaron estudiantes de pedagogía en matemática del Instituto de Matemáticas (IMA) de la PUCV (Chile), y dos estudiantes que además seguían en paralelo la carrera de Estadística durante el primer semestre académico del año 2012.

Conclusiones

La evidencia empírica con sustento teórico obtenida del análisis de los datos, nos permitió confirmar la necesidad de la concepción objeto de los conceptos aleatorio y determinista para resolver situaciones a través de estos modelos, ya que de lo contrario no es posible plantear un modelo que permita responder a interrogantes planteadas en una situación de aleatoriedad versus determinismo, pues no hay manejo de estos modelos a nivel teórico y por ende no es posible desencapsular los conceptos involucrados en ellos. También podemos reportar, que no es suficiente con una concepción acción del gráfico de dispersión y de la modelación expuestas en la DG, sino más bien es necesario que los estudiantes al momento de abordar los contenidos referidos a la regresión lineal simple hayan construido previamente una concepción proceso de estos conceptos (gráfico de dispersión y modelación) que les permita no sólo manipular herramientas sino también analizar desde lo conceptual el comportamiento de los datos, ya que sólo así el contexto cobra importancia en el análisis de la información, con lo cual podríamos plantear un refinamiento de la DG, rescribiendo los conceptos de modelación y gráfico de dispersión como concepciones proceso.

Del análisis realizado también recogemos el hecho de que la diferenciación de suceso y variable cobra relevancia, desde el punto de vista de la identificación de qué es lo que se está investigando (suceso) y a través de qué característica lo vamos a investigar (variable), ya que al no tener en claro (o claros) estos conceptos, según los resultados arrojados por las evidencias empíricas del cuestionario, el estudiante no logra modelar, pudiendo ser un factor influyente en la modelación, es decir, sino se tiene claridad en lo que se va a investigar ¿para qué investigar?

Según los antecedentes expuestos, la enseñanza de la función lineal se presenta como un obstáculo didáctico ante la enseñanza de la regresión lineal. Al respecto observamos que el hecho de enfrentar al estudiante a problemas en diversos contextos, le entrega mejores herramientas de discriminación del tipo de variable involucrada, poniéndolo en conflicto con sus conocimientos previos, por lo tanto, cuando el estudiante no es motivado a analizar el paradigma de trabajo (determinista o aleatorio) al momento de comenzar su aprendizaje en torno a la regresión lineal, no tendrá claridad de por qué debe modelar datos que se ajustan a una recta con un modelo distinto al de la función lineal (vista previamente en el currículum académico). Además, pudimos comprobar que efectivamente en nuestros informantes la función lineal se presenta como un obstáculo al obviarse el paradigma de trabajo al cual responden los problemas que se modelan a través de esta función, sin embargo si la función lineal es construida haciendo hincapié en el contexto de la situación que se desea modelar a través de ella, en el cual están involucradas variables de tipo determinista, y analizando qué es lo que se quiere predecir, consideramos que el obstáculo no debería presentarse en el estudiante.

Con todo esto, consideramos que la característica principal que debe tener una propuesta didáctica en torno a la enseñanza de la regresión lineal simple que permita comprender y diferenciar los conceptos aleatorio y determinista es la dimensión semántica, ya que el contexto cobra relevancia en la elección de los modelos que permiten trabajar la situación para calcular o para estimar algún dato.

Referencias bibliográficas

Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, S., Zön, N. y Flores, P. (2009). La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17,* 52-61.

Araneda, A., del Pino, G., et al. (2011). Recomendaciones para el currículum escolar del eje Datos y Probabilidad. *Sociedad Chilena de Estadística. Sección de Educación Estadística.* Recuperado el 15 de septiembre de 2012 de http://www.soche.cl/index.html

Ávalos, B., Matus, C. (2010). *La Formación Inicial Docente en Chile desde una Óptica Internacional.* Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS-M. Gobierno de Chile, Ministerio de educación. Chile.

Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las ciencias,* 16*(1),* 85-97.

Azcárate, P., Cardeñoso, J.M., Serradó, A. (2006). Analizando la resistencia de los profesores para enseñar probabilidad en Educación Obligatoria. *Hipótesis alternativa. Boletín de la IASE para América Latina, 5-15*

Batanero, C., Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Revista UNO, 5,* 15-28. Recuperado el 15 de septiembre de 2012 de http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/aleatoriedad.htm

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-123. Dordrecht: Kluwer.

MINEDUC (2009). Gobierno de Chile, Ministerio de Educación. *Marco curricular de enseñanza básica y media actualización 2009*. Recuperado el 15 de septiembre de 2012 de http://www.mineduc.cl/index5_int.php?id_portal=47&id_contenido=13293&id_secc

ion=3264&c=1

Londoño, D., Montoya, E. (2010). *Azar, aleatoriedad y probabilidad: Significados personales en estudiantes de Educación Media.* Recuperado el 15 de septiembre de 2012 de http://www.contraloria.gob.pa/inec/IASI/docs/announcements/documentos/MemoriasComunicaciones/2%20Montoya_%20Azar%20Aleatoriedad%20Probabilidad%20SignificadosPersonales.pdf

Ruíz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ruíz, B., Albert, J. (2005). Didáctica de la Probabilidad y Estadística. El Caso de la Variable Aleatoria. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 185-191. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

ACTIVIDADES DESARROLLADAS EN EL MARCO DE LA PEDAGOGÍA DE LA COOPERACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA SEGÚN LO PRESCRIPTO POR LA TEORÍA DE LOS NIVELES DE VAN HIELE

Patricia Eva Bozzano
Universidad Nacional de La Plata Argentina
Liceo Víctor Mercante. Colegio Nuestra Señora Del Valle. Instituto Hijas de la Cruz
pateboz@yahoo.com.ar

Resumen. Situados ante el desafío de sostener prácticas áulicas inmersas en el marco provisto por la pedagogía de la cooperación acompañadas por el objetivo de que se produzca el aprendizaje esperado de la Matemática, se ha indagado en distintas teorías. En el caso del aprendizaje de la Geometría, lo propuesto por la Teoría de Van Hiele presenta una posibilidad en su desarrollo dentro de un contexto pleno de aprendizaje cooperativo. A tal efecto, la propuesta desarrollada se lleva cabo en alumnos con edades entre los 11 y 12 años. La misma proporcionó conclusiones y reflexiones a modo de guía para la toma de decisiones del docente.

Palabras clave: geometría- aprendizaje cooperativo-actividades

Abstract. Trying to hold the activities in the classroom with the features provided by the pedagogy of cooperation with the aim of achieving the expected learning of mathematics, the author has been doing research in different theories. In the case of geometry learning, as proposed by Van Hiele's theory, we find a possibility in its development into a full context of cooperative learning. To this end, the proposal developed is carried out with students aged between 11 and 12 years. These activities provided conclusions and reflections for the purpose of guiding the teacher on decision's making.

Key words: geometry- cooperative learning- activities

Introducción

Para hallar las respuestas a las inquietudes presentes en los procesos de enseñanza - aprendizaje, surge la secuencia de actividades concernientes a la unidad didáctica *Cuadriláteros* (Departamento de Ciencias Exactas, sección Matemática, 2012), en la cual convergen la Teoría de Aprendizaje de la Geometría propuesta por el matrimonio Van Hiele y lo planteado por la pedagogía de la cooperación.

Con esto, se propone establecer la relación entre la Teoría de Van Hiele, una lectura ecológica provista por la perspectiva socio-cultural del aprendizaje, y las características propias de una pedagogía de la cooperación, en donde el contexto posee relaciones de inherencia y pertenencia con el sujeto: sujeto y situación son una unidad.

Fundamentos

Como afirma Delval "la mayor parte de las sociedades prestan más atención a la adquisición de las capacidades sociales, a las formas de conducta social" (Delval, 2001, p.32), es que se considera importante guiar al estudiante en la construcción de conocimientos conceptuales y procedimentales con la necesidad de establecer afecto por el objeto de estudio en medio de un clima cordial, de respeto y colaboración, en el marco de la cooperación. Con este enfoque, que reúne a ambas teorías, se pretende lograr aprendizaje significativo. Para alcanzar dicho fin debemos considerar, entre otras variables, la relación estudiante-conocimientos pre requeridos, dominio del lenguaje requerido, expectativas e intereses del estudiante, habilidades y capacidades sociales.

Las tres primeras podemos catalogarlas dentro del aprendizaje de la matemática; mientras que la última entra en los dominios de la pedagogía de la cooperación. Con las actividades aquí propuestas se busca establecer un puente entre los niveles de aprendizaje de la geometría junto a las fases de enseñanza y el logro de la apropiación de habilidades sociales.

Hipótesis

Respetar las fases de enseñanza y los niveles de pensamiento geométrico según la Teoría de Van Hiele, acompañado con el fomento por el hábito del trabajo en el aula, en los procesos de enseñanza-aprendizaje, bajo el marco de la pedagogía de la cooperación, contribuye al protagonismo de los estudiantes en los procesos de aprendizaje, da lugar a la motivación y satisfacción por hacer matemática, allana el camino hacia el nivel de logros esperado, conduce al progreso del alumno y a la superación de su nivel de pensamiento geométrico.

La meta que nos proponemos es la apropiación de hábitos cooperativos en distintas etapas de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Marco conceptual

La teoría de Van Hiele del pensamiento geométrico propone distintas fases de enseñanza, entre ellas:

Consulta/ información, Orientación dirigida, Explicitación. Estas fases muestran una íntima relación entre sus prescripciones de enseñanza y la Pedagogía de la cooperación. La formulación de actividades, según los tecnólogos, debe responder a los procesos cognitivos que se llevan a cabo en el estudiante. Citando a Gagné, las actividades deben responder al "aprendizaje inicial de la información y su posterior recuperación" (Gagné, 1985, p.124), continuando por "los procesos de elaboración y organización de la información que ayudan en la adquisición y recuperación" (Gagné, 1985, p.125), siendo un requisito para "el aprendizaje que se establezca algún tipo de conexión entre el conocimiento nuevo y el conocimiento previo" (Gagné, 1985, p.130), siendo esto último lo que Gagné define como significatividad.

A partir de la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que va desde el razonamiento intuitivo hasta el formal y abstracto; se propone cómo un profesor debe organizar la actividad en sus clases para que los estudiantes puedan alcanzar el nivel de razonamiento superior al que tengan, llamadas fases de aprendizaje que constituyen un esquema para organizar la enseñanza. Los Van Hiele afirman que el avance a través de los niveles depende más de la enseñanza recibida que de la edad o madurez. Los niveles ayudan a secuenciar los contenidos (tabla 1) y las fases organizan las actividades que podemos diseñar en las unidades didácticas. Por otro lado, se destaca que en el aprendizaje de la Geometría, hay dos elementos importantes "el lenguaje utilizado" y "la significatividad de los contenidos" (Berritzegune de Donosti, 1990, p.68). Un estudiante sólo va a asimilar aquello que les es presentado a nivel de su razonamiento (tabla 2).

Fundamentalmente, la teoría pretende proveer la ayuda para guiar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, evaluar las habilidades de los alumnos; propone una enseñanza en la que se lleva a una persona del nivel n hasta el siguiente: n+1; con lo cual, si se consigue, ha habido aprendizaje.

NIVEL	NOMBRE	CARACTERÍSTICAS
0	Reconocimiento-visualización	Las entidades se perciben en su totalidad. Descripción en base a apariencia física. No se distinguen propiedades ni componentes.
1	Análisis- observación	Condiciones necesarias: se perciben componentes y propiedades, pero no se relacionan entre sí. Experimentando se establecen nuevas propiedades.
2	Deducción informal-orden	Capacidad de señalar condiciones necesarias y suficientes. Razonamiento matemático iniciado.
3	Deducción	Se entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas. Justificación a través de demostraciones lógicas y formales.
4	Rigor	Más alto nivel de rigor matemático. Analiza y compara diferentes geometrías.

Tabla 1. (Guillén Soler, 2004).

	ELEMENTOS EXPLÍCITOS	ELEMENTOS IMPLÍCITOS
NIVEL 0	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
NIVEL 1	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
NIVEL 2	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
NIVEL 3	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

Tabla 2. (Berritzegune de Donosti, 1990)

Objetivos

- Que el proceso de Enseñanza-Aprendizaje sea significativo.
- Que el alumno logre reconocer y valorar el pensamiento lógico-matemático.
- Mejorar las competencias matemáticas y científicas del alumnado.
- Dar lugar a las habilidades sociales de colaboración-cooperación.

Metodología y requisitos

Organización democrática del trabajo, trabajando cooperativamente, en una atmósfera de respeto, solidaridad, democracia, valorando los esfuerzos y la participación, comunicación de ideas a través del reconocimiento de la propia metacognición (Bozzano, 2012). Para ello, el docente se responsabilizará por: contribuir a desarrollar en el educando la necesidad de aprender y de entrenarse en cómo hacerlo; ocuparse de la estimulación del desarrollo intelectual del educando y de la formación de valores; orientar la motivación hacia el objetivo de la actividad de estudio y mantener su constancia; estimular la formación de conceptos y el desarrollo de los procesos lógicos de pensamiento; asegurar el vínculo del contenido de aprendizaje con la practica social y su valoración en el plano educativo (Bozzano, 2010, p.25).

Teoría de Van Hiele

La teoría de los Van Hiele afirma que un estudiante no puede pasar a un nivel determinado si no ha alcanzado con éxito los niveles previos. Como prescripción de enseñanza, la Teoría propone cinco fases a modo de guías para el diseño de actividades y como facilitación de experiencias de aprendizaje apropiadas (Dominguez, 2010).

Fase 1: *preguntas/información*. Fase oral. Como lo señala Alonso Martín en su artículo, en esta fase el docente informa a sus alumnos sobre los conceptos, problemas materiales, etc, que van a trabajar (Afonso Martín, 2004). Mediante preguntas se pretende determinar el nivel en que se hallan los alumnos, dando lugar a la decisión con respecto al camino a seguir de las actividades siguientes. En ocasiones, se diseña una pregunta pensando en un nivel concreto y la respuesta indica un nivel distinto del pensado inicialmente.

Fase 2: *orientación dirigida.* Mediante la resolución de problemas y otras actividades proporcionadas por el profesor, se da lugar para que los alumnos descubran, comprendan, asimilen, apliquen, las ideas, conceptos, propiedades, relaciones, que serán motivo de su aprendizaje en ese nivel.

Fase 3: *explicación (explicitación).* Fase de interacción (intercambio de ideas y experiencias). Aquí, el rol del profesor se reduce a explicitar contenidos nuevos sin olvidar de corregir el lenguaje de los alumnos conforme a lo requerido en ese nivel (Berritzegune de Donosti, 1990). Ésta interacción obliga a los alumnos a ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás. Como lo detalla Alfonso Martín, "es el momento de intercambio de experiencias, comentar lo observado y explicar cómo se han resuelto las actividades" (Afonso Martín, 2004, p.7).

Fase 4: *orientación libre.* Frente a la propuesta de actividades más complejas se exige a los alumnos a aplicar lo anteriormente adquirido, tanto respecto a contenidos como al lenguaje necesario. Si las actividades son lo suficientemente abiertas, obliga a los alumnos a justificar mediante la utilización de razonamientos lógicos y haciendo uso de lenguaje apropiado.

Fase 5: *integración.* Momento de sintetizar contenidos trabajados y ordenar resultados. Tal y como afirma Alfonso Martín: "se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya poseía" (Afonso Martín, 2004, p.7).

Enseñanza cooperativa

Comenzaremos por mencionar los pilares en los que se deben sostener las prácticas cooperativas en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Los valores y principios que atraviesan las prácticas cooperativas son: el respeto, la cordialidad, la solidaridad, la colaboración, la responsabilidad conjunta, la cooperación.

Concepciones básicas

Johnson, Johnson y Johnson Holubec postulan como uno de los componentes esenciales del aprendizaje cooperativo la interacción promotora. Los autores destacan que "la interacción promotora incluye la explicación oral de cómo resolver problemas, la discusión sobre la naturaleza de los conceptos que se están aprendiendo, la enseñanza de los propios conocimientos a los compañeros y la relación entre el aprendizaje presente y pasado" (Johnson, Johnson y Johnson Holubec, 1999, p.14). Con claridad encontramos en tales preceptos los procesos denominados elaboración y organización (Gagné, 1985), como también se hace mención de la metacognición como uno de los recursos para el aprendizaje.

Propuesta áulica desarrollada

Destinatarios: alumnos con edades comprendidas entre los 11 y 12 años. Sus conocimientos previos garantizados incluyen términos primitivos de la *geometría euclideana*, trazado y relaciones entre ellos.

Temporalización: 2 bloques de 40 minutos cada uno.

- Fase de Consulta, Información: se trata de hacer un diagnóstico de ideas previas sobre lo que sabe nuestro alumnado sobre el objeto de estudio. Se aconseja aprovechar para introducir términos que se van a necesitar y unificar el lenguaje sobre el particular que posee el alumnado.

La clase se organiza en el grupo total de alumnos.

Objeto de estudio: polígonos de cuatro lados, cuadriláteros: clasificación, elementos y propiedades.

Materiales: hoja con material provisto por el docente, lápiz, pinturitas, regla, escuadra, transportador.

Se reparte la hoja con los gráficos al alumnado (Fig.1). Se inicia la actividad: "se ha encargado a un arquitecto la construcción de una piscina de cuatro paredes. El profesional ha pensado en varias opciones, y presenta los siguientes diseños:

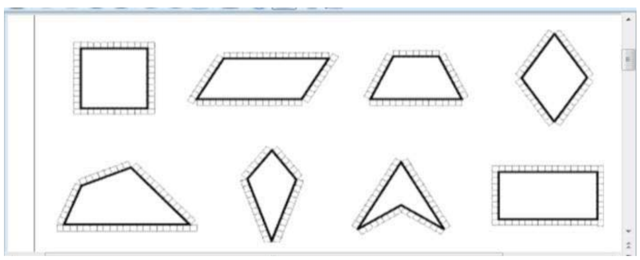


Figura 1. (Ministerio de Educación de la República Argentina. Figuras Geométricas. Colección: Para seguir aprendiendo. Material para alumnos)

¿Todas ellas responden a lo pedido? ¿Qué nombre recibe una figura con cuatro lados? Se sondea entre el alumnado los conceptos de polígono cóncavo y convexo, cuadrilátero: definición y elementos. Se pueden tener dibujados en la pizarra y reforzaremos el vocabulario empleado (polígono cóncavo, polígono convexo, lado, vértice, ángulo interior, diagonal). Se debaten las ideas que den pie a ello (ideas erróneas, preconcebidas, etc.) intentando llegar a conclusiones satisfactorias.

Se pretende determinar la etapa o nivel que se encuentra el alumnado, establecer el dominio del lenguaje y los conceptos que poseen, sin olvidar el ejercicio de visualización (Nivel 0).

- Fase de Orientación Dirigida. A partir del diagnóstico obtenido en la fase de consulta, se crearán una serie de tareas unipaso encaminadas a que todos los estudiantes alcancen un nivel mínimo de competencias sobre el tema de estudio. (Nivel 1).

La finalidad es que todos los estudiantes se apoyen entre sí y sobre todo se preste ayuda a los menos capacitados por parte de sus compañeros/as. El trabajo y colaboración entre los componentes del grupo es fundamental y así se ha de hacer saber en clase (López Sánchez, 2010, p.3).

Actividad: Colorea a aquellos diseños que corresponden a piscinas con paredes paralelas. Haz una lista con sus nombres. La clase se organiza en pequeños grupos. Se pueden tener dibujados en la pizarra y reforzaremos el vocabulario empleado (rectas paralelas para el caso de los lados paralelos; trapecio, trapecio isósceles, rombo, romboide, paralelogramo, rectángulo, cuadrado).

- Fase de Explicitación. En esta fase, cada grupo expone al resto los logros alcanzados. Lo hace mediante un portavoz cada vez que el grupo es interpelado. Se puede establecer un diálogo o debate de sus soluciones encauzado por el profesor/a y se procurará que intervengan todos los componentes del grupo.

Se establece como condición que la comunicación correspondiente contenga la estrategia que ha sido empleada para hallar la solución en forma clara (Nivel 2). Al obligar al estudiante a dirigirse a la clase, tendrá que ordenar sus ideas, lo que le conducirá a un segundo nivel de conocimiento. Al terminar la Fase de Explicitación puede hacerse una retroalimentación en función de los resultados obtenidos, volviendo a la fase de Orientación Dirigida.

- Fase de Orientación Libre. Este es el momento de investigar en clase. Se introducen problemas-tema encaminados al afianzamiento, diferenciación y apoyo. El trabajo es Individual.

Con la finalidad de desarrollar la capacidad para establecer relaciones entre propiedades:

- Actividad 1: Traza con regla y escuadra, todos los posibles diseños de piscinas que representan cuadriláteros cuyos lados son paralelos. *Diferenciar*: sólo un par con dos en dos.

- Actividad 2: Traza con regla y escuadra, todos los posibles diseños de piscinas que representan cuadriláteros cuyos ángulos interiores son rectos. Indicar el nombre de los cuadriláteros que cumplen con las propiedades mencionadas.

- Actividad 3: Traza con color las diagonales de cada uno de ellos, mide el ángulo que determinan las diagonales en cada caso, la longitud de las mismas y responde ¿a qué conclusiones has llegado?

Se refuerza el vocabulario empleado con el fin de la unificación del mismo, (ángulo recto, ángulos congruentes, segmentos congruentes, perpendicularidad, punto medio). La actividad propuesta requiere reorganización de los nuevos conocimientos, exigiendo la recuperación y transferencia de conceptos y procedimientos. (Nivel 3)

- Fase de Integración. La organización del trabajo es en el grupo total de alumnos. En esta fase el profesor/a hace una recopilación del trabajo de los estudiantes. Ordena los resultados y hace una explicación final del objeto de estudio a partir de las situaciones vividas en clase. Se pueden usar los resultados de los trabajos de la fase de Orientación Libre para esta explicación.

Es el momento del debate de clase, con la resolución de dudas y aclaración de términos y vocabulario del tema, estudio de las propiedades de los objetos estudiados y su posible traslación a otras situaciones. Aquí se transita por la etapa de esquematización de los conocimientos conceptuales y procedimentales que conduce a los alumnos a nivel de experto. El objetivo final consiste en una clasificación de los cuadriláteros, que responda a las conclusiones a las que arribaron los alumnos.

Observaciones y análisis

De acuerdo a las prescripciones provistas en las distintas fases de enseñanza de la geometría, se ha observado en cada una de ellas lo siguiente:

Consulta/información: se dio lugar al debate abierto, a la exposición e intercambio de ideas.

Orientación dirigida: propició la elaboración de conjeturas y la participación activa de todos los alumnos, resultando así ser facilitadores del aprendizaje de otros.

Explicitación: aquí el trabajo consiste en la comunicación de los logros de cada uno de los grupos frente al grupo total de alumnos. Se produjo una participación responsable y con respeto, mediante la correcta comunicación se arribó a la organización de ideas y unificación del lenguaje, se hizo notar la valoración del esfuerzo ajeno, señalando como correcta la crítica de ideas y no de personas.

Orientación libre: se dio lugar a reforzar el lenguaje y la reorganización de los nuevos conocimientos.

Integración: se produjo una retroalimentación acompañada con la puesta en orden de los conocimientos.

Confrontación entre la propuesta desarrollada y lo observado

Respetando las fases de enseñanza y teniendo presente los niveles de pensamiento geométrico alcanzados por los alumnos, el diseño, implementación y facilitación de experiencias de aprendizaje resultan apropiados para que el alumno progrese.

En tal sentido, tras el rol de guía y facilitador del docente, quien brindó el contexto necesario tanto para llevar a cabo lo prescripto por la Teoría de Van Hiele para el aprendizaje de la Geometría, como también para que las actividades se encuadren en un clima propio de cooperación especificando los objetivos cognitivos y las habilidades sociales a alcanzar, los alumnos respondieron mediante una organización apropiada para el desarrollo de las actividades acompañado con muestras de valoración de esfuerzos, participación democrática, respeto por el prójimo. Éstas características en el modo de trabajo de aula, dieron como frutos logros en el aprendizaje de los alumnos tales como la comunicación de ideas con utilización de lenguaje adecuado, luego de alcanzar la unificación de dicho lenguaje. Esto condujo a la adquisición de nuevos conocimientos, a la organización de conceptos y las relaciones entre ellos.

En respuesta a la hipótesis planteada, cuestiones como la explicación en forma oral, la relación entre el aprendizaje presente y el pasado, la discusión de los propios conocimientos, todos ellos presentes en la Fase de Explicitación, bien pueden ser reconocidos como elementos propios del aprendizaje cooperativo.

Conclusión

Así, lo observado nos conduce a concluir que fomentar el hábito del trabajo en el aula en el marco de la pedagogía de la cooperación, contribuye al protagonismo de los alumnos en sus propios procesos de aprendizaje, da lugar a la motivación y satisfacción por hacer matemática, allana el camino para que el alumno pase de un nivel de pensamiento geométrico al siguiente, y a corto plazo se puede concluir que favorece en gran medida al alcance de los logros cognitivos y sociales esperados.

Referencias bibliográficas

Afonso Martín M.C. (2004). Sobre los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele y la formación de profesores en activo. *Revista Números*, *58,* 2-35.

Berritzegune de Donosti, Fernando Fouz. (1990). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría.* Recuperado el 10 de noviembre de 2011 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/materiales/Modelo%20de%20Van%20Hiele%20para%20la%20did%C3%A1ctica%20de%20la%20Geometr%C3%ADa.*Fouz,%20Fernando%3B%20%20De%20Donosti,%20Berritzegune.*Fernando%20Fouz,%20Berritzegune%20de%20Donosti.pdf

Bozzano, P. E. (2010). Cooperativismo escolar. Propuestas didácticas en el contexto de la educación cooperativa. *Revista Premisa 12* (47), 23-31.

Bozzano, P.E. (2012). Enseñanza cooperativa en la clase de Matemática. Ponencia no publicada para el 3° Congreso para Profesores de Escuela Secundaria. Junta Regional de Educación Católica. Arzobispado de La Plata.

Delval, J. (2001). *Aprender en la vida y en la escuela*. Madrid: Morata.

Departamento de Ciencias Exactas, sección Matemática. (2012).Programa del ciclo 2012 de la asignatura Matemática para 1° año. La Plata: Liceo Víctor Mercante.

Domínguez, M. C. (2010) Aplicaciones didácticas. *Estructuras Topológicas y geométricas*. (Unidad 6). Buenos Aires: Universidad CAECE.

Gagné, E. D. (1985). El aprendizaje y el recuerdo del conocimiento declarativo. *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar. La adquisición del conocimiento y la resolución de problemas*. Capítulo 4 (pp.123-163). Madrid: Visor aprendizaje.

Johnson D., Johnson, R., Johnson Holubec E. (1999) *Los nuevos círculos del aprendizaje. La cooperación en el aula y la escuela*. Buenos Aires: Red Federal de formación Docente Continua.

López Sánchez, J. (2010). *El método Van Hiele aplicado al área de las Matemáticas. Una propuesta de trabajo en el aula.* Recuperado el 9 de Noviembre de 2011 de http://www.omerique.net/twiki/pub/CEIPsanjose/TallerMatematicas/MtodoVanHiele.pdf

Ministerio de Educación de la República Argentina. Figuras Geométricas. *Colección: Para seguir aprendiendo*. Material para alumnos. Educar.

EXPLORACIÓN DE NOCIONES MATEMÁTICAS DE NIÑOS PREESCOLARES EN EDUCACIÓN ESPECIAL

Sandra Patricia García Sánchez, Ignacio Garnica y Dovala
Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa México
spgarcia@cinvestav.mx, igarnica@cinvestav.mx

Resumen. Investigación en curso, cualitativa. Se exploraron nociones matemáticas de cinco niños (3-5) con necesidades educativas especiales – síndromes: Down (CD) y Crouzón incompleto (CC); trastornos: audición (CH) y lenguaje (CL); problema de aprendizaje (CA) – Centro de Desarrollo Infantil de Educación Preescolar Inclusiva (CENDI). El propósito fue comprender modos de expresión de pensamiento matemático de los niños al considerar las condiciones de comunicación: en su entorno familiar (EF) y en el aula con la docente (D). La interrogante: ante los efectos del síndrome, ausencia o afección, al desarrollo cognitivo de cada uno de los cinco casos ¿cuáles son las condiciones que limitan y/o favorecen la adquisición de nociones matemáticas de espacio?

Palabras clave: nociones matemáticas, educación especial, comunicación

Abstract. Research in course, qualitative. Explored mathematical notions of five children's (3-5) with special educational needs - syndromes: Down (CD) and Crouzon incomplete (CC); disorders: hearing (CH) and language (CL) and problem learning (CA) - Child Development Center Preschool Inclusive. The purpose is to understand ways of expression of children's mathematical thinking in considering the communication conditions: in their family (EF) and in the classroom with the teacher (D). The question: to the effects of the syndrome, absence or condition, to the cognitive development of each of the five cases, what are the conditions that limit and / or promote the acquisition of mathematical concepts of number, space, shape and form?

Key words: mathematical notions, special education, communication

Introducción

En esta investigación se propiciaron espacios conjuntos para el análisis, la reflexión y la construcción de alternativas en torno a los problemas relacionados con el pensamiento matemático, ante las adversidades de afecciones o síndromes, su consecuente impacto sobre el desarrollo cognitivo y la construcción de pensamiento matemático. El objetivo fue comprender los procesos de la comunicación *orientada al entendimiento*, que permita el reconocimiento de las condiciones del desarrollo cognitivo en la identificación de relaciones espaciales ante la situación adversa. Se plantean las preguntas: a) ¿cuáles son las condiciones de desarrollo cognitivo ante las adversidades, que limitan y/o favorecen la adquisición de la noción matemática de espacio? b) ¿cuáles son las condiciones de comunicación en el entorno familiar (Garnica y González, 2009) que posibilitan o limitan la adquisición de la noción matemática de espacio? y c) ¿cuáles son las estrategias, ante las condiciones de comunicación dentro del aula, para el diseño de actividades especiales que posibiliten la adquisición de la noción matemática de espacio? Se reportan resultados relativos a las actividades de espacio realizadas en el aula y en el entorno familiar esto permite la adquisición de la noción de ubicación espacial como proyección sobre un plano.

Referentes teóricos

Un problema fundamental en la atención a los niños con necesidades educativas especiales es la comprensión de su desarrollo cognitivo, en particular el ámbito de la educación matemática. El Programa de Educación Preescolar (SEP, 2004) incluye: número y forma; espacio y medida en el campo formativo, no incluye actividades orientadas a las necesidades especiales, pero es flexible en su diseño por parte de docentes. En la educación especial es necesaria la agrupación de otras disciplinas: neuropsicología con ella se puede distinguir la naturaleza singular de cada caso y el nivel de desarrollo de las habilidades cognoscitivas no homogéneas (Ardila, Rosselli y Matute, 2005). En relación al estudio del síndrome Crouzon se reportan resultados que concluyen que el caso de estudio "conserva orientación temporospacial y personal, percepción visual, habilidades visuoespaciales con componente manipulativo y cálculo" (Aguado, Lobo, Blanco y Álvarez, 1999), estos resultados son semejantes a los de esta investigación *en curso*. Con respecto a la noción matemática de ubicación espacial se permite la observación de los desplazamientos en los recorridos del niño con sus relaciones espaciales como menciona Piaget (1985). Se ha encontrado que "los niños con Síndrome de Down tienen habilidades para la atención, repetición, lenguaje, memoria, aprendizaje y transferencia de nociones adquiridas a otros contextos" (Redondo, 2008) el diseño de actividades consideró esta propuesta: sociabilidad, autonomía; habilidad; capacidad perceptiva; dominio del cuerpo; representación y actividad mental; lenguaje.

Método

A efecto de reconocer la imagen de la naturaleza del síndrome o afección se interpretaron tres historias clínicas (CD, CC, CH) por parte de las D, EF e investigadores (I). A partir de esta información se realizaron nueve entrevistas: cuatro a D y cinco al EF. La investigación se organizó bajo los lineamientos del órgano operativo utilizado para el sistema del CENDI (Díaz y Garnica, 2011) (ver Figura.1) el fin fue operar los programas del Plan Integral derivados del Seminario de Educación Especial en Matemática Educativa.

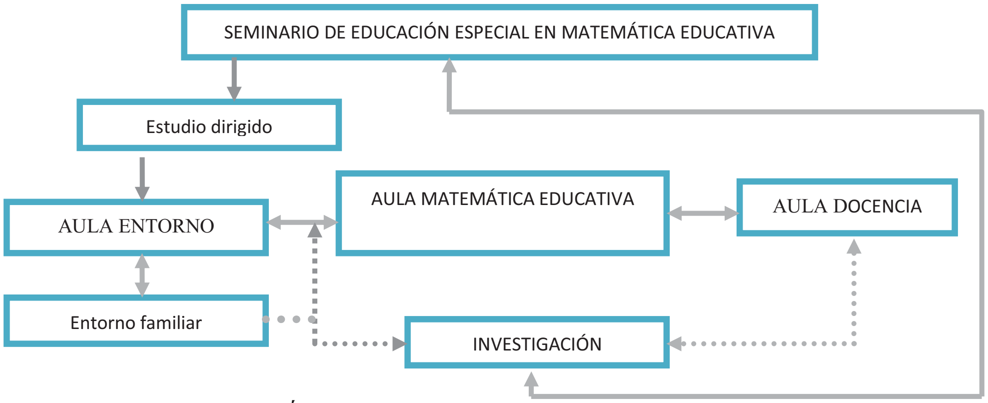


Figura 1. Órgano operativo de la investigación en curso. Sistema CENDI

En el Aula de Matemática Educativa se desarrollan las actividades de inclusión y las correspondientes al seguimiento del desarrollo cognitivo de los casos, objeto de estudio. El diseño, desarrollo y realización de las actividades se llevaron a cabo de manera conjunta con la docente titular de grupo. Respecto al Aula Entorno se establece un enlace de comunicación para desarrollar las actividades en el entorno del centro escolar y del hogar, así se logran los contactos de comunicación entre los componentes del órgano operativo.

Instrumentos y técnicas de registro

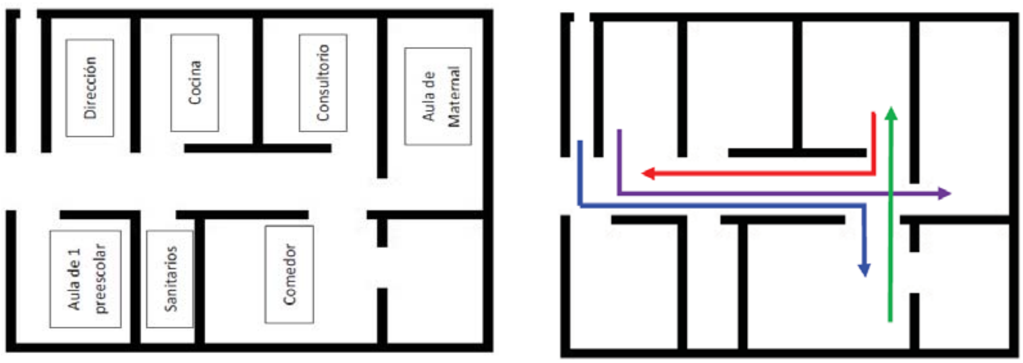
Se diseñaron dos instrumentos, a partir de la interpretación de los diagnósticos clínicos de los casos: guion de entrevista y guion de actividades indagatorias. El primero, se planteó como objetivo identificar la imagen, tanto de la docente como del entorno familiar, relativa a las características psicológicas y lingüísticas y las condiciones cognitivas y de desarrollo mental. El segundo, en la primera secuencia se diseñaron cinco actividades: CD, "Los colores"; CC, "El parque"; CH, "Cuento"; CA, "Mermelada" y CL "Ecosistemas" las actividades se diseñaron siguiendo los lineamientos propuestos por Redondo (2008) [aclaración: el caso CH abandonó la investigación en esta primera secuencia]. En la segunda secuencia se diseñó una actividad con recorridos en recinto cerrado en el CENDI, esta se centró en la adquisición de la noción de espacio y sus relaciones. Tercera secuencia, se diseñó una actividad en recinto abierto en el mercado anexo al CENDI. El registro de la información se tomó mediante la cámara de video y la bitácora de acciones.

Desarrollo

Las actividades se realizaron en el curso de tres secuencias.

Primera. Observar la activación del lenguaje, representación mental, memoria, percepción y orientación. Se diseñaron y aplicaron cinco actividades a modo de entrevista: CD, "Los colores" Se proporcionó una cartulina patrón con tarjetas de colores y rectángulos con la finalidad de realizar pares de colores (Véase Figura 2); CC, "El parque" En la actividad se proporcionó una imagen patrón, se preguntó de acuerdo a la situación de los objetos figurativos en su relación espacial con el resto (Véase Figura 3); CH, "Cuento" Se leyó un cuento, se interrumpía y se preguntaba: ¿qué sigue? se le pidió que dibujara la historia con los objetos y personajes (Véase Figura 4); CA, "Mermelada" Se contó una historia mediante imágenes. Se pidió que las acomodara en orden de acuerdo a la secuencia de aparición de la historia (Véase Figura 5) y CL "Ecosistemas" Se mostraron imágenes: desierto, tundra, océano y tres animales de cada uno de los ecosistemas. La niña debía colocar cada animal en el lugar donde viven (Véase Figura 6).

Segunda. Se realizó la actividad recorridos recinto cerrado, mediante un plano del CENDI; que consistió en reconocer las nociones de espacio y los modos de comunicación Madre/Hijo. Se realizaron cuatro recorridos.



Figuras 7 y 8. Plano del CENDI con los cuatro recorridos

Tercera. Se realizó la actividad indagatoria relativa a desplazamientos: "recorridos recinto cerrado CENDI-Mercado". Los objetivos fueron identificar la percepción espacial del niño en los recorridos de las rutas trazadas en el plano del mercado; reconocer las condiciones de comunicación entre los papás y su niño y utilizar lenguaje oral evitando el uso de señas. Se realizó el mismo recorrido en tres tiempos (R1, R2 y R3), cada uno caracterizado: a) conducción del recorrido: R1, padres; R2, madre, docente e investigadores y R3 CC; b) centro de interés, mercado anexo al CENDI; c) participantes: R1, papás y CC; R2, papás, docente, investigadores y CC; R3, papás, docente, investigador y CC; d) se cronometró el tiempo del recorrido de ida y regreso; e) puntos de orientación, cambios de dirección, en la actividad se presentaron siete y f) referentes, lugares en donde se deposita la atención, en el recorrido se presentaron cuatro (pescado, licuados, comida y abarrotes) (Ver figura 9).

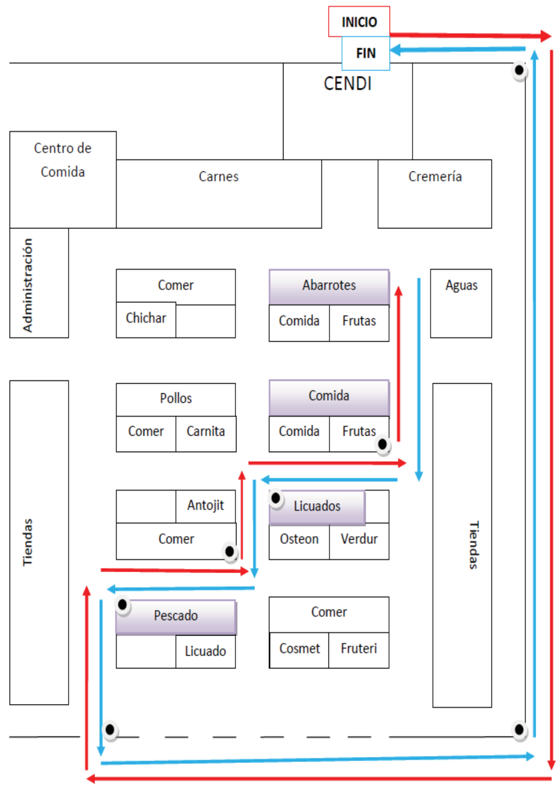


Figura. 9 Recorridos recinto cerrado CENDI-Mercado: A, CC.

Resultados

A continuación se presentan los resultados que se obtuvieron del proceso de análisis de la información empírica, estos se describen a partir de tres elementos: historias clínicas, entrevistas y actividades. La interpretación de las historias clínicas permitió comprender la naturaleza de las condiciones adversas. De las entrevistas realizadas se encontró que tanto las docentes como los padres de los casos conservaban una imagen alejada del síndrome o afección. En cuanto a las actividades indagatorias de la primera secuencia se encontró en los cinco casos:

Figura 2. Actividad "Los colores" realizada con V, (CD)

I: ¿En qué lugar va la tarjeta guinda? V: no realiza el par con la tarjeta guinda.

I: Se le muestra el par con la tarjeta rosa. V: coloca la tarjeta guinda con la anaranjada y la verde con la amarilla.

I: ¿Dónde pondrías la tarjeta verde?

V: Coloca la tarjeta verde con su par. Después realiza los pares anaranjado, verde, guinda y amarillo.

Se encontró que CD indica: a) tiempos de respuesta positiva; b) límite de atención corto; c) orientación positiva; d) retención moderada y e) pierde atención en actividades complejas.

Se señalaron cuatro imágenes (árbol, sol, pájaros y pelota) el niño las identificó a partir de su ambiente, es decir, se desplaza de los objetos figurales a los objetos físicos cotidianos pertenecientes a su propio entorno. Se señaló una de las tres nubes, se encontró que el niño presenta noción de correspondencia y seriación, al identificar cada una. Se observa la percepción espacial positiva que posee el niño al identificar la posición espacial de las imágenes

I: ¿Qué son? A: simula con sus brazos, pájaro que vuela. I: Y ¿el sol? A: señala el sol en el espacio real.

Figura 3. Actividad "El parque" realizada con A, (CC)

Figura 4. Actividad "Cuento" realizada con T, (CH)

Se observó que CH a) respondió con lentitud, b) atendió el desarrollo de la actividad, c) trabajó el seguimiento de ideas planteadas.

I: ¿Cuál es la primera imagen?

S: Esta porque aquí están limpiando las fresas.

I: ¿Por qué esa imagen es la última?

S: Porque la niña ya está comiendo pan con mermelada.

Se observó: a) atención breve; b) relaciona la situación con experiencias propias; c) facilidad de expresión; d) memoria a corto plazo.

Figura 5. Actividad "Mermelada" realizada con S, (CA)

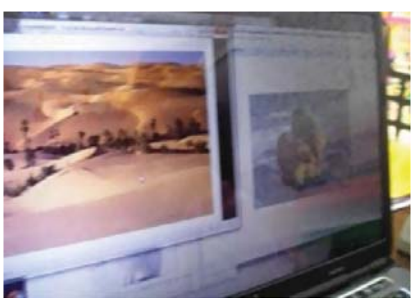


Figura 6. Actividad "Ecosistemas" realizada con P, (CL)

I: Se muestra imagen de tiburón y foca. Se pregunta: ¿Sabes que animal es y dónde vive? P: Sí, un "tubiron" vive en agua. Un "fin" vive en el hielo.

I: Se muestra una tortuga. Se pregunta ¿dónde vive? P: Esa vive en "achupepe"

I: Se muestran peces y alacrán. Se pregunta: ¿en qué son diferentes? P: Estos (peces) viven en el agua.

I: Si pusiéramos a vivir este animalito (osos polares) aquí (desierto) ¿qué le pasaría? P: Le da frío.

Se encontró que CL presenta a) dificultad en la pronunciación de algunas palabras, b) relaciona entre un objeto y su ambiente, c) identifica características de objetos, d) atención a corto plazo, e) invención de palabras.

En cuanto a los "recorridos recinto cerrado en el CENDI" para el CD se encontró que identificó los recorridos y lugares dentro del CENDI pero no relaciona el plano con este; se le dificultó la representación del plano y las indicaciones verbales. Para CC: identificó que el plano representa el CENDI; la ubicación de los salones no fue precisa, sin embargo se considera cercana y realizó los recorridos con indicaciones verbales (Ver figura 10). En el caso de CA, identificó que el plano representa al CENDI, no presentó dificultad en la representación del plano pero si al trazar las rutas y seguirlas (Ver figura 11). CL representó el plano, identificó los lugares, trazó el recorrido en el plano y lo realizó (Ver figura 12).

Figura 10. Recorridos recinto cerrado en el CENDI realizado por A, CC

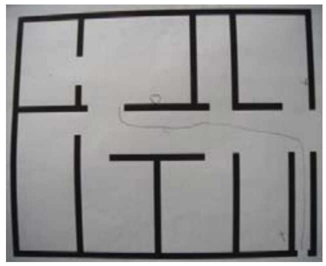


Figura 11. Recorrido: entrada/comedor realizado por S, CA

Figura 12. Recorrido: entrada/comedor; comedor-dirección realizado por S, CA

La última actividad indagatoria: "recorridos recinto cerrado CENDI-Mercado". CC siguió sin dificultad las indicaciones expresadas en un lenguaje coloquial: "vamos derecho", "ahora a la izquierda", ¿cuál es tu izquierda? Utilizó sin problema su lateralidad. En el recorrido que él condujo, lo hizo sin dificultad en el proceso de ida, reconoció los puntos de orientación, es decir, sabe dónde cambiar de dirección en el recorrido, ubicó los referentes, sitios previamente señalados, sin embargo presentó dificultad para el recorrido de regreso (aunque se presente la misma ruta), se le complicó referir los puntos de orientación, confundió las direcciones y no se percató de los referentes, lo que significa que el grupo de desplazamiento no es cerrado en cuestión de reversibilidad (Ver figura 13 y 14).

Figuras 13 y 14. Recorrido recinto cerrado CENDI-Mercado realizado por A, CC.

Conclusiones

La complejidad de la condición de necesidad educativa especial plantea a la investigación *en curso* la localización de los componentes a observar ante todo por la cantidad de variables que se presentan ante la especificidad de las singularidades.

Se requiere mayor información de los síndromes y afecciones: se ha observado que el perfil de comunicación del EF y D acelera el proceso cognitivo y ayuda a entender más las condiciones adversas y el esquema no obedece al plan curricular.

Referencias bibliográficas

Aguado, A., Lobo, B., Blanco, R. y Álvarez, J. (1999). *Implicaciones neuropsicológicas del síndrome de Crouzon: estudio de un caso*. Recuperado el 29 de octubre de 2011 http://www.revneurol.com/sec/resumen.php?i=e&id=98425

Ardila, A., M. Rosselli y Matute, V. (2005). *Neuropsicología de los trastornos del aprendizaje.* México: Manual Moderno.

Díaz, I. y Garnica, I. (2011). Comunicación y entorno familiar: lenguaje y adquisición de nociones matemáticas de niños preescolares con audición diferenciada. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 24*, 293–301. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Garnica, I. y González, H. (2009). Cantidad Discreta y Pensamiento Matemático de Niños (7- 9) con Audición Diferenciada y Lenguaje Limitado: Estudio de Cinco Casos. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*, 277–286. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Piaget, J. (1985). *La construcción de lo real en el niño*. Grijalbo: México.

Redondo, M. (2008). *El Síndrome de Down en la escuela* Recuperado el 19 de octubre de 2011 de http://www.csicsif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_13/M_ANGELES_REDONDO_1.pdf

Secretaria de Educación Pública. (2004). *Programa de Educación Preescolar*. Programa de estudios. México.

LA ELIPSE DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Daniela Bonilla Barraza, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
yodbb1@yahoo.es, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. La investigación que reportamos, da cuenta de un estudio sobre la comprensión del concepto Elipse en estudiantes entre 16 y 18 años, bajo un enfoque cognitivo, donde se utiliza los modos de pensamiento de Anna Sierpinska como marco teórico y, estudio de casos como diseño metodológico. Nuestra problemática se sitúa al abordar la elipse solamente a través de las ecuaciones cartesianas, afirmamos que estas técnicas no son suficientes para lograr una comprensión profunda del concepto, cuando decimos comprensión profunda, estamos pensando en que el estudiante pueda comprender la elipse en los modos: Sintético-Geométrico (como sección cónica en el espacio/curva que la representa en el plano), Analítico-Aritmético (como pares ordenados que satisfacen la ecuación de la elipse) y Analítico - Estructural (como lugar geométrico). A lo largo de la investigación evidenciamos que los estudiantes logran una mayor comprensión del concepto elipse cuando se enfrentan a situaciones donde interactúan los tres modos de pensar.

Palabras clave: modos de pensamiento, elipse, lugar geométrico

Abstract. The research, reports a study on the understanding of the concept Ellipse on students between 16 and 18 years, under a cognitive approach, which uses the modes of thought of Anna Sierpinska theoretical framework, and case study as methodological design. Our problem lies in addressing the ellipse only through the Cartesian equations. We claim that these techniques are not sufficient to develop a deep understanding of the concept. When we say deep understanding, we are thinking that the student can know the ellipse in modes: synthetic-geometric (as conic section in space/curve that represents it on the plane), Analytical Arithmetic (as ordered pairs that satisfy the equation of the ellipse) and Analytical - Structural (as locus). Throughout the investigation we found that students gain a greater understanding of ellipse when faced with situations where they interact the three ways of thinking.

Key words: modes thinking, ellipse, locus

Descripción de la problemática y objetivos de investigación

La elipse se trata en los programas oficiales de nuestro país dando prioridad a técnicas analíticas, y es parte de la asignatura álgebra y modelos analíticos, en donde se propone "reconocer qué lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas" (Ministerio de Educación, 2001, p.41). Mayoritariamente se le solicita al aprendiz de este tópico, determinar la ecuación de la elipse, conociendo los elementos (focos, vértices, entre otros) o bien conociendo la gráfica.

Consideramos que este enfoque centrado en las ecuaciones cartesianas que definen la elipse, no es suficiente para lograr su comprensión, cuando nos referimos a comprensión de la elipse, estamos pensando que el estudiante pueda relacionar las distintas definiciones asociadas a ella.

A partir de nuestras inquietudes nos propusimos como objetivo general, ofrecer un conjunto de sugerencias didácticas basada en nuestra investigación para la enseñanza del concepto elipse y para ello planteamos tres objetivos específicos:

1. Indagar en los modos de comprender la elipse que prevalecen en los estudiantes que aprobaron la asignatura de álgebra y modelos analíticos de un establecimiento educacional chileno, y explorar si estos modos permiten movilizar la elipse en sus distintas definiciones en el plano cartesiano.
2. Indagar en los elementos de la matemática que propician el tránsito entre las definiciones de elipse como: sección cónica en el espacio/curva que la representa en el plano, como pares ordenados que satisfacen la ecuación de la elipse y como lugar geométrico.
3. Diseñar y aplicar actividades de aprendizaje que promuevan el tránsito entre los modos de pensamiento (Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético, Analítico-Estructural) de la elipse, para estudiantes de la asignatura de álgebra y modelos analíticos de un establecimiento educacional chileno.

Marco teórico

Desde nuestros objetivos de investigación, realizamos la elección del marco teórico: los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000), porque nos provee de elementos teóricos para describir la forma en que los estudiantes comprenden los objetos matemáticos, en este caso, la elipse. También permite explicitar los enfoques (analíticos, geométricos o estructurales) que priorizan los estudiantes al momento de desarrollar distintas tareas y cuáles son las conexiones que logran establecer entre ellos.

Sierpinska (2000) distingue tres modos de pensamiento: uno que tiene que ver con el pensamiento práctico –sintético-geométrico (SG)– y otros dos que tienen que ver con el pensamiento teórico –analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE). En nuestro contexto investigativo, consideramos que los estudiantes comprenden la elipse, cuando logran el tránsito entre los modos de pensamiento SG - AA- AE de ella, (figura 1).

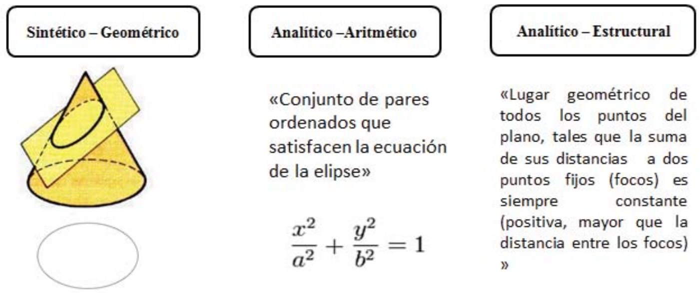


Figura 1: Modos de pensar la elipse.

Metodología y resultados

Desde nuestro objetivo de investigación es pertinente utilizar un diseño metodológico de, estudio de caso múltiple, en la medida que "…Los estudios de casos son adecuados para un análisis intensivo y profundo de uno o pocos ejemplos de ciertos fenómenos;..." (Goetz y LeCompte, 1988, p. 69). Contrasta realidades específicas, pero de ninguna manera explicaciones genéricas y definitivas sobre la realidad estudiada, "la investigación de estudio de caso no es una investigación de muestras. No estudiamos un caso fundamentalmente para comprender otros casos. Nuestra primera necesidad es comprender el caso concreto" (Stake, 1995, p. 4). Destacamos la importancia de esta metodología, ya que, a través de la comprensión de realidades específicas nos proporcionan de antecedentes empíricos fundamentales en la toma de decisiones para los propósitos de la investigación.

Las unidades de análisis están conformadas por:

Caso 1: 10 estudiantes de cuarto año de enseñanza Media de buen rendimiento, que aprobaron el curso de álgebra y modelos Analíticos (asignatura donde se trata la elipse).

Caso 2: 11 estudiantes pertenecientes a la asignatura de álgebra y modelos analíticos, estos informantes desconocen la elipse. Los cuales son etiquetados por E30, E31……E40.

Ambos grupos pertenecen a un establecimiento educacional de la comuna de Ovalle, dónde actualmente tiene acceso uno de los investigadores. Los informantes accedieron voluntariamente a ser partícipes de esta investigación.

Para el caso 1 diseñamos y aplicamos un cuestionario exploratorio, para indagar en los modos de pensamiento que privilegian estos estudiantes. Para el caso 2, diseñamos y aplicamos un conjunto de actividades con el fin de documentar las articulaciones entre los tres modos SG - AA - AE de la elipse. Estas actividades fueron construidas desde la teoría de los modos de pensamiento y utilizando elementos encontrados en las indagaciones epistemológicas, matemáticas y didácticas (Referidas al segundo objetivo específico de investigación).

Resultados del primer caso

Se evidencia que los estudiantes que han trabajado la elipse bajo el enfoque tradicional, comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen y son capaces de graficarlas, es decir, logran conexiones entre los modos SG y AA en el plano, bajo ciertas condiciones (ecuaciones de la elipse centrada en el origen).

Estos mismos estudiantes presentan grandes dificultades para comprender la elipse en un modo AE. Esto queda en evidencia, cuando se enfrentan a preguntas donde deben recurrir a la definición de la elipse como lugar geométrico. Ninguno de los estudiantes del caso 1, fue capaz de responder la siguiente pregunta:

Pregunta 6 del cuestionario: En la Figura 2, determine la longitud del eje mayor de la elipse de focos F y F'

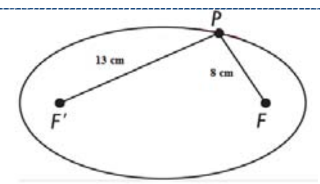


Figura 2

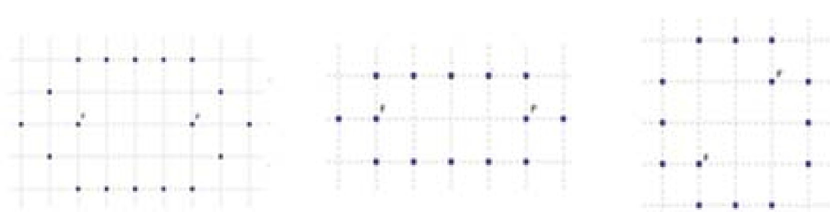
Resultados del segundo caso

A continuación se presentan algunas de las preguntas del cuestionario, que fue aplicada al grupo del caso 2 de estudio.

La primera actividad es propuesta en la geometría del taxista (Krause, 1986), con ella, se busca propiciar el tránsito entre los modos SG - AE de la elipse. Consideramos que la distancia discreta facilita la comprensión de la propiedad que define la elipse como un lugar geométrico.

Actividad 1 : Los taxistas de "Geocity" recorren su ciudad transitando por las calles paralelas llamadas Calle1 , Calle 2 , etc… hasta calle 30, y las avenidas , que son perpendiculares a las calles, llamadas Avenida 1, Avenida 2 , etc… hasta Avenida 25. Sólo les permite detenerse en las esquinas, por lo cual ellos miden las distancias en "cuadras" y siempre utilizan los recorridos más cortos posibles

Pregunta 5: Las figuras representan elipses en "Geocity" Los puntos F y F´ se conocen como focos de la elipse. ¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a los focos en cada uno de los casos?



Análisis de las respuestas

Todos los estudiantes muestran evidencias del tránsito entre los modos SG y AE de la elipse, estableciendo en cada una de las figuras la siguiente condición: la suma de las distancias de todos los puntos de la elipse a los focos es constante. Ejemplo de respuesta: el estudiante E36 (figura 3), determina las distancia en cuadras de F y F' a todos los puntos de la elipse, estableciendo que *"la suma de las 2 distancias de los focos siempre es 8"*.

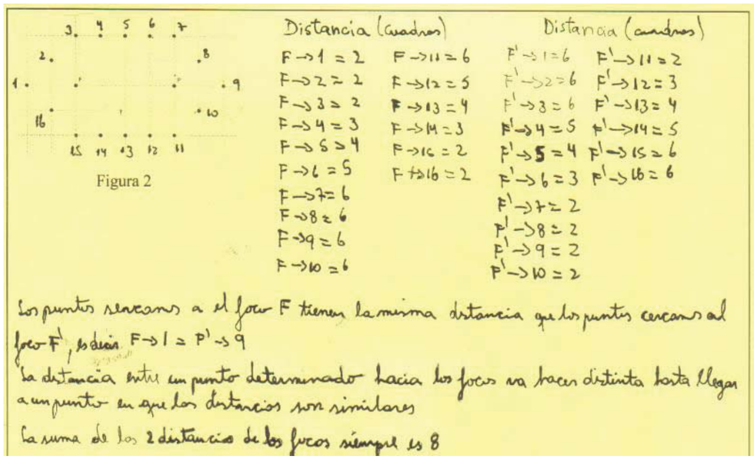
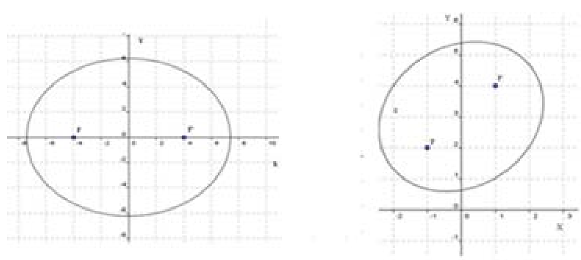


Figura 3: respuesta del estudiante 36

La segunda actividad evidencia los posibles tránsitos entre los modos SG - AE - AA de la elipse en el plano cartesiano. A continuación se muestran algunas de las preguntas.

Actividad 2*, Pregunta 1: Las figuras representan elipses de focos F y F' en el plano cartesiano. ¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a los focos? En cada uno de los casos justifique para algunos puntos de la elipse.*



Análisis de las respuestas

Todos los estudiantes logran conexiones entre los modos SG y AE de la elipse, estableciendo las distancias de los puntos de coordenadas exactas a los focos, para ello utilizan la fórmula de distancia entre dos puntos del plano. 9 de ellos establecen correctamente el valor de la constante en todas las figuras y los demás (2) determina su valor en alguna de ellas. A continuación se presenta un ejemplo de respuesta:

El estudiante E35 (figura 4), determina la distancia de dos puntos a los focos F y F', utiliza la fórmula de la distancia entre dos puntos del plano, pero solo en los casos que considera necesario. Concluyendo que: *"la suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos f y f' es* $3+\sqrt{5}$*"*.

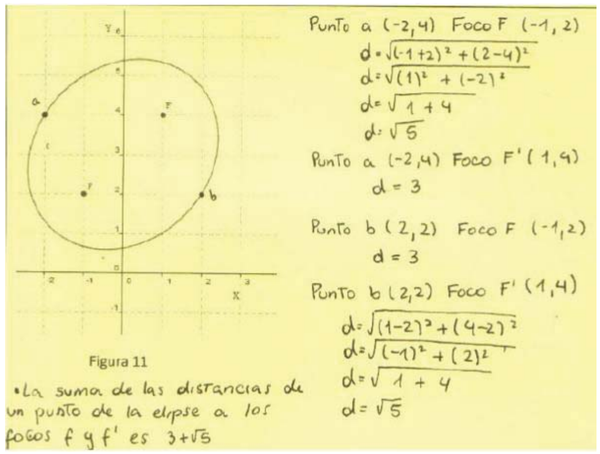


Figura 4: respuesta del estudiante 35.

Pregunta 4: Sea *P(x,y)* un punto cualquiera de la elipse (Figura 5), Establezca una ecuación que defina la elipse

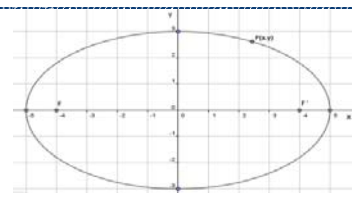


Figura 5

Análisis de las respuestas

7 de los estudiantes de este segundo caso, muestran en sus argumentos evidencias del tránsito SG - AE - AA. Estos estudiantes para transitar del modo SG a AA muestran comprender la elipse en un modo AE y a través de las distancias establecen la ecuación (figura 6). Los demás estudiantes (4) muestran conexiones entre los modos SG y AE.

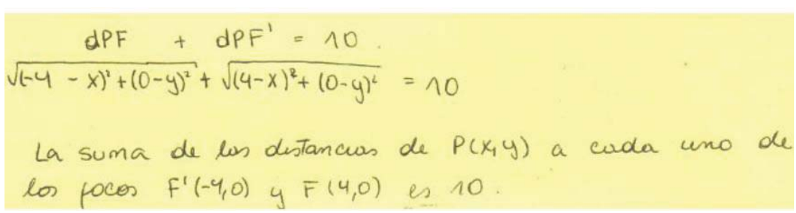


Figura 6: respuesta del estudiante E35.

La tercera actividad da evidencias sobre las posibles conexiones que realizan los estudiantes entre los modos SG (la elipse como sección cónica) - AE en el espacio. En un principio los estudiantes establecen las posiciones de los planos al intersectar a un cono de modo de formar una elipse. Luego se enfrentan a preguntas como:

Actividad 3, Pregunta 5: A continuación se muestra una animación en software cabri (Cabrilog, 2009) de la elipse en el espacio. Donde existen dos esferas inscritas en el cono y tangentes al plano. Sus puntos de contacto con el plano serán los focos de la elipse. Observa atentamente la animación (figura 7) y luego escribe tus argumentos para justificar que la curva formada es una elipse. (Puedes manipular la animación)

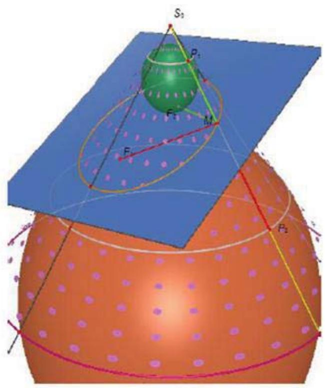


Figura 7: elipse en el espacio.

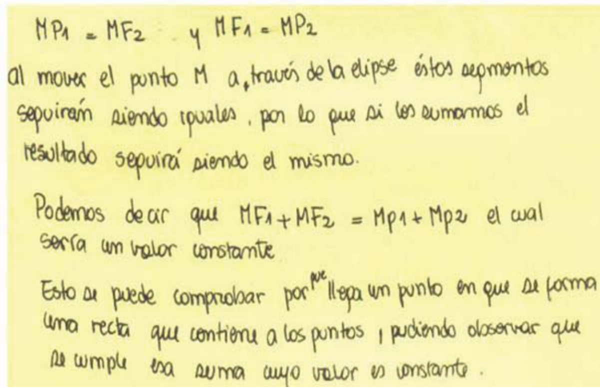


Figura 8: respuesta del estudiante 32.

La mayoría de los estudiantes (9) justifican desde un modo SG en el espacio, a partir de la inclinación que presenta el plano, los demás (2) entregan argumentos en un modo AE (figura 8).

La mayoría de los estudiantes del caso 2, muestra en sus argumentos evidencias de la comprensión de un modo AE en las actividades presentadas en la geometría del taxista y también de la comprensión de los modos SG - AE - AA en el plano cartesiano. En el espacio, la mayoría comprende la elipse en un modo SG, pero presentan dificultades para relacionar los modos SG y AE. Al parecer las herramientas sintéticas (teorema de las tangentes a una circunferencia, esferas inscritas en el cono, entre otros) que permiten justificar la elipse en el espacio, no son comprendidas por la mayoría de los estudiantes en este nivel.

Conclusiones didácticas y reflexiones finales

Proponemos como sugerencias didácticas para el aprendizaje del concepto elipse en estudiantes entre 16 y 18 años, iniciar con actividades donde los estudiantes transiten entre los modos SG - AE; en particular indicamos para los aprendices las actividades presentadas en geometría del taxista, ya que, nos entregan importantes beneficios en la comprensión del modo AE a partir de un modo SG de la elipse. Los elementos de esta geometría (distancia discreta medida en cuadras, puntos como "esquinas") facilitan la comprensión de la propiedad que la define como lugar geométrico "la suma de las distancias de un punto de la elipse a ambos focos es siempre constante (mayor que la distancia entre los focos)", además permite probar que ésta se cumple para todos los puntos de la elipse, situación que no es evidente en la geometría euclidiana.

Evidenciamos que los estudiantes que comprenden la elipse en el modo AE, presentan mayores posibilidades de alcanzar la comprensión profunda del concepto, debido a que esto ayuda en la conexión con los otros modos SG y AA de la elipse.

Una vez comprendido el modo AE de la elipse en la geometría del taxista, los aprendices pueden establecer las conexiones entre los modos SG - AE - AA en el plano cartesiano, con los elementos propios de la geometría analítica, como, la distancia entre dos puntos del plano, concepto de conjunto solución de una ecuación, entre otras. Se sugiere presentar distintas elipses en el plano, y no solo aquellas centradas en el origen.

Consideramos pertinente promover el tránsito entre los modos SG - AE en el espacio, una vez comprendida la elipse en el plano, para ello proponemos, que los estudiantes puedan desarrollar tareas asociadas al teorema de Dandelin, sobre las esferas inscritas en un cono.

Para finalizar queremos enfatizar que las evidencias con sustento teórico, proporcionadas de los resultados de la investigación, contribuyen al desarrollo de la teoría de los modos de pensamiento en otros ámbitos, un tanto distante del álgebra lineal, como por ejemplo, en el estudio de las secciones cónicas; sin descuidar los elementos principales de la teoría.

Referencias bibliográficas

Cabrilog SAS. (2009). Creador de herramientas Matemáticas. Recuperado el 06 de abril de 2012 de http://gallery.cabri.com/figures/space/dandEll.cg3.

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. España: Morata

Krause, E. (1986). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. New York: Dover.

Ministerio de Educación. (2001). Programa de estudio Algebra y Modelos Analíticos 3° Año Medio. Santiago: Mineduc. (Programa vigente decreto n°128/2001).

Sierpinska A. (2000). On some aspects of student's thinking in linear algebra. Dans J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers,

Stake, R. (1995). *The Art of Case Study*. London: Sage.

FACTORES CONDICIONANTES DEL CONOCIMIENTO PARA ENSEÑAR: EL CASO DE LOS NÚMEROS DECIMALES

Patricia Marisel Konic
Universidad Nacional de Río Cuarto Argentina
pkonic@gmail.com

Resumen. El propósito de este artículo es ilustrar, a través del estudio y análisis de la aplicación de una situación/problema (ítem), un modo de evaluar el tipo de conocimiento que posee un futuro profesor sobre la enseñanza de algunos aspectos inherentes a los números decimales. El ítem forma parte de un instrumento de evaluación que se construyó y validó durante el proceso de investigación conducente a una tesis doctoral y de cuya aplicación y posterior análisis se pudo detectar dificultades de comprensión y uso competente de los decimales por parte de una muestra de 118 estudiantes para maestro. Este reporte pone en evidencia consideraciones derivadas de la investigación. Concretamente, a través de la evaluación del estado de conocimiento que poseen los futuros profesores para la enseñanza de los números decimales, se detectan condicionantes para el ejercicio de dicho rol. Conocer estos aspectos esenciales permite incidir en cuestiones que promuevan la enseñanza y aprendizaje de estos números.

Palabras clave: conocimiento para enseñar, número decimal

Abstract. The purpose of this article is to illustrate, through the study and analysis of the application of a situation / problem (item), a way to assess the type of knowledge that has a preservice teacher about teaching some aspects inherent in decimal numbers. The item is part of an assessment instrument that was constructed and validated during the research process leading to a doctoral thesis and whose application and subsequent analysis allows to detect difficulties in understanding and competent use of decimals numbers in a sample of preservice teachers (118). This report shows considerations that derive from the investigation. Specifically, through the evaluation of the state of knowledge that have preservice teachers to teach decimal numbers are detected constraints for the exercise of that role. To know these essential aspects can influence on matters that promote the teaching and learning of these numbers.

Key words knowledge for teaching, decimal number

.

Introducción

Diversas y numerosas han sido las investigaciones dedicadas al problema del aprendizaje de los números decimales (Brosseau, Brosseau y Warfield, 2007; Cramer, Wyberg y Leavitt, 2009; Steinle, Stacey y Chambers, 2006; etc.). La mayoría refieren a errores y dificultades que manifiestan los niños en el aprendizaje y en menor escala errores vinculados a estudiantes para profesor, y no obstante existir múltiples razones y propuestas para explicar y afrontar tales dificultades éstas aún persisten en el proceso de enseñanza y aprendizaje. El estudio pormenorizado del estado de la cuestión permitió vislumbrar la necesidad de realizar una evaluación comprensiva de lo que sucede actualmente con estos números en estudiantes para profesor. Este tipo de estudios es avalado por investigadores que manifiestan la aspiración de que los educadores en matemática debemos hacer más por explicar estos fenómenos, y desarrollar instrumentos nuevos, sensibles, que permitan captar las claves de las características del problema del conocimiento para enseñar (Hill, Ball y Schilling, 2008). Ante este planteo, y en el marco de una investigación conducente a una tesis doctoral (Konic, 2011), es que se propuso abordar el problema de evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación primaria sobre los números decimales, mediante la construcción de un cuestionario. Dicho instrumento tendría que evaluar aspectos relevantes de los conocimientos necesarios para una enseñanza adecuada de estos números en la escuela primaria.

Marco teórico y metodología

Para afrontar la investigación fue necesario considerar una noción de conocimiento para el contexto de la formación profesores. Es así que se optó por el constructo *Conocimiento matemático para la enseñanza (*Hill, Ball y Schilling, 2008), para el cual los autores determinan una tipología y describen sus características básicas [Conocimiento del Contenido (*Común, especializado y ampliado*) y Conocimiento Pedagógico del Contenido (*Conocimiento del contenido y estudiantes, del contenido y la enseñanza, del currículo*]. No obstante se observó que la mera descripción de las características de las categorías no resultaba suficiente para avanzar en la investigación dado que en sí mismas no aportan criterios operativos sobre cada tipo de conocimiento, condición esencial para hacer viable nuestro estudio. Se decide entonces adoptar otras herramientas teóricas (como complemento de las mencionadas) provenientes del "Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática" (EOS), (Godino, Batanero y Font, 2007) por considerarlas adecuadas para interpretar y analizar en detalle la diversidad de entidades matemáticas presentes en una tarea (ítem del cuestionario) y/o las que pueda manifestar un sujeto a través de su resolución y con ello dar cuenta de la presencia o ausencia de características esenciales del tipo de conocimiento mencionado en futuros profesores. La noción central considerada desde el EOS fue la de *análisis didáctico* entendido como el "estudio sistemático de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido curricular- o de aspectos parciales del mismo- con unas herramientas teóricas y metodológicas específicas" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006, p.4). Otras nociones tomadas como herramientas para la elaboración del instrumento y el análisis de su aplicación son las de *práctica matemática, objetos (situaciones, conceptos, procedimientos, argumentos, lenguaje, propiedades), configuración de objetos y significados, significado institucional, significado personal* y *conflicto semiótico.*

Dado que el objetivo principal de la investigación era determinar el tipo de conocimiento que poseen los estudiantes para profesor, esto es en términos de las herramientas teóricas consideradas evaluar los significados personales manifestados por dichos estudiantes en relación a 4 de las categorías del conocimiento mencionadas (Hill et al, 2008) se realiza la construcción y estudio de los ítems que integran el cuestionario a través del siguiente proceso:

- Selección/elaboración y/o modificación de cada ítem teniendo en cuenta contenidos seleccionados para la evaluación, en el marco del *modelo de referencia didáctico* construido para los números decimales (Significado institucional).
- Justificación de la incorporación del ítem.
- Análisis epistémico a priori de cada ítem.
- Aplicación de la primera versión a una muestra piloto.
- Revisión mediante juicio de expertos y versión definitiva.
- Estudio de fiabilidad y análisis multivariante.

Para el estudio de la aplicación de cada ítem se definen tres tipos de variables:

V1: Indica el grado de corrección (Mal, parcialmente bien, bien)

V2: Indica el tipo de conocimiento involucrado en el ítem y el grado de explicitación del mismo (Categorías del conocimiento matemático vinculado a los números decimales).

V3: Indica el tipo de conflicto manifestado anticipados en el análisis epistémico a priori (configuración de objetos y significados)

A los fines de ilustrar el tipo de estudio realizado en el apartado siguiente se selecciona un ítem y se explicita su tratamiento.

Tratamiento de un ítem

De los 13 ítems que conforman el instrumento (con los correspondientes sub-ítems) se ha seleccionado para este reporte el ítem 11. Dicho ítem se ha enunciado del siguiente modo:

"Un maestro propone a sus estudiantes el siguiente problema: La madre de Lucía quiere hacerse un vestido. Para hacerlo compra un tercio de metro de tela y la mitad de un tercio de metro de tela. Si el metro de dicha tela cuesta 10 euros, ¿Cuánto le costó la tela a la madre de Lucía?

Isa y José los resolvieron así:

Isa:

$\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5$; *0,5 x 10 = 5; la tela costó 5 euros.*

José:

$\frac{1}{3} = 0{,}33$; *0,33:2 = 0,16; 0,33 + 0,16 = 0,49; 0,49 x 10 = 4,9; la tela costó 4,9 euros.*"

Justificación de la elección

Del modelo de referencia didáctico-matemático para la enseñanza de los números decimales desarrollado en el Cap. 1 de la Tesis Doctoral (Konic, 2011) surge la necesidad de considerar un ítem vinculado a la precisión. La precisión es un tema que, tanto en la vida cotidiana como curricularmente, está muy presente. Una muestra de ello es que en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) se solicita este tema explícitamente para todos los niveles. Generalmente los futuros profesores no controlan la precisión en el sentido contextual no saben cuándo y cómo deben usar aproximaciones (Nowlin, 2007). Parece que la aproximación depende más de los recursos disponibles, por ejemplo del uso de la calculadora y sus posibilidades, que del contexto y de las propiedades de los números en cuestión. Por otra parte, muchas investigaciones tienden a evaluar el desarrollo de la notación decimal en forma aislada y no en conexión con otros constructos matemáticos como por ejemplo la razón y la fracción (Lachance y Confrey, 2002). El propósito del ítem 11 es, precisamente, evaluar la distinción entre *número decimal y expresión decimal de un número.* Cuestión que pone en juego explícitamente la precisión por el tipo de datos que se proporcionan en la situación. Con este ítem se evalúan tres tipos de conocimientos que aquí se presentan estrechamente vinculados: *conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del contenido y estudiantes.* Se trata de una tarea de enseñanza en la que el futuro profesor debe demostrar capacidad para examinar y comprender distintas formas de resolución del problema, pero además debe demostrar que comprende por qué razón los niños hacen uso de ese tipo de conocimientos.

Estudio epistémico

El significado global de este ítem se halla centrado en objetos conceptuales (Expresión decimal de un número, número decimal y número racional), y de manera secundaria en objetos procedimentales (operaciones, redondeo).

Tipos de objetos	**Significados**
Elementos lingüísticos	
… compra un tercio de metro de tela y la mitad de un tercio de metro de tela. Si el metro de dicha tela cuesta 10 euros, ¿Cuánto le costó la tela a la madre de Lucía?	Concepto de fracción en el contexto de medida. Operaciones con fracción (mitad, suma) Magnitudes longitud y coste (unitario y total)

Isa: $\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6};$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5$; *0,5 x 10 = 5; la tela costó 5 euros* *José:* $\frac{1}{3}=0{,}33;$ *0,33:2 = 0,16; 0,33 + 0,16 = 0,49; 0,49 x 10 = 4,9; la tela costó 4,9 euros.* Explica por qué Isa y José obtienen resultados diferentes	Procedimiento exacto de cálculo del coste Procedimiento aproximado de cálculo del coste. Solicitud de argumentos que permitan valorar: comprensión conceptual y comprensión de la posibilidad de ambas soluciones de parte de los niños.
Conceptos	
Números decimales; expresiones decimal y fraccionaria Fracción; número racional División y suma de fracción Magnitud, cantidades, unidades de medida y medidas Aproximación decimal de 1/3 Error de medida	Particularizados en los números y datos que intervienen en el enunciado Usado en el procedimiento de José Usado en la explicación de la diferencia de resultados
Procedimientos	
División y suma de fracciones División y suma de números decimales Multiplicación de racionales (decimales) por el natural 10.	Usados en el cálculo del coste total
Propiedades	
La diferencia de resultados se debe a que José hace los cálculos usando una aproximación del racional 1/3 por el decimal 0,33, mientras que Isa opera con el racional exacto	Solución de la tarea
Argumentos	
La explicación es correcta porque al aproximar 1/3 por 0,33 se comete un error de redondeo.	Justificación de la solución.

Tabla 1. Configuración de objetos y significados del ítem 11.

Análisis de la aplicación

Se destaca que el 48,3% de los estudiantes han podido realizar con éxito este ítem. No obstante, no deja de ser significativo que entre quienes no lo han resuelto y quienes lo han resuelto de manera parcial representen, en conjunto, el 43,3% de la muestra estudiada.

En la tabla 2, se observa, en número casi similar, la aparición de tres tipos de conflictos.

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: La aproximación decimal de un número racional permite una expresión más exacta de ese número	14	11,8
2: No se pone en evidencia que considerar $\frac{1}{3} = 0.33$ es causa del error producido.	15	12,7
3: Resolver el problema por caminos o vías diferentes produce diferentes resultados	12	10,1
En blanco	67	56,8
Otros	10	8,5
Total	118	100,0

Tabla 2. Frecuencias y porcentajes para 11V3 (Tipos de conflictos)

En el primero de ellos, el hecho de que se decida que la aproximación decimal de un número racional produce una respuesta más exacta, presupone en estos estudiantes que el concepto de precisión que manejan, no depende del hecho de haber realizado aproximaciones decimales durante el proceso y que precisamente esa es la causa de que el resultado sea "diferente", pero no más preciso. Por el contrario conlleva la imprecisión de la aproximación utilizada. Parece que lo que se mira es el resultado y en consecuencia un número decimal (4,9) "es más preciso" que un número entero (5). La exactitud, en este caso, es una cuestión que se fundamenta desde una concepción previa que nada tiene que ver con el resultado más adecuado al problema, producto de la aplicación de conceptos específicos durante el proceso realizado (Nowlin, 2007).

El siguiente caso, presentado en la Figura 1, muestra este tipo de razonamiento.

Isa:

$\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}$; $\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5$; *0,5 x 10 = 5; la tela costó 5 euros.*

José:

$\frac{1}{3}=0{,}33$; *0,33:2 = 0,16; 0,33 + 0,16 = 0,49; 0,49 x 10 = 4,9; la tela costó 4,9 euros.*

Explica porqué Isa y José obtienen resultados diferentes.

Por que ~~José~~ Isa ha resuelto el problema con operaciones de fraccion mientras que José lo ha hecho con números decimales, por eso hay que tener en cuenta que a la hora de hacer cálculos, los números decimales son más exactos.

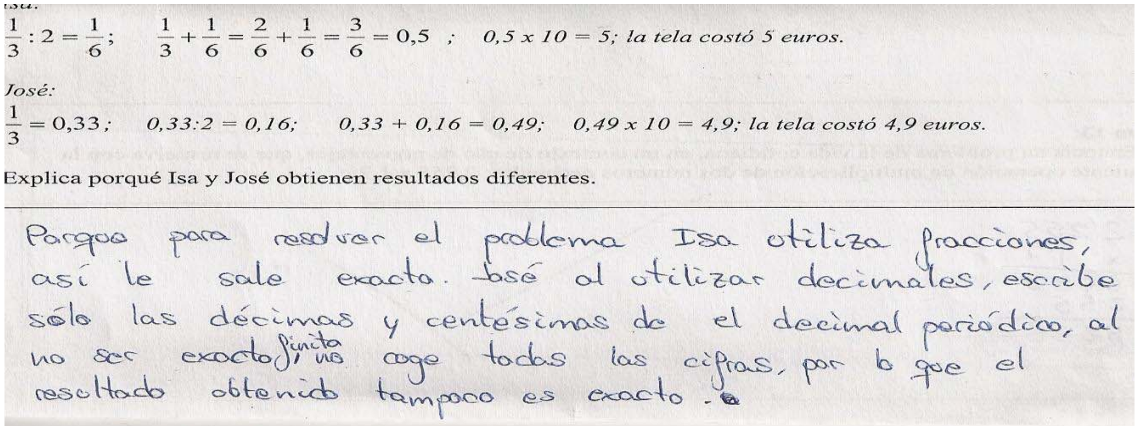
Figura 1. Caso representativo del tipo de conflicto 1 (variable 11V3)

Una cuestión aún más curiosa es pensar que si se resuelve un problema por vías diferentes necesariamente el resultado será diferente. Otra vez se observa una desvinculación entre los procesos conceptuales, operacionales y argumentativos dados en la situación-problema.

Conclusiones sobre la aplicación del ítem

El tipo de conflictos señalados dan cuenta que la raíz del problema de la precisión, en este caso particular y en muchos casos en general, reside en no controlar conceptualmente el tipo de número con el que se está operando y las limitaciones que conlleva su uso de un modo o de otro. Precisamente cuando se trata de un problema contextualizado (ya sea de la vida real o intramatemático), "los conceptos son más importantes que las reglas implícitas que pudieran existir" (Nowlin, 2007, p.359). Las limitaciones se hacen presentes fundamentalmente en la vida cotidiana y en especial en la enseñanza obligatoria. Esto da origen, a la hora de operar, a conflictos conceptuales del tipo visto a partir de la evaluación del presente ítem. El considerar, por ejemplo, que "se obtiene mejor resultado si se da una aproximación de un número que si se utiliza el propio número", es más que una evidencia de lo que se informa.

Una comprensión efectiva de las dos formas de resolución del problema se puede corroborar en el 48% de estudiantes de la muestra. Esto demuestra capacidad para examinar y comprender formas diferentes de resolver el problema. Característica esta esencial del *conocimiento especializado de un contenido.* Pero también se puede observar que existe una comprensión de la razón por la cual los niños hacen uso de este tipo de conocimientos. Esto expresa presencia del *conocimiento del contenido y estudiantes.* Ambos tipos de conocimiento, en esta tarea, se ven estrechamente ligados (Fig. 2).



Isa:

$\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0,5$; *0,5 x 10 = 5; la tela costó 5 euros.*

José:

$\frac{1}{3}=0{,}33$; *0,33:2 = 0,16; 0,33 + 0,16 = 0,49; 0,49 x 10 = 4,9; la tela costó 4,9 euros.*

Explica porqué Isa y José obtienen resultados diferentes.

Porque para resolver el problema Isa otiliza fracciones, así le sale exacto. José al utilizar decimales, escribe sólo las décimas y centésimas de el decimal periódico, al no ser exacto/finita, no coge todas las cifras, por lo que el resultado obtenido tampoco es exacto.

Figura 2. Caso representativo de presencia de Conocimiento especializado del contenido y del contenido y estudiantes.

Conclusiones generales

En relación a la construcción del instrumento se puede concluir que el proceso realizado y las herramientas utilizadas permitieron analizar, a priori, la complejidad de objetos y significados puestos en juego en la resolución de las 13 situaciones-problemas (ítems) que integraron el instrumento. El análisis de su aplicación posibilitó describir, a posteriori, características de los significados personales de los estudiantes para profesor sobre los números decimales y sus representaciones. El análisis pormenorizado de dichos significados permitió revelar que los estudiantes de la muestra, manifiestan importantes carencias cognitivas vinculadas a las cuatro categorías del conocimiento consideradas [conocimiento del contenido (en su tres tipos) y conocimiento del contenido y estudiantes].

Se ha evaluado, entre otras cosas, que:

- La concepción de número decimal que manifiestan carece de la riqueza global necesaria para afrontar decisiones a la hora de iniciar y desarrollar este tema en la escolaridad elemental (conocimiento común y especializado del contenido)
- Las expresiones decimales, uno de los elementos claves del estudio, parecen ser todas del mismo tipo, sin conciencia significativa de la entidad numérica que representan o dejan de representar (Conocimiento común del contenido).
- En el ámbito de las propiedades, en muy pocos casos, se pueden encontrar evidencias de una visión integral que da cuenta de un adecuado conocimiento de la densidad (conocimiento común y ampliado del contenido).
- Las características que posee un número (conocimiento común del contenido), como así también los procesos de construcción de conocimiento de los niños (conocimiento del contenido y estudiantes), son aspectos que aparecen difusos.

- La capacidad de cuestionamiento a la precisión de ideas matemáticas en la descripción de una situación, y el disponer de justificaciones pertinentes para explicar un algoritmo resultan claramente conflictivos (conocimiento especializado del contenido).
- Demuestran dificultad en la argumentación. La búsqueda exhaustiva de casos posibles y algunos procesos de generalización no son comprendidos (Conocimiento especializado del contenido).

El instrumento construido y los conocimientos aportados son recursos que pueden orientar el diseño y evaluación de acciones formativas de futuros profesores de educación primaria sobre el contenido específico investigado.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 2: From Rationals to Decimals. *Journal of Mathematical Behavior 26*(4), 281-300.

Cramer, K., Wyberg, T. y Leavitt, S. (2009). *Rational number project. Fraction, operations and initial decimal ideas*. Recuperado el 14 de junio de 2010 http://cehd.umn.edu/rationalnumberproject

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal of Mathematics Education 39*(1-2),127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudios de las matemáticas. *Paradigma* 27(2), 221-252.

Hill, H., Ball, D. y Schilling, G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education* 39(4), 372-400.

Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada. España.

Lachance, A. y Confrey, J. (2002). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *Journal of Mathematical Behaviour* 20, 503-526.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Thales.

Nowlin, D. (2007). Precision: The neglected part of the measurement standard. *Mathematics Teacher* 100(5), 356-360.

Steinle, V. Stacey, K. y Chambers, D. (2006). *Teaching and learning about decimals*.

[CD]. The University of Melbourne. Australia.

EMPLEO DE MÚLTIPLES REPRESENTACIONES PARA FORTALECER EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Alma Alicia Benítez Pérez
CECyT 11 "Wilfrido Massieu" - IPN México
albenper@gmail.com

Resumen. El presente trabajo fue la culminación de dos investigaciones (20100459 y 20110397), en las cuales se analizó y discutió el Marco Teórico de las competencias matemáticas para el nivel medio superior (NMS), las ideas desarrolladas en los referentes teóricos, sirvieron como ejes para diseñar y aplicar estrategias didácticas que beneficiarán el fortalecimiento de habilidades y destrezas en el alumno, empleando la exploración de múltiples representaciones para impulsar el desarrollo de las competencias matemáticas en dos grupos de estudiantes del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT´s) del NMS que cursaban la unidad de aprendizaje de Cálculo Integral y cuyo objetivo fue identificar y caracterizar las competencias desarrolladas. Para observar e identificar dichos procesos se emplearon métodos cualitativos (observaciones en clase, videograbaciones, reportes escritos y tareas extraclase). A nivel de hallazgo hay un desarrollo de competencias matemáticas, así como un desempeño en el uso de conceptos.

Palabras clave: competencias matemáticas, representaciones, contextos simulados

Abstract. This work was the culmination of two investigations (20100459 and 20110987), in which were analyzed and discussed the theoretical framework of mathematical competencies for high school (NMS), the ideas developed in the theoretical, served as axes for design and implement instructional strategies that benefit the strengthening of skills and abilities in students, through the exploration of multiple representations fostering the development of mathematical competencies in two groups of students of the Centre for Science and Technology Studies (CECyT's) of NMS that coursed the learning unit of integral calculus and whose objective was the identification and characterization of the competencies developed. To observe and identify those processes were employed qualitative methods (classroom observations, videotapes, written reports and extracurricular tasks). A discovery level there is a math skill development and performance in the use of concept.

Key words: mathematics skills, representations simulated contexts

Introducción

En los programas de estudio de matemáticas de los CECyT´s y en particular en el CECyT 11 "Wilfrido Massieu", se menciona la importancia de preparar al estudiante para que desarrolle competencias en las que el proceso metodológico debe reflejar la aplicación de los conceptos y procedimientos, cuyos resultados justifiquen la solución de diversos problemas relacionados con los ámbitos académico, social y global. Sin embargo, en la actualidad el aprendizaje de la matemática es crítico, resaltando como uno de los indicadores el bajo rendimiento escolar, a fin de minimizar este estancamiento, debe incorporarse estrategias que permitan impulsar y fortalecer las competencias en matemáticas que permitan al alumno mostrar su saber hacer de manera reflexiva, utilizando el conocimiento que adquiere durante el proceso para transferir el aprendizaje a situaciones similares y diferentes. Ante esta situación surge la siguiente interrogante ¿Beneficia la implementación de estrategias didácticas para impulsar el desarrollo de competencias matemáticas empleando la exploración de múltiples representaciones en problemas contextualizados?, cuyo propósito fue identificar y categorizar las competencias matemáticas adquiridas.

Competencias en matemáticas

La matemática escolar se asume en un contexto sociocultural y por ende los objetos de la matemática pueden tener múltiples sentidos. Esto hace posible reconocer objetos propios de la matemática escolar, distintos de los objetos de la matemática disciplinar, pues los objetos de la primera están en proceso de construcción. Se concibe además que la resolución de problemas en la escuela como un contexto en el que pueden ser enseñados, aprendidos y evaluados los conceptos, procedimientos, destrezas y estrategias y más aún donde puede manifestarse "el hacer matemáticas" con sentido. El concepto de competencia implica entonces la idea de una mente activa y compleja y por tanto la de un sujeto productor. Un sujeto que trabaja el conocimiento y los saberes que recibe, a partir de lo que posee y de lo que le es brindado desde su entorno. El significado de competencia en el contexto del aprendizaje de matemáticas se asocia a lo que la gente hace con objetos matemáticos, relaciones, estructuras, procedimientos, formas de razonamiento. Es decir, representa la construcción personal, en el sentido de uso del conocimiento, lo que hace el estudiante con lo que conoce. Por lo anterior, se entiende por competencia matemática la capacidad de administrar nociones, representaciones y utilizar procedimientos matemáticos para comprender e interpretar el mundo real. Esta noción ampliada de competencia está relacionada con el *saber qué*, el *saber qué hacer* y *el saber cómo*, *cuándo* y *por qué hacerlo*. Por tanto la precisión del sentido de estas expresiones implica una noción de competencia estrechamente ligada tanto al hacer como al comprender. Por lo que puede re-interpretarse como potentes precursores del discurso actual sobre las competencias la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, Novak y Hanesian (1983) y la de la enseñanza para la comprensión de Perkins (1999), Gardner (1999), Wiske (1999) y otros. En la primera, la significatividad de aprendizaje no se reduce a un sentido personal de lo aprendido, sino que se extiende a su inserción en prácticas sociales con sentido de utilidad y eficiencia. En la segunda, la comprensión se entiende explícitamente como relacionada con los desempeños de comprensión, que son actuaciones, actividades, tareas y proyectos.

La presente investigación se ubica en la unidad de aprendizaje de Cálculo Integral, la cual pertenece al área de formación Científica, Humanística y Tecnológica Básica del Bachillerato Tecnológico perteneciente al NMS del Instituto Politécnico Nacional, cuyo plan de estudio se basa en estándares de aprendizaje planteados en las competencias disciplinares, teniendo como principales objetos de conocimientos: la integral indefinida, los métodos de integración y la integral definida, para movilizar diferentes capacidades relacionadas con: analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales, razonar correctamente en forma deductiva e inductiva; representar abstraer, relacionar, clasificar y aplicar conocimientos del Cálculo Integral para identificar y resolver problemas teóricos y reales utilizando diferentes lenguajes de representación: verbal, gráfico y/o simbólico.

Marco de referencia

Los programas de estudio a nivel bachillerato y particularmente los programas de los CECyT´s (Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos, área Físico- Matemáticas), mencionan la importancia de promover las habilidades del pensamiento; análisis, interpretación y síntesis, así como la elaboración de conjeturas, argumentación, abstracción y generalización; y en este sentido, las representaciones adquieren un papel importante, pues de ellas depende las estructura cognitiva en el estudiante.

Diversas han sido las investigaciones para analizar el desempeño que tiene las representaciones en el aprendizaje de la matemática, así como el estudio de la influencia que posee el manejo de varias representaciones para lograr la aprehensión de un objeto matemático. Los trabajos desarrollados por Kaput (1991), Goldin y Kaput (1996), Duval (2000) y Parnafes y diSessa (2004), respectivamente han destacado con mayor precisión el papel que desempeña emplear varios sistemas de representación en el proceso de la adquisición de un concepto, aunque sus posiciones no coincidan en su totalidad. Así, Kaput (1991) basa su análisis en la tradicional estructura del signo lingüístico tradicional, pero además amplia esta posición, ya que establece la relación entre lo que él llama notación A y su referente B, y aclara que todo puede ser expresado en forma material e incluso su correspondencia (posiblemente), pero sus relaciones se desarrollan únicamente a nivel mental (Goldin y kaput, 1996), actividad que adquiere un papel decisivo en la construcción de conceptos matemáticos. La tecnología, tales como: calculadoras graficadoras que entre sus atributos, son capaces de establecer los enlaces entre lo analítico o simbólico, lo gráfico y las representaciones en forma de tablas, para el caso de las funciones, proporciona una valiosa herramienta para ayudar a la comprensión de los estudiantes en desarrollo del álgebra (Kaput, 1993; Kaput, Noss y Hoyles, 2002). No obstante, Duval (2000) considera que las condiciones cognitivas internas de un sujeto para lograr la aprehensión del concepto, se enfocan en el desarrollo y fortalecimiento de "La Arquitectura Cognitiva", a través de una organización sólida de diferentes sistemas semióticos. Esta se logra cuando los sistemas de representación semióticas, adquieren el rango de registros semiótico, pues se habla de los sistemas de producción necesarios en toda representación, y de las transformaciones que pueden tener, tratamiento y conversión.

Duval plantea la siguiente pregunta: "¿Cuáles son las condiciones cognitivas internas requeridas para que cualquier estudiante pueda entender matemáticas?" (Duval, 2000, p. 61), en la expone las condiciones cognitivas para que el estudiante pueda resolver tareas que requieran el empleo de al menos dos representaciones. La coordinación de varios sistemas semióticos, es una actividad cognitiva que es fundamental para el entendimiento de la matemática, pues requiere su organización.

Bajo estas condiciones el aprendizaje de la matemática significa integrar en la Arquitectura Cognitiva todos los registros semióticos, así como nuevos sistemas de representación, para su coordinación. Ello implica la necesidad de considerar la actividad cognitiva de Conversión, una tarea fundamental en el proceso para lograr la aprehensión del objeto, y por consecuencia el fortalecimiento de la Arquitectura Cognitiva, lo cual contribuye a crear y desarrollar habilidades en el estudiante para enfrentar nuevos retos en su formación.

Metodología

Los participantes del estudio fueron 2 grupos de 45 alumnos cada uno del CECyT 11 "Wilfrido Massieu", que cursaban la unidad de aprendizaje de cálculo integral y cuyas edades fluctuaban entre los 17 y 18 años. La duración de la experiencia fue de 18 semanas.

Las observaciones se desarrollaron en dos niveles: global y específico. El primer nivel se orientó a registrar los siguientes eventos:

a) Bitácora del curso. Al término de cada clase el investigador anotaba los hechos más relevantes durante la sesión, posteriormente la información era analizada para la siguiente sesión, en particular, se tenía especial atención a las actividades que presentaron dificultad durante su desarrollo, las cuales se utilizaban como base para la discusión con el grupo.

b) Grabaciones de las clases, específicamente cuando los equipo exponían su trabajo ante el grupo, para validar sus procedimientos y resultados.

c) Reportes escritos y tareas extraclase.

A nivel específico la observación se dirigió a examinar con mayor detalle los procesos que lleva a cabo cuando se les solicita enfrentar una situación contextualizada para emplear e identificar el contenido en las diferentes representaciones.

La triangulación de la información se llevó a cabo desde distintas perspectivas para fortalecer la credibilidad en los resultados e interpretación del estudio. Lo anterior se llevó a cabo a través de identificar los hallazgos que se encontraron en la fuente A (reporte escrito individuales), fuente B (discusión grupal), fuente C (reportes escrito de equipos, fuente D (tareas extraclase) y también puedo corroborarse con la fuente E (observaciones en clase), permitiendo comparar información proveniente de diferentes escenarios.

Dinámica de trabajo en el aula. La clase se organizó en equipos de 4-6 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionando que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución. Una vez terminada la tarea, los equipos presentaban un reporte escrito. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionaba un equipo para exponer su trabajo al grupo. Esta dinámica fue implementada durante todo el curso.

Estrategia de Aprendizaje. El diagrama de V de Gowin es un recurso diseñado para ayudar a los alumnos y profesores a captar el significado de los materiales que se van a aprender, es un diagrama que sirve como herramienta para analizar algún trabajo y ver lo más importante del tema. El diagrama V es una herramienta que ayuda a entender y a aprender, éste diagrama muestra que los acontecimientos objetos que serán estudiados, están en el vértice de la V, puesto que se considera que es donde se inicia la producción del conocimiento. Los métodos, estrategias e instrumentos para la implementación de la investigación que posibilitaran la respuesta a las preguntas centrales y la comprensión el acontecimiento estudiado, quedarán expresados en los registros, transformaciones y las afirmaciones de conocimiento. El alumno tiene que evidenciar las estrategias de búsqueda a la solución del problema como son: medios-fin, búsqueda hacia atrás, subtemas, analogías y relaciones, representaciones y ensayo-error. Para que se adquieran herramientas en la resolución de problemas, se tiene debe considerar un dominio teórico (conceptual) que se intenta poner de manifiesto a través de un procedimiento heurístico; V de Gowin (Morales, 1998).

Diseño de las Actividades. Para el diseño de los diferentes contextos simulados se atendieron los significados que incorpora el objeto matemático, además de identificar las habilidades cognitivas, destrezas, y actitudes a desarrollar en las competencias matemáticas. Para ello el contenido de los contextos simulados se presentaron en forma: textual, gráfica, y numérica, atendiendo la interpretación y exploración que el alumno desarrolla durante el proceso, realizando previamente un análisis del contenido matemático a tratar en el curso: lenguaje algebraico, ecuaciones y funciones, permitiendo el planteamiento de modelos lineales y cuadráticos en contextos simulados.

Tipo de Actividades. Una característica de las actividades fue presentar una situación del mundo real simulada para que el alumno, a través de sus conocimientos previos, explore los conceptos matemáticos nuevos, identificando la información que proporciona la situación para construir la expresión algebraica que modela dicho evento. En particular se expone el desarrollo de un contexto simulado.

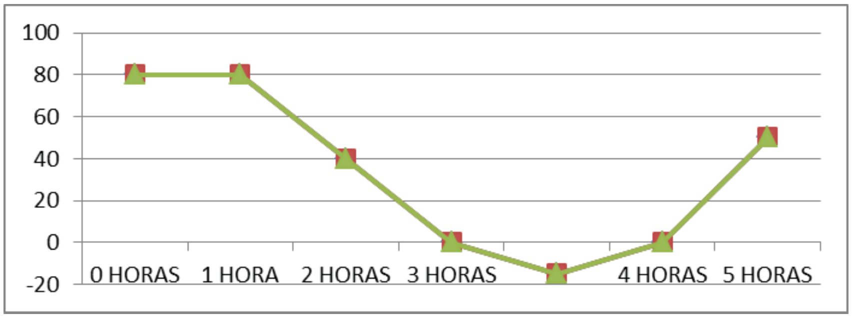


Figura 1. De San Luis a Querétaro

La gráfica muestra la velocidad de un automóvil que se desplaza a lo largo de una carretera rectilínea de San Luis a Querétaro. En el instante cero el automóvil estaba en San Luis.

- Escribe un párrafo breve que describa lo que el automóvil hizo durante las cinco horas.
- Traza la gráfica de la distancia que separa al automóvil de San Luis versus el Tiempo durante estas cinco horas.
- Grafica de la distancia que separa al automóvil de San Luis versus el tiempo durante éstas 5 horas
- En que instante de las 5 horas estuvo el automóvil más cerca de Querétaro
- Si la distancia de San Luis a Querétaro es de 202 Km, ¿llega el automóvil a Querétaro en estas cinco horas? Explica.

Análisis de datos

Las siguientes preguntas sirvieron como guía para organizar y analizar la información, permitiendo dirigir la atención a ciertos aspectos del fenómeno que más interesaba observar.

1.- ¿Hasta qué punto las actividades diseñadas favorecieron el desarrollo de las competencias matemáticas?

2.- ¿Se pueden identificar niveles en las competencias matemáticas desarrolladas durante el proceso de resolución de la situación en los estudiantes?

Los primeros acercamientos del estudiantes se enfocaron a la identificación de la información y entendimiento de la situación a través de dibujos y gráficas, ligados a la percepción intuitiva de la situación. En un segundo momento los alumnos ya habían visualizado la información de la situación, específicamente en la descripción del desplazamiento del automóvil al término de las 3 horas, para interpretar la cuarta hora. El reconocimiento era importante dado que podría colocarse en otra perspectiva al observar y examinar las gráficas, lo que contribuyó al análisis del movimiento del automóvil cuando la velocidad era negativa, hallazgo que benefició reconocer nuevos aspectos y reexaminar la situación original, superando las dificultades que se habían presentado, y así identificar las características, a su juicio, más relevantes en la gráfica. Para ello emplearon tratamientos cuantitativos y cualitativos que permitieron dar sentido a la situación contextualizada y exponer las condiciones para los intervalos que presentó el automóvil durante el recorrido comprendido en las 5 horas, así como las velocidades que experimenta el móvil durante su recorrido.

Durante el proceso aparece entrelazado el seguimiento, es decir surge una idea o conjetura la cual fue discutida, a través de las representaciones, para examinar la situación desde diferentes aspectos, lo que contribuyó al fortalecimiento de sus argumentos durante el análisis de los datos identificados. Información que fue analizada, organizada y sistematizada empleando los conceptos de: integral definida, definición de derivada, y las leyes de Newton para construir el modelo matemático del evento. Es importante mencionar que cuando el estudiante no está familiarizado o no ha explorado el contenido de las representaciones, está clara en desventaja en cuanto a su interpretación y la restricción de los recursos para analizar su contenido y en consecuencia su estructura conceptual se ve limitada. La tabla 1 muestra los niveles de competencias identificados.

Niveles	**Aprendizaje**	**Descripción**
Nivel Cero	Aprender a saber	Conocimientos Aislados
Nivel Uno	Aprender a conocer	Reconoce elementos de cada área y los articula
Nivel Dos	Aprender a hacer	Comunica los hallazgos identificados durante la situación contextualizada
Nivel Tres	Aprende a emprender	Argumenta sus conjeturas en el contexto y expone propuestas sustentadas.
Nivel Cuatro	Aprende a ser	Descontextualiza el problemas para abstraer el concepto matemático

Tabla 1

Competencias identificadas fueron: a) Reconoce las gráficas de las distintas funciones, b) Identifica las distintas operaciones con funciones, c) Reconoce la existencia de límites de funciones, d) Aplica correctamente el procedimiento para el trazado de gráficas de funciones, e) Interpreta la información gráfica, f) Resuelve situaciones problemáticas utilizado propiedades y conceptos matemáticos estudiados, g) Interpreta y Define funciones que modelen situaciones problemáticas, h) Elabora correctamente ejemplos y contraejemplos, I) Obtiene resultados razonables en situaciones problemáticas, J) Expresa conceptos en distintos lenguajes (coloquial, gráfico, algebraico, K) Elabora correctamente gráficas considerando determinadas condiciones.

Conclusiones

- En la fase inicial de la experiencia, se manifestaron dos patrones: la visión calculista y la cualitativa. La primera persistió en las primera actividades, sin embargo, a medida que los estudiantes trabajaban en las diferentes tareas se notó un cambio hacia la atención de los aspectos cualitativos.
- Algunos estudiantes no trascendieron el nivel aritmético en el seguimiento de la situación.
- El uso de múltiples representaciones favoreció al estudiante en la identificación de las relaciones matemáticas y en la conexión de la información.
- Al parecer, las mayores dificultades de los alumnos radica en la expresión de conceptos en distintos lenguajes, la resolución de situaciones problemáticas utilizando propiedades y conceptos ya estudiados y en la aplicación de algunos conceptos y procedimientos.
- La manera en que se organizaron las actividades en el curso, es decir, trabajo en equipo, exposiciones y discusión grupal, fue un escenario importante para el desarrollo de las competencias matemáticas, favoreciendo la atención a las relaciones matemáticas de la situación contextualizada, la conexión de información, el uso de diferentes representaciones y el empleo de un lenguaje preciso para expresar las ideas matemáticas.
- Impulsar las competencias matemáticas dota al estudiante de oportunidades para realizar prácticas que ligan los conceptos teóricos con la práctica profesional en el contexto que le rodea.

Agradecimiento. La autora agradece el apoyo otorgado por la Secretaría de Investigación y Posgrado a través de las investigaciones con números de registro; 20100459 y 20110397.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa, Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas Editores.

Declaración mundial sobre la educación superior en el siglo XXI: Visión y acción. (sf). Recuperado el 13 de mayo de 2012 de http://www.unesco.org/education/educprog/wche/declaration_spa.html

Duval, R. (2000), Basic Issues for Research in Mathematics Education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the* 24^{nd} *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. I, 55-69, Japan.

Garder, H. (1999). *La Educación de la mente y el conocimiento de las disciplinas*. Barcelona, España: Paidós.

Goldin, G. y Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, and B. Greer (Eds.). *Theories of mathematical learning* (pp. 987-439), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1991) Notations and Representations as Mediators of Construct Live Processes. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education,* 53-74. Dordrecht: Kluwer A. P.

Kaput, J. (1993). The Urgent Need for Proleptic Research in the Representation of Quantitative Relationships. In T. Romberg, E. Fennema y T. Carpenter (Eds.). *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*, 279-311. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J., Noss, R. y Hoyles, C. (2002). Developing New Notations for a Learnable Mathematics in the Computation era. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 51-75). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Morales, E. (1998). Efectos de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático delos alumnos de 9° grado de educación básica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 1(2), 77-91.

Parnafes, O. & diSessa, A. (2004). Relations between patterns of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for the Mathematics Learning:* 9, 251-280.

Perkins, M. (1999). ¿Qué es la comprensión?. En M. Stone (Comp), *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 2-7), Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Wiske, M. (1999). ¿Qué es la enseñanza para la comprensión?. En M. Stone (Comp). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 14-27), Buenos Aires, Argentina: Paidós.

EVALUACIÓN DEL DESARROLLO DE COMPETENCIAS EN EL BACHILLERATO. UN ESTUDIO CON SITUACIONES QUE INVOLUCRAN LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN

Gloria Angélica Moreno Durazo, Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora México
angelicadzo@hotmail.com, guty@gauss.mat.uson.mx

Resumen. En los últimos años en México la enseñanza obligatoria ha seguido un modelo basado en competencias. En estudios como López (2011), se muestran las limitaciones en su aplicación y el poco conocimiento de los profesores sobre el mismo.

Reportamos aquí una investigación realizada para analizar si los estudiantes de bachillerato están desarrollando las competencias matemáticas específicas estipuladas en los programas oficiales, basándonos en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994) y tomando como referencia a Rubio (2012).

Palabras clave: integral, competencia, aprendizaje, enfoque ontosemiótico

Abstract. In the last years in México, the mandatory education has followed a competency-based model. In studies such as López (2011), limitations about its complications are remarked, and the insufficient knowledge of teachers in the matter.

We report an investigation performed for analyzing whether high school students are actually developing the specific math competence stipulated in official programs, basing ourselves in the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction (Godino y Batanero, 1994) and taking Rubio (2012) as a reference.

Key words: integral, competence, learning, onto-semiotic approach

Introducción

Con la implementación de diferentes reformas educativas en México la educación obligatoria (hasta el bachillerato), y en algunos casos la educación superior, sigue un modelo basado en competencias. Lo cual, aunado a las pocas investigaciones sobre el desarrollo de competencias, justifica la realización de este tipo de investigaciones.

En la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS) se establecen las competencias esperadas en los estudiantes que egresan de este nivel educativo, particularmente se establecen ocho competencias matemáticas (SEP, 2008). Nuestro principal objetivo es identificar cuáles de las competencias disciplinares en el área de Matemáticas, y en qué medida, son desarrolladas por estudiantes del bachillerato.

Elementos teóricos

En la Educación Media Superior se aplica la Evaluación Nacional de Logro Académico (ENLACE) cuyo interés es evaluar en los estudiantes las competencias disciplinarias básicas de los campos de comunicación (comprensión lectora) y Matemáticas. Por otro lado, López (2011) realiza una evaluación de la implementación de la RIEMS en el Colegio de Bachilleres del

Estado de Sonora, donde se muestra la poca familiaridad de los profesores con el modelo educativo basado en competencias.

Existen investigaciones que presentan modelos para la evaluación de competencias matemáticas, entre ellos, encontramos el planteado por Rubio (2012). En éste, se evalúan las competencias matemáticas definidas en el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) analizando la respuesta de un estudiante a una situación problema. Este modelo consta de los siguientes pasos:

I. Resolver el problema.

II. Hacer un análisis del problema destacando algunas acciones, objetos y procesos.

III. Para cada una de las ocho competencias decidir, a partir del análisis realizado en el punto 2, si la competencia es de reproducción, conexión y reflexión.

IV. Asignar el problema a uno de los tres grupos, según el nivel que hayamos determinado a las diferentes competencias.

En la siguiente tabla mostramos las competencias matemáticas que nos interesa evaluar (definidas en la RIEMS). También mostramos la correspondencia que establecemos entre estas competencias y las definidas en PISA, lo que nos permite utilizar el modelo de Rubio.

Competencias matemáticas definidas en PISA	**Competencias matemáticas definidas en la RIEMS**
Modelar	Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
Plantear y resolver problemas	Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
Comunicar	Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
Argumentar	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
Pensar y razonar	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
Representar	Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
Pensar y razonar	Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones	Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Tabla 1. Correspondencia entre competencias matemáticas en PISA y en la RIEMS.

El desarrollo de la investigación se acoge a los criterios establecidos en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), este enfoque cuenta con cinco niveles de análisis para describir, explicar y valorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

1) Análisis de las prácticas matemáticas.
2) Análisis de objetos y procesos matemáticos.
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos.
4) Identificación de normas y metanormas.
5) Valoración de la idoneidad didáctica.

Siguiendo a Rubio (2012) utilizamos los niveles 1) y 2). Esto es, basándonos en las respuestas que el estudiante da a las situaciones problema determinamos qué prácticas matemáticas, objetos matemáticos y procesos matemáticos intervinieron en la solución del problema y, de esta manera, valorar el nivel de desarrollo de la competencia matemática.

En el EOS, práctica matemática es considerada toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994).

Los objetos matemáticos se definen como emergentes del sistema de prácticas, considerando: elementos lingüísticos, situaciones problema, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos como objetos primarios. Los procesos matemáticos no son definidos en el enfoque, si no que, se proporciona un listado de los procesos considerados importantes en la actividad matemática: institucionalización, personalización, generalización, particularización, descomposición, reificación; materialización, idealización, representación, significación.

Elementos metodológicos

La evaluación se aplicó a 8 estudiantes del sexto semestre en el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios 206, los estudiantes pertenecen al grupo VI K con especialidad en administración donde toman clases 46 estudiantes. Para seleccionar a los estudiantes se detectaron aquellos que participaban en clase, pasaban al pizarrón a resolver las situaciones problema y, lo hacían de manera correcta.

Para evaluar las competencias matemáticas desarrolladas por los estudiantes, se diseñó un instrumento de evaluación y, posteriormente, se realizó el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a las situaciones problema presentes en este instrumento. A continuación se describen estos procesos.

Proceso de elaboración del instrumento de evaluación: La evaluación escrita consta de 9 situaciones problema en la que se involucra la integral definida en su solución, clasificadas según el grado de complejidad. El nivel de reproducción lo constituyen las situaciones problema que fueron abordadas en clase, estas son: el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje *x* en un intervalo *[a, b],* el cálculo del área comprendida entre las gráficas de dos funciones.

El nivel de conexión lo constituyen las situaciones problema que involucran la integral definida en su solución pero el contexto en el que se desarrollan es distinto al abordado en clase, estas son: el cálculo de la capacidad de un tanque, el cálculo de la distancia recorrida por un objeto, el cálculo de las ganancias de una empresa, entre otras. Para el nivel de reflexión se incluyó solamente una situación problema que aparte de generar la necesidad del uso de la integral definida, se tenga que recurrir a otros objetos matemáticos.

Con el fin de obtener mayor información de los estudiantes una vez que se aplica la evaluación escrita, se entrevista a los estudiantes de manera individual. En la entrevista se incluyen cuestiones para clarificar la metodología usada por los estudiantes o para ver si con algunas pistas los estudiantes implementan procedimientos para resolver los problemas.

Proceso de análisis: Se hizo un análisis sobre las respuestas proporcionadas por los estudiantes, en las cuales, como dice el modelo de Rubio (2012) identificamos los siguientes elementos: las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos y los procesos matemáticos intervinientes.

En el documento difundido por INECSE (2004) se proponen para las competencias definidas en PISA descriptores para cada nivel de desarrollo: reproducción, conexión y reflexión. La correspondencia presente en la tabla 1 nos permite asociar estos descriptores a las competencias definidas en la RIEMS y, utilizamos los elementos identificados en las respuestas de los estudiantes para seleccionar un descriptor para cada competencia.

Análisis de competencias matemáticas

Para clarificar lo anterior, presentamos un ejemplo del análisis realizado a las situaciones problema. Mostramos las prácticas matemáticas, los objetos y los procesos matemáticos identificados en la respuesta del estudiante y, usando estos elementos, seleccionamos un descriptor para asignarle el nivel de desarrollo a cada competencia matemática.

Problema. Un objeto se mueve con una velocidad $v(t) = 2t + 2\,m/s$. Calcula la distancia que recorre en 1 minuto.

Prácticas matemáticas

El estudiante realiza la lectura de la situación problema y produce de un texto como respuesta, siendo éste incorrecto (imagen 1). Durante la entrevista se le informa que cuando la velocidad es constante la distancia recorrida se puede calcular multiplicando la velocidad por el tiempo, por lo que, si graficamos la velocidad contra el tiempo calcular la distancia recorrida sería igual a calcular el área del rectángulo cuya base es el tiempo y la altura el valor de la velocidad. El estudiante contesta que en nuestro caso la velocidad no es constante, que para calcular la distancia recorrida se calcula el área bajo la curva y que para ello utiliza la integral, después la calculó sin mostrar el valor numérico debido a la falta de calculadora (imagen 2).

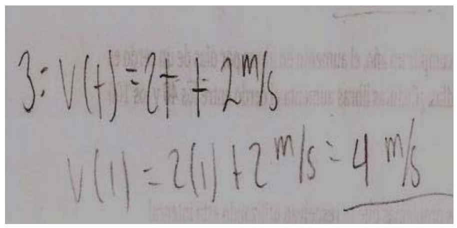


Imagen 1. Respuesta del estudiante

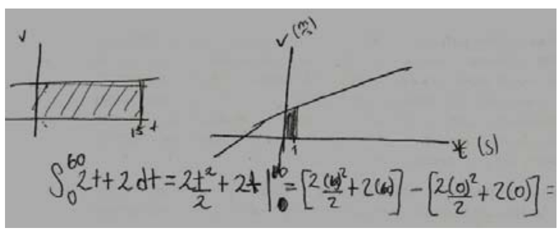


Imagen 2. Respuesta del estudiante (entrevista)

Objetos matemáticos

Situación problema. Ver problema.

Lenguajes. * Algebraico: usado para representar y calcular la integral definida.

* Las gráficas fueron proporcionadas por el entrevistador.

Conceptos-definiciones. Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones.

* El área comprendida entre la gráfica de la función $v(t) = 2t + 2$ y el eje *x* de x=0 a x=60 se calcular resolviendo $\int_0^{60}(2t-2)dt$.

* $\int_0^{60}(2t-2)dt = \frac{2t^2}{2} - 2t]_0^{60}$.

* Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos.

* Relacionar la integral definida con el cálculo de áreas.

* Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Argumentos. De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [0, 60] calculando $\int_0^{60}(2t-2)dt$.

Procesos matemáticos
* Proceso de significación de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].
* Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida.
* Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.
* Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].

Tabla 2. Identificación de prácticas, objetos y procesos matemáticos en una situación problema

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación", el cual sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las ha resuelto el estudiante en clase, ya que, el estudiante ha resuelto el problema una vez que se redujo al cálculo del área bajo la curva.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", el cual sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de procedimientos involucrados en la solución de la situación problema. Una vez que el problema fue reducido al cálculo de un área, el estudiante recurre al Teorema Fundamental del Cálculo para resolverlo.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", el cual sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. Encontramos el proceso de comunicación en el siguiente sentido: el estudiante entiende la situación problema en tanto proporciona una respuesta.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático. Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno. Aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular las preguntas más simples (¿cuántos?, ¿cuánto es?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)", el cual sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo. Los cuales han estado presentes en los problemas resueltos en clase, tipo de situación a la que fue reducida la situación problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación", el cual sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el hecho de que una vez reducido el problema al cálculo de un área el estudiante ha podido resolverlo.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente", el cual sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; una vez que el problema fue reducido al cálculo del área bajo la curva.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios", el cual sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el hecho que el lenguaje algebraico y numérico los ha utilizado anteriormente para resolver problemas de cálculo del área bajo la curva.

Conclusiones

En nuestro trabajo obtuvimos conclusiones de cada estudiante y otras de carácter general. Aquí, a manera de ejemplo sólo para este caso, diremos que el estudiante ha desarrollado competencias matemáticas, excepto la competencia cuatro, en el nivel de reproducción. Por otro lado, el modelo presente en Rubio (2012) sí se puede utilizar para evaluar las competencias matemáticas propuestas en la Reforma Integral de Educación Media Superior considerando la correspondencia que se establece con las competencias definidas en PISA.

Referencias bibliográficas

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado Institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo INECSE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas.* Madrid: MEC.

López, C. (2011). *Evaluación y propuesta para la mejora de la implementación de la Reforma Integral de Educación Media Superior en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, a partir de la Percepción de los Docentes.* Tesis de Maestría no publicada, Instituto de Formación Docente del Estado de Sonora UPN. México.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Tesis de Doctorado no publicada, Universitat de Barcelona. España.

Secretaría de Educación Pública SEP (2008). *Reforma Integral de la Educación Media Superior*. Recuperado al 01 de septiembre 2012 en http://www.reforma-iems.sems.gob.mx.

EXPLORACIÓN CUANTITATIVA DE LAS REPRESENTACIONES NUMÉRICA-GRÁFICA-ALGEBRAICA EN EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN

Alma Alicia Benítez Pérez
CECyT 11, "Wilfrido Massieu" - IPN México
albenper@gmail.com

Resumen. El presente trabajo muestra parte de los resultados de un proyecto de investigación desarrollado en el Instituto Politécnico Nacional, relacionados con el estudio de variación, concepto que es esencial para analizar diferentes fenómenos físicos y de la vida cotidiana empleando para ello la exploración múltiples representaciones a partir de tratamientos cuantitativos, cuyo objetivo fue analizar las diferentes estrategias que el alumno emplea cuando enfrenta situaciones que están ligados a la noción de variación. En particular el estudio se enfocó en la noción de función que es vista como modelo para el estudio de la variación, para lo cual se diseñaron actividades con el propósito de fomentar la exploración de tratamientos cuantitativos que beneficien la identificación del contenido en múltiples representaciones. La experiencia se realizó con alumnos del nivel medio superior que cursaban la asignatura de Álgebra, impulsando un ambiente de comunicación y discusión continua.

Palabras clave: representaciones, numérica, gráfica, algebraica, variación

Abstract. This paper shows some of the results of a research project at National Polytechnic Institute, related to the study of variation, a concept that is essential to be analyzed following different physical phenomena and daily life, in this exploration using multiple representations from quantitative treatment. Aimed at analyzing the different strategies that students used when facing situations that are tied to the notion of change, in particular the study focused on the notion of functions seen as a model for the study of variation. For activities which were designed in order to encourage exploration of quantitative treatment that benefit in identify in multiple representations of content. The experience was conducted with students from high school who attended the curse in Algebra, promoting an environment of continuous communication and discussion.

Key words: representations, numerical, graphical, variation

Introducción

Los programas de estudio de bachillerato destinan una importante cantidad de tiempo a la introducción de las funciones, a su manipulación algebraica y a sus representaciones gráficas. Se espera entonces que estos estudios fortalezcan el pensamiento variacional en el estudiante y por consecuencia el desarrollo del pensamiento: numérico, espacial, métrico y aleatorio, ya que permite impulsar otros tipos de pensamientos más propios de otras ciencias, en especial a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos.

La física y la ingeniería son ricas en situaciones donde aparece la variación proporcional, la velocidad que adquiere un cuerpo que cae bajo los efectos de la gravitación es, si se desprecia la resistencia del aire, proporcional al tiempo de caída. Si se aplica una fuerza a un resorte o un alambre, la elongación que resulta es, dentro de ciertos rangos, proporcional a la fuerza aplicada, etc. Bassein (1993) señala que la investigación efectuada para llegar a establecer leyes universales en fenómenos cambia para construir modelos, los cuales se representan en la forma de ecuaciones que expresan relaciones entre variables.

Investigaciones en el campo de la matemática educativa (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, 2002) reportan la existencia de dificultades entre los estudiantes para tratar con cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional. Otros estudios (García y Rivera, 2009) analizan las dificultades que presentan los estudiantes en la construcción e interpretación de gráficas, ya que no solo contribuyen a la comprensión del concepto de función sino que constituye una vía de construcción de ideas de variación.

En el bachillerato la variación se explora y analiza considerando dos cantidades x e y relacionándose de esta forma, lo que permite la construcción de valores y se estudia si el cociente $\frac{y}{x}$ toma siempre el mismo valor o valores muy próximos entre sí. También se puede construir una gráfica para ver si se obtiene una recta que pasa por el origen. Ocurre con frecuencia que dos cantidades x e y no son proporcionales, pero sí lo son sus incrementos. En este caso se tienen la relación; $y - y_0 = k(x - x_0)$ donde $x - x_0$ y $y - y_0$ denotan los incrementos de x e y respecto a x_0 e y_0 respectivamente. Esta relación define las funciones lineales, cuya gráfica es una recta en el plano cartesiano. Benítez (2010) identificó Secuencias Numéricas que caracterizan a los polinomios cuadrático y cúbico, señalando la importancia de tratamientos cuantitativos en la figura fondo, para generar secuencias numéricas, las cuales se identificaron globalmente. La discriminación se realiza a través de la "Covariación", la cual consiste en desplazamientos de y_m a y_{m+1} coordinados con desplazamientos de x_m a x_{m+1}, manteniendo la misma graduación en ambos ejes. Lo anterior favorece atender de manera particular el comportamiento de los valores numéricos, que se obtienen a través de los desplazamientos en las ordenadas y en la tabla numérica.

Si bien es cierto que la noción de variación no es un objeto explícito de enseñanza en el sentido de Chevallard, (2000) está claramente presente durante el proceso de formación del estudiante. Por lo cual el desarrollo del pensamiento variacional dadas sus características es lento y complejo, pero necesario para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre ellas. Además éste tipo de pensamiento da la oportunidad para formulación de conjeturas, la puesta a prueba de las mismas, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una propuesta generalizada.

Marco teórico

Hauger (1995) indica la conveniencia de desarrollar tres tipos de conocimientos de la razón de cambio, para que un estudiante identifique el comportamiento de una función. Razón de cambio global, en un intervalo y puntual. La razón de cambio global es concomitante con las propiedades generales de función como su monotonía. Hauger señala que estos tres tipos de conocimiento de la razón de cambio pueden ser examinados utilizando diferentes representaciones de las funciones, incluyendo gráficas, tablas de valores, ecuaciones y descripciones verbales.

Confrey y Smith (1994), quienes mencionan el uso de problemas contextualizados para introducir familias de funciones con esta aproximación los autores indican el desarrollo de estrategias del estudiante, como es la construcción de tablas de datos, que a menudo sirve como el primer punto de entrada a la situación problemática. Este proceso de iniciar con los datos se entrelaza con frecuencia con la construcción de las variables,como resultado, el estudiante construye la imagen de la función como la coordinación de los elementos dispuestos en dos columnas, de manera paralela el alumno puede insertar valores entre los datos dados, por ejemplo, si una columna se incrementa aditivamente por dos y la otra por seis, los alumnos asocian un cambio de uno con un cambio de tres, insertando los valores apropiados, para establecer la aproximación covariacional. Para Ferrari y Farfán (2008) la covariación se refiere a la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades, enfocándose al tipo de crecimiento que experimentan los elementos que intervienen para establecer su relación en la función logaritmo y para profundizar su análisis establecen comparaciones con las funciones polinomiales, en particular atienden la función cuadrática. Benítez (2004, 2010) identifica Secuencias Numéricas que caracterizan a los polinomios cuadrático y cúbico, señalando la importancia de tratamientos cuantitativos en la figura fondo, generando secuencias numéricas, las cuales se identificaron globalmente, así mismo Carlson et al. (2002) analizan la covariación para funciones.

Por su parte Duval (2002), menciona la importancia del análisis global para identificar el contenido de las representaciones, considerando fundamental modificar una variable visual en la gráfica para establecer la correspondencia con una variable categórica en la expresión algebraica, siendo entonces el punto central y decisivo en el aprendizaje de las representaciones gráficas la discriminación de los valores visuales y su coordinación con los valores categóricos de la expresión algebraica, atendiendo la discriminación de los valores visuales con relación a la figura-fondo. Benítez (2004) realizó el estudio desde la Interpretación Global del polinomio de segundo grado y menciona la problemática que presenta el polinomio cúbico, ya que considera exhaustiva su estudio, debido al comportamiento del trazo, obstaculizando la interpretación de las correspondientes variables visuales que experimentaban múltiples variaciones.

Metodología

La investigación reportada se ubica en un paradigma de investigación cualitativo. Las ideas desarrolladas en los referentes teóricos, sirvieron como ejes para diseñar y aplicar tres actividades, en las que los estudiantes identificaron, interpretaron y analizaron el comportamiento local y global de funciones, así como la variación proporcional y la identificación de variables. Estos elementos se consideran importantes en el estudio del Cálculo y fueron presentados en los párrafos anteriores.

Dinámica de trabajo en el aula. La clase se organizó en equipos de 4 a 5 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionando que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución, mientras el profesor participaba con los equipos como espectador. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionaba un equipo para exponer su trabajo al grupo. El criterio de selección consideró los diferentes puntos de vista, favoreciendo la discusión en el grupo, para aclarar dudas y superar posibles dificultades. La experiencia se realizó con 4 alumnos del nivel medio superior.

Los instrumentos utilizados para la recolección de datos durante la investigación fueron:

a) Reportes escritos elaborados en forma individual.

b) Reportes escritos elaborados por cada pareja de estudiantes.

c) Grabaciones en audio del trabajo de los estudiantes.

e) Reportes elaborados por el profesor-investigador.

La tesis inicial del presente trabajo es que, en los cursos del bachillerato, parecía haber una considerable distancia entre el uso de la regla de tres como un proceso mecánico y la noción de variación como un proceso de cambio, para ello se han desarrollado tratamientos cuantitativos en múltiples representaciones para evidenciar éste proceso.

Deseando entonces detectar cómo es el estado de desarrollo del conocimiento de los estudiantes en aspectos como:

- El empleo de la tasa variacional
- La identificación de variables

- El análisis cuantitativo para interpretar el contenido en las representaciones.

La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo de 40 alumnos (grupo 1IM3), del nivel medio superior (C.E.C.yT. 11, "Wilfrido Massieu") que cursaban el primer semestre del ciclo escolar, y cuya duración fue de 18 semanas. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15-16 años.Una de las características principales de las actividades fue proporcionar información al estudiante para explorar diversas representaciones y darle seguimiento. La información se presentaba en diversos contextos: tabla, gráfica, enunciados verbales, para explorar contenidos y establecer conexiones.

Análisis de datos

A continuación se describe el trabajo de 4 estudiantes,los cuales no habían participado anteriormente en esta forma de trabajo, modificando la práctica en el salón de clase, es decir, se impulsó la comunicación de ideas y la continua participación en clase.

Actividad

En un internado de estudiantes, cada estudiante puede contratar una de dos compañías Telmex cobra $87.5 por mes, más 80 centavos por llamada. AT&T cobra $82 por mes, más 90 centavos por llamada.

1. ¿Cuántas llamadas hace aproximadamente por mes?
2. Escribe, para cada compañía, la ecuación que representa el costo de un mes dado en función del número de llamadas.
3. Grafica cada una de las ecuaciones que escribiste en la pregunta 2.
4. Discute cómo se relacionan tus dos graficas con la solución del problema ¿Cuándo cobran lo mismo ambas compañías? ¿Cuándo conviene más Telmex? ¿Cuándo AT&T?

El trabajo fue desarrollado por cuatro alumnos; Cinthya, Alejandro, Brandon y Brenda. Inicialmente los estudiantes trabajaron de manera individual, particularmente, Cinthya se aisló e inició con una serie de cálculos sin comentar a sus compañeros sus procedimientos. Brenda comentó a Brandon el poder diseñar una tabla para obtener los primeros datos de la situación a través de realizar cálculos los cuales se muestran a continuación (Figura 1).

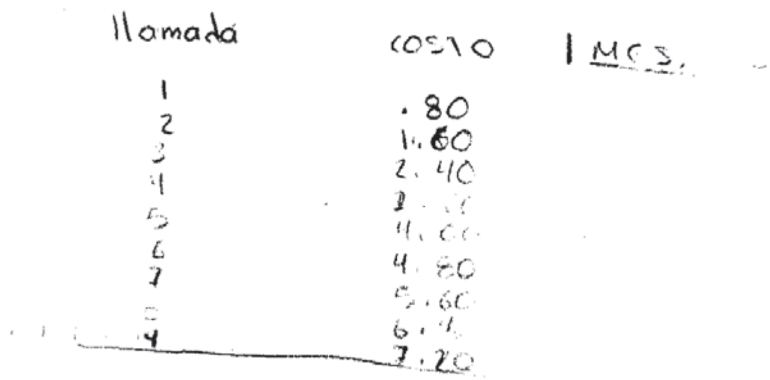


Figura 1. Construcción de la representación numérica, Brenda y Brandon.

En ese momento participa Cinthya y comenta la falta del cobro que realiza TELMEX ($87.5) y AT&T ($82), Brandon no identifica lo que menciona Cinthya, por lo que Brenda vuelve a dar lectura al problema y comenta la falta de dicha información generando la siguiente tabla numérica (Figura 2).

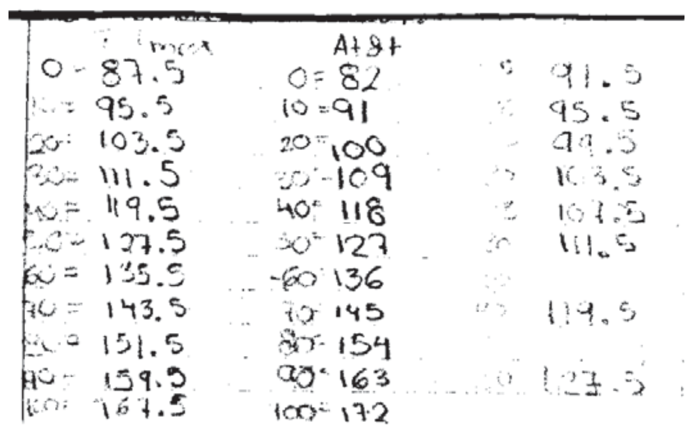


Figura 2. Tratamiento de la representación numérica expuesto por Cinthya.

Alejandro intervino cuando Brenda comenta la posible expresión algebraica que modela la situación (Figura 3),

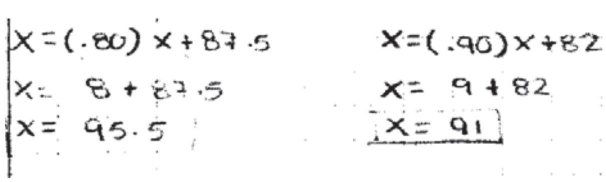


Figura 3. Construcción de la Expresión Algebraica de la Situación.

Los estudiantes inicialmente identificaron la variación que presenta el problema en cuanto al costo por llamada, pero ignoran el costo que presenta la renta del servicio, permitiendo a los alumnosgenerar una tabla en la cual se aprecian los cambios. Esta primera aproximación es valiosa en cuanto a la identificación de las variables denominadas "llamadas" y "costos", aunque ignoran la constante que presenta la situación que es la renta del servicio para cada compañía.

La participación de uno de los integrantes fue determinante, ya que en un segundo momento, al construir la segunda tabla, el equipo ignora lo realizado en la primera, y expone únicamente el valor de las llamadas en cada compañía de manera global, ocultando información valiosa en la variación que presenta cada una de las compañías. Posteriormente los alumnos exponen la determinación de uno de los valores (y = .80(10) + 87.5 y .90(10) + 82), el cual muestra la relación entre las columnas de manera explícita. Sin embargo cuando exponen las expresiones algebraicas que modelan la situación, los estudiantes exponen correctamente el comportamiento, no obstante las variables no son claramente expuestas, sino al contario presentan confusión para determinar la variable dependiente e independiente (y = .80(x)+87.5 y .90(x)+82).

Se puede afirmar que el trabajo de Cinthya, Alejandro, Brandon y Brenda se enfocó a la construcción de una tabla de valores, la cual emplearon como modelo dentro de una simple columna ignorando la coordinación de los elementos dispuestos en dichas columnas, para responder la primera pregunta relacionada con a la situación. Durante el segundo momento el equipo estableció la relación entre las columnas, es decir, presenta un tratamiento de tipo global, aunque al organizar la articulación entre las representaciones numérica y algebraica los estudiantes identifican algunas variables para establecer parcialmente las conexiones.

Discusión

De los resultados que se muestran en este documento, se puede inferir que la noción de variación en el nivel medio superior se presenta mediante la aplicación de la regla de tres simple como expone el equipo, siendo ésta la estrategia empleada durante sus exploraciones iniciales, esta actividades es señalada por Monroy G. y Velázquez R. (2009), ya que los escolares la aplican en forma mecánica, sin tener un pensamiento proporcional cualitativo. Estas ideas ayudan a comprender por qué el estudiante Brandon emite respuestas puntuales.

Por otra parte, la construcción de una tabla de valores, que a menudo sirve como el primer punto de entrada a la situación problemática, permite la construcción de las variables, además de señalar aspectos básicos que se desempeñan para examinar y sistematizar el valor de los datos, dando cuenta de esta actividad Cinthya, ya que identifica respectivamente las variables (dependiente e independiente) para interpretar, construir y describir las expresiones algebraicas que modelan el problema contextualizado para el caso de Cinthya.

Es importante destacar el empleo de diversas representaciones como lo señala Duval (2002) lo cual es expuesto en las actividades, ya que los estudiantes desarrollaron diversos tratamientos para identificar el contenido de las representaciones gráfica, simbólica, textual y gráfica, permitiendo la posibilidad de articular al menos dos representaciones.

Conclusiones

- Reconocimiento e interpretación de la tasa de variación constante, en situaciones contextualizadas, así mismo en funciones representadas gráfica, tabular y algebraicamente.
- Reconocimiento de la dependencia entre cantidades de magnitud.
- Buen desempeño algebraico.
- Reconocimiento gráfico de funciones no lineales.
- Reconocimiento de la tasa de variación media en contextos donde se interpreta como velocidad; así mismo, cuando se presenta en una representación tabular.
- En el desarrollo de las actividades se pudo observarse cómo la comprensión de la tasa de variación evolucionó en los estratos iniciales de manera diferente en cada estudiante.

Agradecimiento. La autora agradece el apoyo otorgado por la Secretaria de Investigación y Posgrado a través de la investigación con números de registro 20120794.

Referencias bibliográficas

Bassein, S. (1993). *An Infinite Series Approach to Calculus*. Houston: Publish or Perish, Inc.

Benítez, A. (2004). *Estudio Exploratorio sobre la Construcción de la Expresión Algebraica (El caso de polinomios), a través de la Interpretación Global de las Representaciones, Gráfica, Numérica y Algebraica.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Benítez A. (2010). Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3. *Revista Educación Matemática* 22(1), 5-22.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33(5), 278-352.

Chevallard, Y. (2000). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Editorial Aique.

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential Functions, Rates of Changes and the Multiplicative Unit. *Education Studies in Mathematics* 26(2-3), 135-164.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *North American Chapter of Psychology of Mathematics Education (*pp. 311-335). México: Cinvestav-IPN.

Ferrari, M. y Farfán, R. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11(3), 309-354.*

García, R. y Rivera, M. (2009). Un acercamiento a la variación por estudiantes de nivel medio superior y superior, basado en la modelación del movimiento. En P. Lestón (Ed.), *Actas Latinoamericanas de Matemáticas Educativa* 22, 755-764. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hauger, G. (1995). *Rate of change knowledge in high school and college students*. Recuperado el 18 de julio de 2010 de http://www.eric.ed.gov:80/ERICWebPortal/

Monroy G. y Vázquez R. (2009). Una exploración del discurso matemático del profesor. Un estudio etnográfico de larazón de cambio en educación secundaria. En P. Lestón (Ed.), *Actas Latinoamericanas de Matemáticas Educativa* 22, 1415-1422. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

EFICACIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN POR ESTUDIANTES DE INGENIERIA

Alvaro Encinas, Ramiro Ávila, Maximiliano De Las Fuentes
Universidad Autónoma de Baja California México
Universidad de Sonora
aencinasb@uabc.edu.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx, maximilianofuentes@uabc.edu.mx

Resumen. Se presenta un estudio sobre la eficacia que muestran estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas de optimización. Se seleccionaron y se aplicaron a estudiantes de ingeniería de una universidad del noroeste de México, problemas con enunciado del texto escolar que se utiliza en la clase de Cálculo. Escribieron sus respuestas y se les solicitó externaran en voz alta sus pensamientos, mismos que fueron grabados y transcritos. El análisis tanto de la práctica escrita como de la transcripción se llevó a cabo mediante herramientas suministradas por el Enfoque Ontológico-Semiótico y algunos elementos de Metacognición. Los hallazgos sugieren que para tener eficacia en la resolución de problemas matemáticos en optimización se requiere tener una adecuada comprensión de los objetos intervinientes y una buena gestión metacognitiva del proceso de resolución.

Palabras clave: eficacia, optimización, resolución de problemas

Abstract. This is a study about the effectiveness in optimization problems solving showed by engineering students from a university of northwestern Mexico. There were selected word problems from the textbook used in calculus class. Students were asked to wrote down their answers and simultaneously, express their thoughts aloud while they were working. This was recorded and transcribed. The analysis of both the written practical and transcription was performed using tools provided by the onto-semiotic approach and some elements of metacognition. The findings suggest that adequate understanding of the objects involved and good management metacognitive resolution process are required to reach effectiveness in the optimization problems solving.

Key words: efectiveness, optimization, problem solving

Introducción

Todos los seres humanos enfrentamos problemas, algunos triviales o de fácil solución que pueden ser resueltos en poco tiempo y sin gran tensión emocional e intelectual; otros no tanto, como conseguir un buen empleo. Cuando nos enfrentamos a problemas complejos, entramos en un estado psicológico de conflicto, tanto cognitivo como emocional, que intensifica nuestra actividad intelectual en busca de encontrar alguna manera de resolverlos; estos problemas pueden ser de índole personal, escolar, de carácter laboral, profesional, etc.

Optimizar (Malaspina, 2007; Malaspina y Font, 2010) es una actividad frecuente en diversas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, al viajar en nuestro automóvil queremos llegar a algún lugar en el menor tiempo posible. Consideramos que optimizar debe ser un rasgo característico de las soluciones que un ingeniero da a los problemas que aborda; por ejemplo, el ingeniero civil al construir una obra buscará que la construcción optimice espacios, materiales, tiempo, recursos financieros, etc. En general, se asume que un ingeniero, al resolver problemas de su profesión, lo hace tratando de obtener la solución óptima, de ahí que, en más de un curso de los que estudia un ingeniero en su paso por la escuela, aborde este tipo de problemas. Para llevar a cabo este estudio hemos acotado a un sólo tipo de problemas, los denominados problemas de optimización.

En el presente reporte presentamos los resultados de una investigación encaminada a identificar los factores que influyen para que un estudiante de ingeniería sea eficaz en la resolución de problemas escolares. Entendemos por sujeto eficaz aquél que logra hacer efectivo un propósito (Diccionario Océano, 2007), en este caso resolver un problema.

Se presenta un estudio sobre las prácticas matemáticas efectuadas por estudiantes de ingeniería al pretender resolver problemas de optimización y de allí identificar elementos que hacen a los estudiantes eficaces o no. La investigación la desarrollamos conscientes de que existen diversos estudios sobre el proceso de resolución de problemas, por ejemplo (Santos, 2008; Schoenfeld, 2007), pero a la vez convencidos de que dicho proceso aún no está suficientemente comprendido.

El propósito de esta investigación es contribuir a la mejora de la comprensión de los procesos a través de los cuales los estudiantes resuelven problemas matemáticos.

Referentes teóricos

En este trabajo, se propone y se aplica una herramienta de análisis sobre las prácticas de los estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas escolares de optimización. Está compuesta por la identificación de los objetos matemáticos intervinientes, los procesos matemáticos involucrados y procesos metacognitivos del resolutor del problema. En seguida se presentan los elementos teóricos involucrados.

Las herramientas son proporcionadas principalmente por el Enfoque Ontológico Semiótico (EOS) (Font y Rubio, 2008; Font, Planas y Godino, 2010; Godino, 2003), y por otros referentes teóricos relacionados con la Metacognición (Flavell y Wellman, 1977; González, 1999; Gusmao, Font y Cajaraville, 2009).

El conjunto de actividades realizadas por un *sujeto* para resolver un problema constituye un *sistema de prácticas.* De los sistemas de prácticas que un sujeto (persona) utiliza para analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones problemáticas emergen los *objetos matemáticos* (personales). Dichos sistemas de prácticas constituyen los significados que ese sujeto tiene de tales objetos.

La actividad matemática tiene su origen o razón de ser en las *situaciones problémicas* consideradas como objetos matemáticos. Los restantes objetos se representan a través del *lenguaje*; los *argumentos* justifican los *procedimientos* y *proposiciones* que relacionan los *conceptos* entre sí. A su vez, estos objetos se organizan en entidades más complejas como sistemas conceptuales y teorías, entre otras.

Para llevar a cabo el análisis de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de objetos matemáticos primarios mencionadas en el párrafo anterior ya que resultan de mucha utilidad para identificar, entender y valorar los procesos que se desarrollan al resolver los problemas. La noción de *sistema de prácticas* es útil para analizar los procesos de resolución de problemas, ya que permite percibir y caracterizar la forma particular que adoptan los objetos matemáticos al ser utilizados en distintos contextos.

Interpretar los procesos matemáticos como secuencias de prácticas, en correspondencia con los tipos de objetos matemáticos primarios, proporciona criterios para categorizar los procesos. La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, algoritmización y argumentación (Font y Rubio, 2008).

La resolución de problemas puede ser considerada como un "megaproceso" matemático ya que implica configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios tales como el establecimiento de conexiones entre los objetos y la generalización de técnicas, reglas y justificaciones.

La realización efectiva de los procesos de resolución de problemas requiere, además, la ejecución de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (supervisión) que conllevan procesos metacognitivos. Las habilidades metacognitivas son requeridas para la regulación de los procesos cognitivos e incluyen la comprensión del enunciado del problema escolar que guiará el desarrollo de acciones posteriores; la selección y planeación de estrategias para abordarlo que depende fuertemente del tipo de conocimientos y procedimientos matemáticos al alcance del estudiante; la supervisión o monitoreo del progreso de la resolución; la regulación o control del procedimiento para ver si se ha desviado del plan trazado de resolución y la evaluación o verificación de la respuesta, se consideran habilidades o gestión metacognitiva.

Metodología

Para conocer sobre el desempeño de estudiantes de ingeniería al pretender resolver problemas de optimización y así cumplir con el objetivo de esta investigación, se diseñó y siguió la siguiente metodología: Primero se seleccionaron problemas de optimización de los libros de texto usados por los profesores en sus cursos de Cálculo (Larson, Hostetler y

Edwards, 2006; Leithold, 1998; Stewart, 2001). Problemas con enunciado considerados como pertenecientes al grupo de reproducción (OCDE-INECSE, 2004) y de acuerdo a la clasificación de Font (2007) a problemas escolares de contexto evocado de consolidación. Estos problemas se escogieron utilizando dos criterios: que correspondieran a diferentes contextos extra-matemáticos y que se modelaran con diferentes tipos de funciones elementales.

Era de interés que los estudiantes que resolverían los problemas satisficieran varios criterios, particularmente que comprendieran la noción de optimización de entre un grupo de alumnos del primer semestre de ingeniería de una universidad del noroeste de México. Se seleccionaron los diez que: a) resultaron mejor evaluados en tres exámenes de conocimientos previos sobre optimización que se les aplicaron, b) que recibieron el aval de su profesor de Cálculo y c) que aceptaron participar en la investigación. Además participaron tres estudiantes exitosos de tercer semestre.

Para la toma de datos utilizamos un procedimiento en la que los problemas se aplicaron a cada estudiante aislado en un cubículo, al que previamente le solicitamos que cuanto hiciera lo escribiera en unas hojas de papel que se le proporcionaron para ello y también se le pidió que externara en voz alta y en forma simultánea al proceso de resolución, sus pensamientos, mismos que fueron grabados y posteriormente transcritos.

El análisis de los datos recabados fue efectuado en dos etapas. En la primera, fueron examinados los 13 paquetes de hojas de respuestas escritas por los estudiantes con el fin de resolver el problema. Utilizando la clasificación de Objetos Matemáticos del EOS, se identificaron los objetos intervinientes en la práctica del estudiante; posteriormente, pero todavía dentro de esta primera etapa, se identificaron los procesos matemáticos involucrados. Este proceso de análisis se hizo con base utilizando la metodología propuesta en el EOS.

En una segunda etapa, se revisaron las 13 transcripciones recabadas poniendo especial cuidado en identificar los diversos elementos de la gestión metacognitiva, así como el nivel de conciencia que el estudiante tiene de dicha gestión, registrando con precisión los tiempos de avance del proceso.

Resultados y su análisis

Se presenta el caso del alumno H para ilustrar el tipo de análisis realizado. El problema que se le aplicó está planteado en un contexto geométrico e involucra en su resolución una función de tipo radical. Su enunciado es: "Dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste".

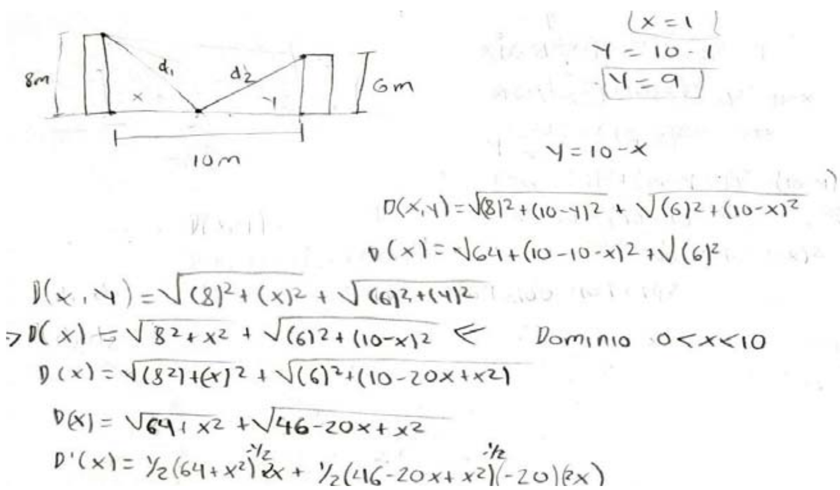


Figura 1. Sección de la respuesta escrita del alumno H.

La Figura 1 muestra una sección de la respuesta escrita del alumno H, sobre la cual se estudian los objetos y procesos involucrados en la resolución del problema.

Los objetos matemáticos más relevantes identificados en la respuesta son:

- Lenguaje:
  - Verbal: términos precisos: longitud, distancia, opuesto, adyacente, hipotenusa.
  - Gráfico: dibujó un poste de altura 8 m y de su punta sale un cable hacia un punto situado a una distancia *x* del poste izquierdo y de allí hacia la punta del poste de 6 m.
  - Simbólico: d_1, d_2, x, y, D(x, y) , D(x), D\`(x)
- Conceptos explícitos: longitud, triángulo rectángulo, dominio, función y derivada.
- Procedimientos explícitos: simplificación de una expresión radical, derivación de una función radical, despeje de x.
- Proposiciones explícitas: teorema de Pitágoras. Implícitas: la longitud es aditiva.
- Argumentos: existe una longitud mínima del cable. La longitud del cable que une las puntas de los postes toca un punto entre las bases.

En este ejemplo, se identifican algunos errores en la sección de la respuesta tanto de tipo algebraico como de definición del dominio de la función, etc. de lo cual se decidió no puntualizar por razones de espacio.

Los procesos más relevantes identificados en la práctica del alumno H, son:

Un proceso de comunicación: en el sentido de que "entiende enunciados matemáticos de otras personas"; proceso de significación: entiende el significado del enunciado del problema y de los términos que aparecen; proceso de comunicación: en el sentido de que "produce un texto como respuesta"; y un proceso de materialización: realiza una representación ostensiva de los dos postes situados a 10 m entre sí en las bases. Su proceso de argumentación se basó en:1) un proceso de significación, supone que el cable llega a una distancia *x* entre las bases de los postes, 2) tres procesos de enunciación, la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de los catetos; la longitud total del cable es igual a la suma de las longitudes de las hipotenusas; y desecha $x = -2$ ya que está fuera del dominio, 3) dos procesos de algoritmización, manipulación algebraica transformando D(x, y) en D(x), obtiene D'(x), iguala a cero, simplifica y despeja *x* obteniendo $x = 1$ y $x= -2$; y la realización de cálculos numéricos.

A continuación se presenta un tramo de la transcripción, a partir del minuto 00:50, para ilustrar lo pensado en voz alta por el alumno H:

> 00:50, Ok, comenzamos leyendo el problema: paso 1: leer el problema en voz alta: dos postes con las longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso, es decir parados como usualmente están los postes; con bases separadas a una distancia de 10 metros, calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste, es decir… paso 2: comprender el problema, la parte difícil… dos postes con longitudes de 6 y 8 metros... lados distintos… se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas a una distancia de 10 metros, calcule la longitud mínima, es optimización obtención de un mínimo de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes, no especifica cuál puede ser el de 6 o puede ser el de 8… hasta un punto en el suelo entre los postes, un punto en el suelo y luego hasta la punta del otro poste… como va de la punta a la punta del otro poste no importa por cual se empiece lo importante es en cuál punto del suelo se va a poner el cable, ¡ah! prosigue hacer una gráfica que es lo más conveniente y ayuda bastante, tenemos un poste mal dibujado por cierto... de 8 metros, tenemos un poste de 6 metros ok… poste de 6 metros y sus bases están separadas por una distancia de 10

> metros,... diez metros, lo que se pretende es obtener distancia mínima vamos a bautizar a nuestra variable como *d*, muy bien… muy bien…

En la transcripción se identificaron, procesos metacognitivos tales como *comprender el enunciado del problema*, *elaborar un plan o estrategia*, *supervisar el desarrollo del plan*, *controlarlo y evaluar el resultado obtenido*. El alumno H, reconoció que se trataba de un problema de optimización. Se centró en el punto de llegada del cable y de las magnitudes variables correspondientes. Las relacionó y construyó la función. La derivó, igualó a cero y propuso una solución.

Caso general

El análisis del desempeño de los estudiantes participantes en la investigación permite afirmar que existe una estrecha relación entre las significaciones que se tienen de los objetos y procesos matemáticos intervinientes, el nivel de desarrollo de las habilidades intelectuales que se ponen en juego al desarrollar tanto los procesos matemáticos como los metacognitivos, así como las actitudes que se muestran al estar tratando de resolver el problema y el nivel de eficacia del alumno resolutor.

Se ha hallado que los estudiantes examinados muestran ser poco eficaces cuando pretenden resolver un problema de optimización de manera independiente. Este bajo nivel se observa en cada una de las etapas del proceso, así como en el desarrollo de cada uno de los subprocesos como son: *modelar*, *planear*, *supervisar*, *regular* y *verificar*. La excepción se observa en la etapa del procedimiento algebraico el cual es ejecutado de manera más eficaz.

Para los estudiantes, el principal obstáculo se presenta en el proceso de construcción de la función que modela matemáticamente el problema, específicamente, en la identificación de las magnitudes que varían y las relaciones entre ellas. Los estudiantes que logran obtener la función dan muestra de un buen dominio de los procesos algorítmicos para ejecutar lo planeado.

El diálogo que el investigador entabló con cada estudiante, después de que éste manifestaba haber terminado de resolver el problema, permitió observar que es factible desencadenar en él, un proceso de valoración de la manera en que procedió, a la vez que evocar, rápidamente, conocimientos y estrategias más eficaces para avanzar en la resolución del problema. Se detectó que una buena gestión metacognitiva requiere, entre otras características, que el resolutor no pierda de vista lo que conoce, lo que desconoce y el punto donde se encuentra; también se pudo establecer la importancia de las actitudes como elemento de la competencia, entre las que destacan la disposición a enfrentar el reto que representa el problema y la tenacidad para tratar de resolverlo.

Consideraciones finales

Se ha encontrado que los estudiantes de ingeniería de la universidad del noroeste de México seleccionados bajo los criterios arriba descritos, muestran poca eficacia en el proceso de resolución de problemas de optimización especialmente en la etapa inicial.

El análisis de las transcripciones muestra que los estudiantes más eficaces en la resolución del problema no sólo tienen un buen nivel de comprensión de los objetos y procesos matemáticos, sino también de los procesos metacognitivos ya enumerados. A partir de esto, se ha considerado que mejorar la eficacia de los estudiantes en la resolución de problemas requiere atender de mejor manera los procesos metacognitivos en el proceso de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Flavell, J. y Wellman, H. (1977). Metamemory. En Kail y Hagran (Eds.). *Perspectives on the the development of memory and cognition* (pp. 3-33), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La gaceta de la RSME, 10*(2), 419-434.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Font, V. y Rubio, N. (2008). Ontho-semiotic tools for the analysis of our practice. En B. Czarnocha (Ed.). *Handbook of mathematics teaching Research: Teaching Experiment*, (pp. 165-180), Krakow: University of Rzeszow.

Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Manuscrito no publicado Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado en abril de 2007 de: URL:http//www.ugr.es/local/jgodino.

González, F. (1999). Los procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 43-44, 199-208.

Gusmao, T., Font, V. y Cajaraville, J. (2009). Análises cognitivo e metacognitivo de prácticas de resolução de problemas. *Educação Matematica Pesquisa,* 11(1), 8-43.

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2006). *Cálculo.* México: McGraw-Hill.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* México, D.F: Oxford University Press.

Malaspina, U. (2007). Intuición, Rigor y Resolución de Problemas de Optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 10 (3), 365- 399.

Malaspina, U. y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 107-130.

Océano Práctico Diccionario (2007). Cd. México: Ed. Océano de México.

OCDE-INECSE. (2004). Marcos Teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas. Madrid. Recuperado el 28 de marzo de 2007 del sitio web: http//www.ince.mec.es/pub/marcoteoricopisa2003.pdf.

Santos Trigo, L.M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 159-187). Badajoz, España.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM- The International journal on Mathematics Education*, 39, 537-551.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable.* Bogotá: Thomson-Learning.

TRANSFORMANDO LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS: UN ENFOQUE COGNITIVO EN EL ESTUDIO DEL ÁLGEBRA

Zenón Eulogio Morales Martínez
Pontificia Universidad Católica del Perú Perú
morales.ze@pucp.edu.pe

Resumen. En nuestra experiencia docente encontramos que los alumnos tienen dificultades en el aprendizaje de las matemáticas cuando una situación-problema requiere que se movilicen en distintos registros semióticos. En la teoría de Duval (2006) estos problemas de aprendizaje se enfocan con un análisis cognitivo sobre las transformaciones que realiza el alumno cuando estudia un objeto matemático. Esta teoría propone entender las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de matemáticas, así como la naturaleza de esas dificultades y donde están localizadas. En este taller se propusieron actividades que permitieron analizar los dos tipos de transformaciones propuestas en la teoría de Duval: tratamientos y conversiones. Se observaron registros de partida, registros de llegada, posibles dificultades y reflexiones sobre nuestra práctica para el logro de una nueva cultura matemática, porque según D´Ambrosio (2012) los maestros debemos "mudar nuestro modo de pensar [...] es más importante, que los alumnos hagan cosas nuevas, de nuevas maneras".

Palabras clave: transformaciones, representaciones semióticas, cognición, álgebra

Abstract. In our teaching experience we found that students have difficulties in learning mathematics when a problem situation requires the mobilization in different semiotic registers. In the theory of Duval (2006) these learning problems with a focus on the transformations cognitive analysis made by the student when studying a mathematical object. This theory seeks to understand the difficulties faced by students in the understanding of mathematics, and the nature of these difficulties and where they are located. This workshop will discuss proposed activities that allowed the two types of changes proposed in the theory of Duval: treatments and conversions. Records were observed starting arrival records, possible difficulties and reflections on our practice to achieve a new mathematical culture because according to D'Ambrosio (2012) "is necessary to move our thinking [...] most importantly, that the students do new things in new ways"..

Key words: transformations, semiotic representations, cognition, algebra

Introducción

La presente investigación se realiza en el marco de la Didáctica de la Matemática, es una investigación cualitativa realizada en el contexto de la Educación Básica, con alumnos que culminan la etapa escolar, con la intención de analizar los problemas del aprendizaje del Álgebra. Se hará un análisis de esas posibles dificultades empleando la Teoría de las Representaciones Semióticas, centrando nuestra observación en la posible ocurrencia de transformaciones sobre el objeto matemático en estudio. El éxito en el aprendizaje se verá reflejado cuando los alumnos logren las transformaciones adecuadas sobre el objeto matemático. En esta investigación enfrentaremos a los alumnos a actividades que contengan la diversidad de registros semióticos en su aprendizaje de las matemáticas, ya que según Duval (2003) "la manera matemática de razonar y visualizar está intrínsecamente ligada a la utilización de las representaciones semióticas, y toda comunicación en matemática se establece a través de esas representaciones" (p. 8). Este enfoque cognitivo de la actividad matemática, permitirá al profesor entender, localizar y conocer la naturaleza de las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas.

Marco teórico

Según el análisis sobre los procesos de pensamiento que ocurren cuando nuestros alumnos realizan una actividad matemática, encontramos que en la realización de los dos tipos de transformaciones: los tratamientos y las conversiones, se encuentran las principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Según Duval (2006) estas son principalmente, las dificultades más globales que se pueden encontrar en todos los niveles de la enseñanza y en todos los ámbitos de las matemáticas.

Duval (2006) nos plantea que el uso del lenguaje natural no se puede evitar y sabemos que está presente en todas las áreas del conocimiento. Para comprender la complejidad cognitiva de los tratamientos, debemos analizar por separado la manera en que los tratamientos se llevan a cabo, respectivamente, en el registro discursivo y el registro gráfico, aun cuando se funden en el mismo proceso matemático.

Las dificultades producidas por la conversión en una actividad matemática, son observadas de acuerdo a los pares de registros que son intercambiados en esta transformación; tenemos el caso más conocido cuando ocurre una simple "traducción" de términos de un problema literal es convertido en una expresión algebraica, este es un caso que muchos estudiantes no logran realizar con éxito. Duval (2006) concluye que la conversión posee dos características: la primera señala que la conversión puede ser o no congruente, y la segunda hace referencia a que la conversión tiene una orientación o sentido, lo cual permite señalar al registro de partida como al registro de llegada.

Los profesores cuando enseñamos Matemáticas sabemos que, a diferencia de otras disciplinas científicas, esta ciencia no dispone de objetos físicos manipulables, por esto tenemos acceso a los objetos matemáticos solamente por medio de su representación. Por ejemplo, un agrónomo, tiene la posibilidad de visualización de sus objetos de estudio como estructuras celulares, plantas y otros, sin la necesidad de recurrir a una representación semiótica. No ocurre lo mismo en Matemática, según Grande (2006):

> En el caso de los objetos matemáticos, surge la necesidad de utilizar un sistema de registros, símbolos y signos para su representación. Estos registros no son simplemente códigos, pues poseen una función de comunicación y caracterización del objeto representado. La importancia de la utilización de los registros de representación se refiere a una posible manera de facilitar un proceso de

> aprendizaje, además de ser un medio para que un profesor tome más accesible la comprensión de la Matemática. La noción de registro de representación se refiere al dominio de signos que sirven para designar cualquier objeto. (p. 62).

Así mismo hemos encontrado que investigaciones anteriores, han analizado las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas empleando el enfoque cognitivo propuesto en la teoría de Raymond Duval. Analizando estas dificultades, Guzmán (1998) se propuso como objetivo:

> Poner en evidencia el rol que juegan los registros de representación en las respuestas de los estudiantes, dado que distinguir y coordinar distintos registros, es una actividad necesaria y natural en matemáticas. Estas actividades deberían construir objetos pedagógicos en la enseñanza de la matemática. Por otra parte, la distinción y coordinación de registros son fundamentales para el desarrollo del pensamiento, idea central en el enfoque mencionado, ha sido la perspectiva de análisis para numerosas investigaciones en didáctica de la matemática. (p. 6).

La investigación, en un análisis de las respuestas de los alumnos, revela que los alumnos son, en general, monorregistros, sin coordinar explícitamente dos o más (registros). Las respuestas se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases.

Metodología

El desarrollo del taller sobre las Representaciones Semióticas analizadas en el aprendizaje del Álgebra, tuvo una primera etapa de reconocimiento de objetos matemáticos, se preguntó a los profesores participantes: ¿Qué observa usted en las siguientes representaciones?

$$R1: x^2 - 3x + 2; R2: f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad ; \qquad R3: x^2 - 3x + 2 = 0$$

Entonces, los maestros responden: “observamos un trinomio, una función cuadrática y una ecuación de segundo grado”, respectivamente. Nuestro objetivo es que las representaciones sean vistas como objetos susceptibles a ser transformados, entonces podemos responder que sobre las tres representaciones anteriores observamos: en R1 observamos un trinomio posible de ser transformado en factores lineales, mediante un tratamiento en registro algebraico; en R2 observamos una función cuadrática posible de ser transformada en una gráfica en forma de parábola, mediante una conversión que tiene como registro de partida al registro algebraico y como registro de llegada al registro gráfico o figural; y en R3 observamos una ecuación cuadrática posible de ser transformada a dos valores numéricos que son el conjunto solución de esta ecuación, mediante una conversión que tiene como registro de partida al registro algebraico y como registro de llegada al registro numérico.

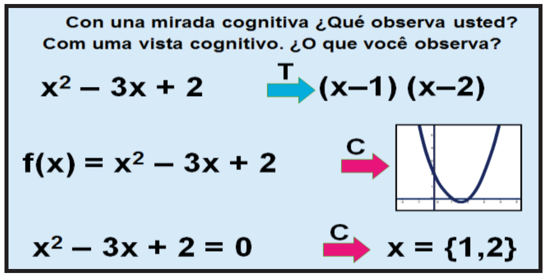


Figura.1 Tratamientos (T) y Conversiones (C) sobre objetos algebraicos.

En un segundo ejemplo, analizamos como la división algebraica entre polinomios puede realizarse en distintos registros de representación: Se pide hallar el resto de dividir el polinomio de tercer grado: $2x^3 - 3x^2 + 10x + 11$ entre $(x^2 + 1)$; se presentó la solución en dos registros distintos:

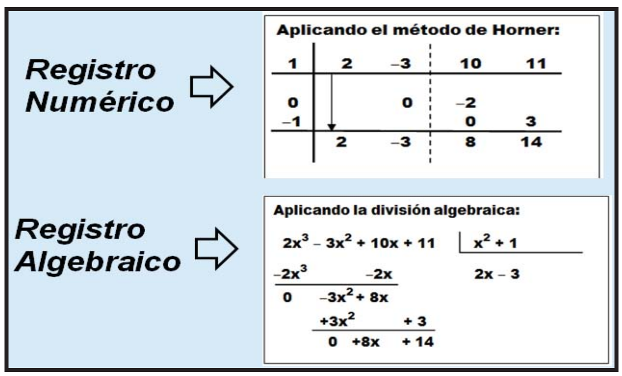


Figura.2 La División Algebraica presentada en distintos registros.

En una segunda etapa del taller analizamos algunas experiencias de aulas sobre las dificultades encontradas, cuando los estudiantes son evaluados y observamos que en algunos casos no logran hacer las transformaciones adecuadas para llegar a la solución del ejercicio o problema planteado.

Caso 1: Análisis de trasformaciones aplicadas sobre logaritmos

En el quinto año de la Educación Secundaria de los Colegios del Perú, que corresponde al último año de la etapa escolar, estudian jóvenes de 16-17 años de edad. En este nivel educativo se estudia la función exponencial y la función logarítmica. Cuando al alumno se le pide que obtenga el logaritmo de 12 observamos que realiza un tratamiento en el registro numérico: $12 = 2^2x3$, para luego mediante la propiedad de: $\log a.b = \log a + \log b$, realizar un tratamiento algebraico: $\log 2^2x3 = \log 2^2 + \log 3 = 2 \log 2 + \log 3 = 2a + b$.

Se observa que en el segundo caso, el alumno no logra realizar el tratamiento numérico: $300 = 3x100$, porque según el alumno: "con esta descomposición obtengo el 100 que fácilmente no se relaciona con *log 2* ni con *log 3*". El alumno pudo haber transformado de la siguiente manera:

$\log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$, y obtener la respuesta: $\log 300 = \log 3 + 2 = b + 2$.

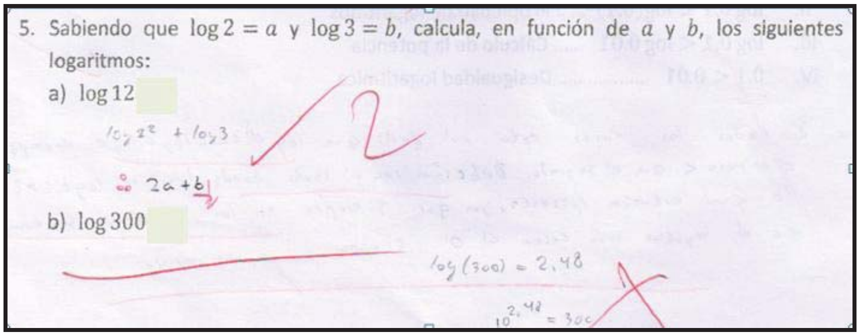


Figura. 3 Análisis de transformaciones sobre logaritmos.

Caso 2: Conversión del registro algebraico al registro numérico

Se analiza el siguiente ejercicio que tiene como registro de partida al registro algebraico:

Halle el conjunto solución de: $\sqrt{(x-1)^2} = 1 - x$

Analizamos el tratamiento en el registro algebraico, aplicando la propiedad del valor absoluto: $\sqrt{x^2} = |x|$. Por esta propiedad, se obtiene: $|x - 1| = 1 - x$, aplicamos una segunda propiedad del valor absoluto: $1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$, así el conjunto solución se presenta en un registro de llegada que es un registro numérico: $x \in \langle -\infty; 1]$.

Caso 3: Conversión del registro algebraico al registro gráfico

En esta conversión se presenta la no congruencia entre el registro de partida y el registro de llegada. Se recurre al uso del registro tabular para encontrar valores numéricos que conforman los pares ordenados a representar en el registro gráfico. Se observa que existe congruencia entre el registro tabular y el registro gráfico, porque a cada par ordenado (x,y) le corresponde un punto en el plano cartesiano, de esta manera, esta congruencia reduce la incomprensión debido a la no-congruencia inicial.

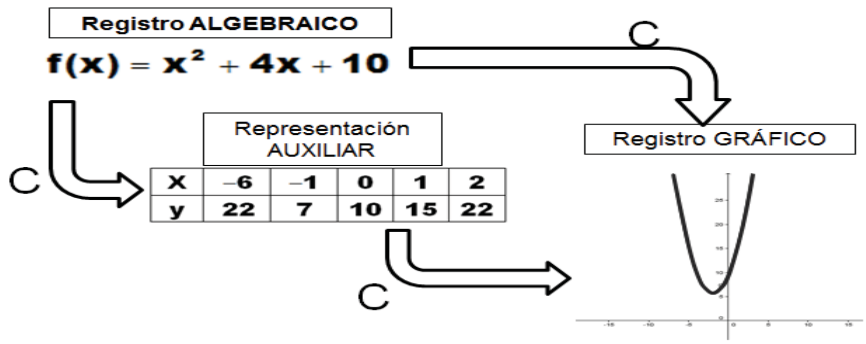


Figura. 4 Análisis de Conversiones (C) del registro Algebraico al Gráfico.

Conclusiones

Esperamos que este taller permita orientar a los maestros hacia este enfoque cognitivo de la actividad matemática, que según Duval (2006) este "estudio propone que las representaciones semióticas, incluidas cualquier lenguaje, aparecen como herramientas para producir nuevos conocimientos y no sólo para la comunicación de cualquier representación mental en particular" (p. 42). El papel desempeñado por los signos, o más exactamente por los sistemas semióticos de representación, no es sólo para designar objetos matemáticos, sino también para trabajar con ellos. Estos objetos esperan que los alumnos realicen transformaciones sobre ellos. Lo importante no es la representación de un objeto matemático, sino las transformaciones que se pueden realizar sobre ellos.

Referencias bibliográficas

D´Ambrosio, U. (2012). O estado do mundo e a Educação Matemática: Reflexões sobre o Futuro. *Conferencia Inaugural de la 26° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Belo Horizonte. Estado de Minais Gerais, Brasil.

Duval, R. (2003). Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. En S. Dias (Org.), *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. (pp. 11-33). Campinas: Editora Papirus.

Duval, R. (2006). *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics*. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Guzmán, I. (1998). *Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes*. En: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 1-15.

Grande, A. (2006). *O Conceito de Independência e Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica nos Livros Didáticos de Álgebra Linear*. Tesis de Maestría no publicada. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: PERSPECTIVAS À FORMAÇÃO DOCENTE NO CONTEXTO DA SALA DE AULA

Célia Barros Nunes
Universidade do Estado da Bahia – UNEB/Campus X Brasil
celiabns@gmail.com

Resumo. A aprendizagem matemática não ocorre simplesmente pela transmissão de saberes do professor para o aluno, uma vez que é possível aprender matemática com tarefas que incentivem a construção do conhecimento que poderá favorecer o prazer pela descoberta, promover a autonomia e incentivar a comunicação. Além disso, o processo de construção do conhecimento leva o aluno a pensar mais, raciocinar mais, potencializando, dessa forma, um nível de conhecimento bem alicerçado. Nesse sentido, a Resolução de Problemas se apresenta como uma perspectiva metodológica que tem sido reconhecida mundialmente como uma meta fundamental no ensino-aprendizagem da Matemática. Assim, o presente texto pretende apresentar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como uma proposta didática para se trabalhar em sala de aula.

Palavras chave: resolução de problemas, ensino-aprendizagem da matemática

Abstract. Learning mathematics does not occur simply by the transference of teacher's knowledge to students, since it is possible to learn mathematics with tasks which encourage the construction knowledge and that can enable the pleasure of discovery, promote autonomy and motivate communication. Besides, the process of knowledge construction leads the student to think more, reasoning more, enhancing this way, a well based knowledge level. Therefore, Problem Solving is presented as a methodological perspective which has been worldly recognized as a fundamental goal in mathematics teaching-learning. So, the present text aims at introducing the Methodology of Mathematics teaching-learning-evaluation through problem solving as a didactical proposal to be developed in the classroom.

Key words: problem solving, mathematics teaching-learning

O tema Resolução de Problemas tem sido discutido e analisado nas últimas duas décadas, tanto entre professores e educadores quanto entre pesquisadores e elaboradores de currículos. Todavia, tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimento adquirido anteriormente pelos alunos.

Resolver problemas é o processo de reorganizar conceitos e habilidades, aplicando-os numa nova situação, atendendo a um objetivo. Um dos objetivos principais do ensino e da aprendizagem matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso nada melhor que lhe apresentar situações problemas que o envolva, o desafie e o motive a querer resolvê-las. Essa é uma das razões pela qual a Resolução de Problema tem sido reconhecida no mundo todo como uma meta fundamental do ensino e da aprendizagem matemática. Entretanto, enfrentar e resolver um problema matemático não significa apenas a compreensão do que é exigido, a aplicação das técnicas ou fórmulas adequadas e a obtenção da resposta correta, mas, além disso, uma atitude de investigação científica em relação àquilo que está pronto.

Vários são os pesquisadores que defendem um trabalho de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas (Onuchic, 1999; Van de Walle, 2009; Onuchic e Allevato, 2009; Nunes, 2010, 2011). Segundo eles, conceitos e procedimentos matemáticos importantes podem ser melhor ensinados através da resolução de problemas. Ou seja, tarefas ou problemas podem e devem ser colocados de forma a engajar os estudantes em pensar e desenvolver a Matemática importante que precisam aprender.

A resolução de problemas no contexto das teorias psicológicas de aprendizagem

A história da pesquisa em Resolução de Problemas é muito recente e tem sido objeto de interesse mundial. Seu estudo vem sendo focado em duas vertentes: uma relacionada a seu estudo em sala de aula e a outra enquanto objeto de pesquisa. As pesquisas sobre Resolução de Problemas e as iniciativas de considerá-la como uma forma de ensinar Matemática receberam atenção a partir de Polya (1945), do qual se preocupava em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas.

O limiar do século XX, ao longo das reformas sociais, mostrou-se um provocador de muitos movimentos de mudanças na Educação Matemática de todo o mundo, buscando sempre aprimorar as formas de ensinar, de aprender e de avaliar o progresso dos alunos e o trabalho dos professores. Durante esse período o currículo de matemática sofreu mudanças influenciadas segundo a Teoria Psicológica da Aprendizagem, conforme estudos de D'Ambrosio (1983), a qual, segundo ela, os fatores que deram início a cada fase curricular foram complexos, uma mistura de fatores sociológicos, políticos, tecnológicos e psicológicos. Mais recentemente, o mesmo tema foi abordado por Lambdin e Walcott (2007), descrevendo outras três fases: De volta ao Básico, Resolução de Problemas e Padrões e Avaliação e Responsabilidade.

Segundo Lambdin e Walcott (2007), essas fases merecem atenção, pois cada uma delas corresponde a um período em que a Educação, em geral, estava caminhando através de mudanças radicais e fundamentais e cada uma introduzia práticas novas e inovadoras para a Educação Matemática. A essas razões, acrescenta-se o fato de que algumas das fases apontadas também foram vivenciadas em outros lugares do mundo e exerceram forte influência nos rumos que o trabalho com a matemática escolar tomou a partir de então.

Considere-se aqui a fase da Resolução de Problemas e a influência que a Teoria Psicológica de Aprendizagem trouxe a essa fase, cujo foco foi colocado sobre os processos de pensamento matemático e de aprendizagem por descoberta no contexto da Resolução de Problemas. Segundo González (2010), tal interesse pelos processos de pensamento de estudante se conecta com a ideia de que a Educação não pode consistir apenas em acumulação de conhecimentos, ao contrário, eles devem ser reflexivos; que possuam um extenso repertório de ferramentas de pensamento formal e informal e que saibam como e quando usá-las; que tenham uma boa quantidade de conhecimentos acerca da cognição humana e como manejar efetivamente suas próprias ações cognitivas.

As investigações sistemáticas sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares tiveram início na década de 70, do século XX, e, ganharam espaço no mundo inteiro já no final da referida década. Começando, então, o movimento a favor de um ensino baseado em Resolução de Problemas. Nos Estados Unidos, em 1980, o NCTM – National Council of Teachers of Mathematics já manifestava sua preocupação com essas questões e, então, publicou o documento An Agenda for Action: Recomendations for School Mathematics of the 1980's, que chamava todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos, num esforço cooperativo massivo, buscarem uma melhor compreensão matemática para todos. A primeira dessas recomendações dizia: "resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar para os anos 80". Os educadores matemáticos daquela época tinham um grande interesse em fazer da Resolução de Problemas um foco do currículo de Matemática.

As diferentes abordagens dadas à resolução de problemas na década de 80

Devido a uma falta de consenso entre pesquisadores, educadores matemáticos sobre a recomendação deixada pelo documento An Agenda for Action ocorrida, possivelmente, pelas diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos, envolvidos com a Educação Matemática, tinham sobre o significado de "Resolução de Problemas ser o foco da matemática escolar", o trabalho da década de 80 não chegou a um bom termo. Para ajudar a refletir sobre essas diferenças, Schroeder e Lester (1989) citaram duas maneiras distintas de abordar resolução de problemas: (1) ensinar "sobre" Resolução de Problemas; (2) ensinar "para" resolver problemas, que foram as adotadas nessa década. Livros escritos sobre esses dois caminhos sempre se referiam ou aos quatro passos de Polya ou a variação deles, ou ao uso de estratégias indicadas para a resolução de problemas.

Entendia-se ensinar sobre resolução de problemas com o significado de trabalhar esse assunto como um novo conteúdo, adicionando a esse trabalho um número de heurísticas ou estratégias. O professor que ensina sobre resolução de problemas realça o modelo de Resolução de Problemas de Polya ou alguma variação dele.

Ensinar para resolver problemas tinha o significado de concentrar-se na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicado na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros. Além disso, o professor que ensina para resolver problemas está muito preocupado sobre a habilidade dos estudantes em transferir aquilo que eles já aprenderam no contexto de um problema para outros. Uma forte justificativa dessa abordagem é a de que a única razão para aprender Matemática é a de ser capaz de usar o conhecimento adquirido em sala de aula para resolver problemas.

Nos fins da década de 80**,** Schroeder e Lester (1989) alertaram sobre a falta de consenso na interpretação da primeira recomendação deixada pelo documento An Agenda for Action, que pedia que a resolução de problemas fosse o foco da matemática escolar nos anos 80. Com isso, pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos e começaram a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da Resolução de Problemas, da qual passou a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática. Nesse mesmo ano, estudiosos passaram a trabalhar o ensino de Matemática "via" resolução de problemas, entendendo via como um meio de se aprender Matemática.

> No ensino via resolução de problemas, os problemas são trabalhados não apenas com o propósito de se aprender Matemática, mas também como o principal meio de se fazer isso. Nessa abordagem, o ensino de um tópico de Matemática começa com uma situação problema que incorpora aspectos chave do tópico, e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis a problemas razoáveis (Schroeder e Lester, 189, p.33).

Observa os autores que essa é uma abordagem para se ensinar matemática e que merece ser considerada, desenvolvida, experimentada e avaliada. De fato, ensinar matemática via resolução de problemas é a abordagem mais consistente com as recomendações da Comissão de Padrões do NCTM (2000), que dizem: (1) habilidades e conceitos matemáticos devem ser aprendidos no contexto da resolução de problemas; (2) o desenvolvimento de processos de pensamento de nível superior deve ser estimulado através de experiências em resolução de problemas; (3) o ensino de Matemática deve acontecer numa atmosfera de resolução de problemas, orientada para a pesquisa; 4) a resolução de problemas desenvolve nos estudantes a crença de que eles são capazes de fazer matemática e de que ela faz sentido; (5) a resolução de problemas proporciona uma avaliação contínua de dados que podem ser usados para tomar decisões instrucionais, ajudar os estudantes a terem sucesso na aprendizagem e dar informação aos pais; (6) trabalhar com resolução de problemas é prazeroso. Os professores que experimentam trabalhar nessa maneira nunca voltam ao modo do ensinar falando.

Foi, a partir de 1990, que a abordagem ensinar via resolução de problemas passou a ser ensinar através de resolução de problemas. Nela o que se pretende é ensinar, aprender e avaliar a matemática construída pelos alunos com a guia e direção do professor através da Resolução de Problemas.

Segundo Nunes (2010) o que diferencia essa abordagem da anterior é que a expressão "através de" significa do começo ao fim, inteiramente, ao longo da resolução do problema e não simplesmente um recurso para se resolver o problema dado. É uma forma de ensinar e, consequentemente, aprender e, durante o processo, fazer matemática, pois o aluno diante do problema deve se mostrar como um co-construtor do seu próprio conhecimento. Nessa abordagem o objetivo primeiro é apresentar para os alunos problemas que gerarão novos conceitos ou conteúdos. Professores e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem realiza-se de modo cooperativo e colaborativo em sala de aula. Hoje, devido a sua natureza, essa abordagem é considerada uma forte tendência na Educação Matemática e vem ganhando força e consistência no currículo de Matemática.

A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas

No nome dessa metodologia há de se observar que a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, segundo Onuchic (1999) foi criada para expressar a ideia de que ensino e aprendizagem devem acontecer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação. Ela é construída durante a resolução de problemas, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário (Onuchic e Allevato, 2009, p.180). Trabalhar a avaliação continuamente poderá ajudar a tornar o pensamento dos estudantes visíveis para eles mesmos, para seus colegas e para os professores.

Tal metodologia se apresenta como uma proposta didática para se trabalhar em sala de aula. Defende-se nela que o aluno aprende Matemática a partir de um problema, tendo como objetivo um foco particular de Matemática e, usando estratégias convenientes, busca-se a solução do problema, com a participação efetiva dos alunos, seja individual, aos pares ou em pequenos grupos, possibilitando-lhes ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e compreensão.

É crucial o papel e a ação do professor que começa com a escolha e preparação do problema apropriado ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir com vistas ao cumprimento do seu propósito matemático, orientado pelos programas curriculares estipulados pela escola; precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Nunes (2010), ao defender a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática ressalta a importância do professor pesquisador nessa perspectiva metodológica

> [...] Um professor pesquisador se configura para nós como um professor que pesquisa quando busca problemas que podem ser utilizados, em sala de aula, para trabalhar determinados tópicos matemáticos pertinentes ao programa planejado; pesquisa quando identifica os focos matemáticos importantes e as grandes ideias subjacentes; pesquisa quando estabelece as melhores estratégias disponíveis para resolver os problemas; pesquisa quando prepara as questões com as quais conduzirá os alunos, durante a plenária, ouvindo-os em suas respostas; pesquisa quando planeja a formulação rigorosa da nova matemática construída durante essa aula, tendo os alunos como co-construtores desses novos conceitos e conteúdos (Nunes, 2010, p. 95).

Como a preocupação de Onuchic e dos integrantes do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP sempre foi desenvolver pesquisas que atinjam efetivamente a sala de aula, bem como das experiências com formação de professores, um roteiro foi elaborado para ajudar os professores a empregar essa metodologia em suas aulas. Vale ressaltar que as pesquisas desenvolvidas pelo grupo, orientadas por Onuchic, na UNESP, Rio Claro/Brasil, seguem abordagens essencialmente qualitativas, tendo o objetivo central de refletir sobre e analisar as possibilidades que a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas oferece no sentido de incrementar a aprendizagem e melhorar os processos de ensino, assim como de promover o aprimoramento das práticas dos professores de Matemática (Onuchic e Allevato, 2011).

A princípio, o professor deverá preparar o problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento, que chamaremos de problema gerador. Vale salientar que o professor deverá escolher um problema que seja acessível aos alunos a fim de proporcionar-lhes uma aprendizagem matemática sofisticada que vá além da aplicação de conceitos e treinos de procedimentos.

Já em sala de aula, depois de entregar o problema a cada aluno, dá-se um tempo para que faça uma leitura individual e logo após, formar grupos e solicitar nova leitura **do** problema em conjunto. De posse do problema, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo**.** É importante que o professor saiba gerir o tempo de modo que o problema seja trabalhado e explorado completamente, evitando o máximo adiar para a aula seguinte a discussão e ou síntese dos conhecimentos produzidos durante a aula, o que acarretaria na perda do envolvimento dos alunos e o seu distanciamento das produções matemáticas realizadas, que dificilmente poderiam ser recuperadas após algum tempo.

O professor, numa atitude de observador e incentivador, observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. Incentiva-os, também, a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto.

Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática e, conceitos relacionados e técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

Dando continuidade ao trabalho, representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos matemáticos, sobretudo os mais produtivos, devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam. Há de se observar que a exploração matemática de um erro é muito vezes esclarecedora e enriquecedora, tanto para os alunos que erraram quanto para os que o resolveram bem e também para o professor.

Agora, num trabalho em conjunto, discutem-se as diferentes resoluções registradas na lousa, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. Nesta fase, o professor deverá também se colocar como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Considera-se que este momento, denominado plenária, é bastante rico para a aprendizagem, uma vez que este momento pode-se discutir a produção de conjecturas, bem como a confirmação das mesmas, a sua justificativa matemática e uma eventual demonstração.

Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto. Por fim, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. Esse momento é denominado de formalização. Destaque-se aqui a participação ativa dos alunos.

Considerações finais

O ensino-aprendizagem da matemática através da Resolução de Problemas não é tarefa simples. Ela requer tempo, continuidade e maturidade por parte do professor a fim de que o mesmo possa melhorar e aperfeiçoar a sua prática, o mesmo tempo para que os alunos correspondam às expectativas do professor e venham a compreender que o ensino-aprendizagem através da resolução de problemas lhes proporcionará não somente a aprendizagem de conteúdos matemáticos, mas também modos de construção/produção de conhecimento matemático no contexto de uma comunidade da qual são parte integrante.

No processo de ensino e de aprendizagem através da exploração de um problema, entender as hipóteses do problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações entre suas variáveis, saber comunicar resultados e ser capaz de avaliar criticamente técnicas e concepções utilizadas na resolução dos mesmos são aspectos que devem estar presentes ou serem estimulados (Nunes, 2011, p. 5).

Vale ressaltar que nesse trabalho cabe ao professor promover, em sala de aula, um ambiente de aprendizagem estimulante de modo que os alunos sejam encorajados a participar ativamente, a desenvolver seu próprio trabalho de forma cooperativa e colaborativa, comunicando suas ideias e ouvindo a dos outros de forma construtiva. Que o professor não seja aquele que ensina Matemática, mas sim, o agente que cultiva a inteligência dos alunos de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta.

Referências bibliográficas

D'ambrosio, B. (1983). Influência de Teorias de Aprendizagem na Evolução do Currículo Matemático. *Série de Palestras e Debates: Solução de Problemas, Computadores e aspectos culturais no ensino de Matemática*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação – DEME.

González, F. (2010). *El Decálogo Del Resolvedor Exitoso de Problemas. Investigación y Postgrado***.** Acesso em 01 de abril de 2012 de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?pid=S1316-00872002000100002&script=sci_abstract

Lambdin, D. V., Walcott, C. (2007). Changes through the Years: Connections between Psychological Learning Theories and the School Mathematics Curriculum. En: Martin, W. G. et al(Ed.). *The Learning of Mathematics* (pp.3-25). Reston, VA: NCTM.

NCTM. (1980). *An Agenda for Action.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nunes, C.B. (2011). *A resolução de problemas na formação inicial* e *continuada de professores.* Acesso em 23 de abril de 2012 de http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=serp2011/trabalhos

Nunes, C.B. (2010). *O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de poblemas:* perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática**.** Tese de Doutorado não-publicada. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, São Paulo, Brasil.

Onuchic, L. R., Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. B*OLEMA- Boletim de Educação Matemática*, (25) 41, 73-98.

__________. (2009). Formação de professores – mudanças urgentes na Licenciatura em Matemática En. Rezende, M.C.; Nasser, L. *Educação Matemática no ensino superior: pesquisas* e *debates.* (pp.169-187), Recife, PE: Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM.

Onuchic, L.R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. En: Bicudo, M.A.V.(org*). Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectiva.* (pp. 199-220) São Paulo, SP: Editora UNESP.

Polya, G. A. (1944). *How to Solve it.* Princeton. Princeton University Press.

Schroeder, T.L., Lester Jr., F.K.(1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. En: Trafton, P.R., Shulte, A.P. (Ed.) *New Directions for Elementary School Mathematics*. (pp.31-42), National Council of Teachers of Mathematics. (Year Book).

Van de Walle, J. A.(2001*). Elementary and Middle School Mathematics*. 4ª Ed. New York: Longman.

USO DE MATERIAL FÍLMICO PARA EL APRENDIZAJE COOPERATIVO INFORMAL EN LA CLASE DE MATEMÁTICA

Patricia Eva Bozzano, Paola Mariana Castellani
Universidad Nacional de La Plata, Liceo Víctor Mercante Argentina
pateboz@yahoo.com.ar

Resumen. Que la educación por sí misma es una actividad cooperativa, es una afirmación que hasta los propios estudiantes reconocen en sus mejores experiencias educativas en un marco pleno de cooperación, y con la guía adecuada. Como orientación para el desarrollo de actividades en el marco del aprendizaje cooperativo, la organización y esquematización de prescripciones, la identificación de los procesos de aprendizaje, con la correspondiente función de la enseñanza y la orientación para el docente, es que se propone interesar al alumno por el proceso y por los resultados. Para la etapa de aprestamiento como actividad inicial se pensó en una obra cinematográfica: La habitación de Fermat..

Palabras clave: cine y matemática- aprendizaje cooperativo

Abstract. That education itself is a cooperative activity, is a statement that even the students themselves acknowledge in their best educational experiences in a full framework for cooperation, and with the right guidance. As a guide for the development of activities in the framework of cooperative learning, organization and outlining requirements, identification of learning processes, with the corresponding function of teaching and guidance for teachers, is that interest the student intends by the process and the results. For the stage of readiness as initial activity was thought a film: Fermat's room.

Key words: film and maths-cooperative learning

Introducción

Actividad orientadora para el aprestamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje

Ante la presencia de alumnos inmersos en una *cultura de la inmediatez,* y portadores de preguntas como *¿para qué me sirve?,* la siguiente propuesta intenta motivarlos e interesarlos en la asignatura Matemática.

Con ella, no sólo se intenta interesar a los alumnos por la asignatura en cuestión, sino también, invitarlos a descubrir el personaje "hombre-mujer que hace matemática"; y las consecuencias que conllevan sus trabajos en el área que desarrollan en el cotidiano.

Sostenemos que el clima aúlico, las relaciones entre pares, la estimulación docente, acompañada por una tentadora invitación al conocimiento y su construcción; demostrando afecto hacia la disciplina de estudio y privilegiando los lazos de cordialidad; junto con la atención necesaria hacia las habilidades y capacidades particulares de cada alumno orientando sus intereses e informando durante todas las etapas de enseñanza-aprendizaje los procesos y objetivos planteados; son determinantes para que cada alumno procure lograr un aprendizaje significativo (Rampazzi, 2010).

Uno de los principios básicos consiste en la actitud favorable para el conocimiento por parte de los estudiantes, siempre y cuando el profesor sea capaz de conectar con sus intereses y de favorecer el aprendizaje. Por tal motivo es crucial crear un clima de implicación e interés participativo en el grupo, y en cada persona, sobre lo que se está trabajando en la clase, reforzar la conciencia de aprender del grupo.

Fundamentación

Bajo un enfoque sistémico de la educación (Kaufman, 1973) siguiendo un planeamiento estratégico en el que se reconoce la prescripción de cómo enseñar que provee la Tecnología de la Enseñanza (Chadwick, 1987) en respuesta a las descripciones que ofrece la Psicología Cognitiva de cómo se aprende, planteamos aquí una herramienta que pretende facilitar la ejecución de la enseñanza.

En el diseño de la actividad de enseñanza-aprendizaje para el aprestamiento (a través de la guía de actividades), se han tenido en cuenta todos y cada uno de los procesos de aprendizaje: interesar, organización del conflicto cognitivo, formulación de conjeturas; como también la interacción armónica de la actividad heurística-racional (Gagné, 1985). Sin olvidar la motivación que acompaña el proceso de dirigir la atención y a recursos como la metacognición.

Al igual que Johnson, Johnson y Holubec (1999) que afirman que la Educación por sí misma es una actividad cooperativa, los propios estudiantes, con la guía adecuada, reconocen en sus mejores experiencias educativas aquellas que fueron llevadas a cabo en un marco pleno de cooperación. Nos proponemos, poco a poco, lograr que los distintos procesos y sus correspondientes etapas de aprendizaje estén atravesados por métodos colaborativos, de solidaridad, respeto mutuo, cooperación.

Método

Respondiendo al objetivo planteado y a través del planeamiento descripto, se proyecta el film La habitación de Fermat, sólo después de haber sido resuelta una primera guía de actividades provista con mucha anterioridad. Se invita a los alumnos a ver el film en el marco del aprendizaje cooperativo informal (Johnson, Johnson y Johnson Holubec, 1999) acompañados con una segunda guía de actividades, con el fin de encontrar las respuestas correspondientes.

La meta de esta forma de trabajo es principalmente, que el alumno conozca el lenguaje manejado en el film, ya sea por los personajes mencionados, como también en los acertijos. Además, se pretende guiarlos a generar respuestas originadas durante el registro sensorial, inmerso en un marco de trabajo propuesto por la Pedagogía de la Cooperación.

Marco normativo:

1. En cuanto a los nuevos aprendizajes, se recurre a la formulación de la UNESCO resumiéndolos en dos aprendizajes básicos:

   •Aprender a aprender: sabemos que las personas vamos a tener que aprender sistemáticamente mientras estemos vivas, si queremos sobrevivir.

   •Aprender a vivir juntos: …no tenemos otra posibilidad que aprender a convivir con la diferencia (UNESCO, citado por Laco, 2011, p.11).

2. Ley 26206, Ley de Educación Nacional. Artículo 30.

   La Educación Secundaria en todas sus modalidades y orientaciones tiene la finalidad de habilitar a los/las adolescentes y jóvenes para el ejercicio pleno de la ciudadanía, para el trabajo y para la continuación de estudios.

   Son sus objetivos:

   a) Brindar una formación ética que permita a los/as estudiantes desempeñarse como sujetos conscientes de sus derechos y obligaciones, que practican el pluralismo, la cooperación y la solidaridad, que respetan los derechos humanos, rechazan todo tipo de discriminación, se preparan para el ejercicio de la ciudadanía democrática y preservan el patrimonio natural y cultural…

   c) Desarrollar y consolidar en cada estudiante las capacidades de estudio, aprendizaje e investigación, de trabajo individual y en equipo, de esfuerzo, iniciativa y responsabilidad, como condiciones necesarias para el acceso al mundo laboral, los estudios superiores y la educación a lo largo de toda la vida (Ley 26206, citado por Laco, 2011, pp.13-14).

3. Diseño Curricular, Matemática, 4° año - 5° año del Ciclo Superior de la Escuela Secundaria. Dirección General de Cultura y Educación, Provincia de Buenos Aires.

   En el apartado, La matemática y su enseñanza, el documento afirma: […] Si bien la "matemática escolar" difiere del trabajo científico, el estilo y las características de la tarea que realiza la comunidad matemática pueden y deben vivenciarse en el aula... cambios en el posicionamiento del docente, ocupar otro espacio dentro de la dinámica de la clase que permita a los jóvenes interactuar con sus pares […] La intervención del docente es de fundamental importancia para que el aprendizaje sea posible. Esa intervención debe responder a estrategias que trasciendan la exposición como única dinámica de clase (Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2009, pp. 1-2).

El mismo documento, plantea como Objetivos de Enseñanza, entre otros: Promover el respeto por las opiniones ajenas y una actitud abierta al cambio que permita elegir las mejores soluciones a diferentes problemas matemáticos, estableciendo, cuando resulte necesario, puntos de encuentro con los desarrollos personales o logrados en pequeños grupos. Alentar a los alumnos para que valoren sus producciones matemáticas y logren comunicarlas en pequeños grupos o en grupo total, para realizar consultas, defender posturas, construir hipótesis o tratar de explicar construcciones matemáticas personales o ajenas.

Planificar las diferentes instancias en las que se desarrollará el trabajo matemático (individual, en parejas, en pequeños grupos, en grupo total u otras) que promuevan el trabajo personal y grupal. Ayudar a los alumnos a tomar conciencia de que la construcción grupal de conocimientos matemáticos aporta aprendizajes valiosos (Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2009, p. 4).

Correspondiendo a Objetivos de Aprendizaje, entre otros: "Construir conocimientos matemáticos significativos…Elaborar estrategias de trabajo matemático en el aula en un marco de responsabilidad, solidaridad y convivencia democrática" (Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2009, p. 5).

4. Propuesta académica y de gestión de la institución. Período 2010-2014

   IV. Núcleos prioritarios para la Gestión Académica

   A. Enseñanza

5. Pedagogía de la cooperación en el ámbito escolar.

   La idea de incorporar la Pedagogía de la cooperación […] comenzó a gestarse en el año 2006…La iniciativa…nació a partir del convencimiento de que la práctica de una pedagogía basada en los valores y principios de la cooperación en el colegio facilita la convivencia social, contribuye a crear hábitos de trabajo en equipo y fomenta la democracia como forma de vida…es una alternativa metodológica que promueve el espíritu solidario de los alumnos; que con su práctica se facilita el aprendizaje y se contribuye al desarrollo de las capacidades individuales y colectivas; que estimula la libertad y la creatividad; y que promueve actitudes de respeto y compromiso con la comunidad…Se prevé…dar cursos a algunos proyectos, algunos áulicos, otros que involucran a distintos miembros de la comunidad educativa -alumnos, docentes, padres…(Semplici, 2009, pp. 25-26).

6. Propuesta de trabajo para la jefatura del departamento de ciencias exactas. Período 2010-2012. Objetivos:

    5- Propiciar el diálogo académico para facilitar acuerdos que permitan dar a la enseñanza de cada una de las materias de Ciencias Exactas una continuidad tanto en lo conceptual como en lo metodológico desde el 1° año de la ESB hasta el 6° año de la ESS (Cantoni, 2010, p. 4).

Hipótesis

La realización de actividades bajo el encuadre de la Educación Cooperativa, incluyendo el uso de recursos fílmicos en respuesta a los intereses de los alumnos, resulta positiva para alcanzar el nivel de aprendizaje esperado en Matemática.

Diseño de actividades para la etapa para el aprestamiento:

La actividad se propone provocar placer, interesar por procesos y resultados; como también se desarrolla en el marco de la cooperación, revalorizando las habilidades/capacidades interpersonales (Larripa, 2010), el trabajo colaborativo-cooperativo.

Interesar por el resultado	Vincular el resultado de aprendizaje a lograr en el transcurso del ciclo escolar, con una situación gratificante para el aprendiz.	Es condición necesaria contar con una buena aproximación de los intereses directos e inmediatos del alumno, para tenerlos en cuenta.
Interesar por el proceso	Presentar actividades de enseñanza atractivas.	Atender a la pertinencia de la actividad, con respecto al objetivo.

Tabla 1. Procesos de aprendizaje, función de enseñanza y orientación para el docente. *Fuente:* Rampazzi, M. C. (2010). Programación del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Diseño de Sistemas de Enseñanza-Aprendizaje*. Buenos Aires: Universidad CAECE, p 17.

El film La habitación de Fermat invita a una visión integrada de las tareas que llevan a cabo los matemáticos; el investigador o teórico, el inventor/práctico o ingeniero, el docente.

Se presenta a los personajes/matemáticos como seres normales, y se dan nombres de matemáticos reales. Esta particularidad en el guión, es una excelente excusa para iniciar a los estudiantes en la hiperlectura en el recorrido por la historia de la matemática.

La película intenta describir la realidad que viven los personajes, la realidad que viven hoy en día todas aquellas personas que se dedican a la Matemática, dando lugar en los estudiantes una visión diferente a la histórica visión que se tiene de los matemáticos en general (Población Sáez, 2007). Sin olvidar que perseguimos interesar a los estudiantes en el aprendizaje de habilidades lógico-matemáticas y en el dominio lenguaje (Martín y Martín Sierra, 2009), hacer uso de problemas bajo la máscara de acertijo/adivinanza/enigma invita a los alumnos a tener ganas de construir sus capacidades conceptuales y procedimentales para la asignatura. Siendo responsabilidad del docente tender el puente entre cada acertijo y el concepto planificado para el curso. Tal y como afirman los estudios sobre la forma en que aprende el cerebro adolescente (Lordi, 2011), la actividad se propone provocar placer, interesar por procesos y resultados; como también se desarrolla en el marco del cooperativismo: tanto el mostrado por los protagonistas del film, como también en la forma que se propone para resolver las actividades, revalorizando las habilidades/capacidades interpersonales, el trabajo colaborativo-cooperativo.

Objetivos de la actividad:

- Que el proceso de Enseñanza-Aprendizaje sea significativo para el alumnado.
- Que el alumnado logre reconocer y valorar el pensamiento lógico-matemático.
- Que el alumnado mejore sus competencias matemáticas y científicas.

Mediante:

- atención a la diversidad de intereses, necesidades y motivaciones de los alumnos con relación al aprendizaje.
- reconocimiento de la existencia de diversos tipos y modalidades de aprendizaje escolar.
- búsqueda de alternativas novedosas para la selección, organización y distribución del conocimiento escolar, asociadas al diseño y promoción de estrategias de aprendizaje e instrucción cognitiva.
- dando lugar a la interpretación de consignas.
- guiando mediante estrategias pertinentes en los procesos de pensamiento declarativo y procedimental.
- fortaleciendo la etapa de transferencia y comunicación de resultados correspondientes a los conocimientos declarativos y procedimentales.
- reforzando el dominio de herramientas culturales (lenguaje lógico-matemático).

Metodología con la que se lleva a cabo la actividad.

Respondiendo al objetivo planteado y a través del planeamiento descripto, se lleva a cabo la secuencia de actividades, provista de tres etapas:

1. Actividad de investigación bibliográfica y resolución de problemas de índole "recreativos", todo relacionado con el Film a proyectar.

Mediante acertijos, enigmas, conocidos ya por muchos gracias a divulgadores como Martin Gardner, Yakov Perelman, Ian Stewart, y una valiosa investigación bibliográfica, se lleva a cabo la primera etapa de la guía de actividades. Con la intención de que la resolución de este tipo de problemas con forma de acertijo promueva la autoestima y valoración del otro por medio del trabajo colaborativo (Martín y Martín Sierra, 2009); dar a conocer al alumnado estos objetivos favorece su desempeño.

2. Se proyecta el film La habitación de Fermat, cumpliendo con la segunda etapa, sólo después de haber sido resuelta y entregada la primera de las guías de actividades, provista con una importante anterioridad. Se invita a los alumnos a ver el film acompañados con otra guía de actividades, con el fin de encontrar las respuestas correspondientes y potenciar con este ejercicio, la mejora de la capacidad de observación.

3. Actividad orientada a la comprensión del film, escenas, personajes y mensaje del mismo. La meta que proponemos consiste en que el alumno conozca el lenguaje manejado en el film (domine la herramienta cultural), reconozca los personajes y sus personalidades, como también sea capaz de resolver los acertijos. Además de pretender guiarlos a generar respuestas originadas durante el registro sensorial, análisis, tanto de lo implícito como lo explícito, en el discurso y en la imagen.

Al conducirlos a la reflexión sobre los hechos y relatos expuestos en el film, acompañado por un breve recorrido de los acontecimientos destacados en la historia de la Matemática, se los introduce al enfoque epistemológico de la Matemática.

La riqueza que posee la actividad es importante. A lo largo del desarrollo de la misma, invita a analizar sus protagonistas, introduce diversos temas, desde la axiomatización, explicando la diferencia entre axioma-conjetura-teorema, los fundamentos de la Matemática, pasando por teoría de números, lógica, geometría del espacio, sucesiones numéricas, etc. Resulta ser una excelente actividad que convida a la lectura de obras de índole Matemática (invita a la hiperlectura). Ejemplos como: *El tío Petrus y la Conjetura de Goldbach, El hombre que calculaba, Crímenes imperceptibles, El último Teorema de Fermat*, son una buena herramienta para dar la oportunidad a nuestros estudiantes de acercarse aún más a la Matemática a través de los personajes, sus actividades, los perfiles de los protagonistas, como también, un camino para *humanizar* nuestra asignatura frente a los ojos de nuestros alumnos, y sobre todo mostrar un costado atractivo y nuevo.

Se ha llevado un registro audiovisual del desarrollo de la actividad, como también un registro con las pautas y cumplimiento de la secuencia propuesta para la misma.

Observaciones

Además del cumplimiento con la tarea en tiempo y forma, han sido notorios los cambios en lo referente a: autoestima académica-social, valoración por el otro, respeto y valoración por la actividad matemática, interés por saber más.

Como resultado de la actividad desarrollada, los alumnos comenzaron a trabajar en forma colaborativa, participando en diferentes redes sociales, en busca de desafíos, información e interacción.

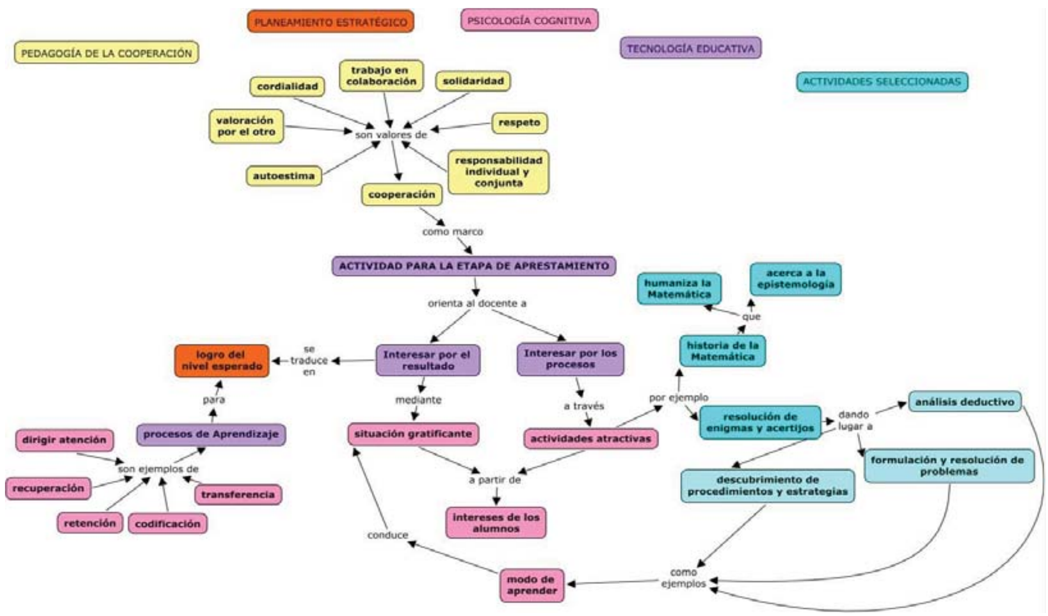


Figura 1. Síntesis de los elementos presentes en el desarrollo de la actividad propuesta.

Una vez superado el obstáculo promovido por el rechazo histórico hacia la matemática como asignatura escolar, se sigue con el análisis del nivel de logros esperados como consecuencia de la implementación de las actividades aquí propuestas. En este caso, acompañado con el aumento de la autoestima, la valoración del otro y la adopción del trabajo en colaboración, cooperativo; ante las muestras de cordialidad, solidaridad de todos los actores, los estudiantes lograron atravesar exitosamente los procesos de recuperar, dirigir atención, codificación, retención y transferencia. Las dificultades observadas recaen en la interpretación de consignas y en las capacidades de observación.

Podemos concluir que se ha dado lugar a un aprendizaje auténtico que los conecta con el mundo real, que se encuentra fuera del aula. Por las características que reúne la propuesta abordada, pretendiendo la reflexión sobre los acontecimientos destacados en la historia de la Matemática, su relevancia en el desarrollo de la civilización y los aportes en los avances científicos y tecnológicos, es que se manifestó respeto y valoración por la actividad matemática

(Figura 1). Es observable una mejora en la capacidad de análisis deductivo y habilidades para formular y resolver problema; como en la labor de descubrir procedimientos y estrategias utilizadas en la resolución de problemas matemáticos (Martín y Martín Sierra, 2009).

Referencias bibliográficas

Blanco, A. (Productor) y Piedrahita, L. (Guionista/Director). (2007). *La habitación de Fermat.* Recuperado el 25 de marzo de 2010 de http://arquicienciaymetal.over-blog.es/article-la-habitacion-de-fermat-38795615.html. y http://www.mangafilms. es/lahabitaciondefermat/

Bozzano, P. E. (2010). Cooperativismo escolar. Propuestas didácticas en el contexto de la educación cooperativa. *Revista Premisa, 12*(47), 23-31.

Cantoni, A. (2010). *Propuesta de trabajo para la jefatura del departamento de ciencias exactas*. Período 2010-2012. La Plata: Liceo Víctor Mercante.

Chadwick, C. (1987). *Tecnología educativa para docentes*. Madrid: Paidós.

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (2009). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria ciclo superior 4º año Matemática/ versión preliminar.* Buenos Aires.

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (2010). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria ciclo superior 5º año Matemática/ versión preliminar.* Buenos Aires.

Gagné, E. (1985). *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar*. Madrid: Visor Aprendizaje.

Johnson, D., Johnson, R., Johnson Holubec, E. (1999). *Los nuevos círculos del aprendizaje. La cooperación en el aula y la escuela*. Buenos Aires: Red Federal de Formación Docente Continua.

Kaufman, R. (1973). *Planificación de sistemas educativos*. México: Trillas.

Laco, L. (2011). La gestión curricular. *Gestión Educativa.* Buenos Aires: Universidad CAECE.

Larripa, M. (2010). Enfoques modulares de la mente: inteligencias múltiples y cambio conceptual. *Procesos cognitivos*. Buenos Aires: Universidad CAECE.

Lordi, M. (2011). Visión estructurada de la Matemática. *Estructuras algebraicas y aplicaciones didácticas.* Buenos Aires: Universidad CAECE.

Martín, A. y Martín Sierra, M. (2009). El cine como recurso didáctico en el aula de Matemática: La Habitación de Fermat. *Revista Sigma* (34), 91-106.

Población Sáez, A. J. (2007). *La habitación de Fermat*. Recuperado el 11 de Enero de 2010 de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com content& view= article&id=8774:27-la-habitacie-fermat&catid=68:cine-y-matemcas&directory=67.

Rampazzi, M. C. (2010). *Diseño de Sistemas de Enseñanza-Aprendizaje*. Buenos Aires: Universidad CAECE.

Semplici, N. (2009). *Propuesta académica y de gestión*. Periodo 2010-2014. La Plata: Liceo Víctor Mercante.

LOS MODOS DE PENSAR EL ÁLGEBRA LINEAL Y EJEMPLOS AD HOC EN PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. Se presenta un análisis de distintos hechos didácticos específicos en el álgebra lineal, a través de dos ejemplos. El primero se aborda, bajo el enfoque de la teoría de los modos de pensar el álgebra lineal de Anna Sierpinska (sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural) para indagar cómo estudiantes universitarios se enfrentan a los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y de solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. El segundo ejemplo se sitúa en las construcciones mentales que permiten, en estudiantes universitarios, la construcción del teorema cambio base para vectores bajo un enfoque cognitivo, donde se utiliza la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) como marco teórico y metodológico (Proyecto DI-PUCV Nº037.398/2012).

Palabras clave: modos de pensamiento, teoría APOE

Abstract. An analysis of different didactics facts in linear algebra is presented via two examples. The first is addressed, by the Anna Sierpinska theory in linear algebra of modes of thinking (synthetic-geometric, analytic-arithmetic and analytic-structural), to investigate how college students are faced with the concepts of linear dependence and independence vectors, resolution of linear systems equations in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$, and the connections that establish these college students between those concepts. The second example deals with the mental constructs that allow in university students, the construction of base change theorem under a cognitive approach, the APOS theory (actions, processes, objects and schemes) as a theoretical and methodological framework (Project DI-PUCV Nº037.398/2012).

Key words: modes of thinking, APOS theory.

Introducción

El objetivo de este reporte es presentar tópicos que se enseñan en el nivel superior, uno, los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y de solución de un sistema de ecuaciones lineales en R^2 y R^3; y el otro, el teorema cambio de base para vectores, y, a través de ellos, exhibir cómo éstos son abordados en la didáctica de la matemática desde dos perspectivas diferentes (marcos teóricos específicos) pero con un mismo objetivo, el de investigar aquellos elementos que pueden estar influyendo en la comprensión y construcción cognitiva, de la enseñanza aprendizaje de estos tópicos.

La enseñanza del álgebra lineal

La literatura en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra lineal es, comparativamente, menor que en otras áreas de la Matemática, y es inevitable coincidir con Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics, y Oktaç (1997): hay trabajos relacionados ya sea con la comprensión de diversos aspectos de esa materia o bien propuestas para su enseñanza, pero son muy escasos los dedicados a esa enseñanza explícitamente vinculados con la investigación.

Los estudios del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) acerca del álgebra lineal son una excepción.

Maracci (2008) indica que no ha habido muchas investigaciones en que las dificultades hayan sido objeto de un proyecto de investigación. Incluso, Dorier y Sierpinska (2001) expresa que es ésta un área relativamente nueva en la Didáctica de Matemáticas avanzadas. Los estudios de Dubinsky (1997), Harel (1989) y Sierpinska, Dreyufus y Hillel (1999) confirman que, a veces, esta materia produce una detención en el aprendizaje. La dificultad parece estar en la naturaleza abstracta de los objetos involucrados, Harel (1990) advierte que la representación visual de carácter geométrico de los conceptos que el instructor tiende a utilizar no ayuda como este supone.

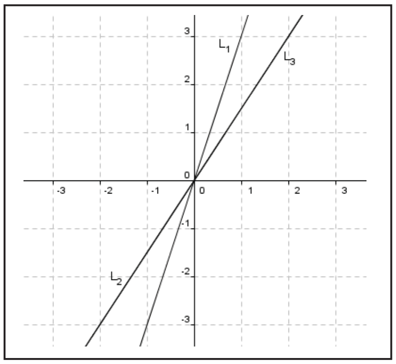
Primer ejemplo

Este ejemplo se basa en el trabajo de graduación de Bozt (2011) cuyo principal objetivo es indagar cómo a partir de lo teórico o desde lo práctico estudiantes universitarios se enfrentan a los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y de solución de un sistema de ecuaciones lineales en R^2 y R^3, así como las conexiones que establecen esos estudiantes de educación superior entre dichos conceptos. La indagación sobre dicha conexión se realiza desde la teoría de los modos de pensamiento propuestos por Anna Sierpinska (2000), porque propone elementos teóricos para describir la forma en que los estudiantes conectan los conceptos del álgebra lineal, propuestos en este estudio. Sierpinska distingue tres modos de pensamiento: uno que tiene que ver con el pensamiento práctico –sintético-geométrico (SG)– y otros dos que tienen que ver con el pensamiento teórico –analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE).

La población objetivo corresponde a estudiantes de educación superior, ya que es en este nivel donde se realiza el curso de Álgebra Lineal. La muestra tomada consta de siete estudiantes de educación superior pertenecientes a una Universidad de formación profesional chilena. Dentro de estos siete estudiantes, tres cursan el quinto semestre de Licenciatura en Matemática (Estudiantes E1, E2 y E3) y cuatro cursan quinto semestre de Pedagogía en Matemática (Estudiantes E4, E5, E6 y E7). Todos los estudiantes a los que se les aplicó el cuestionario de 8 preguntas, aprobaron el curso de Álgebra Lineal y se caracterizan por ser estudiantes con buenos resultados académicos.

A continuación se presentan algunas de las evidencias recopiladas de la pregunta 3 del cuestionario.

Pregunta 3: A continuación se presenta la solución gráfica de un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas (figura 1):



a) ¿Tiene solución el sistema? ¿Cuántas? *Justifique su respuesta.*

b) En R^2, con las operaciones suma y ponderación usuales, ¿los vectores generadores de cada una de las rectas del sistema (vistas como subespacios de R^2) forman un conjunto linealmente independiente? *Justifique su respuesta.*

Figura 1: *Sistema de 3x2.*

Análisis de las respuestas de los estudiantes parte a)

Para responder a esta pregunta, los estudiantes abordaron diferentes estrategias. Cuatro de los estudiantes (los estudiantes E1, E3, E5 y E6) respondieron que la solución del sistema es única porque gráficamente se puede ver que las rectas se intersectan en el (0,0) (figuras 2 y 3). En este caso, los estudiantes sitúan su pensamiento en el modo SG, que era lo que se esperaba que hicieran.

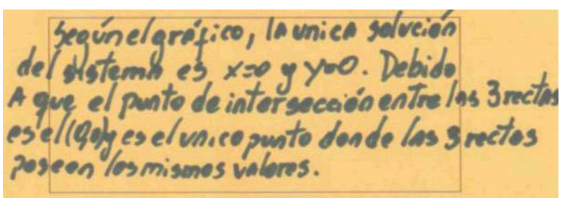


Figura 2: Respuesta pregunta 3.a, E1

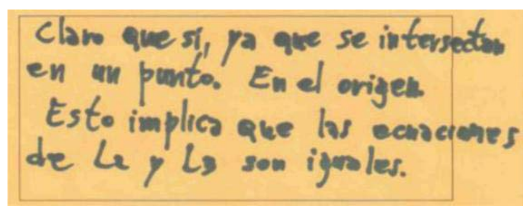


Figura 3: Respuesta pregunta 3.a, E6

En cambio, los estudiantes E2 y E4 obtuvieron las ecuaciones de cada una de las rectas del sistema y en ellas observaron que el único par ordenado que satisfacía todas a la vez es el (0,0). Por tanto, su argumento es en base a las ecuaciones obtenidas, que tal como anticipamos en el análisis a priori que realizamos, muestra a los estudiantes situados en el modo AA (parte del desarrollo de las respuestas de estos estudiantes se puede ver en las figuras 4 y 5).

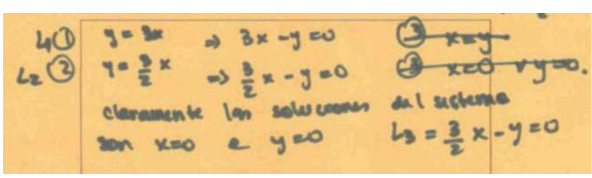


Figura 4: Respuesta pregunta 3.a, E4

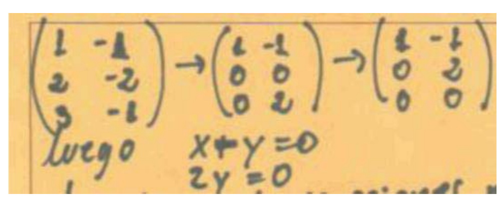


Figura 5: Respuesta pregunta 3.a, E2

Análisis de las respuestas de los estudiantes parte b)

Cuatro de los estudiantes sitúan su respuesta en el modo de pensamiento SG. Los estudiantes 1, 5 y 7 argumentan de acuerdo a lo concluido en la primera parte de la pregunta, al señalar que las rectas L_2 y L_3 poseen el mismo vector generador y por lo tanto el conjunto formado por los tres vectores no es linealmente independiente (figura 6).

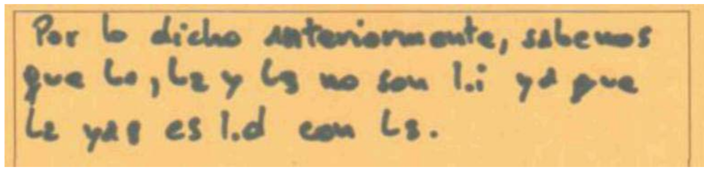

Por lo dicho anteriormente, sabemos que L_1, L_2 y L_3 no son l.i ya que L_2 ya es l.d con L_3.

Figura 6: Respuesta pregunta 3.b estudiante 5.

A pesar de que estos estudiantes no hacen alguna especie de marca en la gráfica, sí queda claro que es ésta la que les permite concluir que las rectas L_2 y L_3 son generadas por el mismo vector, es decir, recurren a un modelo geométrico de la dependencia lineal de vectores. Por lo tanto, considerando también sus respuestas a la primera parte de esta pregunta, se concluye que estos estudiantes se sitúan en el modo SG para responderla.

Segundo Ejemplo

En la investigación propuesta, Proyecto DI-PUCV 037.398/2012: *"Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del Teorema cambio de base para vectores, (TCBV)"* se realiza una indagación desde un enfoque cognitivo, utilizando como marco teórico –la teoría APOE– (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews, y Thomas, 1996), para investigar cómo los estudiantes universitarios (re)construyen el TCBV.

El proceso de investigación en la teoría APOE conlleva el tener en cuenta un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto, llamado *descomposición genética* (Dubinsky, 1991) que es el resultado de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por dicha teoría (Asiala et al., 1996). En la descomposición genética que se diseñó, esto es, investigar, mediante la metodología utilizada en la teoría APOE, propuesta por Ed Dubinsky y el grupo RUMEC, se explicitan las construcciones mentales y mecanismos que los estudiantes ponen en práctica en la (re)construcción que hacen del TCBV. Las tres componentes propuestas, están basadas en la metodología que viene utilizando el grupo RUMEC en sus investigaciones: *análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de datos*, determinan la estructura general de la investigación. Para testear la viabilidad de la descomposición genética se diseñaron cuestionarios que fueron aplicados a estudiantes universitarios de una universidad chilena, que hayan cursado álgebra lineal, para que den información respecto a las construcciones y mecanismos mentales que realizan para llegar a (re)construir el TCBV; dicho teorema establece que dadas dos bases $B = \ v_1, v_2, \ldots v_n \ , B' = \ w_1, w_2, \ldots w_n$ de un espacio vectorial finito dimensional, *V*, existe una matriz $A \in M_n$, la cual llamaremos matriz cambio de base, que cumple con, $A \ v \ _B = \ v \ _{B'}$, para cualquier *v* en *V* (Aburto, Johnson, y Jimenéz, 1996).

El estudio propone, de acuerdo a la metodología propuesta por la teoría APOE, una descomposición genética (DG), del teorema, de modo de clarificar el análisis de los aspectos cognitivos implícitos y el estudio del propio TCBV por parte de los alumnos.

La investigación propone comprender los procesos mentales que subyacen a las estrategias de aprendizaje del álgebra lineal en estudiantes universitarios. Particularmente, interesa describir los mecanismos y las construcciones mentales que un estudiante realiza para aprehender el TCBV; para ello, se utiliza la teoría cognitiva APOE (acción-proceso-objeto-esquema), la cual posee su ciclo de investigación, el cual proporcionara evidencias empíricas de aquellos mecanismos y construcciones.

Descomposición genética hipotética del TCBV

Para que un estudiante llegue a construir el TCBV como objeto, es necesario que muestre una construcción objeto del concepto espacio vectorial *V* de una dimensión finita, digamos *n*, para luego, desencapsular de ese objeto, por una lado bases ordenadas $B' = \ w_1, w_2, \ldots, w_n$ y $B = \ u_1, u_2, \ldots, u_n$ como procesos y la pertenencia de un vector al espacio vectorial *V*, también como proceso. Paso seguido se dan dos coordinaciones de los procesos antes mencionados a través de la combinación lineal de vectores. Específicamente, la primera coordinación es entre los procesos de las bases ordenadas β' y β de *V,* y la segunda coordinación es entre los procesos base ordenada de *V*, con la pertenencia de un vector *v* a *V,* los cuales se coordinan a través de la combinación lineal de vectores, dando origen al proceso de expresar *v* como combinación lineal de los vectores de la base ordenada β de *V*, este nuevo proceso se encapsula en el objeto coordenada de vector *v* en la base β, es decir, $v \ _\beta$.

Ahora el proceso que es resultado de la coordinaciones de las bases ordenadas β' y β de *V*, se generalizan, a una sucesión finita, en el objeto que fue producto de la encapsulación de expresar *v* como combinación lineal de β; cuya resultante es el proceso (I), que llamamos matriz de coordenadas, *A*, y expresamos así: $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1{}_{\beta'} & u_2{}_{\beta'} & \cdots & u_n{}_{\beta'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$.

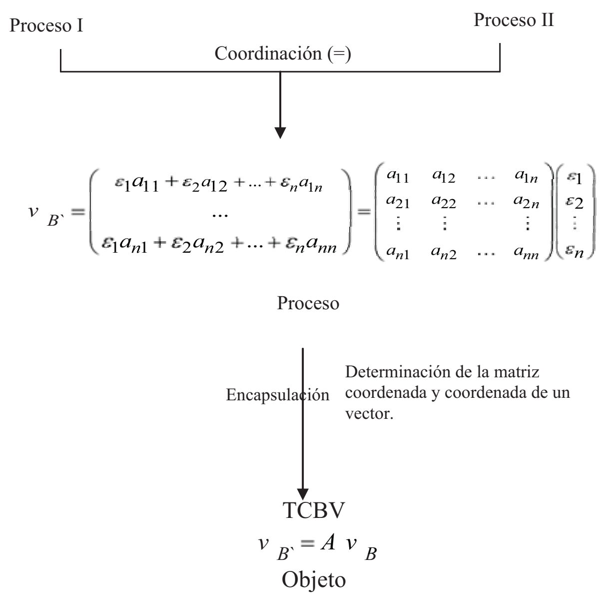


Figura 7: Coordinación del Proceso I y II en la Descomposición Genética del TCBV.

Así también, podemos generalizar en un proceso (II) la combinación lineal finita de *v* en β, expresando los vectores de β como combinación lineal de los vectores de β'.

Ambos procesos, el proceso (I) y el proceso (II) se coordinan a través de la igualdad de matrices (figura 7), el cual se encapsula en el TCBV como objeto, esto es: $v_{\beta'} = A\, v_{\beta}$.

Como se puede ver, los elementos que entran en juego en la descomposición genética descrita son complejos y el aprendizaje del TCBV como objeto, en realidad depende de las relaciones que un aprendiz pueda establecer.

En búsqueda de evidencias empíricas para documentar la DG hipotética

Diseñamos un cuestionario de 10 preguntas, con la intensión de documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG, en 8 estudiantes universitarios. Hemos seleccionado una pregunta del cuestionario, para darla a conocer en este reporte.

Pregunta 9 del cuestionario

Sean *B* y *B'* dos bases del $U \leq M_{2x3}$ □ . Dados $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de coordenadas de *B* a *B'* y las coordenadas del $v_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine las coordenadas de $v_{B'}$. *Justifique.*

El propósito de la pregunta 9, es mostrar evidencias de la construcción del TCBV como Objeto.

Estudiante 6**,** E6, realiza un tipo de escritura parecida a la del TCBV, la que es incorrecta, pero duda y la cambia por la versión correcta. En la figura 8, E6 muestra lo que escribe. Hemos de considerar que el E6 puede hacer la corrección, pues durante el desarrollo del cuestionario ha dado muestras de una construcción del TCBV, como objeto (figura 9).

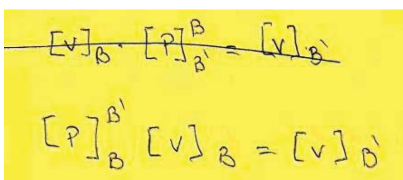


Figura 8: Respuesta que realiza el E6

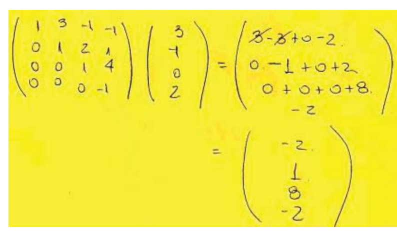


Figura 9: Respuesta que realiza el E6

Análisis de las producciones de los ejemplos

En relación al primer ejemplo, el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales en su mayoría de los informantes es reducido a un par o trío ordenado, dependiendo de si el problema corresponde a R^2 o R^3. Aproximadamente la mitad de los estudiantes participantes de la investigación no tiene un concepto geométrico del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales y aquellos que sí lo tienen lo asocian a la intersección común de rectas o planos. Esto tuvo consecuencias en cuanto a la conexión entre los conceptos dependencia e independencia lineal y el de solución de un sistema de ecuaciones lineales, ya que algunos estudiantes concluyen la independencia lineal de un conjunto de vectores, argumentando que uno es un ponderado del otro sólo a través de la gráfica, pero para encontrar la solución del sistema recurren a las ecuaciones de las rectas y prefieren determinarla resolviendo algebraicamente.

En el segundo ejemplo, a la luz de las evidencias se puede decir que, la construcción del TCBV como proceso no es alcanzada por la totalidad de los estudiantes, sólo tres de éstos lograron coordinar los procesos descritos en la DG para construir el TCBV como objeto. La DG cumplió con su rol, al describir las construcciones mentales necesarias para la construcción del TCBV; no obstante se considera que parte de su refinamiento provendrá del proceso de entrevistas en profundidad, pues es en estos estudiantes donde es posible profundizar la evolución cognitiva necesaria para la construcción como objeto del TCBV.

A modo de conclusión

Los dos ejemplos aquí presentados nos ofrecen problemas, resultados, enfoques teóricos y metodologías que son de mucha utilidad, para diseñar y llevar adelante propuestas de enseñanza aprendizaje, para determinados conceptos matemáticos. A la luz de los dos marcos teóricos descritos en los ejemplos –Modos de Pensamiento y APOE– las investigaciones descritas, procuran buscar explicaciones a diferentes hechos didácticos que se relacionan, por un lado con el proceso de articular distintas formas de comprender los conceptos del álgebra lineal (ejemplo 1), y por otro, construirlos (ejemplo 2), basadas en evidencias, y no en la sola opinión o la buena voluntad.

Referencias bibliográficas

Aburto, L., Johnson, R. y Jimenéz, D. (1996). *Algebra Lineal.* Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. y Oktaç, A. (1997). Development of students. understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior* 16 (3), 241-309.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Ed.s) Research in collegiate mathematics education (2), 1-32.

Bozt, J. (2011). *Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en* $\boldsymbol{R^2}$ *y* $\boldsymbol{R^3}$ *desde el punto de vista de los modos de pensamiento*. Tesis de Maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Dorier, J. y L. Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first linear algebra on the college level. In D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins, (Eds). *Resources For Teaching Linear Algebra,* 107-126.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic notions in linear algebra. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology 21*(3), 387-392.

Harel, G. (1989). Teaching in learning linear algebra; difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics 11*(1-2), 139-148.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory. *ZDM Mathematics Education* 40, 265- 276.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). Evaluation of the teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en didactique des mathématiques 19*(1), 7-40.

LSM EN LA ADQUISICIÓN DE CANTIDAD DE MAGNITUD: MASA Y LONGITUD. JÓVENES [16-21] CON AUDICIÓN DIFERENCIADA

Ignacio Garnica y Dovala, Mónica G. Astorga Adrián, Andrea Barojas Gómez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN México
igarnica@cinvestav.mx, mastorga@cinvestav.mx, abarojas@cinvestav.mx

Resumen. Se presentan resultados de la fase indagatoria de la investigación en curso que orienta sus preguntas a identificar la naturaleza de la Lengua de Señas Mexicana (LSM) en su sentido de uso en situación de adquisición de la noción de cantidad de magnitud: masa y longitud. La investigación articula tres aspectos: enseñanza, indagación e investigación en condiciones del proceso educación básica de nueve jóvenes Sordos (16-21) en una ONG bajo la figura de acuerdo académico con el DME del Cinvestav. Se propusieron Señas significativas referentes, respectivamente a la cantidad de las magnitudes de masa y longitud, se usaron en el proceso de enseñanza, se indagó respecto a la adquisición de las nociones en cuestión.

Palabras clave: lengua de señas mexicana (LSM), comprensión cantidad de magnitud

Abstract. This paper presents a report of the inquiry stage results of the research in progress that guides its questions to identify the nature of the Mexican Signs Language (LSM) in its sense of use in situation of acquisition of the notion of magnitude quantity: mass and length. The researcher works with three aspects in different moments: learning, inquiry and research on conditions of the basic education process of nine young deaf (16-21) in an ONG under the figure of academic agreement with Cinvestav DME. Proposed significant signs relating to the amount of the magnitudes of mass and length, they were used in the teaching process, and it was inquiring regarding to the acquisition of the notions in question.

Key words: mexican signs language (LSM), understanding of magnitude quantity

Introducción

La presente investigación de tipo cualitativo y en curso se desarrolla en tres fases: *Indagatoria, Experienciación y Consolidación*. Se reportan resultados de la fase *Indagatoria* que guía las preguntas a identificar la naturaleza de la Lengua de Señas Mexicana [LSM] en su sentido de *uso* en situación de adquisición de la noción de *cantidad de magnitud*: *masa y longitud*. La investigación articula tres aspectos: *enseñanza, indagación* e *investigación* con nueve jóvenes Sordos [16-21], usuarios de la LSM que cursan educación básica en una ONG: *Grupo Tessera*, organización sin fines de lucro enfocada al desarrollo lingüístico, cognitivo, emocional y social para personas Sordas y sus familias bajo la figura de un acuerdo académico con el DME del Cinvestav. Se seleccionaron Señas referentes a la noción de cantidad de magnitud: masa — unidad [kg], submúltiplo [gr], — y longitud — unidad [m], submúltiplos [dm, cm, mm], — que se utilizaron en actividades de *enseñanza*, y posteriormente se indagó respecto a la adquisición de las nociones en situación de uso y comunicación. Se plantearon tres preguntas de investigación: ¿Cuáles son las características fundamentales de las Señas relacionadas con el lenguaje matemático correspondiente a las nociones de cantidad de magnitud: masa y longitud?, ¿Cuáles son las Señas propuestas que favorecen la adquisición de las nociones de cantidad de magnitud: masa y longitud?, ¿Qué condiciones del Sordo usuario de la LSM favorecen o limitan la comprensión de las nociones de cantidad de magnitud: masa y longitud? Y tres objetivos: (a) Identificar y caracterizar las Señas correspondientes a las nociones de cantidad de magnitud: masa y longitud; (b) Evaluar la adquisición de las nociones de cantidad de magnitud: masa y longitud, con base en las señas propuestas; (c) Identificar la competencia comunicativa mediada por el uso de la LSM como una condición en la adquisición de las nociones de cantidad de magnitud: masa y longitud.

Antecedentes

A partir de 2009 se inició en el DME del Cinvestav, un trabajo sistemático con la población de jóvenes Sordos usuarios de la LSM, se desarrollaron actividades para identificar la competencia lingüística y de comunicación en LSM así como la lengua escrita [LE], el dominio del vocabulario en Señas y los procesos de las operaciones aritméticas aditivas-multiplicativas. Posteriormente en 2010 se establecieron las condiciones iniciales para trabajar nociones de aritmética, cantidades discretas y continuas, elementos básicos de estadística descriptiva y del conocimiento espacial. Durante el primer semestre de 2011 se observó a través del uso de la LSM y la LE, la adquisición de las nociones por medio del conteo de colecciones de cantidades discretas y el tránsito a las cantidades continuas con el recurso de objetos como varas y otros, los resultados obtenidos no cumplieron con los propósitos de adquisición de las nociones matemáticas y de la competencia lingüística en LSM y LE planteados, debido entre otros factores, a la falta de conocimiento del español escrito y a la inconsistencia de las Señas respecto de las nociones.

Referentes teóricos

A diferencia de otros estudios (Garnica, 2006; González y Garnica, 2008 y 2009; Chávez, Garnica y Ojeda, 2010; Díaz y Garnica, 2011, Lonngi y Ojeda, 2011), el presente centra su interés en la identificación de las Señas que caracterizan a las nociones de *cantidad de magnitud: masa y longitud* en un contexto lingüístico competente y de comunicación mediada por el uso exclusivo de la LSM, lengua visual-gestual que se expresa con las manos, la mirada, el cuerpo y la expresión facial. Las características gramaticales, fonológicas, morfológicas, semánticas y sintácticas que la diferencian de otras lenguas naturales y le permiten cumplir con la función comunicativa se estudian mediante "un sistema de notación, *transcripción,* que implica "no sólo la descripción de la configuración de la mano, sino de todos los elementos lingüísticos que están presentes en la deixis espacial, o el uso de los rasgos no manuales etcétera" (Cruz, 2008, p. 94).

Gramo		
 		
MS	**Seg.**	D---------M-------D Lin
MA	**CM**	1+/a+
	UB	PalmaDed Prox Cont Sup - NodD1
	DI	RA
	OR	Palma
	MD	Bimanual asimétrico
RNM	∅	

Centímetro		
 		
MS	**Seg.**	M Prog
MA	**CM**	1234”°/o° 123^/o-
	UB	Mano Prox Enfr
	DI	∅
	OR	Neutral Palma
	MD	∅
RNM	∅	

Figura 1. Transcripción fonológica según Cruz (2008)

Estos segmentos referidos corresponden a los rasgos que describen la actividad de la mano durante la producción [*matriz segmental* (MS)]; a la descripción de la postura de la mano y su ubicación en el momento de la realización de la Seña [*matriz articulatoria* (MA)] y a los movimientos de la cara (expresiones faciales), la cabeza y el cuerpo [*matriz de rasgos no manuales* (RNM)]. Las *transcripciones* correspondientes a las Señas: Gramo y Centímetro, para efecto de nuestro estudio (véase la Figura 1). Otro instrumento para comprender la expresión del significado de la LSM es el uso de la *glosa*, como la transcripción de cada una de las Señas expresadas en LSM a la sintaxis propia del español. En la presente investigación se utilizó tanto la transcripción fonológica, como la glosa. (véase la Figura 2).

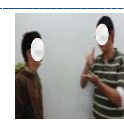
LSM						
Glosa	UNO	MIL	GRAMOS	CONVERTIR	KILO	¿CUÁNTO?
Español	Mil gramos ¿cuántos kilos son?					

Figura 2. Glosa

El estudio de la adquisición de las nociones de cantidad tanto discreta como continua, se fundamenta en la afirmación "…la adquisición de la noción de cantidad discreta y su tránsito hacia las cantidades continuas, la entendemos como una longitud o un volumen, solo es utilizable para el trabajo del espíritu en la medida en que se constituyen en un todo permanente independientemente de las combinaciones posibles efectuadas en la disposición de las partes" (Piaget, 1975a). En cuanto a la noción de magnitud es necesario considerar la presencia del sujeto y la relación entre la magnitud y una unidad de medición que posteriormente llevará a la posible construcción de las nociones de cantidad de magnitud. A este respecto, Sena (1979) se refiere en los términos siguientes "medir cualquier magnitud significa hallar de manera experimental la relación entre la magnitud dada y la unidad de medición correspondiente. Esta relación es, evidentemente, la medida de la magnitud que nos interesa". En este sentido (Piaget, 1975b) en su epistemología genética hace cierta referencia al señalar que "ya desde la percepción de los objetos, intervienen acciones (específicamente físicas) así como coordinaciones reguladoras que implican el movimiento, es decir, elementos lógicos matemáticos".

En el proceso de comunicación dentro del aula, otro elemento de fundamental importancia para nuestro estudio, intervienen, tanto en lo que se refiere a las actividades de indagación como a las de investigación, al menos tres actores que se distinguen en función de la competencia comunicativa mediante el uso de la lengua oral por una parte; de la lengua de Señas por la otra; pero también por la competencia formal de conocimiento matemático. Se considera, por tanto: 1) la presencia del intérprete, que permite igualar la situación de comunicación entre las personas Sordas usuarias de la LSM y las personas no competentes en la misma (De los Santos y Lara 2001); 2) el informante como la persona Sorda conocedora del lenguaje gestual (Rodríguez, 1992) y 3) la presencia del investigador de Matemática Educativa. (véase la Figura 3)

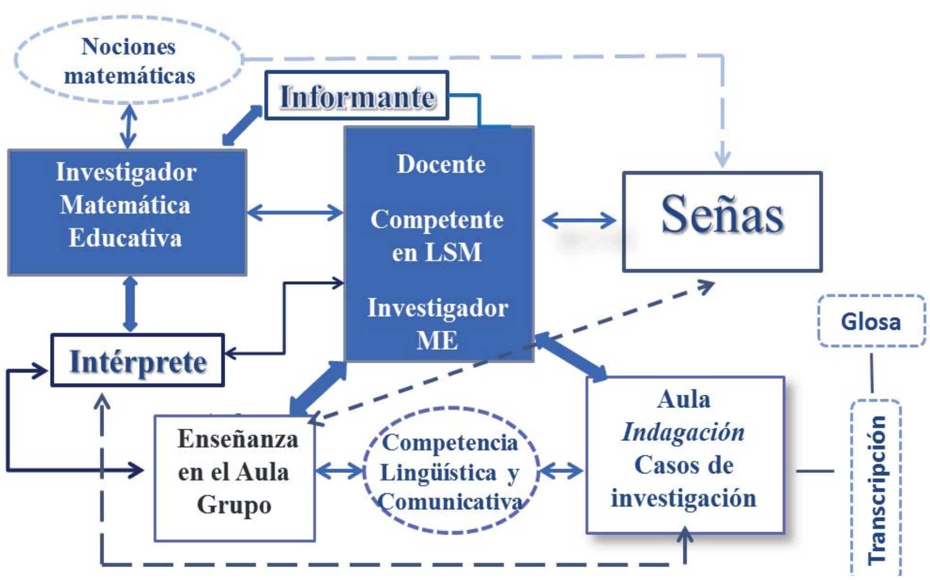


Figura 3. El proceso de comunicación en el aula

Método

Se diseñaron actividades en el curso de nueve sesiones en tres escenarios: 1) en la *enseñanza* se desarrollaron tres actividades en forma grupal con condiciones de tiempo real de cuatro horas a la semana cada quince días, dos horas para exponer las nociones de cantidad de magnitud masa y dos horas para las de longitud; 2) en la *indagación*, se plantearon cuatro sesiones de dos horas semanales por cada magnitud, mismas que se intercalaron con las sesiones de enseñanza, para observar las Señas y la comunicación entre pares sobre las nociones en foco; 3) con respecto a las dos sesiones de *investigación* a modo de entrevista individual, no se concretaron debido a que se extendieron las sesiones de enseñanza e indagación. Los contenidos de las actividades se centraron en la *estimación perceptual* y su noción cuantitativa, así como en *la partición recursiva decimal*. De importancia fue el uso de los diccionarios de LSM para confrontar las Señas específicas, así como el uso de artefactos que evidenciaron los resultados: balanzas sin graduación, *dinamómetro*, metro sin graduación, *nivel de burbuja y plomada*. Se utilizaron como instrumentos guiones de las actividades de enseñanza e indagación, los diccionarios de LSM, las glosas, las transcripciones fonológicas (Cruz, 2008); la recolección de información se realizó por medio de la bitácora, la videograbación, fotografías, los trazos en papel y el uso del pizarrón.

Desarrollo

Para las nociones de cantidad de magnitud: masa, se estimaron diversos pesos utilizando la percepción táctil, desde cien gramos hasta diez kilogramos de material concreto (semillas, frijoles, lentejas, maíz) en bolsas opacas. Las estimaciones se corroboraron por medio de los artefactos específicos balanzas y *dinamómetro*, y se ejercitó los procesos de aditividad con los pesos presentados. Para promover las nociones de cantidad de magnitud: longitud, se utilizó la partición recursiva de un segmento de recta dado en diez segmentos iguales, previamente se implementó el uso y manejo del *nivel de burbuja* y *plomada* para identificar los planos horizontal, vertical e inclinado, así como de los instrumentos: regla T, escuadras, compás, transportador y metro sin graduación para precisar la ejecución de los trazos de dibujo y promover la adquisición de las nociones: línea recta — horizontal, vertical, inclinada con diferentes ángulos de inclinación y paralelas —, segmento, segmento de línea recta, partición, estimación y conversión.

Resultados

Se presentan, al final, ejemplos de los referidos a los antecedentes. A continuación los correspondientes al reporte.

Las Señas para las nociones de cantidad de magnitud: masa y longitud. A partir de la revisión de diccionarios de LSM, se observó que la nociones de magnitud masa: *kilo* (Calvo, 2004); *peso,* *pesado*, *igual, cuánto(s)* (López y San Esteban, 2006), *diferente* y *conversión* (Serafín y González, 2011) son palabras que sí se incluyen en los diccionarios, pero están presentadas en forma lexicón y por campo semántico sin responder al contexto matemático. La noción: *gramo,* y las palabras vinculadas: *balanza, dinamómetro*, no existen en los diccionarios por lo que, bajo el conocimiento de la LSM de los investigadores y el conjunto de actividades realizadas en este proyecto se han identificado y analizado para avanzar hacia su normalización y uso en las matemáticas. Con respecto a la cantidad de magnitud longitud, se encuentran las Señas: *metro* y *línea* (Calvo, 2004), *metro*, *línea, decímetro, centímetro, milímetro, segmento, nivel* (Miranda, 1987) y (López y San Esteban, 2006). No existe la Seña para *nivel de burbuja* y *plomada*; se adecuó la seña para *líneas paralelas*.

Con respecto a la transcripción fonológica de las Señas seleccionadas permitió avanzar hacia una posible caracterización de las mismas y–diseñar una estrategia para la adqusición de las nociones matemáticas con base en su uso. De las Señas propuestas para las nociones de cantidad de magnitud: masa y longitud se identificaron y precisaron para masa–– *unidad [kg], submúltiplo [gr],* balanza, dinamómetro, peso, conversión, –– *y longitud –– unidad [m], submúltiplos [dm, cm, mm]*; línea recta, segmento de línea recta, líneas paralelas, nivel de burbuja y plomada – mediante la indagación de las capacidades comunicativas establecidas entre pares.

A partir de los niveles de competencia lingüística y comunicativa de los alumnos se formaron dos grupos: uno de nivel alto (cuatro estudiantes) y el otro de nivel bajo (cinco). En el grupo alto, la actividad entre pares presentó un adecuado dominio de las Señas propuestas y sus integrantes mostraron estrategias didácticas y habilidad para argumentar, formular preguntas y solucionar tareas matemáticas convirtiéndose así en modelos de comunicación y en facilitadores. El otro grupo presentó dificultades en la adquisición y comunicación de las nociones de forma inmediata. Esto debido al déficit lingüístico y experiencial, que se produce como consecuencia de la escasa o insuficiente respuesta educativa, adecuada a las necesidades y posibilidades de los alumnos sordos.

Actividades de indagación

Los resultados obtenidos en las actividades de indagación, con respecto a las nociones de masa, dadas las condiciones del Sordo en ésta comunidad, mostraron que sus procesos cognitivos están relacionados en gran medida por las acciones sobre los objetos con la presencia fundamental de los campos de percepción (visual, táctil) y dejaron evidencia de dificultades en los procesos de estimacion; en lo relativo a las de longitud se encontró que la partición recursiva en diez partes iguales de un segmento apoyó la adquisición de las nociones: decímetro, centímetro y milímetro (véase la Figuras 4 y 5).

Masa

Figura 4. Procesos de estimación en nociones de cantidad de magnitud: masa.

Longitud

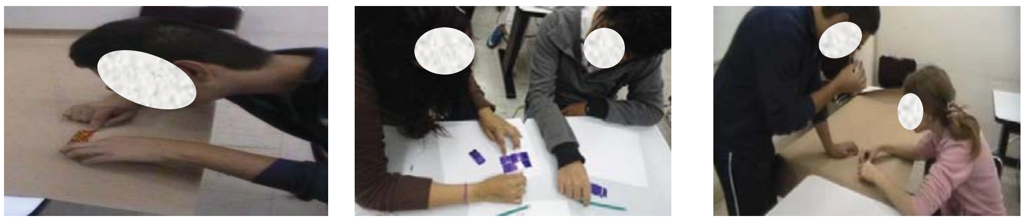


Figura 5. Identificación de las nociones de cantidad magnitud: longitud. Submúltiplos.

De los antecedentes. Se advierte que las nociones de cantidad no se adquirieron después de los procesos de enseñanza a los que se hace referencia en este reporte. Como ejemplo presentamos los procedimientos que los estudiantes realizaron para resolver operaciones aditivas y multiplicativas elementales: a) retención segmentada durante el proceso de operación aditiva (dos cifras) (véase Figura 6); b) retención segmentada de procedimientos "*automáticos*" [7, 14,… 63] (véase Figura 7); c) retención segmentada durante los procesos de la división (véase Figura 8).

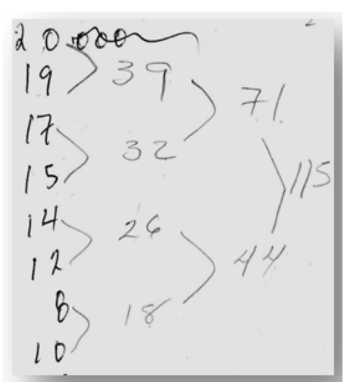


Figura 6.

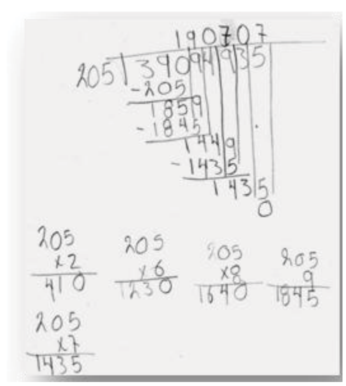


Figura 7.

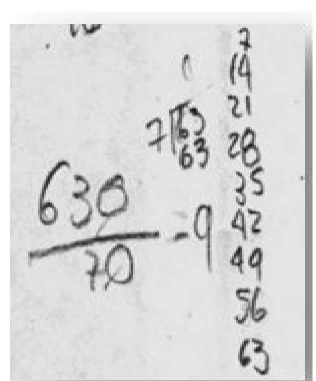


Figura 8.

Referencias bibliográficas

Calvo, M.T. (2004). *Diccionario español- lengua de señas mexicana (DIELSEME)*. *Estudio introductorio al léxico de la LSM*. Recuperado el 26 de noviembre de 2011 de http://educacionespecial.sepdf.gob.mx/publicacionesdee.aspx

Chávez, H., Garnica, I. y Ojeda, A. M. (2010). Nociones matemáticas adquiridas y audición diferenciada: edades 18-24 años. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 85-94. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cruz, M. (2008). *Gramática de la lengua de señas mexicana*. México: Colegio de México.

De los Santos, E. y Lara, M.P. (2001). *Técnicas de interpretación de lengua de signos*. España: Fundación CNSE.

Díaz, I. y Garnica, I. (2011). Comunicación y entorno familiar: lenguaje y adquisición de nociones matemáticas de niños preescolares con audición diferenciada. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 293-301. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Garnica, I. (2006). Percepción auditiva diferenciada y producción escrita de expresiones: elementos para un modelo de comunicación de la unidad [“t/m”: mtl-sms] para la investigación en Matemática Educativa. En E. Filloy (Ed.) *Matemática educativa, treinta años (*257-281). México: Santillana.

González, H. y Garnica, I. (2008). Cantidad discreta y pensamiento matemático de niños (7-9) con audición diferenciada y lenguaje limitado: Estudio de cinco casos. *Memorias de la 22ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, 103. México. CLAME.

González, H. y Garnica, I. (2009). Cantidad discreta y pensamiento matemático de niños (7-9) con audición diferenciada y lenguaje limitado: estudio de cinco casos. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 277-286. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lonngi, P y Ojeda, A. M. (2011). Comprensión de ideas fundamentales de estocásticos. Una experiencia con estudiantes sordos: Edades 17-26 años. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 303-312. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

López, L.A y San Esteban, S. (2006). *Mis manos que hablan. Lengua de señas para sordos*. México: Trillas.

Miranda, J.C. (1987). *Lenguaje de Señas de México*. México: Asociación Mexicana de Sordos.

Piaget, J. (1975a). *Introducción a la epistemología genética*. Argentina: Paidós.

Piaget, J. (1975b). *Pensamiento físico*. Argentina: Paidós.

Rodríguez, M.A. (1992). *Lenguaje de signos*. España: Fundación CNSE.

Sena, L.A. (1979). *Unidades de las magnitudes físicas sus dimensiones*. URSS: Mir

Serafín, M. E. y González, R. (2011). *Manos con voz. Diccionario de lengua de señas. Una herramienta indispensable para conocer la lengua de señas*. México: Libre acceso, A.C.

EL MODELO LOGISTICO Y SU DECONSTRUCCIÓN

José Trinidad Ulloa Ibarra, Jaime Lorenzo Arrieta Vera, Gessure Abisaí Espino Flores
Universidad Autónoma de Nayarit México
Universidad Autonoma de Guerrero
jtulloa@hotmail.com, jaime.arrieta@gmail.com, abisai_8282@hotmail.com

Resumen. En este reporte derivado del trabajo "Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de la pesca, un estudio socioepistemológico" se analiza desde el ámbito académico por medio de la deconstrucción como ejercen la práctica de modelar el crecimiento de las microalgas los profesionales dedicados a esta actividad y como consecuencia de la deconstrucción como se puede establecer la modelación como un vínculo entre la práctica profesional y la modelación en el aula. Los organismos en estudio son las microalgas cuyo crecimiento hemos analizado en sus diferentes estadios, correspondiendo ahora a la fase en la cual el organismo es utilizado como alimento para el camarón.

Palabras clave: modelación, deconstrucción, logístico, parámetros

Abstract. In this report unearned "modeling practices and the construction of the exponential in fishing communities, a study socioepistemológical" is analyzed from academia through deconstruction as practice exercise to model the growth of microalgae professionals engaged in this activity as a result of deconstruction as modeling can be established as a link between professional practice and modeling in the classroom. Organisms studied microalgae whose growth is analyzed in its different stages, corresponding to the stage now where the body is used as food for shrimp.

Key words: modeling, deconstruction, logistic, parameters

Introducción

Las matemáticas están relacionadas con otras materias y es muy importante para ellas. Ciencias como la biología, la fisiología y la medicina en las cuales la matemática no tenía una presencia relevante, están demandando nuevas herramientas matemáticas para poder analizar y explicar muchos problemas sobre los cuales tienen cada vez mas información experimental (Ulloa y Arrieta, 2010), creemos que el avance de éstas ha tenido en gran parte a la matemática como base.

No obstante para profesionales no matemáticos, la parte más difícil de usar las matemáticas para estudiar una aplicación es la conversión de los fenómenos de la vida real al lenguaje matemático. Por lo general esto es complicado porque implica la conversión de hipótesis precisas en fórmulas muy precisas. Es importante recordar que los modelos matemáticos son como otros tipos de modelos. El objetivo no es producir una copia exacta del objeto "real", sino más bien representar algunas características de la cosa real.

Los modelos matemáticos que estudiamos son sistemas biológicos que como todos sabemos evolucionan con el tiempo, por lo que son notoriamente complicados, podemos elaborar un modelo de la población suficientemente simple para que sea entendible, sólo haciendo simplificaciones y dejando los efectos más importantes.

Consideramos que mediante la deconstrucción de una práctica profesional que incluya un crecimiento poblacional, en este caso el Logístico, se contribuye a dotar al profesional de las herramientas necesarias y suficientes para encontrar un buen modelo matemático que represente fielmente el fenómeno en estudio, de suerte que pueda aportar información de calidad para la toma de decisiones que ayuden a la mejora de la producción biológica y pesquera (Ulloa, Rodríguez, 2010)

Afirmamos que la deconstrucción es un proceso ya sea individual o colectivo de búsqueda de nuevos significados y de sentidos innovadores; y que, como proceso no tiene final, se concibe como una estructura espiral y no lineal. Para su utilización como herramienta de modelación matemática, lo proponemos como un ciclo de nueve momentos que, una vez conocido, se va repitiendo de manera constante y se conforma en la manera de pensar y actuar del sujeto reflexivo. Con ello planteamos la transformación de la práctica de modelación del crecimiento de organismos representado por el modelo logístico considerando todos los parámetros y actividades que se realicen y que tengan influencia en el modelo final. Esto al llevarlo al aula permitirá que los alumnos entiendan el proceso de modelación de forma que puedan explicarlo como un todo y puedan desarrollarlo sin muchos problemas en la práctica de su profesión (Ulloa y Arrieta, 2010)

En el modelo de crecimiento logístico (o de Verhulst) se establece que a mayor población, P, menor tasa de crecimiento. Inicialmente, la población crece rápido, por lo que es una fuente de presión constante, y pierde su capacidad de crecer al volverse muy numerosa, debido a interacciones entre los miembros de la población, lo que da como resultado un estado de equilibrio. A diferencia del modelo de crecimiento exponencial, donde la población siempre crece, este modelo se apega más a la realidad.

El área de estudio y la matemática

La investigación pesquera se inicia al tratar de establecer la cantidad de recurso que puede capturarse en un momento determinado, lo cual depende del tamaño de la población y de la capacidad de la flota para pescar; para lograrlo, los biólogos pesqueros tienen que estudiar las características de la población natural, la composición por sexos y edades, la capacidad de reproducción, el crecimiento de los individuos, la supervivencia y las características actuales y futuras de su medio.

La investigación que realizan los profesionales de la pesca está basada en la observación de fenómenos naturales colectivos o en numerosas observaciones respecto a uno en particular, y debe siempre representarse numéricamente para lograr una comprobación experimental.

En los últimos tiempos, se ha manifestado una fuerte tendencia en las ciencias hacia la formulación de modelos matemáticos que consisten en la representación numérica de los elementos que forman un sistema en la naturaleza, los que permiten conocer sus interrelaciones y predecir su comportamiento, ya que constituyen la única forma de manejar situaciones muy complicadas y de probar hipótesis científicas básicas. Sin embargo todavía no se cuenta con modelos matemáticos enteramente satisfactorios en relación con los fenómenos que se suceden en la biología (Ulloa, Arrieta, 2011), especialmente en el océano.

La comunidad de estudio es la de los profesionales de la pesca, en la que se consideran a los biólogos pesqueros, biólogos marinos, oceanólogos y a los ingenieros pesqueros; siendo éstos el punto de partida. En los programas de estudio de las carreras de ingeniería pesquera y las de los biólogos marinos, se observa que la modelación se estudia en diferentes momentos (Ulloa y Arrieta, 2009), sin embargo al igual que en la mayoría de las licenciaturas se encuentra una separación entre los conocimientos que se adquieren en el aula y los requeridos en el campo profesional. Esto conduce a pensar que la escuela ha minimizado la creación matemática a partir de la experimentación en el laboratorio y por otra parte se ha dado poca importancia a la modelación como una asignatura de relevancia en la práctica profesional. Desde nuestro punto de vista la modelación es una práctica que puede vincular la escuela con su entorno. La modelación es una práctica que articula las diferentes ciencias y la tecnología con las matemáticas. Para dar evidencias de estas afirmaciones, basta analizar el entorno laboral que tienen estas comunidades (Ulloa, Arrieta, 2011). La modelación tiene lugar en las tres etapas principales del complejo pesquero, ya que la encontramos no solamente al utilizar los Modelos de Predicción de las Capturas, sino también en el procesado de productos y al realizar estudios de consumo y demanda.

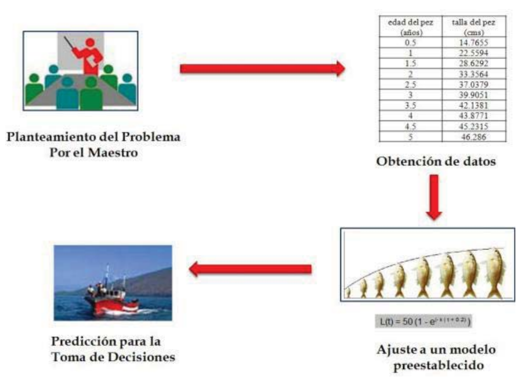


Figura 1. Prácticas de modelación en el aula

El cultivo de microalgas

Las microalgas marinas unicelulares (Figura 2) se cultivan como alimento para las diferentes etapas del cultivo en criadero de moluscos de valor comercial. Hasta hace poco tiempo las algas vivas eran la única fuente de alimentación de las larvas y juveniles de camarones y bivalvos.

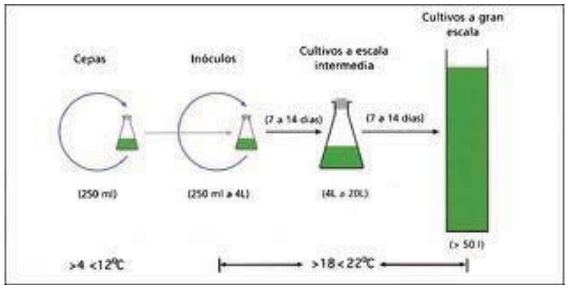


Figura 2. Etapas en la producción de microalgas

El cultivo se inicia en tubos de ensaye de 15 ml., inoculándose con 3 ml. de cepa (*Skelétonema*) en el cual al término de tres días se obtiene la productividad máxima que es de 1×10^6 células por ml. Enseguida se inoculan otros 3 tubos de ensaye del mismo volumen, con 3 ml. del cultivo cada uno para mantener la existencia de la cepa y con los 12 ml. restantes de cada tubo, inocular otros 3 tubos de ensaye de 25 ml. Para continuar el cultivo. Como tercer paso con el volumen de estos 3 tubos, se inocula un recipiente transparente de 8 l. de capacidad en donde también el cultivo se sostiene por 72 horas, al término del cual la población llega a un máximo de 1×10^6 células por ml. Cuarto paso, con estos 8 l. producidos se inocula a un tanque de 340 l. de capacidad, prolongándose el cultivo por un término de siete días en esta etapa.

En este trabajo analizamos el crecimiento en la última fase, que es en la que se toman las microalgas para la alimentación. Si bien es cierto que los encargados de la reproducción hacen esto de manera empírica en la que un cambio de coloración les indica el momento del desdoble, los profesionales utilizan un modelo exponencial que no ajusta los datos reales con lo que se tiene una diferencia entre los datos reales y la predicción con base en la fórmula y el modelo real. La realización de la práctica de la comunidad en personas que inician su desarrollo profesional trae consigo una serie de problemas, por lo que es conveniente realizar no solo la deconstitución de las mismas, sino su deconstrucción (Ulloa, Arrieta, 2009).

El modelo y su análisis

Uno de los patrones de crecimiento más simples observados en las poblaciones naturales se conoce como crecimiento logístico y se representa con una curva sigmoidea, o en forma de S, véase la figura 3. Como ocurre con el crecimiento exponencial, hay una fase de establecimiento inicial en que el crecimiento de la población es relativamente lento (1), seguida de una fase de aceleración rápida (2). Luego, a medida que la población se aproxima a la capacidad de carga del ambiente, la tasa de crecimiento se hace más lenta (3 y 4) y finalmente se estabiliza (5), aunque puede haber fluctuaciones alrededor de la capacidad de carga.

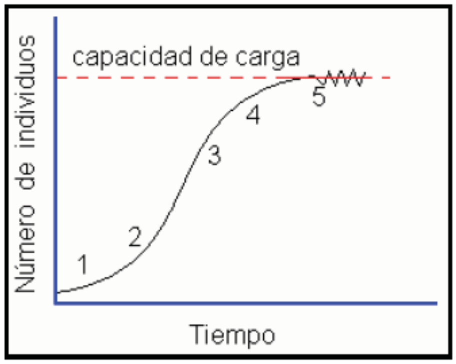


Figura 3. Curva de crecimiento logístico

En el modelo de crecimiento logístico (o de Verhulst) queda implícito que a mayor población, P, menor tasa de crecimiento. Inicialmente, la población crece rápido, por lo que es una fuente de presión constante, y pierde su capacidad de crecer al volverse muy numerosa, debido a interacciones entre los miembros de la población, lo que da como resultado un estado de equilibrio.

A diferencia del modelo de crecimiento exponencial, donde la población siempre crece, este modelo es más representativo del crecimiento de un gran número de organismos, las microalgas entre ellos.

A pesar de existir un sin número de ecuaciones que reflejan un modelo logístico, partiremos de la ecuación Verhulst - Pearl siendo ésta de nuestro interés, por los parámetros que presenta.

$$P(t) = \frac{k\,P_0\,e^{rt}}{k + P_0(e^{rt} - 1)}$$

Factores P(t), t, y e.

P(t) representa el número de organismos o población existente en un tiempo "*t*" determinado. Mientras que, "e" es la base del logaritmo natural, o sea, aproximadamente a 2.7183.

Parámetro k.

Es la capacidad de carga, del ambiente, generalmente. Así pues, teóricamente es el valor que determina la línea ó nivel de saturación del sistema; sin embargo, en la práctica (mundo real) la densidad no suele nivelarse en un estado estable inmediatamente debajo de k, sino que fluctúa arriba y debajo de los niveles (Odum & Sarmiento, 1998) ya que no existen controles homeostáticos puntuales por encima del nivel jerárquico de los organismos.

De esta forma si: $\lim_{t\to\infty} P(t) = k$

Parámetro P_0.

Determina la población inicial que presenta el sistema. La población inicial deberá ser menor que la capacidad de carga, teórica, del ambiente o lo que es lo mismo a la población máxima. Por otro lado, nunca habrá una $P_0 = 0$; dado que, debe existir una población base para que este presente un crecimiento en ella y por tal pueda ocurrir un modelo logístico que exprese su crecimiento poblacional. Así pues, tampoco puede existir $P_0=k$

Relación entre los parámetros k y P0.

Si $P_0 < k$ la población crece, hasta verse afectada por los diversos factores del medio ambiente, y alcanza una planicie, el nivel de saturación o capacidad de carga, k.

Parámetro r.

El parámetro r representa en la función logística la tasa instantánea de crecimiento poblacional. A diferencia de la función exponencial, el parámetro r en la función logística no es constante.

La deconstrucción del modelo utilizado

Para fines de nuestra investigación y desde nuestro punto de vista, consideramos a la deconstrucción como, un medio para mostrar o encontrar la intencionalidad de una práctica constituida.

Para su utilización como estrategia, lo proponemos como un ciclo de nueve momentos que, una vez conocido, se va repitiendo de manera constante y se conforma en la manera de pensar y actuar del sujeto reflexivo. Con esa base y recorriendo los diferentes momentos se debe dar respuesta a las siguientes preguntas:

Reconocimiento de la realidad y definición del aspecto a deconstruir: ¿Cómo se realiza el cultivo de microalgas? ¿Qué conocimientos requiero aplicar? ¿Los tengo? Esto nos lleva a utilizar la modelación como herramienta; ¿Qué aprendí sobre cultivos? ¿Modelación? ¿Qué es lo que aprendí de modelación?¿Cuáles modelos de crecimiento conozco? Elaboración del mapa individual y/o colectivo; la búsqueda de interpretaciones - comprensiones-acciones alternativas; la deconstrucción; planificación de la práctica transformadora; inicio de la reconstrucción;

seguimiento de las acciones; retorno a la realidad transformada (Realidad II) y finalmente el inicio de una nueva deconstrucción.

Conclusiones

La deconstrucción nos lleva a concluir que una manera adecuada de realizar la modelación del modelo logístico es la utilización de software el cual puede ser específico o alguno de uso general como el Excel.

Figura 4. La deconstrucción del modelo logístico

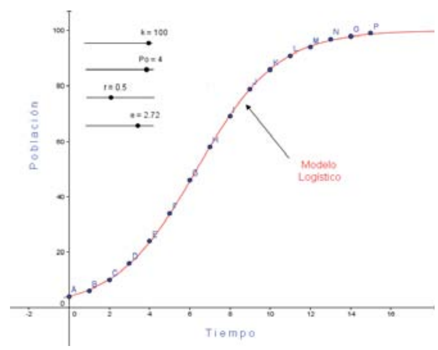


Figura 5. Ajuste con GeoGebra

El estudiar y analizar actividades de un campo profesional al cual los autores no pertenecen dificulta entender la herramientas que ellos utilizan para su desempeño, sin embargo se hace necesario incursionar para encontrar las intencionalidades de las prácticas y poder dar evidencias y encontrar las respuestas planteadas por la deconstrucción ya que consideramos prioritario conocer no solo la intencionalidad sino, como están constituidas ya que solo así podemos realizar su deconstrucción

Por lo expuesto anteriormente creemos que la experiencia y la deconstrucción de las prácticas sociales pueden ser un vínculo entre las dos esferas en las cuales se enmarca nuestra problemática.

Referencias bibliográficas

Odum, E. y Sarmiento, F. (1998). *Ecología. El puente entre ciencia y sociedad*. México: Mc Graw – Hill Interamericana.

Ulloa, J; Arrieta, J. (2009). *Los modelos exponenciales: construcción y deconstrucción*. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 479-488. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ulloa, J. y Arrieta, J. (2010). *La deconstrucción como estrategia de la modelación*. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 909-917. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ulloa, J. y Arrieta, J. (2011). *La deconstrucción de la modelación del crecimiento de microalgas*. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 739-746. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ulloa, J.: Rodríguez, J. (2010). *El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos*. *Revista electrónica de Veterinaria 1695-7504, 11*(3). Recuperado el 20 de Enero de 2012, de http://www.veterinaria.org/revistas/redvet/n030310.html

ESTRATÉGIAS DE MEMÓRIA AUTORREGULADA NA APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Florindo Contini Neto; Maria Helena Palma de Oliveira; Verônica Yumi Kataoka
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
nicontini@ig.com.br; mhelenapalma@gmail.com; veronicayumi@terra.com.br

Resumo. O estudo tem como objetivo descrever e analisar as estratégias de memória na aprendizagem de Estatística de 175 alunos do Ensino Médio de escolas públicas da Grande São Paulo. Os dados foram coletados em 2011. A abordagem histórico-cultural considera a autorregulação da memória na aprendizagem como um processo consciente que requer do indivíduo estabelecimento de metas, com base em suas expectativas, e o uso de estratégias para alcançá-las. Os resultados mostraram que os alunos praticam a repetição de exercícios para memorizar e não buscam intencionalmente prestar a atenção na aula para aprender e memorizar. Os alunos demonstraram pouco envolvimento com estratégias de memória para a aprendizagem. Apesar de afirmarem que a disciplina é importante e apesar do incentivo de docentes para uso de estratégias de aprendizagem, a prática de estudo de Estatística vincula-se a processos mecanicistas.

Palavras chave: estatística, estratégias de memória, autorregulação, ensino médio

Abstract. The objective of study is to describe and analyze memory strategies through statistic learning with 175 students from the public High School of the Greater Sao Paulo area. The data was collected throughout 2011. The historical-cultural approach takes into consideration the memory self-regulation during the learning as a conscious process that requires a set of goals from the subject, with base on its expectations, and the use of strategies to achieve them. The results showed us that the students practice exercise repetition to memorize, and don't try to intentionally pay attention to the class to learn, and then memorize. The students showed little involvement with memorization strategies to learn Statistics. Even though the students affirmed that it's an important course, but even with the teachers incentive to use of learning strategies, the study practices of Statistics courses are bind to mechanical processes..

Key words: statistics, strategies, memory strategies, self-regulation, high school

Introdução

A Estatística é uma área de conhecimento interdisciplinar que tem como objetivo descrever, organizar, resumir e comunicar dados coletados sobre os fenômenos, colaborando, dessa forma, com as mais diversas ciências. Atualmente, a quantidade de informações estatísticas transmitidas pelas mídias ao cidadão, exige cada vez mais conhecimento estatístico para o entendimento dos fenômenos e das tendências de relevância social e pessoal, tais como taxas de criminalidade, de crescimento populacional, de produção industrial, de aproveitamento educacional, dentre outras. (Gal, 2002).

Nesse sentido, os principais documentos oficiais da educação básica brasileira trazem orientações específicas para a educação Estatística. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendam o ensino de Estatística desde as séries iniciais; nele, existem recomendações para que os professores abordem os conhecimentos básicos de Estatística de forma a auxiliar "o aluno a enfrentar o mundo atual como cidadão participativo, reflexivo e autônomo, conhecedor dos seus direitos e deveres" (Brasil, 1997, p. 4). Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (Brasil, 1998), a Estatística está no eixo temático "Análise de Dados" e é recomendada como um conteúdo necessário para interpretação, utilização de distribuição e agrupamento em tabelas e gráficos, com o objetivo de desenvolver as habilidades e competências matemáticas de gráficos, diagramas, fórmulas e tabelas. De modo mais amplo, o ensino de Estatística deve contribuir com o desenvolvimento intelectual e crítico do cidadão diante dos fatos.

Corroborando com essas orientações, Lopes (1999) afirma que os estudos das informações, seja na interpretação, na inferência ou na comunicação dos resultados em linguagem estatística, permitem desenvolver nos estudantes atitudes críticas de previsões e de decisões, bem como provocar o desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo.

Para o entendimento do processo de desenvolvimento cognitivo, recorreu-se a Vigotsky (2007), para quem o desenvolvimento da linguagem ocorre como resultado da mediação simbólica; ou seja, por meio das funções comunicativa, emotiva e planejadora, a criança se apropria do mundo externo. O indivíduo desenvolve instrumentos de comunicação, de planejamento e de autorregulação que irão auxiliá-lo nas soluções das tarefas mais difíceis.

Para Vygotsky (1995), a autorregulação é entendida como uma função metacognitiva que se desenvolve, por meio processos relacionais, com base nos desejos, nos interesses e nas necessidades que geram os motivos mobilizadores do pensamento. Essas ações mentais são consideradas funções psicológicas superiores que concretizam os processos cognitivos como o pensamento, a atenção, a percepção e a memória (Oliveira, 1997).

Segundo Vigotsky (2007), a memória é carregada de lógica, por isso, o processo de lembrança fica encarregado de estabelecer e encontrar relações lógicas. Na adolescência, os conceitos das estruturas mentais deixam de ser organizados por classes e passam a ser organizados por conceitos abstratos. A ampliação da memória natural exige que, ao longo do desenvolvimento, haja domínio e utilização intencional de instrumentos ou tecnologias.

Sob essa perspectiva teórica, considera-se que as estratégias de memória são dispositivos específicos dos processos de autorregulação da aprendizagem de Estatística. Para o entendimento desses processos foi desenvolvida e aplicada uma escala de estratégias de memória. Este estudo objetiva descrever e analisar o uso de estratégias de memória na autorregulação da aprendizagem de Estatística de 175 alunos do 3ª. série do Ensino Médio de escolas estaduais de Guarulhos e de São Paulo. Os dados foram coletados no final de 2011.

Autorregulação da aprendizagem na abordagem sociohistórica

O processo geral de desenvolvimento estrutura-se em duas linhas qualitativas diferentes; uma ligada aos processos elementares, de origem biológica; a outra linha ligada à funções psicológicas superiores que tem origem sociocultural. A "história do comportamento da criança nasce do entrelaçamento dessas duas linhas" (Vigotsky, 2007, p.42).

Vygotsky (1995) afirma que o desenvolvimento ocorre em estreita conexão com os processos afetivos e motivacionais – desejos, interesses e necessidades – que irão provocar o pensamento, pois cada ação envolve uma tendência afetivo-volitiva.

O desenvolvimento cognitivo acontece em dois planos: primeiramente no plano exterior, graças à interação social e, posteriormente, no plano interior e individual (Vigotsky, 2007). A internalização é o "mecanismo responsável pela transição entre o funcionamento intermental e o funcionamento intramental" (Salvador; Goñi; Gallart, 1999, p. 107). Com a internalização das atividades sociais e históricas, o ser humano constitui e desenvolve capacidades especificamente humanas, como a autorregulação do próprio comportamento.

A autorregulação da aprendizagem consiste no processo em que o indivíduo estabelece metas com base em suas expectativas e usa estratégias para alcançá-las por meio do "domínio de funções mentais como atenção e planejamento da ação, interação, memória que são funções autoconscientes essenciais aos processos de aprendizagem" (Oliveira, Silva, Garbino, Angrimani, Silva, 2009). O processo denominado autorregulação da aprendizagem requer do aluno o domínio dos instrumentos culturais específicos para alcançar seus objetivos.

Para Zimmerman, citado tanto por Bilimória e Almeida (2008), quanto por Rosário; Perez; González-Pienda (2004), o processo de autorregulação é desenvolvido com base em três fases cíclicas: a) planejamento: envolve as estratégias que o indivíduo busca para se desenvolver e para se concentrar nas tarefas e aperfeiçoar seus esforços; b) o controle da própria vontade e do desempenho: envolvem as situações do indivíduo, no caso, o autorregistro e a autoexperimentação; c) a autorreflexão: expectativas pessoais dos objetivos atingidos com eficácia envolvem tanto os processos de atribuições causais, o autojulgamento, mediante critérios, a autoavaliação; quanto às autorreações, sejam elas a autossatisfação ou as inferências adaptativas.

As estratégias de aprendizagem, segundo Rosário; Perez; Gonzáles-Pienda (2004) são ações deliberadas que visam realizar tarefas e que comportam flexibilidade de seleção e aplicação adequadas e o uso de recursos cognitivos e motivacionais. Para Vigotsky (1984), os processos de memória e as demais funções mentais superiores são desenvolvidos e motivados em função de situações de interação social com outras pessoas que dominam esses instrumentos e que são capazes de transmiti-los. O aluno autorregulado é capaz de desenvolver uma determinada atividade de maneira consciente, utilizando estratégias – selecionadas por ele – de forma organizada e estruturada e ainda capaz de adequar suas necessidades ao processo de aprendizagem para atingir seus objetivos (Ribeiro, 2007).

O desenvolvimento da capacidade de lidar com estratégias de autorregulação de aprendizagem é importante na preparação do aluno para o mundo do trabalho e os professores têm papel fundamental nesse processo. As estratégias de autorregulação da aprendizagem são repassadas e exigidas do indivíduo nas organizações, "comportamentos de estruturação do ambiente de trabalho e dos materiais requeridos, atitudes de autoavaliação dos procedimentos, esforço e rendimento" (Almeida, 2002, p.159). Dentre as estratégias de aprendizagem, destacam-se, neste trabalho, as estratégias de memória.

Estratégias de memória na autorregulação da aprendizagem

A abordagem sociohistórica considera que temos dois tipos diferentes de memória, uma delas é mais utilizada pelos povos iletrados e está ligada à formação das imagens claras e de objetivos mostrados, a qual é denominada "memória natural" e está mais próxima da percepção caracterizada de forma imediatista. O outro tipo pertence à linha de desenvolvimento sócio - cultural e é constituído com base nas experiências de utilização dos materiais disponíveis na época e de auxiliares mnemônicos, como por exemplo, fazer sinais em pedaços de madeira para assinalar ou dar nós em corda.

A utilização desses elementos para a resolução das operações faz com que a estrutura psicológica do processo da memória modifique-se. A atividade com signos é especificamente humana. Ao longo do desenvolvimento, para atender as suas necessidades, o homem passa a construir e a utilizar auxiliares mnemônicos, isto é, ações que vão além das dimensões biológicas do sistema nervoso, como fazer uma marca em uma madeira ou dar nó em corda para lembrar de algo depois.

As estratégias de domínio da memória requerem o uso de instrumentos ou tecnologias. Para Ratner (1995, p.16), "os instrumentos são implementos físicos utilizados para aumentar os poderes naturais do organismo físico". Essa memória sofisticada e artificial caracteriza o processo de desenvolvimento humano. Na perspectiva de Vigotsky, "ao chegar à adolescência, passa-se à mnemotécnica interna que pode ser denominada memória lógica ou forma interna de memorização mediada" (Ratner, p. 136).

A mnemotécnica constitui-se em forma de sustentação e de construção da memória, inscritas e instituídas na cultura. Nesse sentido, constitui-se como prática social (Smolka, 2000), Desse modo, o aluno, baseado na prática social, busca ampliar significativamente sua capacidade de memória natural, para tanto, desenvolve e aplica instrumentos ou tecnologias de memória externa como grifar o texto, fazer esquema de um texto, material didático ou fazer uma síntese para ter mais recurso de memória quando houver a solicitação.

Para este estudo, considera-se que o aluno desenvolve a autorregulação por meio da elaboração compartilhada de estratégias de memória no espaço da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que está fundamentada no conceito de interação e é entendida como a distância entre o nível de desenvolvimento real, determinado pela capacidade de solução de problemas de modo independente e o nível de desenvolvimento potencial, determinado pela possibilidade de solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração de companheiros mais capazes.

A recuperação desse conceito da teoria de Vigotsky é fundamental, pois considera-se que as estratégias de memória no processo de autorregulação da aprendizagem de Estatística foram construídas nas relações sociais dos sujeitos. Por meio dessas relações, o sujeito aprendeu a arte da memória (mnemotécnica), no caso: anotar o mais importante, consultar as anotações, grifar, resumir ou esquematizar o texto ou material lido como técnicas que podem ampliar a capacidade de memória.

Nessa perspectiva, focou-se a relação entre o uso de estratégias de memória e o perfil do aluno. Para isso, o instrumento Escala de Estratégias de Memória na Autorregulação da Aprendizagem, traz questões sobre os processos de estudo e aprendizagem de alunos do ensino médio para os conteúdos de Estatística. O uso dessas estratégias remete ao pensamento de Luria (1979) para quem o indivíduo recebe muitas informações pelo sistema verbal e só conserva as conclusões de forma condensada; sendo assim, as ações de grifar, resumir ou fazer esquema condensam as informações e facilitam o processo de recordação.

As questões apresentadas no instrumento de coleta deste estudo caracterizam as estratégias de memória e refletem valores, normas, atitudes e costumes que se relacionam com a aprendizagem de Estatística. Considerou-se ainda que cada aluno, adolescente do ensino médio de escolas estaduais de São Paulo traz consigo a própria história de aprendizagens que o coloca como sujeito do processo em um contexto específico.

Método

A coleta de dados ocorreu no 2º semestre de 2011, com 175 alunos de 3ª séries do Ensino Médio, distribuídos em 11 salas de seis escolas públicas do Estado de São Paulo, sendo quatro escolas da cidade de Guarulhos e duas da cidade de São Paulo. Foram utilizados como instrumentos de coleta: questionário de perfil sociocultural do aluno e a Escala de Estratégias de Memória na Autorregulação da Aprendizagem de Estatística.

Apresentamos neste estudo os resultados desses dois instrumentos. O questionário de perfil do aluno foi estruturado da seguinte forma: investigou-se gênero, idade, período de estudo, tempo de dedicação à matemática e à pesquisa na internet; além disso, foram investigados quais termos estatísticos os alunos eram capazes de interpretar, qual a importância da Estatística no seu cotidiano, se havia estudado Estatística em séries anteriores, quais estratégias o professor solicitava durante as aulas: anotação, leitura, destaque, resumo/esquema, consulta e à busca de outros materiais que auxiliassem à aprendizagem.

A escala de estratégias de memória continha 16 afirmativas, 10 positivas e 6 negativas. As possibilidades de resposta eram: sempre, quase sempre, quase nunca e nunca. Atribui-se a pontuação de 1 a 4 para as afirmativas positivas e de 4 a 1 para as negativas. A pontuação dos itens da escala variou de 16 a 64, sendo que a menor pontuação representa um indivíduo com baixa autorregulação e a maior, um indivíduo com alta autorregulação. Os resultados das variáveis obtidas no perfil foram relacionados à pontuação da escala, sendo utilizados testes F (ANOVA) e o teste t. Quando o efeito da variável estudada foi considerado significativo, pelo teste F, as médias das suas categorias foram comparadas pelo teste Tukey, com nível nominal de significância de 5%.

Resultados e discussão

A idade média dos participantes era de 17,2 anos (desvio padrão = 0,63 anos), sendo 53,7% desses, do gênero feminino. Verifica-se que não houve diferença significativa da pontuação média da escala de acordo com o gênero ($t(173)=0,27$ e $p = 0,790$), nem com relação ao período de estudo, que era manhã ou tarde ($t(173) =1,27$ e $p = 0,206$), e tampouco se eles já tinham estudado algum conceito estatístico antes, em que resposta era do tipo sim ou não ($t(173)=0,37$ e $p = 0,711$).

Com relação ao primeiro sentimento (positivo, indiferente, negativo e não sentimento) e a primeira ideia (conteúdo matemático ou estatístico, afetiva e outras) ao ouvir a palavra estatística, observou-se que não existiu também diferença significativa na pontuação média da escala, pois os resultados do teste F foram, respectivamente, $F_{(3,162)}$=1,044, p = 0,375 e $F_{(3,160)}$= 0,326, p= 0,860.

A Tabela 1 apresenta as questões da escala e a distribuição da frequência percentual das respostas para cada item da escala.

	Afirmação	S	QS	QN	N
1	*Geralmente, nas aulas de Matemática sobre Estatística *não faço* anotações.	13,71	38,29	29,14	18,86
2	Geralmente, eu *leio* os textos (caderno do aluno ou outros materiais) sobre Estatística somente *durante* a aula de Matemática.	25,14	37,14	22,86	14,86
3	Eu *anoto somente* os pontos principais ou mais difíceis sobre Estatística durante as aulas de Matemática.	30,29	36,00	21,14	12,57
4	*Eu *procuro* prestar atenção na matéria/explicação para poder memorizar	2,29	6,29	36,57	54,86
5	Eu *anoto tudo* o que o professor de Matemática coloca sobre Estatística na lousa/transparência/tela ou o que ele diz que é importante.	5,71	21,71	36,57	36,00
6	Quando eu *leio* o caderno/material ou outros materiais sobre Estatística da matéria de Matemática grifo o mais importante.	33,14	32,57	26,86	7,43
7	*Geralmente, eu *não consulto* minhas anotações sobre Estatística da matéria de Matemática.	8,57	29,14	42,29	20,00
8	Eu *leio* os textos (caderno ou outros materiais) sobre Estatística **antes** da aula de Matemática.	42,86	45,71	7,43	4,00
9	Eu *consulto* minhas anotações sobre Estatística da matéria matemática somente durante as aulas de matemática.	37,14	41,71	12,57	8,57
10	*Geralmente, eu *não leio* os textos (cadernos ou outros materiais) sobre de Estatística da matéria de Matemática.	9,14	28,57	44,57	17,71
11	Eu *consulto* minhas anotações sobre Estatística da matéria matemática quando o professor de Matemática pede.	6,86	11,43	40,00	41,71
12	Quando eu *leio* o caderno/material ou outros da matéria de Matemática sobre Estatística copio de forma resumida ou esquematizada para o caderno/fichário/computador ou outro material o mais importante,.	26,29	28,57	28,57	16,57
13	*Geralmente, eu *somente leio* o caderno ou outro material sobre Estatística nas aulas da matéria de Matemática.	29,71	44,00	20,00	6,29
14	Eu *consulto* minhas anotações sobre Estatística da matéria matemática *antes da próxima aula* de Matemática.	33,71	46,29	14,29	5,71
15	Geralmente, eu *tenho* disponíveis anotações sobre Estatística da matéria de Matemática para possível consulta**.**	12,57	32,00	36,57	18,86
16	Eu *faço* os exercícios de Matemática/Estatística várias vezes para memorizar	28,00	40,57	25,14	6,29

* Questões negativas

Tabela 1 - Distribuição da frequência percentual dos participantes em cada item da escala de estratégias de memória em relação à Estatística - Ensino Médio (Contini, 2012, p. 98)

No que concerne às estratégias de atenção para memorizar o conteúdo de Estatística (Q. 4), 91,43% dos alunos nunca ou quase nunca procuram prestar atenção nas aulas de conteúdo de Estatística. Em sentido oposto, (Q. 16) 68,57% dos alunos sempre ou quase sempre utilizam de repetição de exercícios para memorização. Esses resultados indicam que há certa contradição no uso de estratégias de Memória. Nesse caso, poderíamos supor que, para a grande parte dos alunos, haveria mais complexidade na ação cognitiva para o uso da atenção do que para a execução repetida de exercícios. Ressalta-se que para Luria (1979) a maior complexidade da tarefa leva a uma maior retenção do material correspondente.

Em relação às estratégias de anotação (Q. 5, Q.1, Q.15), as respostas evidenciam que 72,57% dos alunos nunca ou quase nunca anotam o que o professor coloca no quadro ou diz que é mais importante; 52,00% dos alunos afirmam que nunca ou quase nunca fazem anotação e 55,53% dos alunos afirmam que nunca ou quase nunca têm as anotações disponíveis. Esses dados podem ser relacionados aos obtidos nos questionários de perfil, onde pouco mais de 50% dos alunos afirmam que o professor incentiva estratégias de estudo ou memória ao pedir para fazer anotações do conteúdo de Estatística. As estratégias de anotar e de consultar as próprias anotações foram as mais incentivadas pelos professores de matemática, no conteúdo de Estatística, segundo Contini (2012).

Os resultados destacam a importância do professor e a necessidade de que este intensifique estratégias de regulação das atividades de estudos dos alunos. A regulação pelo professor torna-se mais necessária quando se observa o desinteresse dos alunos em sala de aula.

Considerações finais

Os resultados relativos às estratégias de memória na autorregulação da aprendizagem de Estatística de estudantes da 3ª série do Ensino Médio nas cidades de Guarulhos e São Paulo (SP) indicam que os alunos estão pouco envolvidos com as estratégias de memória para a aprendizagem desse conteúdo nas aulas de Matemática.

Um ponto fundamental do processo de autorregulação da aprendizagem é a atuação do professor, que pode regular a atividade do aluno de modo a orientá-lo sobre como potencializar a capacidade da memória por meio da autorregulação de estratégias específicas. Apesar dos alunos afirmarem que a Estatística é importante e dos esforços dos processos de interação do professor para incentivá-los a usar estratégias de aprendizagem, essas não parecem ser prática contínua dos processos de mediação. Isso pode ser indício de um caráter tecnicista na relação professor-aluno, que é própria de metodologias tradicionais de ensino.

Conhecer as estratégias de memória e o perfil da utilização das mesmas é importante para que o aluno faça uma reflexão sobre seus processos de autorregulação e para que o professor possa refletir e rever suas práticas pedagógicas a fim de fomentar a autorregulação da aprendizagem dos alunos em Estatística, na disciplina de Matemática.

Referências bibliográficas

Almeida, L. S. (2002) Facilitar a aprendizagem: ajudar os alunos a aprender e pensar *Psicologia escolar e educacional, 6,* 155-165. Recuperado em 08 de outubro de 2011 de http://www.scielo.br/pdf/pee/v6n2/v6n2a06.pdf.

Brasil (1999). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEMTEC.

Brasil (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais* / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Contini Neto, F. (2012). *Estratégias de memória na autorregulação da aprendizagem de estatística de alunos do ensino médio*. Dissertação de Mestrado, Universidade Bandeirante de São Paulo, Paulo. Brasil.

Gal, I. (2002). Adult´s statistical literacy: meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review*, *70* (1), 1-25.

Lopes, C. A. E. (1999). A Probabilidade e a estatística no currículo de matemática do ensino fundamental brasileiro. *Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística – Desafios para o século XXI* (pp. 167-174). Florianópolis.

Luria A. R. (1979). *Curso de psicologia*. Rio de Janeiro: *Civilização Brasileira.*

Oliveira, M. H. P., Silva, C. B., Garbino, A., Angrimani, D.S.R., Silva, E.F.F. (2009). A autorregulação da aprendizagem de Estatística e sua relação com os processos de atenção e interação: um estudo com estudantes universitários: In *Anais VI Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática.* Chile.

Oliveira, M. K. (1997). *Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico.* 4º ed. São Paulo: Scipione.

Ratner, C. (1995). *A psicologia sócio-histórica de Vygotsky: aplicações contemporâneas*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Ribeiro, Y. S.(2007). Auto-Regulação: Diferenças em função do ano e área em alunos Universitários. *Psicologia: Teoria e Pesquisa, 23* (4), 443-448.

Rosário, P., Perez, J. C. N., Gonzales-Pienda, J. A. (2004). Historias que ensenan a estudiar y aprender: una experiencia en la ensenanza obligatoria portuguesa. *Revista Eletrônica de Investigación Psicoeducativa, 2* (1), 131-144.

Salvador, C. C., Mestres, M. M., Goñi, J. O. e Gallart, I. S. (1999). *Psicologia da educação*. Cap 9. p. 99-110. Porto Alegre: Artes Médicas.

Smolka, A. L. B. (2000). A memória em questão: uma perspectiva histórico-cultural. *Educação e sociedade, 21* (71), 166-193.

Vigotsky, L.S. (2007). *A formação social da mente.* (J. C. Neto & L. S. M. Barreto & S. C. Afeche, Trad.). São Paulo: Martins Fontes.

Vigotsky, L.S. (1995). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

Zimmerman, B. J. & Risemberg (1997). Becoming a self-segulated writer: A social cognitive perspective. *Contemporary Educational Psychology 22,* 73–101.

O ENSINO DE ESTATÍSTICA VIA PROJETOS: MOTIVAÇÃO DE ACESSO AO ENSINO SUPERIOR DE ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO DE ESCOLAS ESTADUAIS EM UBERABA

Ailton Paulo de Oliveira Júnior, Joana dos Santos Silva, Lorena Fernanda Gonçalves Duarte, Roberta de Cássia dos Anjos
Universidade Federal do Triângulo Mineiro Brasil
drapoj@uol.com.br, jo.uftm@hotmail.com, lorenafgduarte@hotmail.com, robertacassia94@gmail.com

Resumo. A atividade que descrevemos teve como objetivo possibilitar aos alunos e professores supervisores bolsistas do Programa de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID do curso de Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro em Uberaba, Minas Gerais, a prática da estatística através de atividades de ensino utilizando projetos. Assim, através da aplicação de um questionário a 198 alunos do 3º ano do Ensino Médio de duas escolas estaduais pretendeu-se compreender os problemas que afetam a escolha profissional e a motivação ou não em continuar os estudos. Os resultados indicaram que a maioria dos alunos pretende dar continuidade aos estudos e o que dificultaria esse processo seria: condições financeiras e disponibilidade de tempo. Evidenciamos que as atividades de organização de pesquisa de campo, coleta, tabulação de dados, interpretação e análise dos dados despertou o espírito investigativo nos alunos.

Palavras chave: projetos, estatística, motivação, ensino médio

Abstract. The activity had as objective described that enabling students and teachers supervisors scholarship of PIBID Mathematics at Universidade Federal do Triangulo Mineiro in Uberaba, Minas Gerais, the practice of using statistical learning activities using projects. Thus, by applying a questionnaire to 146 students in 7th grade of elementary school two state schools, set up the profile of this group. Some results have indicated that on average students are in the range of age in years at which one would expect if they were, or 12. Most students of the School II are residents of neighborhoods near the school which explains the percentage of 63.16% of the students go to school on foot. We show that the activities of the organization of field research, collection, tabulation of data, data analysis and interpretation aroused the investigative spirit in students.

Key words: projects, statistics, motivation, secondary school

Introdução

Uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos professores da Educação Básica é trabalhar na sala de aula com os conteúdos estatísticos sugeridos pelos PCN (Brasil, 1998), onde devem desenvolver nos alunos o saber coletar, organizar e interpretar estatisticamente informações e valorizar estes procedimentos para tomada de decisões.

Tais dificuldades, de acordo com Mendes e Brumatti (2003), talvez sejam resultados de: (1) concepções errôneas do professor sobre projetos estatísticos — acreditam que estes se resumem à coleta sem critérios de alguns dados e depois a uma apresentação com representações gráficas; (2) falhas na sua formação profissional — o professor imita as estratégias com que lhe foram transmitidos os conceitos estatísticos; (3) não familiaridade com estratégias de ação didática quando estas requerem o desenvolvimento de projetos; (4) conhecimento insuficiente ou inadequado do conteúdo estatístico.

Partindo destas ideias, tomamos a noção de ciclo investigativo que emerge de uma estrutura para o pensamento estatístico proposta por Wild e Pfannkuch (1999). De acordo com os autores, eles construíram, com base na literatura, na experiência própria e em entrevistas realizadas com estudantes de estatística envolvidos em projetos de pesquisa e com estatísticos profissionais em exercício uma estrutura para o pensamento estatístico envolvido nas investigações empíricas composta por quatro dimensões, a saber: o ciclo investigativo, tipos de pensamento, o ciclo interrogativo e as disposições.

Para Silva (2007), este modelo objetiva que o estudante sinta necessidade de resolver um problema, o que poderá garantir seu envolvimento. Dessa forma, o problema deixaria de ser resolvido apenas porque o professor o pede, pois o estudante estando envolvido passaria a desejar a solução e buscaria ferramentas necessárias para isso. Concordamos em grande medida com essa afirmação já que, como veremos mais adiante, o compromisso e o envolvimento com o problema são condições importantes para que o pensamento estatístico se desenvolva.

Assim, a partir da utilização da metodologia do ensino via projetos, pretendeu-se fazer um estudo para melhor compreender a motivação ou não em continuar os seus estudos de alunos do Ensino Médio de duas escolas estaduais em Uberaba, Minas Gerais.

Metodologia

O estudo aqui apresentado pode ser classificado como descritivo-transversal, uma vez que o objetivo fixado da investigação foi o de verificar qual a motivação que alunos do 3° do Ensino Médio têm em continuar seus estudos.

A coleta de dados foi realizada por alunos que participam do subprojeto Matemática do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM). O PIBID, segundo o Decreto Nº 7.219, de 24 de Junho de 2010 tem por finalidade fomentar a iniciação à docência, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação de docentes em nível superior e para a melhoria da qualidade da educação básica pública brasileira.

Assim, a proposta desenvolvida neste trabalho se desenvolveu a partir de atividades desenvolvidas com o objetivo de possibilitar aos alunos bolsistas e professores supervisores o aprendizado da Estatística, através da modelagem, dando-se da seguinte maneira: (1) escolha do tema a ser abordado: “Motivação de acesso ao ensino superior de alunos do 3º ano do ensino médio de escolas estaduais em Uberaba”; (2) formulação de problemas e hipóteses; (3) elaboração do instrumento de pesquisa; (4) aplicação do instrumento de pesquisa; (5)

montagem do banco de dados; (6) tabulação dos dados focados nos objetivos propostos, quais sejam, elaboração de relatórios, preparação de artigos para eventos e periódicos e criar elementos para desenvolver ações na escola para a melhoria do ensino de matemática; (7) análise dos dados que permitirá o desenvolvimento das ferramentas estatísticas e também o desenvolvimento da argumentação a partir dos dados obtidos; (8) divulgação dos resultados junto á comunidade escolar local, regional, nacional e internacional.

Para Moore (1997) esta abordagem de conteúdos vem ao encontro do que o autor denomina de "nova pedagogia". Segundo o autor, a ideia central é o abandono de um modelo de "transferência de informações" a favor de uma visão "construtivista" de entendimento: estudantes não desejam ser uma vasilha preenchida com o conhecimento despejado pelos professores; eles inevitavelmente constroem seus próprios conhecimentos através da combinação de suas experiências presentes com seus conceitos já existentes. De acordo com Gonçalves, Matsuo, Strapassan, Lovato e Saraiva (1999), com este tipo de atividade a liberdade que o aluno recebe deixa aflorar em si o pesquisador, o ser crítico que existe dentro dele.

Os conteúdos estatísticos abordados, foram os seguintes: (1) variáveis qualitativas e quantitativas que compõem o instrumento de pesquisa; (2) construção de tabelas; (3) estatísticas básicas como: média, mediana e desvio-padrão; (4) noção de amostra e população.

Pretendeu-se, portanto, com estas atividades, auxiliar na formação dos alunos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro no que tange a conteúdos básicos de Estatística utilizando o ensino via projetos.

Resultados

Para apresentar os resultados serão consideradas as etapas do processo de Investigação Estatística, Figura 1, indicadas por Lopes (2003), cujo juízo a respeito do ensino de Estatística está em consonância com as tendências da Didática desta disciplina e com o trabalho com projetos, conforme esclarecem Batanero e Díaz (2004).

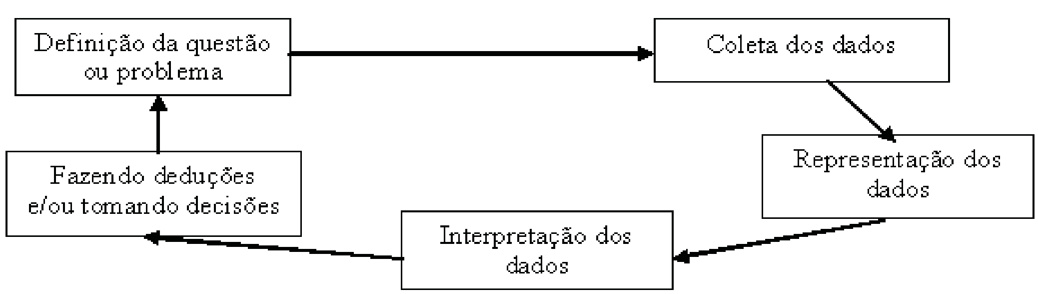


Figura 1. Processo de Investigação Estatística.

Pode-se conferir cada uma das sucessivas etapas dos referidos processos. As duas primeiras etapas referem-se à: (1) escolha do tema e a formação dos grupos por tema de interesse; e (2) interação com o tema ou estudo do fenômeno e período de interação nos grupos, possibilitando as negociações dos interesses envolvidos e discussões sobre o tema.

Assim, o desenvolvimento da atividade iniciou-se com a problematização dos assuntos a serem pesquisados e consistiu em estabelecer e delimitar o tema a ser tratado com o intuito de definir o contexto e os aspectos que seriam trabalhados ao longo das outras etapas da atividade.

Segundo Ponte (1990), ao se trabalhar com projetos o ponto de partida inicial é o gosto do aluno. Desta forma foi solicitado aos alunos bolsistas e professores supervisores do PIBID/Matemática/UFTM que sugerissem temas de seu interesse investigativo onde a Estatística lhes pudesse servir de auxílio para um melhor esclarecimento e compreensão.

Como o subprojeto trabalha junto aos alunos do Ensino Médio, pensou-se em desenvolver tema para atingir aos alunos de um dos níveis e também para dar subsídios aos alunos do PIBID Matemática a desenvolver habilidades estatísticas. Desta forma, o trabalho de ensino pretendeu mostrar: A motivação dos alunos do Terceiro ano do Ensino Médio destas mesmas escolas quanto à continuidade de sua formação e perfil do grupo.

Na terceira etapa pretende-se definir a questão ou problema como a escolha do(s) aspecto(s) do tema, o estabelecimento de hipóteses e a elaboração da(s) questão(ões) para a verificação da(s) hipótese(s). Portanto, nesta etapa foram planejados, elaborados e aplicados questionários aos participantes foco da pesquisa. O instrumento foi dividido nos seguintes blocos: I — Estabeleça seu perfil; II — Sobre a sua formação e a de seus pais; III — Sobre seus estudos e continuidade; IV — Você e a Matemática; e V — Sobre seu trabalho e escolha profissional. Focaremos alguns resultados focados no item III deste instrumento.

Fez-se necessária a utilização de outro preceito da abordagem de projetos — o trabalho em grupo. A promoção deste preceito não somente facilitou o levantamento das temáticas, mas também promoveu o exercício da cooperação, da expressão dos pontos de vistas, da divisão de tarefas e do consenso na tomada de decisões, habilidades e atitudes tão preciosas para a realização das demais fases do projeto estatístico.

Os dados foram coletados junto a alunos do segundo ano do Ensino Médio, sendo: 162 alunos da Escola I e 36 alunos da Escola I, no primeiro semestre letivo de 2011.

Na quarta etapa buscou-se a compreensão do problema a partir da pesquisa de campo e da análise exploratória de dados. Nesta fase os alunos são convidados a utilizar os conceitos e modelos estatísticos e matemáticos para calcular índices e medidas estatísticas com os quais poderão estabelecer relações e tirar conclusões, além de construir os modelos representativos dos resultados encontrados. Assim, os alunos, no período de elaboração dos textos, frequentaram o Laboratório de Informática e neste espaço, passaram a organizar e analisar os dados coletados, elaborar tabelas relativas às informações obtidas, bem como a geração de textos referentes às análises decorrentes da apresentação.

Apresentação da representação e análise de dados

Apresentam-se alguns resultados analisados que se referem ao processo de investigação estatística via projetos que indicam a percentagem total de escolha de cada alternativa proposta pelo questionário (se pretendem continuar os estudos, motivos que impediriam os alunos a continuarem os estudos, se fariam um curso de nível superior ou técnico, e outros) e a influência da renda familiar e do nível de escolaridade parental sobre os resultados obtidos.

Através da análise dos questionários, pôde-se notar que muitos alunos percebem a importância da vida escolar, pois ao perguntarmos o que eles sentiam em relação aos estudos aproximadamente 32% das respostas de ambas as escolas, indicaram que o estudo é muito importante, sendo que apenas 17% das respostas da escola I e 2% da escola II referem-se aos estudos como algo chato.

A escolaridade parental e a situação socioeconômica dos participantes apareceram como uma forte influência sobre a escolha das alternativas propostas, pois quando questionados quanto a continuidade dos estudos após o Ensino Médio 64,1% dos alunos da Escola I e 88,9% da Escola II disseram que fariam um curso técnico, e 93,5% da Escola I e 63,3% da Escola II disseram que fariam curso superior. Isso mostra que a maior parte dos alunos que optou pelo curso técnico pertence à Escola I, que apresenta situação socioeconômica baixa e são em grande maioria filhos de mães e pais com Ensino Fundamental Incompleto, enquanto que a maior parte que optou pelo curso superior pertence à Escola II, que apresenta uma situação socioeconômica um pouco mais elevada e a maioria dos pais possui o Ensino Médio Completo.

Verifica-se na Tabela 1 que a maioria dos alunos de ambas as escolas gostariam de dar continuidade aos estudos sendo 97,5% da Escola I e 94,12% da escola II.

Opções	*Escola I*		*Escola II*	
	Nº de respostas	*%*	*Nº de respostas*	*%*
Sim	156	97,5	32	94,1
Não	4	2,5	2	5,9

Tabela 1. Pretensão dos alunos em dar continuidade aos estudos após término do Ensino Médio

Estes dados mostram que os estudantes do Ensino Médio consideram importante a continuidade dos estudos, segundo Sparta e Gomes (2005) tal fato pode ser explicado pelo desejo de ascensão social das classes populares, tendo como estímulo a valorização das profissões de nível superior; e pela desvalorização de outras formas de ocupação em nossa sociedade.

Considerando o que é apresentado na tabela 2, a maioria dos estudantes revelou que o que mais dificultaria a continuidade de seus estudos seria: condições financeiras (32,4% Escola I e 28,6% Escola II), indecisão na escolha da carreira a seguir (17,0% Escola I e 14,2% Escola II) e disponibilidade de tempo (13,1% Escola I e 19% Escola II).

Motivos	*Escola I*		*Escola II*	
	Nº de respostas	*%*	*Nº de respostas*	*%*
Condições Financeiras	57	32,4	12	28,6
Indecisão	30	17,0	6	14,2
Disponibilidade de tempo	23	13,1	8	19,0
Prefere trabalhar	13	7,4	1	2,4
Falta de vontade	13	7,4	5	11,9
Vida familiar	12	6,8	1	2,4
Nada impediria	7	4,0	-	0,0
Obrigação	8	4,6	1	2,4
Problemas de saúde	3	1,7	-	0,0
Idade	2	1,1	1	2,4
Morte	3	1,7	-	0,0
Vida social mais importante	3	1,1	1	2,4
Não passar Vestibular	1	0,6	2	4,8
Organização escolar	2	1,1	4	9,5

Tabela 2. Motivos que impediriam os alunos a continuarem os estudos.

Segundo Malacarne, Lorenzi, Branco, Sutil e Mattos (2007) é importante considerar que a escolha profissional está condicionada as diferentes influências, entre as quais estão as expectativas familiares, as situações sociais, culturais e econômicas, as oportunidades educacionais, as perspectivas profissionais da região onde reside e as próprias motivações do sujeito. Se estes aspectos não são levados em consideração, pode haver frustrações profundas no indivíduo e na sua relação com o mundo do trabalho.

Além disso, um indivíduo motivado intrinsecamente dedica muita atenção à tarefa proposta, não mede tempo nem esforço para realizá-la, não vendo o tempo passar, não deixa que pressões externas o desviem do seu foco, não desiste diante dos desafios e/ou condições desfavoráveis, não desanima diante do fracasso, pelo contrário, fica mais motivado a vencer.

Observa-se na Tabela 3 que 73,9% dos alunos da Escola I e 79,7% dos alunos da Escola II identificam seus estudos ou a vida escolar de uma maneira positiva, dizendo ser importante, ser de interesse na busca do conhecimento, ser necessário ou trazer alegria. Desta forma, se um aluno possui motivação para aprender, se envolverá com os assuntos escolares de forma voluntária e buscará a aprendizagem independente do assunto ser interessante para ele ou da recompensa que possa vir através de elogios ou notas.

Segundo Bzuneck (2004) a motivação que é considerada como a mais importante na aprendizagem, não se aplica no caso da aprendizagem escolar, visto que está baseada na ligação afetiva com o objeto de estudo, no querer do indivíduo, não sendo, portanto, a que mais se evidencia num ambiente de sala de aula onde os assuntos apresentados não são de livre escolha do aluno e sua presença e envolvimento nas atividades são obrigatórios.

Palavras ou termos	Escola I		Escola II	
	Nº Respostas	%	Nº Respostas	%
Importante	109	32,2	21	32,8
Interesse na busca do conhecimento	74	21,9	8	12,5
Necessário	45	13,3	3	4,7
Alegria	22	6,5	19	29,7
Estar com os amigos	29	8,6	5	7,8
Obrigação	32	9,4	3	4,7
Chato	9	4,0	1	1,6
Falta de estímulo	8	2,4	2	3,1
Dificuldade em aprender	5	1,5	2	3,1
Desorganizado	7	0,9	-	0,0
Tristeza	2	0,2	-	0,0

Tabela 3. Palavras ou termos que descrevem os sentimentos dos alunos em relação aos estudos ou à vida escolar

Conclusões

Percebe-se que com os resultados das análises dos dados coletados que a maioria dos alunos do 3º ano do Ensino Médio das duas escolas estaduais de Uberaba em Minas Gerais pretende dar continuidade aos estudos sendo por meio de cursos técnicos ou cursos superiores, e o que dificultaria a continuidade de seus estudos seria: condições financeiras e disponibilidade de tempo. E que a maioria que optou pelos cursos técnicos pertence à Escola II, são os alunos que possuem uma renda familiar mais baixa, e que seus pais apresentam um nível menor de escolaridade (a maioria possui apenas o Ensino Fundamental Incompleto).

A maior parte dos alunos que optaram em fazer um curso superior ao terminarem o Ensino Médio está na Escola I, onde a renda familiar é maior que a renda da Escola II, e seus pais possuem um nível de escolaridade maior sendo que a maioria possui o Ensino Médio Completo. Conclui-se que tanto a situação socioeconômica quanto à escolaridade parental influenciam de forma significativa na motivação dos alunos no acesso ao Ensino Superior, sendo assim de tamanha relevância a reflexão sobre esta situação como forma de auxiliar na orientação destes alunos neste processo, principalmente nas séries finais do Ensino Médio da rede pública.

Além disso, no que tange ao trabalho de investigação por parte dos alunos evidencia-se que as atividades de organização de pesquisa de campo, coleta, tabulação de dados, interpretação e análise dos dados não foi tarefa fácil, exigindo a retomada de conteúdos, um constante repensar dos resultados e atitude questionadora, refazendo perguntas objetivando despertar o espírito investigativo nos alunos.

Para Mendonça e Lopes (2010) a implementação da educação estatística deve acontecer de uma forma investigativa, na qual o grupo de alunos tenha vivência com a geração e análise de dados. Acredita-se que no momento em que a turma tenha participação ativa no processo, todas as habilidades serão favorecidas em seu desenvolvimento.

Assim, concluem-se que com o ensino vinculado à pesquisa é possível vislumbrar a possibilidade de se compreender a sala de aula e o espaço escolar em geral, como um local permeado pelas mais diversas dimensões culturais, bem como pelas representações e imaginários sociais. Portanto, é um espaço em que as construções simbólicas, valores e crenças se fazem presentes e orientam as relações entre os sujeitos e, por isso, a necessidade de serem investigadas e compreendidas pelos professores, a fim de tornar as pesquisas mais compreensíveis e com maior credibilidade.

Referências bibliográficas

Batanero, C. Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. In J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp.125-163). Zaragoza: ICE.

Brasil (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: *Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental — Brasília: MEC/SEF.

Bzuneck, J. A. (2004). A motivação do aluno: aspectos introdutórios. In Boruchovitch, E., e Bzuneck, J.A. (Orgs.). *A Motivação do Aluno: contribuições da Psicologia contemporânea* (pp. 9-36), Petrópolis, RJ: Vozes.

Decreto n.º 7.219, de 24 de junho de 2010 (2010). Dispõe sobre o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID e dá outras providências. Presidência da República, Brasília, publicado no DOU de 25 jun. 2010.

Gonçalves, C. F. F.; Matsuo, T.; Strapassan, E., Lovato, J. P, e Saraiva, T. S. (1999). Uma metodologia de Ensino da Estatística Baseada em Pesquisa, Aplicada para a 5ª série do Ensino Fundamental. In *Atas da Conferência Internacional Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística — Desafios para o Século XXI*, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil.

Lopes, C. E. (2003). O conhecimento matemático adquirido através dos projetos. In Lopes, C. E. *Matemática em projetos*: uma possibilidade (pp. 23-27), Campinas, São Paulo: Faculdade de Educação.

Malacarne, V, Lorenzi, E. S., Branco, G. C., Sutil, J. D., e Mattos, J. D. (2007). A escolha profissional e Ensino Superior: uma experiência a partir da educação de jovens e adultos. In *Anais da XIX Semana de Educação*. Cascavel, Paraná, Brasil. (pp. 1-10.

Mendes, C. R., e Brumatti, R. N. M. (2003). Parâmetros Curriculares e Acadêmicos em Ação: uma proposta para o ensino de estatística através de projetos. In *Anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática — CIAEM — Educação Matemática & Desafios e Perspectivas*. Blumenau, Santa Catarina, Brasil.

Mendonça, L. O., e Lopes, C. E. O. (2010). Trabalho com educação estatística no Ensino Médio em um ambiente de Modelagem Matemática. In *Estudos e Reflexões em Educação Estatística* (pp 157-162). Campinas, SP: Mercado de Letras.

Moore, D. S. (1997). *Statistics: Concepts and Controversies*. New York: Freeman.

Ponte, J. P. (1990). *Computador, um instrumento da educação*. Lisboa: Texto Editora.

Silva, C. B. (2007). *Pensamento estatístico* e *raciocínio sobre variação:* um estudo com professores de matemática. Tese Doutorado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Sparta, M., e Gomes, W. B. (2005). Importância atribuída ao ingresso na educação superior por alunos de ensino médio. *Revista Brasileira de Orientação Profissional*, 6(2), 45-53.

Wild, C., e Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67, 223-265, 1999. Acedido em 05 dez, em: http://www.stat.aucland.ac.nz/~iase/publications/isr/99.wild. pfannkuch.pdf

A INTERAÇÃO PELA LINGUAGEM EM SITUAÇÕES DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NO 4º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Leika Watabe; Maria Helena Palma de Oliveira
Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN Brasil
leika_watabe@uol.com.br; mhelenapalma@gmail.com

Resumo. As análises apresentadas neste artigo referem-se às situações de sala de aula de uma turma de 26 alunos do 4º ano do ensino fundamental da rede de ensino municipal de São Paulo e confirmam a importância da interação para a criação da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Foram examinadas situações mediadas pela linguagem ocorridas entre a pesquisadora e alunos e entre alunos nos momentos em que estes expuseram suas resoluções de problemas que envolvem campos aditivo e multiplicativo, bem como quando explicitaram suas dúvidas. As atividades propostas não eram familiares a esse grupo de alunos: foi proposto um problema aberto e atividades em que deveriam ler os enunciados e diante de algumas alternativas, selecionar aquela que continha a operação que resolveria o problema. Ratificou-se, assim que a resolução de problemas vinculada à circulação de diferentes saberes é fator de criação da ZDP, pois possibilitam que os aprendizes reorganizem seus pensamentos e enriqueçam as futuras produções.

Palavras chave: resolução de problemas, campos conceituais, interação na aprendizagem

Abstract. The analyses presented in this article refer to situations in theclassroom of 26 students from the 4th grade (forth yearof compulsory education) in a municipal public school in São Paulo city and confirms the importance of interaction for the creation of the Zone of Proximal Development (ZDP). We examined the situations mediated by language that occurred between the researcher and students and among students when they presented their resolutions to the problems of additive and multiplicative fields and when they exposed their doubts. The proposed activities were not familiar to this group of students: it was proposed an open problem and activities where they should read the statements and in front of some alternatives, select the one that contained the operation that would solve the problem. It was ratified, when the resolution of problems linked to the movement of different knowledge is factor for creating theZDP, because they allow learners to reorganize their thoughts and enrich future productions..

Key words: problem solving, conceptual fields, interaction in learning

Introdução

O presente trabalho é parte integrante de pesquisa mais ampla em que foram analisadas as características da resolução de problemas das estruturas aditivas e multiplicativas de um grupo de alunos do 4º ano do ensino fundamental (Watabe, 2012), sob as perspectivas do domínio conceitual, do processamento da leitura e dos aspectos da interação. Este último será objeto de reflexão neste artigo.

Os estudos relacionados ao modo de interação estiveram voltados para as situações de aprendizagem mediadas pela linguagem entre a pesquisadora e alunos e entre os alunos. Os dados foram analisados à luz das contribuições de Lev Vigotski, mais especificamente balizados pelo conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), um dos aspectos centrais desse teórico no que diz respeito ao ensino. Este conceito refere-se à distância entre o que o sujeito consegue resolver de forma independente – seu nível de desenvolvimento real – e as resoluções, para cuja realização será necessária a parceria com um adulto ou companheiros mais avançados. A ZDP define as funções que estão em estado embrionário, que ainda não amadureceram, por isso um indicador de grande importância para o ensino porque revela não só os ciclos completados, mas aqueles que estão em processos de formação (Vigotski, 2005).

A apropriação do conhecimento pelo sujeito, na ZDP, ocorre essencialmente pela mediação da linguagem no percurso das relações reais, efetivas, do sujeito com o mundo (Palangana, 2001), portanto a linguagem tem um papel de relevância no desenvolvimento cognitivo do sujeito.

Onrubia (2004) destaca que a interação é fonte básica para a criação da ZDP e à educação escolar cabe oferecer assistência por ser ela uma prática com intencionalidade que envolve sujeito (o aluno) que aprende sobre saberes com base na ajuda sistemática e planejada pelo sujeito mais competente nesses saberes – o professor. Este como participante mais competente é quem define um contexto global para conferir significados às participações dos alunos – principalmente daquele menos competente, sobretudo quando esse aluno apresenta ações muito parciais de um núcleo básico desse contexto.O autor ainda destaca que na interação entre alunos "o contraste entre pontos de vista moderadamente divergentes a propósito de uma tarefa ou conteúdo de resolução conjunta"(Onrubia,2004, p.145)é constitutivo da ZDP, pois, ao ter que considerar o ponto de vista dos pares, podem surgir desafios para cada participante e, assim, a interação verbal pode colaborar para a reconstrução dos próprios esquemas de conhecimento, como uma forma de superar esse contraste moderado.

Com isso, há que se concordar com as concepções de aprendizagem de Ermel (1995),quando afirma a importância das interações sociais para a construção do conhecimento. Entre outros aspectos, a interação com pares permite ao aluno apropriar-se das instruções de uma situação que não havia entendido, baseado na reformulação feita por um colega; confrontar a sua resposta com os demais, compreendendo as diferenças e procurando chegar a um consenso, quando for o caso; apresentar a defesa de seu método de resolução contra diferentes propostas manifestadas e compreender o modo de realização da tarefa do colega, imitando o que considerou que ele fez de melhor.

No entanto, construir um ambiente favorável para que os alunos possam expressar seus pensamentos, debatê-los, refletir sobre eles para alcançar a aprendizagem é um grande desafio para o professor. Para a turma de alunos envolvidos nesta pesquisa, a prática de justificar seus modos de resolução em qualquer atividade matemática não lhes era habitual, portanto a necessidade de organizar uma argumentação para defender o seu modo de resolução, ou ainda para expor as dúvidas de maneira que pudessem ser entendidos, também foram desafios enfrentados por esses aprendizes.

Vale ressaltar ainda a importância que Vergnaud atribui à linguagem no processo de aprendizagem. O professor é o mediador nesse processo da construção do campo conceitual pelo aluno, pois será aquele que o ajudará a ampliar os esquemas. Ao explicitar um conhecimento, este pode ser debatido, enquanto uma proposição implícita, não pode. Assim, o caráter do conhecimento muda se for comunicável, debatido e compartilhado. Dessa forma, a linguagem é um dos aspectos imprescindíveis na conceituação, cujo sentido se dá pelos esquemas e as situações (Vergnaud, 1996).

Procedimentos metodológicos

Participaram do estudo 26 alunos do 4º ano do ensino fundamental (do sistema de ensino de 8 anos) de uma escola da rede municipal de ensino da cidade de São Paulo. A média de idade dos alunos era de 10 anos.

Para este trabalho, propôs-se a discussão das atividades em duplas criteriosamente planejados no sentido de garantir que aluno com menos conhecimento interagisse com aquele parceiro mais avançado. Assim, os diálogos propiciados pelas discussões dos três problemas foram objetos de análise. Vale lembrar que tais atividades ocorreram em diferentes sessões.

É preciso destacar ainda que as tarefas não eram familiares a esse grupo de alunos: foi proposto um problema aberto, em que se admitem diferentes respostas e atividades em que deveriam ler os enunciados e, diante de algumas alternativas, selecionar aquela que continha a operação que resolveria o problema.

A seguir, apresentam-se as situações cujos respectivos enunciados e os contextos de realização serão comentados brevemente.

Situação 1: Análise de enunciado de situações-problema

Júlia e *Renata têm juntas R$ 42,00. Quanto dinheiro tem Renata?*

Situação-problema cujaestruturaé multiplicativa, admitindo diferentes respostas.

Encaminhamento: realização, inicialmente, em duplas, seguida de discussão coletiva.

Situação 2: Seleção da operação que resolve o problema.

Nove amigos combinaram de passar um domingo no Parque do Ibirapuera. Para isso decidiram que levarão 3 sanduíches para cada um e uma garrafa de refrigerante de 2L para cada 3 pessoas. Quantas garrafas de refrigerante precisarão levar?

Assinale com um X quais contas resolvem este problema:

( ) 1 + 1 + 1

( ) 3 x 9

( ) 9 : 3

Situação-problema cuja estrutura é multiplicativa, para assinalar a alternativa correta, obviamente o aluno deverá acionar seus conhecimentos, e ainda, precisará justificar a sua escolha. A depender da estratégia utilizada tanto a primeira quanto a última alternativas são corretas.

Encaminhamento: realização em duplas.

Situação 3:Seleção da operação que resolve o problema.

Sandra empacotou 148 lembrancinhas para serem divididas para as crianças na festa da creche. Ela precisará empacotar ainda 18 lembrancinhas. Quantas lembrancinhas serão distribuídas nessa festa?

a) 148 – 18

b) 148 X 18

c) 148 + 18

d) 148 : 18

Situação-problema cuja estrutura é aditiva, tendo *c)* como alternativa correta. Aqui também solicitou-se a justificativa da escolha.

Encaminhamento: realização em dupla

Análise e discussão do desempenho dos alunos

Situação 1: Muitos alunos consideraram que o problema não poderia ser resolvido, alegando que o enunciado não apresentava informações necessárias, como afirma N.:

N.: *Não tá falando se é triplo, dobro!*

F.:*Renata tem 21 reais porque dividiu 42 por 2.*

Essas observações desencadearam manifestações de outros alunos que colocavam outras alternativas como:

V.: *Pode ser 20 reais e 22 reais*

N.: *Também pode ser 1* e *41.*

A ideia de que pode haver diferentes respostas para o mesmo problema era uma situação nova para esses alunos, o que fez a aluna N. concluir:

N.: *Tem diversas possibilidades!* (Demonstrando certa indignação.)

P.: *E, por isso, esse problema não pode ser resolvido?*

N.: *Desse jeito, então, pode ser resolvido!*

Destaca-se a grande contribuição de N. ao ter mencionado a inexistência de uma comparação de quantidades empregando as palavras *dobro, triplo*, pois tal observação foi desencadeadora para F. mobilizar uma invariante operatória (Vergnaud, 1996), referente à metade de uma quantidade, o que por sua vez gerou uma reflexão de V. e N. sobre as diferentes decomposições do número 42. Ao entrarem em contato com o modo de pensar dos colegas, esses alunos puderam romper com a ideia de que os problemas admitem apenas uma resposta correta.

Situação 2: A aluna M.B. examinava o enunciado já há alguns minutos e decidimos questioná-la sobre quais dúvidas teria. Logo o aluno B. (que já tinha realizado a tarefa) veio participar da conversa, ocorrendo uma discussão bastante interessante entre esses dois alunos.

M.B. havia entendido que era uma garrafa de refrigerante para cada um. Ela lia: *"Uma garrafa de 2 litros para cada 3 pessoas"*, escandindo bem a palavra *"cada"*, ao mesmo tempo em que fazia gestos com a mão cortando o ar 3 vezes, o que provavelmente confirmava sua compreensão de uma garrafa para cada pessoa. Nesse momento, foi feita a seguinte intervenção:

P.: Qual é a diferença entre para cada pessoa e *para cada 3 pessoas?*

MB:...

P: Faz o desenho aqui embaixo.

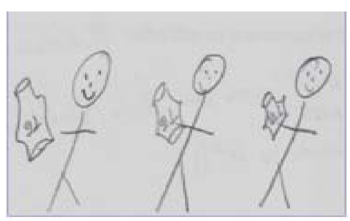


Fig. 1 -Representação da resolução de M.B. (Watabe, 2012)

Assim M.B. desenhou três pessoas, cada uma com uma garrafa, apresentando uma expressão de que não estava entendendo.

O aluno B. havia tido um entendimento correto, o que se pode confirmar com o desenho que realizou:

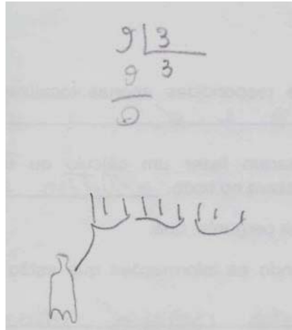


Fig. 2 – Representação da resolução por B. (Watabe, 2012)

Desenhou nove risquinhos e separou de três em três, atribuindo uma garrafa para cada grupo de três palitos. Foi proposta a socialização desses dois procedimentos, convidando os dois alunos (M.B. e B.) a explicarem na lousa como fizeram.

Perguntou-se à turma se os dois procedimentos representavam a mesma situação. Muitos afirmaram que eram situações diferentes, mas M.B. parecia ainda não estar convencida, explicitando que era uma garrafa para cada pessoa.

Nesse momento, o aluno V.F. fez a seguinte intervenção, dirigindo-se à M.B.:

> V.: *Você acha que cada um ia beber 2 litros de refrigerante? Ia explodir! É um para cada trio!*

V. buscara uma justificativa em sua vivência, o que permitiu que a sua colega M.B. refletisse sobre a improbabilidade de sua hipótese: uma só pessoa consumir em pouco tempo 2 litros de refrigerante pareceu pouco provável à aluna. Essa informação foi suficiente para que M.B. compreendesse o enunciado uma garrafa de 2 litros para cada três pessoas – parecia bem provável.

Ao se analisar as situações descritas, referendamos a ideia de que:

> Interagindo com as pessoas que integram seu meio ambiente, a criança apreende seus significados linguísticos e, com eles, o conhecimento de sua cultura. O funcionamento mental mais complexo das crianças emerge graças às regulações verbais realizadas por outras pessoas, as quais vão sendo substituídas gradativamente por auto-regulações, à medida que a fala vai sendo internalizada. (Palangana, 2001, p. 131).

Situação 3: Ao aluno D. foi tacitamente atribuído o papel do parceiro mais avançado, o que o deixou na posição de explicitar seu ponto de vista para que a colega pudesse entender a situação colocada. D. desempenhou essa função com bastante competência.

Mas, mesmo ele estando na posição de parceiro mais avançado, na resolução do problema seguinte quem conseguiu primeiro encontrar a resolução correta foi a M.B.

M.B. leu em voz alta o enunciado e falou. *Eu acho que é a C* (a alternativa correta 148 + 18).

D.: *Meu Deus!* (a alternativa correta para ele era a D: 148 : 18).

P.: *Por que é a C?*

M.B.: *Ela já empacotou 148* e *precisa empacotar ainda 18 lembrancinhas. Eu acho que é a C.*

D.: *É, tá certo!*

L. *Mas o que você tinha pensado, D.?*

D.: *Eu tinha pensado que ela ia dividir por 18 crianças. Aí eu falei, aí meu Deus! ... Como é bom pensar junto!*

M.B.: *É de mais porque ela já empacotou 148* e *ela precisa empacotar ainda 18,* e *148 + 18 dá o resultado.*

D.: *Eu achei que era 18 crianças* (onde se lia 18 lembrancinhas).

M.B.:*Quando pensei 148 + 18, eu pensei que era eu, que minha conta tava errada.*

M.B. era considerada, pela professora regular da turma, como uma aluna com fraco desempenho, segundo informações fornecidas pela própria docente em contatos ocorridos durante a coleta de dados. No entanto, os resultados decorrentes das atuações dessa aluna, alicerçaram posição contrária à expressa pela professora, pois foi possível constatar que a aluna tem a exata noção do que não entendeu e, melhor ainda, consegue explicitar claramente o que pensa e as dúvidas que tem. Consegue colocar em palavras o seu pensamento, e isso favorece o avanço da ZDP, porque a linguagem regula a ação e reorganiza os processos cognitivos. É bem verdade que M.B. não conseguiu naquele momento realizar algumas atividades sem ajuda, mas a ocorrência de momentos de interação, de fato, permitiu confrontar seu próprio pensamento com o do outro, esse processo tem o potencial de colaborar para que, no futuro, esse conhecimento possa constituir-se no nível de desenvolvimento real.

As discussões desencadeadas nas interações provocadas por essas situações confirmam a afirmação de Onrubia (2004) de que a fala ocupa um lugar central na criação e na intervenção nas ZDP, por ser um instrumento que favorece aos participantes compararem e modificarem seus esquemas de conhecimentos sobre o que se pretende que aprendam. Em segundo lugar, para esse autor, a linguagem ajuda os alunos na reorganização de suas experiências e conhecimentos, aproximando-os cada vez mais dos significados culturais compartilhados socialmente.

Considerações finais

A resolução de situações-problema confere um sentido aos conceitos matemáticos, mas não pode ser considerado único meio para a construção e consolidação do conhecimento.

Os resultados deste estudo puderam confirmar a importância de se promover a interação entre alunos e entre professor e alunos para que ocorra a circulação de diferentes saberes. A interação é fator de significativa importância na criação da ZDP, mas para isso é preciso planejar as intervenções ajustadas, um ensino que invista para além do que aluno já domina, ou seja, no desenvolvimento potencial. Assim sendo, é preciso investigar a produção dos alunos, procurando entender o que está por trás da linguagem– tanto oral quanto escrita – por eles explicitada. Sem esse entendimento, não será possível ao professor prever boas situações de ensino, isto é, propor desafios que tenham o propósito de mobilizar os esquemas construídos pelos alunos para favorecer a construção de novos esquemas, porque, como afirma Vigotski (2005), o ensino deve impulsionar o desenvolvimento, fazendo com que ocorra uma boa aprendizagem, ou seja, aquela que adianta o desenvolvimento mental dos alunos.

Os momentos em que os pares discutem os procedimentos – quando os alunos precisam confrontar diferentes procedimentos, refutar os argumentos dos colegas, explicitar e justificar suas escolhas –, são ocasiões valiosas porque possibilitam que cada um dos participantes reorganize seus pensamentos, criando condições de enriquecer as futuras resoluções de problemas. Constituem-se ainda ocasiões em que é possível colocar os aprendizes como protagonistas, de fato, do seu processo de aprendizagem. Para o professor, parceiro mais experiente, é um momento de realizar as intervenções em tempo real; uma ação didáticaque contribui sem dúvida para a criação da ZDP.

Foi possível observar que todos os alunos participantes desta pesquisa puderam partilhar os diferentes pensamentos explicitados pelos seus colegas na socialização dos procedimentos de resolução dos problemas. Mesmo aqueles que ainda não conseguiam expor nenhum esquema de resolução, tiveram a oportunidade de pensar nas diferentes possibilidades e assim aproximarem-se de algum modelo que lhes era mais acessível.

Esse processo de revelar o pensamento por meio da linguagem mostrou-nos que é um passo inicial para que os alunos – que ainda não conseguem manifestar seu teorema-em-ação – possam fazê-lo, à medida que tenham a oportunidade de uma interlocução com o professor e seus pares, mesmo que ainda ocorra de uma forma incipiente.

Certamente, as discussões nesses momentos de interação geraram novas questões para alguns alunos, o que pode ter sido elemento para estabelecer relações com seus esquemas construídos e para possibilitar novas aprendizagens no espaço da Zona de Desenvolvimento Proximal.

Referências bibliográficas

Ermel (1995). *A descoberta de números: contar, cantar* e *calcular*. (Trad. Mário Pinto). Lisboa: Edições Asa.

Onrubia, J. (2004). Ensinar: criar zonas de desenvolvimento proximal e nelas intervir. Em Coll, C. et al. *Construtivismo na sala de aula* (pp. 123-151), São Paulo: Editora Ática.

Palangana, I.C. (2001). *Desenvolvimento* e *aprendizagem em Piaget* e *Vygotsky*. São Paulo, Summus.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceituais.Em J. Brun (Dir.) *Didática das matemáticas* (pp.155-191), Lisboa: Instituto Piaget/Horizontes Pedagógicos.

Vigotski, L.S. (2005). *Pensamento* e *linguagem.* São Paulo: Martins Fontes.

Vigotski, L.S. (2010). *A formação social da mente.* São Paulo: Martins Fontes.

Watabe, L. (2012). *Características da resolução de problemas por alunos do 4º ano do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Bandeirante de São Paulo. Brasil

GEOMETRÍA DINÁMICA: DE LA VISUALIZACIÓN A LA PRUEBA

Daniel Fernández, Elizabeth Montoya Delgadillo
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
danfernandez.ac@gmail.com, emontoya@ucv.cl

Resumen. La visualización juega un papel importante en el proceso de prueba, no fundamental, pero que cognitivamente contribuye a facilitar la búsqueda de soluciones en una tarea geométrica. En esta investigación se busca entregar una sugerencia de cómo promover el razonamiento geométrico en el aula por medio de la Geometría Dinámica. Se quiere intencionar el tránsito, desde la visualización a la prueba, a través de un diseño de secuencia de enseñanza, realzando este artefacto tecnológico en dicho tránsito y así, finalmente evidenciar una propuesta en los paradigmas geométricos de Kuzniak, apuntando a mejorar la enseñanza de la Geometría por medio de dicha articulación. Las actividades propuestas en el diseño invitan a los estudiantes a la exploración, inferencias, conjeturas, justificaciones, entre otras, logrando así un mayor razonamiento geométrico.

Palabras clave: paradigmas geométricos, visualización, demostración

Abstract. The visualization plays an important role in the testing that contributes not in a very strong way, but making the searching of solutions very easily in a geometric task. The objective in this investigation is to suggest how to promote the geometrical reasoning in the classroom by means of the Dynamic Geometry. By means of a teaching sequence design, the result will be a very close step by step, from visualization to the test itself, showing the evidence of a proposal in the Kuzniak geometrical paradigms, which objective is to improve the teaching of Geometry. The design activities invite students to explorations, inferences, conjectures, justifications, among others, achieving to a better Geometric reasoning.

Key words: geometrical paradigms, visualization, demonstration

Planteamiento del problema

En Chile, el eje temático de geometría es un componente matemático que ocupa un lugar privilegiado en los programas de estudio escolares por su aporte a la formación de los estudiantes. Seguramente cualquier situación geométrica, por elemental que ella sea, permitirá instancias de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con el fin de explicar, probar o demostrar hechos. De aquí se desprende que la geometría es uno de los mejores lugares para dilucidar el papel de la prueba y la demostración en matemáticas.

En nuestro sistema escolar, es común oír a profesores afirmando no darle tiempo a este razonamiento, aludiendo a que se ven tensionado por dedicar tiempo preparando para pruebas nacionales de medición de la calidad de la educación (SIMCE) o pruebas de selección universitaria (PSU) y privilegian otras temáticas de enseñanza. A esto, se agrega que los estudiantes muestran dificultades en el eje temático de geometría, así da cuenta el informe entregado por el Ministerio de Educación de Chile con respecto al informe SIMCE 2010 de los 2° Medios (15-16 años), en donde se evaluó el uso de invariantes en la transformación de figuras y de relaciones proporcionales entre trazos en triángulos y cuadriláteros; el conocimiento de las propiedades de los ángulos internos de la circunferencia y de los criterios de congruencia de triángulos; en este informe para docentes y directivos, se explicita el análisis de 3 preguntas de la prueba de matemática de las cuales una de ellas es de geometría, y donde solo un 38% de los estudiantes del país responde correctamente, a diferencia de las otras dos preguntas de algebra donde el 48% y el 58% de los estudiantes responde correctamente, esto confirma un problema en la geometría de los estudiantes del país.

En el ámbito de todo lo anteriormente expuesto, especial importancia toman las experiencias tales como la construcción de modelos geométricos y su relación con la percepción visual, la representación se encuentra en estrecha conexión con el potencial humano de visualizar y la búsqueda de mecanismos de argumentación para lograr justificar afirmaciones (asociado al razonamiento discursivo). Según Mammana y Villani (1998), el aspecto visual en la geometría es predominante, recalcan que desde las tablillas babilónicas a los papiros egipcios, cuando se trató de escribir un problema geométrico, se inició la tradición de mezclar en las producciones escritas imágenes, símbolos especiales y el lenguaje natural para comunicar ideas. La visualización juega un papel importante en el proceso de prueba, no fundamental, pero que cognitivamente contribuye a facilitar la búsqueda de soluciones o alternativas en los pasos del razonamiento donde una articulación de estos procesos cognitivos es fundamental (Duval, 2005). El uso de tecnología, por ejemplo, permite al estudiante la manipulación del entorno geométrico, ampliando su experiencia y validando enunciados, algo muy difícil de lograr al principio sin la mediación de un software. Por otro lado, las TIC ayudan a los estudiantes en sus conjeturas, pero no así en la demostración, suponemos que una inapropiada instrumentalización (Artigue, 2002) podría ocasionar incluso obstáculos en la demostración.

Proponemos que el alumno debe sentir la necesitad de demostrar, y que la tecnología como recurso a través de la visualización el alumno puede quedar convencido de que no es necesario demostrar, pues el dibujo lo deja claro.

Así la visualización, ligada a los significados o imágenes (conceptualización) y la percepción ligada al mundo de los sentidos, ayudan para entender un problema, pero se debe tener en cuenta el no abuso, por la convicción que puede ocasionar en los estudiantes para no llevar a cabo el proceso de *prueba* en el sentido de Balacheff (1987), o más explícitamente una demostración. Del razonamiento, según Balacheff, surgen *explicaciones* que son aceptadas o no por una comunidad, aquellas explicaciones que son aceptadas por la comunidad (regidas por un contrato y "*milieu*") conforman las *pruebas*, en las cuales se distingue las *pruebas pragmáticas* y las *pruebas intelectuales* y la respectiva tipología. A este esquema de trabajo es lo que nosotros entenderemos por *proceso de prueba,* y una demostración es una prueba del tipo intelectual.

En este afán, proponemos en esta investigación entregar una sugerencia de cómo promover el razonamiento de validación en el aula por medio de la Geometría Dinámica, verificando así el papel heurístico de la tecnología como artefacto en el sentido de Rabardel (1995) que interfiere positivamente en una tarea geométrica propuesta a los estudiantes.

Objetivos de la investigación

- Indagar en los referentes teóricos que propician el tránsito en un plano cognitivo, desde la "visualización" a la "prueba", realzando este artefacto tecnológico, Geometría Dinámica, en dicho tránsito.
- Proponer una situación de enseñanza en donde se provoque el tránsito de la visualización a la prueba, promoviendo la interacción entre los paradigmas geométricos.

Marco teórico: Paradigmas geométricos y espacio de trabajo geométrico

En general, la palabra *paradigma* designa el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparten los miembros de una comunidad. Cuando se habla de comunidades científicas, se puede decir que un paradigma corresponde a realizaciones universalmente reconocidas en un tiempo y que entrega modelos de problemas y soluciones a dichas comunidades.

Ahora bien, en el ámbito de la enseñanza, la noción de paradigma geométrico se entenderá por, "la caracterización de los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes para que aprendan a reconocer, aislar y distinguir las diferentes entidades constitutivas de la geometría puesta en juego", (Montoya, 2010, p. 25). Esta concepción acoge tres componentes que le dan sustento: la primera de carácter cognitiva, en el sentido de Gonseth, donde plantea que los modos de pensamiento; intuición, experiencia y el razonamiento deductivo serán la base del geómetra para enfrentar una determinada tarea. La segunda componente es de carácter filosófica, en el sentido de Kuhn asociada a una concepción de paradigma donde la validación de los conocimientos construidos hace relación con las verdades y estrategias compartidas por la comunidad escolar según su percepción de la realidad; por último la tercera componente es de carácter epistemológico que hace referencia a la ubicación del modelo geométrico.

Estas tres componentes permiten identificar tres paradigmas geométricos que coexisten en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría, a saber, Geometría Natural (GI), Geometría Axiomática Natural (GII), Geometría Axiomática Formalista (GIII).

Geometría Natural (GI)

En esta geometría los objetos geométricos son percibidos en la abstracción de la realidad, la intuición juega el papel de calificar si el dibujo es o no representativo del objeto geométrico, es así como la visualización me permite evaluar si se logran concebir imágenes mentales. En este paradigma los medios de prueba son de tipo material, utilizando artefacto para la manipulación de los objetos, se permiten las mediciones con instrumentos, trabajo de pliegues y/o cortes, etc. La experimentación y la deducción actúan sobre la representación de los objetos geométricos, en la interfase de los artefactos, visualización y percepción. En cuanto al modelo geométrico está ligado al mundo real, cuando se habla de real, en esta teoría, no se refiere al cotidiano, si no a lo que existe. La geometría euclidiana está presente sólo en forma local, puesto que el razonamiento de validación aquí no exige ni se puede usar la axiomática.

Geometría Axiomática Natural (GII)

La representación de los objetos geométricos cambia con respecto al paradigma anterior, ya no se habla de dibujo sino de figuras geométricas, donde ella describe al objeto por medio de una propiedad; sin embargo, la visualización aún es fuerte, pero como representación inicial puesto que el razonamiento de validación se funda en las leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático en el modelo geométrico, puesto en escena, es decir, propiedades, definiciones, etc. En este paradigma al abordar un problema geométrico se acepta el dibujo sólo inicialmente para extraer la información o la utilización de artefactos en la construcción, pero no como medio de prueba.

Geometría Axiomática Formalista (GIII)

En este paradigma, los objetos geométricos provienen de una axiomática que contiene todo el formalismo riguroso del modelo, el dibujo aquí podría guiar la intuición del geómetra, pero no debe ser usado para probar, pues el razonamiento de validación en esta geometría es exclusivamente a través del sistema axiomático formal, por tal razón los artefactos son instrumentos puramente teóricos. En GIII, surge la aparición de la Geometría de Euclides, incluso las Geometrías no Euclidianas, el trabajo ya no es a nivel local en la resolución de los problemas geométricos.

En ocasiones, es posible observar una transición entre los paradigmas, los más factibles entre GI y GII, y entre GII y GIII, pero no es tan evidente el tránsito de GI a GIII. Lo anterior no quiere decir que los paradigmas geométricos sea un marco impreciso, sino abierto a la diversa gama de problemas donde si puede existir una transición, pero en otros el paradigma es claro.

Lo importante es la legitimidad de cada paradigma, cada uno de ellos se debe respetar, evitar el juicio de valor, no se trata de enjuiciar sino buscar el fundamento a partir de la teoría.

En cada paradigma existe un espacio de trabajo geométrico, que corresponde a un ambiente organizado por y para el geómetra mediante la articulación de tres componentes, a saber: referencial teórico, el espacio local y real y los artefactos.

- La componente Referencial Teórico, corresponde al conjunto de definiciones, propiedades y relaciones articuladas por los axiomas y que finalmente determinan el modelo geométrico.
- La componente Espacio Local y Real, es la concepción por el individuo del modelo geométrico. El aspecto local se refiere a que el individuo trabaja con una parte del modelo y, el aspecto real se refiere a que los objetos son el resultante de la abstracción del modelo a partir de la realidad.
- La componente Artefactos, corresponde a todo lo que permite al geómetra manipular objetos geométricos con el objetivo de abordar un problema, en concordancia con su modelo geométrico.

Estas componentes del Espacio de Trabajo Geométrico se hacen más visibles dependiendo del paradigma geométrico, por ejemplo el referencial teórico tendrá más presencia a medida que el estudiante transite hacia GIII, los artefactos por su parte son evidentes en GI (regla, compás, doblar, cortar, etc.), pero a medida que se transita a GIII se transforman en instrumentos netamente teóricos.

Si nos enfocamos ahora desde un punto de vista cognitivo, hay procesos asociados al Espacio de Trabajo Geométrico como lo son: *visualización, construcción y prueba,* relacionándose con las componentes del ETG conformando un espacio de trabajo epistemológico y cognitivo. El proceso cognitivo de visualización aporta en el proceso de construcción y vice versa, a la vez, el proceso cognitivo de construcción aporta en el proceso de prueba y viceversa, pero el proceso de visualización aporta en el sentido que se relacionan, que se emplea uno cuando se hace el otro, en la prueba pero no podemos asegurar que la prueba aporta en el proceso cognitivo de la visualización (Montoya, 2010).

Metodología

Desde los objetivos de Investigación, ha sido pertinente un diseño metodológico en el contexto de estudio de caso. Se refiere a "caso" en la medida que se analizan realidades específicas y singulares, que adquieren su valor como indagaciones intensivas y con profundidad en casos particulares.

La situación que se implementó en la investigación corresponde a la aplicación de un diseño de enseñanza a estudiantes de una institución de educación secundaria chilena. La población objetivo corresponde a estudiantes de 15-16 años de un establecimiento municipal al cuál se les realizó la invitación extendida a sus 30 estudiantes para desarrollar este diseño, de los cuales un tercio de ellos accedió y aceptó participar en dicha aplicación, es decir, fueron 10 estudiantes voluntarios los que finalmente fueron la muestra de la investigación. La toma de datos consistió en la aplicación del diseño la segunda semana de junio del año 2012, el cual respondió cada uno de los 10 estudiantes de manera individual en jornada alterna a sus actividades curriculares normales, la que fue aplicada en tres sesiones de 90 minutos cada una en el laboratorio de computación del mismo establecimiento, pues éste espacio era primordial para que se llevará a cabo la aplicación. El instrumento que se aplicó corresponde a un diseño con una actividad inicial o de apresto y cuatro actividades abiertas.

A continuación se describen algunos de los detalles más importantes de éste, a saber:

La actividad de apresto tiene como objetivo diagnosticar el nivel de conocimiento del contenido de congruencia de triángulos de los estudiantes a los que se les aplicará el diseño, pues esto interferirá de alguna manera en el proceso y más aún en el análisis de los resultados. Se debe destacar que el real objetivo de la investigación no es construir el saber de congruencia de triángulos, sino proporcionar a los estudiantes otras aristas de razonamiento geométrico, como lo es la prueba por medio de la visualización; ahora bien, es necesario tomar un contenido que sirva como artefacto teórico para lograr el razonamiento y tránsito antes expuesto y con ese fin se escoge congruencia, pero podría haber sido cualquier otro saber que fuera herramienta para esto.

La actividad uno tiene la intención de indagar la aprehensión de los estudiantes con el artefacto, en este caso la herramienta del software geométrico CABRI II, la que será fundamental en el diseño; en particular se les pide a los estudiantes que construyan un triángulo isósceles con los conocimientos que tengan, si no pueden realizarlo se les entrega una guía para que lo construyan. La actividad dos y tres se centra en el real objetivo de esta investigación, es decir, en el estudio del tránsito de los polos del plano cognitivo del espacio de trabajo geométrico, de la visualización a la prueba (demostración), y la incidencia del artefacto de geometría dinámica en dicho tránsito.

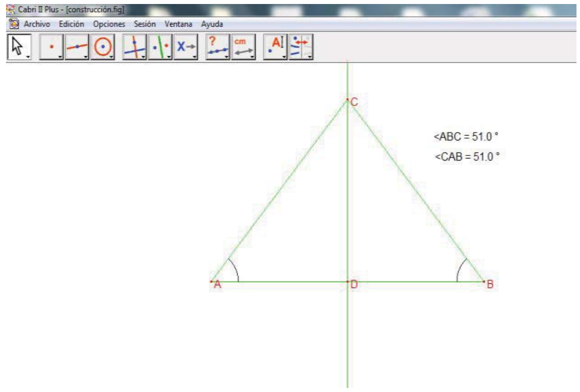


Figura 1. Actividad en Cabri desarrollada por un estudiante comprobando que en un triángulo isósceles los ángulos basales son congruentes

Analiza y determina el **orden** lógico que debería llevar la demostración de este teorema, evalúa que elementos que visualizaste en tu construcción son necesarios para la demostración y que elementos no lo son.

En el paréntesis ( ) enumera de menor a mayor el "orden" de los pasos, y escribe una "X" para afirmar que el paso NO es parte del argumento.

Sabemos que:

Entonces	(4)
m<CEF=m<CAB (por definición de ángulos alternos internos)	(X)
AC=BC (por definición de triangulo isósceles)	(1)
CD=CD	(3)
Por lo tanto m<CAB=m<ABC.	(6)
Por criterio LAL concluimos que el triangulo ADC es congruente al triangulo BDC	(5)
m<DCA=m<BCD (por propiedad de bisectriz)	(2)

Figura 2. Actividad planteada para que el estudiante se aproxime por medio de la actividad anterior a la concepción de demostración utilizando en este caso el objeto matemático, congruencia de triángulos

La actividad cuatro y última, pone en evidencia el tránsito anteriormente expuesto, pero además se incorpora el hecho de que los estudiantes deben redactar el teorema en juego, que se les propone por medio de una construcción en el software, para posteriormente justificarlo por medio de la demostración per sé.

El instrumento aplicado a los estudiantes fue sometido a diversas instancias como co-evaluación por un grupo de estudiantes tesistas de magister en didáctica con investigaciones relacionadas y no relacionadas con la investigación, la evaluación de la docente guía de esta investigación y la revisión de las actividades por dos docentes de matemática de educación secundaria. En consecuencia, la versión final del diseño de enseñanza es fruto de una reestructuración y reformulación de las actividades que buscaban secuencialmente intencionar el tránsito del que se hablaba anteriormente. Se realiza un análisis preliminar (análisis a priori) de las actividades con las respuestas expertas y las posibles respuestas de los estudiantes, y luego de la aplicación se realiza un análisis con los resultados obtenidos (análisis a posteriori).

Resultados y conclusiones

Si bien durante la aplicación se pudo observar que no era una tarea fácil de abordar para los estudiantes, pues inicialmente les resultaba difícil esta abstracción de alcanzar la concepción demostración, durante y en el avance de las actividades comenzaron a realizar inferencias y conjeturas que los llevaron al acercamiento de la rigurosidad, incluso en la escritura de las justificaciones utilizadas para argumentar por medio de los criterios de congruencias las propiedades o teoremas en juego. Así se puede evidenciar un tránsito en los paradigmas geométricos, pues la primera forma de abordar los problemas, fue utilizando el software para medir y corroborar que la propiedad se cumplía, posteriormente justificaban sus construcciones y elementos de ella por medio de definiciones y propiedades, pero aún necesitando el dibujo de la construcción. Finalmente hubo un grupo de 3 estudiantes que logró formalizar con herramientas teóricas la veracidad de los distintos teoremas, alcanzando así una cercanía a GIII, es decir, con la secuencia propuesta se evidencia no sólo el transito en los polos del plano cognitivo de la teoría (Espacio de trabajo geométrico), sino también el tránsito en los paradigmas. Se debe destacar que la Geometría Dinámica, en este caso, el software CABRI II juega un rol de real importancia, pues es éste, quién ayuda y motiva a los estudiantes a explorar, inferir, conjeturar, justificar, etc. Si bien, este es sólo el artefacto por el cual se desarrolla el tránsito de la visualización a la prueba, es quien cumple el rol de convencer a los estudiantes de la veracidad de las propiedades puestas en juego en el diseño propuesto, en particular, por medio de la percepción visual ellos identifican los elementos necesarios para la construcción utilizando el modelo teórico como referente en sus posteriores justificaciones.

Como consideración final, se debe destacar el poder heurístico de la Geometría Dinámica para lograr este tránsito de la Visualización a la Prueba, en estudiantes de educación secundaria. No tan sólo se debe utilizar como herramienta por ser entretenida o atractiva para los estudiantes, sino indagar en las riquezas que puede entregar, por ejemplo, para que ellos logren pasar por razonamientos tan abstractos como lo son la demostración en matemática, particularmente en este caso en la geometría, y donde hoy los programas de estudio vigentes ya la incorporan, pero que con muy poca frecuencia se encuentra presente en las aulas de matemática. Pues bien, como aporte a la matemática educativa, es que surgió esta investigación y la creación del diseño de enseñanza que provoca esta nueva concepción de demostración en la construcción del conocimiento geométrico.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7**(3), 245-274.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemática. *Revista Epsilon*, *26*, 15-30.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de L'Apprentissage de la Géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives.10*, 5-53.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Paris: Irem Paris 7.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Mammana, C. & Villani V. (1998). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. *Kluwer Academic Publishers*, 340-341.

Montoya E. (2010). *Etude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili.* Thèse pour obtenir le titre de Docteur. Paris : Université Paris Diderot-Paris 7.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE LA PRUEBA PISA. UN ESTUDIO DE CASOS

Florida Pastrana, Guadalupe Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero México
flor_jua_10@hotmail.com,gcabanas.sanchez@gmail.com

Resumen. El artículo analiza las estrategias desarrolladas por estudiantes de nivel medio superior al resolver problemas matemáticos de la prueba PISA. El estudio toma como base las explicaciones escritas, verbales y gestuales presentadas por los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas. Fueron caracterizadas dos tipos de estrategias: formales e informales. Las primeras, a partir de conceptos sobre objetos, relaciones y operaciones, así como de proposiciones y propiedades matemáticas y las segundas, por medio de transformaciones como la descomposición y recomposición de formas geométricas, asimismo, del uso de la estimación visual y estimación de medidas.

Palabras clave: estrategias formales e informales, problemas, prueba PISA

Abstract. This article analyzes the developed strategies by High School students while solving PISA mathematical problems. The study is based on the written, verbal and gestural explanations given by the students in the process of solving problems. Two types of strategies were characterized: formal and informal. The first one, from the use of concepts on objects, relations and operations, as well as propositions and mathematical properties and the second one, through the transformations, such as the decomposition and alteration of geometric forms, in addition, to the visual estimation and estimation of measurements.

Key words: formal and informal strategies, problems, PISA test

Introducción

Varias investigaciones se han ocupado por explorar las estrategias desarrolladas por los estudiantes en distintas etapas de su formación, mientras resuelven problemas matemáticos (e.gr., Cobb, Yackel, & Wood, 1992; Mónaco & Aguirre, 1996; Campistrous & Rizo, 1999; Olave, 2005; Pastrana & Cabañas-Sánchez, 2012). Las principales conclusiones de estas investigaciones, es que el pensamiento matemático está caracterizado por la variabilidad, pues los estudiantes tienden a aplicar diferentes estrategias incluso ante un mismo problema (Kospentaris, Spyrou & Lappas, 2011), independientemente si arriban a una respuesta o si esta cumple con las exigencias (Pastrana & Cabañas-Sánchez, 2012). El estudio de las estrategias cobra importancia, por el interés de reconocer los conocimientos que usan los estudiantes, de la calidad y cantidad de ese conocimiento y cómo lo usan ante situaciones diversas, ello con el fin de mejorar procesos de enseñanza.

El presente artículo reporta resultados de un estudio relacionado con estrategias que emplean estudiantes de bachillerato, mientras resuelven problemas matemáticos de la prueba PISA. El interés por explorar las estrategias ante este tipo de problemas, radica por un lado, por los cuestionamientos realizados a cerca del desempeño de los estudiantes, especialmente los que atañen al área de matemáticas, por otro, a fin de ofrecer evidencia empírica sobre procesos de aprendizaje de los estudiantes, ya que como afirma Díaz-Barriga (Díaz-Barriga, 2006) los resultados obtenidos en las pruebas masivas, ocultan el problema de fondo: el desarrollo de los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Para llevar adelante este trabajo, nos planteamos la pregunta siguiente: *¿Qué estrategias desarrollan los estudiantes de Nivel Medio Superior al resolver problemas matemáticos de la prueba PISA?*

Elementos teóricos

Los sustentos teóricos de esta investigación son los conceptos *estrategia*, *problema* y *resolución de problema*, los cuales nos permitieron analizar y explicar los resultados obtenidos. Estrategia la entendemos en el sentido de Escoriza (2003), quien manifiesta que son procedimientos intencionales, deliberados, propositivos y cuya ejecución requiere control (regulación y evaluación) sistemático y continuado durante el proceso orientados al logro de los objetivos previstos. Además de su definición, destaca algunas características en torno a las estrategias, y considera que al momento de la lectura, en este caso de un problema son esenciales aspectos como las características del lector: la cantidad, la calidad y diversidad de lo que sabe. Desde nuestra perspectiva, consideramos que estos aspectos contribuyen a una interpretación adecuada de un problema, asimismo, en la elección de las estrategias a desarrollar en el proceso de resolución. El concepto de problema lo retomamos de Campistrous y Rizo (1999), quienes lo conciben como a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. Y resolución de problemas tomamos en consideración a Polya (1965), quien identifica en dicho proceso 4 etapas: *Comprender el problema*, *Configurar un plan*, *Ejecutar un plan* y *Visión retrospectiva*.

Para la caracterización de las estrategias se hizo una adaptación a la propuesta de Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011). De este modo, las caracterizamos como:

- *Estrategias formales*: Consisten del uso de conceptos sobre objetos, relaciones y operaciones, así como de proposiciones y propiedades matemáticas.
- *Estrategias informales*: Consisten de transformaciones basadas en la descomposición y recomposición de formas geométricas (cortar y pegar), la estimación visual y estimación de medidas.

Aspectos metodológicos

La investigación se inscribe en un estudio de casos como método para profundizar comprender los procesos desarrollados por los estudiantes durante la resolución de los problemas.

La población consistió de seis estudiantes de primer año de bachillerato, cuyas edades oscilaban entre los 15 años, tres meses y 16 años, dos meses, rango de edad considerada por la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico) en la aplicación de la prueba PISA. Esta población se localiza en tercer año de secundaria y en primer año de bachillerato. De los participantes, cuatro estaban matriculados en la Unidad Académica Preparatoria No. 1 de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG) y los otros dos, en el Centro de Estudios Tecnológicos y de Servicios No. 135 (Cetis 135), ambos centros educativos, se ubican en la ciudad de Chilpancingo, Gro.

Nos apoyamos de dos instrumentos para la recolección de evidencias: problemas matemáticos de la prueba PISA 2003 y una entrevista. Se aplicaron cuatro problemas de PISA 2003: el de carpintero, el de Juventud crece más, Exportaciones y el de Selección, cada uno se ubica en un contenido diferente según los criterios de PISA. Los problemas se resolvieron de manera individual, en un ambiente de lápiz y papel en un tiempo promedio de 40 minutos. La entrevista fue de tipo abierto y tuvo como fin indagar de manera más profunda los procesos que siguieron los estudiantes en la resolución de los problemas. Las preguntas que la guiaron fueron las siguientes:

1. ¿Tenías un plan o una idea inicial para resolver el problema?
2. ¿Qué se pide?
3. ¿Cómo lo resolviste?
4. ¿Cuál o cuáles son las respuestas al problema?
5. ¿Consideras que tu respuesta sea realmente la solución al problema?
6. ¿Crees que haya otra forma de resolverlo?

Estudio de casos

Por cuestiones de espacio, presentamos un caso, el de Nadxieli, quien resolvió un problema, conocido como el problema de Juventud Crece más.

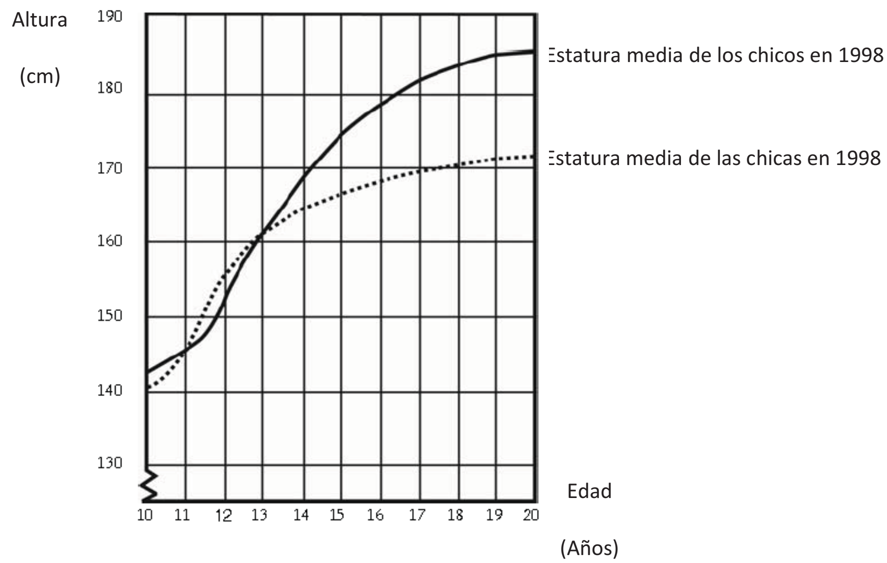
Juventud crece más

En la siguiente gráfica se representa la altura promedio de los jóvenes, hombres y mujeres en los Países Bajos para 1998.

a) Desde 1980, la altura promedio de las mujeres de 20 años de edad se ha incrementado en 2.3 cm hasta llegar a 170.6 cm. ¿Cuál era la altura promedio de la mujer de 20 años en 1980?, Argumenta tu respuesta.

b) Explica cómo es que la gráfica muestra que el crecimiento promedio de las niñas es más lento después de los 12 años de edad. Argumenta tu respuesta.

c) De acuerdo con la gráfica, en promedio, ¿Durante qué periodo de su vida las mujeres son más altas que los hombres de la misma edad?, Argumenta tu respuesta.



Este problema tiene tres respuestas, la primera es cerrada y el resto, abiertas. Corresponde al contenido de cambio y relaciones, y pertenece al contexto científico. Esta situación trata del crecimiento promedio que alcanzan los jóvenes de una región del mundo, en un determinado período de tiempo. Los datos se reportan a través de dos gráficas, ubicadas en un mismo plano. Una de ellas, representa la estatura de los hombres y la otra, de las mujeres. Para responder a la pregunta del inciso a, es suficiente con realizar una resta. Para responder a las preguntas de los incisos b y c, se requiere de la lectura e interpretación de las gráficas, seguidamente comparar las estaturas alcanzadas en determinada edad.

El Caso de Nadxieli

Nadxieli tiene 15 años, un mes y cursa el segundo semestre de bachillerato tecnológico en el Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios 135.

a) *¿Cómo resolvió el problema?*

La primera acción que realizó consistió en leer el enunciado del problema. Por la lectura, se da cuenta que para responder a la pregunta del inciso a, puede restar a la estatura alcanzada por las mujeres en cierto período, el incremento que tuvieron desde 1980 (renglones 108 y 120); de ese modo, determina cuánto medían en ese año (Figura 1).

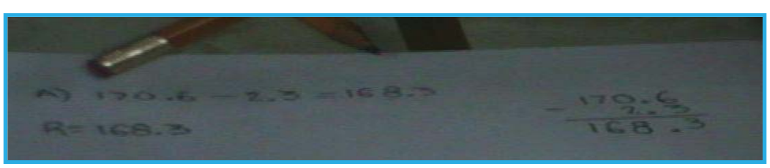


Figura 1. Nadxieli realiza la operación.

Entrevistador: ¿En qué te basaste para resolver el problema?

Nadxieli: Hice *una resta*… utilicé la altura... que nos daba de 170.6 cm… entonces este número le resté los 2.3 que habían incrementado desde 1980 …. Aquí dice desde 1980, la estatura de las mujeres ha incrementado 2.3 hasta llegar hasta 170.6 cm. Entonces como dice la pregunta ¿Cuál era la altura promedio de las mujeres de 20 años en 1980?... entonces… *a 170.6 le resto 2.3* para que me de la estatura en la que estaba en 1980…

Para responder a la pregunta del inciso b, hace una lectura de la gráfica. De las acciones posteriores, se infiere que utiliza la noción de razón cambio, ya que compara cómo se comporta la variable altura respecto de la variable edad (razones de cambio de la altura respecto del tiempo en años), y además, porque se da cuenta que el incremento de la estatura de las mujeres en dos períodos distintos, es el mismo. Ello, porque en dos años crece l6 cm y en otro período de 8 años también crece 16 cm (Figura 2 y renglones 126-134). En esto se basa para explicar el crecimiento lento de las mujeres después de los 12 años.

Entrevistador: ¿La gráfica por qué te dice que crece o es más lento? ¿Cómo es qué te dice la gráfica?

Nadxieli: Nos muestra que las mujeres de los 12 a los 20 años, va más lento, porque de 10 años a los 20 años avanza 16 cm, y de 10 a 12 años 16 cm también…

Entrevistador: ¿Qué quiere decir eso?

Nadxieli: Que de ahí las mujeres crecen más rápido, hasta los 12 años… porque aumentan 16 cm, pero de los 12 a los 20 años aumenta 16 también…

Entrevistador: ¿Eso qué significa?

Nadxieli: Avanzarían más lento…

Entrevistador: ¿De 12 a 20 que hay?

Nadxieli: … para las mujeres es más lento el crecimiento.

Entrevistador: Tú dices que 10 a 12 crecen 16 más o menos… ¿Qué significa eso?

Naxieli: *Que son 2 años los que avanzan, y de 12 a 20 son 8 años los que avanzan y avanzan lo mismo…*

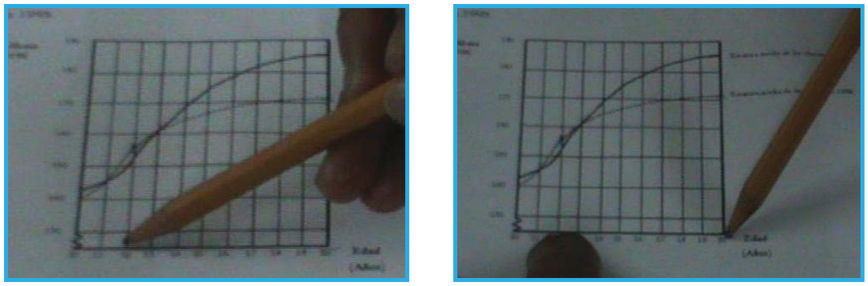


Figura 2. Comparación de las razones de cambio de la altura respecto al tiempo

Su respuesta a la pregunta del inciso c también se sustenta de la interpretación de la gráfica. Al explorar el período en donde las mujeres son más altas que los hombres, reconoce que se da entre los 11 y 13 años. En ese proceso, compara las estaturas a partir de las medidas que infiere de las gráficas (Figura 3); es así que sostiene que los hombres a los 12 años son más bajitos que las mujeres (renglón 138). Ante la pregunta de qué significado le da al punto donde se cortan las gráficas, afirma que es donde las mujeres y los hombres tienen la misma estatura (renglones 138 y 140), incluso, lo señala (Figura 3).

Nadxieli: De acuerdo con la gráfica, en promedio… durante qué período de su vida las mujeres son más altas que los hombres de la misma edad… aquí cuando las mujeres tienen 12 años … yo le puse …156 cm, y los hombres … los hombres … son más bajitos… las mujeres son más altas que los hombres, ¿por qué?… porque la mujeres miden como 156 cm y los hombres están midiendo como 153 cm cuando tienen 12 años… desde los 11, el hombre casi no crece y como nos muestra la gráfica, de los 11 el hombre casi no crece hasta los 13. Y las mujeres de los 11 a los 13 están más altas que los hombres…

Entrevistador: Y ese punto donde se junta, ¿Qué significa?

Nadxieli: Que los hombres con las mujeres son de la misma estatura.

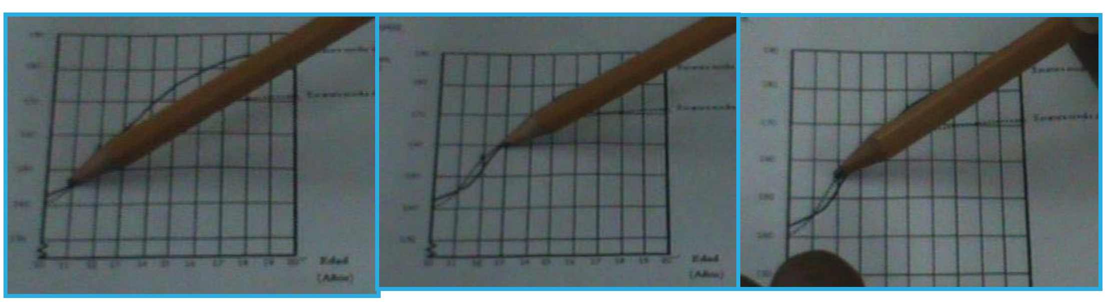


Figura 3. Período donde las mujeres son más altas que los hombres.

b) *¿Cómo controla y valora su proceso de resolución?*

Nadxieli controla la situación en distintos momentos del proceso de solución. Por ejemplo, sabe cuál de las gráficas representa la estatura de los hombres y cuál la de las mujeres. Las acciones que realiza están mediadas por su conocimiento sobre:

- *La lectura e interpretación de datos de gráficas*. Ejemplo de ello, identifica que el punto donde se cortan las gráficas, tanto los hombres como las mujeres tienen la misma estatura.
- *Las operaciones que debe usar en proceso de solución del problema,* por ejemplo, la sabe que tiene que utilizar la resta para determinar la estatura inicial después de haber incrementado cierta cantidad.

c) *Síntesis*

Nadxieli hace una adecuada interpretación del problema y sabe que para resolverlo debe apoyarse de las gráficas. Las acciones que realiza tienen el siguiente orden:

1. Lee e interpreta el enunciado del problema y el cuestionamiento del inciso A.
2. Identifica datos en el enunciado.
3. Elige a la resta como la operación que debe utilizar y la realiza.
4. Lee el cuestionamiento del inciso B.
5. Hace una lectura de los datos en la gráfica, por ejemplo, dice "que cuando tiene 20 años tiene una altura promedio 170.6"
6. Compara varias razones de cambio de la altura respecto del tiempo, porque dice "que crece 16 cm de los 10-12 años y lo mismo crece de los 12 -20, infiriendo que aumente aproximadamente la misma longitud, pero una en 2 años y otro en 8 años.
7. Lee el cuestionamiento del inciso C.
8. Ubica los extremos del intervalo donde las mujeres son más altas que los hombres, dice "que en sus extremos sus alturas son iguales"
9. Compara las alturas de las mujeres y hombres cuando tienen 12 años.

Se observa que las explicaciones de Nadxieli se ubican tanto en el contexto discreto como en el continuo; el discreto, al momento que compara las estaturas, y el continuo, cuando determina el período donde las mujeres son más altas que los hombres. Una estrategia es la que predomina en sus acciones: la comparación de razones de cambio a partir de la lectura de gráficas.

Reflexiones finales

En el proceso de resolución de un problema reconocemos que intervienen aspectos como los siguientes: a) Una comprensión adecuada del problema; b) La cantidad, calidad y diversidad de los conocimientos que posee quien resuelve el problema; c) Cómo aplica sus conocimientos para resolver un problema, y; d) Las estrategias que desarrolla en el proceso de resolución de un problema. El análisis de las estrategias permitió reconocer una variabilidad en el pensamiento de los estudiantes, asimismo da cuenta de que las estrategias dependen de la cantidad, calidad y diversidad de los conocimientos que posee los estudiantes, del tipo de situaciones que se plantean y del contexto.

El análisis evidencia que la comparación es una de las estrategias que prevalece en las acciones de los estudiantes, en este caso de Nadxieli. Y por la forma de proceder, se ubica en el tipo formales, ya que hace uso de la comparación del comportamiento de razones de cambio de la altura (estatura de personas) respecto del tiempo (en años). Esta comparación es resultado de la lectura e interpretación de las gráficas en las que se representan los datos.

Referencias bibliográficas

Campistrous, L. & Rizo, C. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. Cuba. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 2* (3), 31-45.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education 23* (2–33). doi:10.2307/749161.

Díaz-Barriga, A. (2006). El enfoque de competencias en la educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? *Perfiles Educativos 23* (111), 7-36.

Escoriza, J. (2003). *Evaluación del conocimiento de las estrategias de comprensión lectora*. España: Edicions Universitat, Pp. 15-17.

Kospentaris, G., Spyrou, P. & Lappas. P. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics* 77 (1), 105–127.

Mónaco, B. y Aguirre, M. (1996). *Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio básico: Un estudio de casos.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología del Instituto Politécnico Nacional. México.

Pastrana, F. & Cabañas-Sánchez, G. (2012). Estrategias en la resolución de problemas planteados en la prueba PISA. En L. Sosa, E. Aparicio y F. Rodríguez (Eds.) *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp.160-167). México: Red de Centros de investigación en Matemática Educativa, A.C.

Polya, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Editorial Trillas: México.

PENDIENTE DE LA RECTA EN EL PLANO: ANTECEDENTES PARA SU ENSEÑANZA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Rogelio Martínez García, Ignacio Garnica y Dovala
Instituto Politécnico Nacional, DME Cinvestav México
rmartinezga@ipn.mx, igarnica@cinvestav.mx

Resumen. Con el propósito de reconocer los conocimientos adquiridos y requeridos para el curso del álgebra en el 1er semestre del bachillerato tecnológico, de manera conjunta entre dos instituciones se realizaron actividades simultáneas de indagación e investigación en condiciones de tiempo real de enseñanza en el aula, con base en la propuesta institucional de enseñanza del bachillerato. Se eligió el tema de la pendiente de la recta en el plano, se aplicaron tres cuestionarios dos de ellos relacionados con las preguntas de indagación y el tercero con las de investigación. Se instrumentó una estrategia de enseñanza del tema en foco que siguió la propuesta de dos libros de texto (Butts, Phillips y Shaughnessy, 2005;AM-DEMS-SA-IPN, 2004). Al término de la instrumentación de la estrategia y como resultado de los análisis correspondientes se aplicaron tres entrevistas. Se reportan los resultados de los dos procesos.

Palabras clave: funciones y ecuaciones lineales

Abstract. In order to recognize the knowledge acquired and required for the course of algebra in the 1st semester of the technical high school, jointly by two institutions were conducted simultaneous activities of inquiry and research in real-time conditions of classroom teaching, based in the institutional proposal baccalaureate education. The topic was chosen of the slope of the line in the plane. Were applied three questionnaires, two of them related to the questions of inquiry and the third with the research. Was implemented a strategy of teaching for the main topic that followed the proposal of two textbooks (Butts, Phillips y Shaughnessy, 2005;AM-DEMS-SA-IPN, 2004). After the implementation of the strategy and as a result of tests for three interviews were applied. We report the results of the two processes.

Key words: acquired knowledge, functions and linear equations, high school

Introducción

Reformas recientes al nivel medio superior (SEMS-SEP, 2008) plantean la pregunta de si sus estudiantes poseen los conocimientos requeridos para lograr los objetivos propuestos. Por ello, en condiciones reales de aula, se han venido realizando procesos de investigación sobre la comprensión de estudiantes del bachillerato tecnológico de fundamentos para el estudio de temas de matemáticas, a la vez que el docente ha venido indagando acerca del conocimiento de los alumnos requerido para la enseñanza de esos temas. Este informe se refiere al concepto de pendiente en el plano, que se imparte en la unidad de aprendizaje de Álgebra.

Antecedentes

El seminario "Matemática Educativa en el Bachillerato Tecnológico" conjugó la investigación y la indagación de la docencia en matemáticas en esa modalidad educativa; posibilitó el desarrollo de reflexiones y acciones relativas a la enseñanza de las matemáticas en condiciones de tiempo de aula real e institucional. Investigadores y docentes discutieron y acordaron objetivos, métodos e instrumentos aplicados en el aula y en interrogatorios (cámara Gesell); analizaron datos recopilados e identificaron resultados.

Objetivos y preguntas de la indagación

Reconocer conocimientos de matemáticas adquiridos por los estudiantes requeridos para el estudio del tema Funciones y Ecuaciones lineales, contenido del Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: "Álgebra"; identificar el uso de las jerarquías en las operaciones básicas aritméticas y algebraicas y de la noción del porciento; reconocer los procedimientos empleados respecto a la modelación en el proceso de la resolución de problemas algebraicos. ¿Cuáles las condiciones de conocimiento adquirido de los estudiantes que inician actividades de aprendizaje de la UA: "Álgebra"? ¿Cuáles las dificultades que manifiestan para la comprensión de representaciones: tabular; gráfica; algebraica ante la resolución de un problema?

Objetivos y preguntas de la investigación

Reconocer la comprensión de las ideas acerca: del irracional "raíz de dos" y de sus representaciones; del segmento geométrico inconmensurable; de las propiedades de las operaciones aritméticas y algebraicas elementales; reconocer las nociones de racionales e irracionales y de su orden en la recta; ¿Las nociones matemáticas adquiridas por los estudiantes que inician el estudio del Álgebra en el Cecyt No 4 son las requeridas para el logro de los Aprendizajes Propuestos en el Programa? ¿Cuáles son las condiciones de posibilidad de la adquisición de las nociones requeridas, que permitan el diseño de estrategias de enseñanza pertinentes durante el desarrollo de la Unidad de Aprendizaje del Álgebra?

Marco de referencia

Al tema "Funciones y Ecuaciones lineales" [U-III del programa de la UAÁ] le anteceden los tratamientos de "Números reales" sus operaciones y el concepto de "razón"; "Ecuaciones lineales" y "Recta-sistemas lineales" (Butts, Phillips y Shaughnessy, 2005) Los contenidos de la U-III se fundamentan en Actividades que ponen en foco la resolución de problemas "Por problema se entiende una situación matemática o extramatemática que no tiene solución inmediata, … " (AM-DEMS-SA-IPN, 2004), estrategias con el uso de programas de cómputo (Martínez, Sánchez y Moctezuma, 2011). Los fundamentos cognitivos relativos al concepto "pendiente de la recta en el plano": "razón y proporcionalidad" y "números racional e irracional" se les considera bajo el tratamiento de la métrica euclideana al primero y de la noción de inconmensurabilidad al segundo. El Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Álgebra (DEMS-SA-IPN, 2008) señala 72 horas en Aula; 18 horas en otros ambientes de aprendizaje (una hora por semana) que suman un total de 90 horas por semestre. Para esta unidad se seleccionó el tema de funciones y ecuaciones lineales, el cual se ubica en la 3ª unidad, porque se consideró que su tratamiento en la última unidad permitiría el desarrollo de las primeras unidades como antecedente fundamental para el estudio indagatorio que considera arribar al tema de resolución de problemas. El programa de estudio asigna 25 horas (20%) para el estudio del tema de funciones y ecuaciones lineales. Toda la unidad 3 señala como competencia particular a lograr que el estudiante "Emplea las funciones y ecuaciones lineales en la solución de problemas que se presentan en situaciones de su entorno académico, personal, social". La unidad incluye tres Resultados de Aprendizaje Propuestos, a saber: RAP 1: "Identifica elementos de las funciones lineales a partir de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas en su ámbito personal y social". RAP 2: "Elabora modelos que den lugar a ecuaciones y/o sistemas lineales a partir de situaciones de la vida cotidiana y las ciencias". RAP 3: "Utiliza modelos en la solución de problemas que dan lugar a ecuaciones y sistemas lineales en situaciones de la vida cotidiana y las ciencias.

Método

La condición: *indagación-investigación,* planteó la diferencia en diseño de los instrumentos: dos para la idagación (CE; CEv) pero también, en el mismo sentido, el diseño del guión de la entrevista.

A 44 estudiantes de primer semestre de bachillerato tecnológico se les aplicaron dos cuestionarios, uno de investigación (CI) relativo a fundamentos conceptuales, otro de enseñanza (CE), para identificar el conocimiento adquirido de los estudiantes al inicio de la Unidad de Aprendizaje Álgebra. Un tercero se aplicó al término de la unidad 3: Funciones y ecuaciones lineales tema de indagación (CEv). Los tres, impresos en papel para su contestación individual con lápiz o pluma, se aplicaron en el aula a la hora habitual de clase. Por las respuestas obtenidas a los reactivos planteados en cada uno de los cuestionarios y por la disposición mostrada, se entrevistó individualmente en cámara Gesell, a manera de clínica, a tres estudiantes (uno respecto al CI y dos al CE), para profundizar sobre su comprensión de los conceptos en foco. Las entrevistas, de 1 hora, se videograbaron para el análisis de sus contenidos. Para tratar los contenidos en el aula se diseño una estrategia de enseñanza a partir del seguimiento de los RAP de las unidades I y II previas al tema de indagación. Consideró de la propuesta del texto (Butts, Phillips, Shaughnesy. 2005), los modelos: Tabular, gráfico y simbólico para tratar los contenidos: ecuaciones lineales simples; introducción a la proporción y ecuaciones de la forma: $ax + b = cx + d$. Se entregó a cada estudiante un cuadernillo para el control y seguimiento de las tareas en el aula que reproducía el plan del texto. Cada estudiante tendría que realizar en clase las tareas propuestas en el texto (copiar doce ejemplos con el propósito de atender los procesos implícitos) y entregarlas al final de la sesión.

Instrumentos

Los criterios para el análisis de los resultados de respuestas correctas a cada uno de los cuestionarios fueron: a) investigación: interpretación de las representaciones del número irracional "raíz de dos"; interpretación de la medida del segmento diagonal del cuadrado y su relación con las representaciones de "raíz de dos"; identificación de las propiedades de operaciones algebraicas elementales; b) enseñanza: identificación de procedimientos ante la solución de operaciones, aditivas y multiplicativas simples, aritméticas y algebraicas; uso del sistema decimal ante la solución de problemas; c) evaluación del tema en foco: identificación de los procedimientos en la resolución de problemas, ecuaciones lineales, en situación específica.

Cuestionario I

Consistió de diez reactivos distribuidos en cuatro secciones. Los contenidos se centraron en cuatro nociones fundamentales: a) el irracional "raíz de dos" y sus representaciones: clásica; decimal; notación científica; b) la inconmensurabilidad del segmento unitario: diagonal del cuadrado unitario; concatenación; c) las representaciones de racionales e irracionales en la recta numérica y d) nueve propiedades de las operaciones algebraicas básicas. La caracterización de este instrumento se presenta en la Tabla 1.

Reactivos	Objetivo: Reconocer nociones adquiridas:	Contenido
I: R[1-2-3]	Del Irracional "raíz de dos":	(1): representación clásica; (2) expresión "decimal" cuatro cifras significativas; (3): notación científica
II: R[5-8-9]	Del segmento geométrico inconmensurable: Irracional "raíz de dos":	(5) Cuadrado unitario_ triángulo isósceles_ diagonales; (8) Dos triángulos isósceles, concatenación horizontal (rojo) de sus diagonales; (9) Dos triángulos isósceles, catetos unitarios; catetos con valor dos, concatenación horizontal (azul) de sus diagonales
III: R[4-6-7]	De racionales e irracionales: orden en la recta.	(4) racionales; (6) irracionales; (7) Conjunto numérico
IV: R-10	De las propiedades de las operaciones	1) idéntico para la adición; 2) inverso multiplicativo; 3) distributiva; 4) conmutativa para la multiplicación; 5) asociativa para la suma; 6) inverso aditivo; 7) asociativa para la multiplicación; 8) conmutativa para la suma; 9) idéntico para la multiplicación

Tabla 1. Caracterización del cuestionario I

Cuestionario E

Este instrumento se aplicó por norma, contuvo 27 reactivos en tres secciones (véase, caracterización, en la Tabla 2), se le contestó en 1 hora. Su objetivo general fue identificar los conocimientos adquiridos como requisito para cumplir los objetivos que propone la Unidad de Aprendizaje Álgebra.

Sección	Objetivo: Reconocer	Contenido	Reactivos
I Operaciones básicas [aritméticas-algebraicas]	Nociones adquiridas de operaciones aditivas y multiplicativas, simples, aritméticas y algebraicas	(a): Enteros; (b): Fracciones; notación científica (c): Por-ciento; (d): Operación algebraica simple	(a): 1, 2, 3, 4, 5 (b): 6; 8 (c): 7 (d): 9, 10
II Operaciones básicas II [aritméticas-algebraicas]	Nociones adquiridas de números: enteros, racionales (representaciones: decimal-fraccionaria); Simplificación y solución de operaciones algebraicas simples	Operaciones aritméticas simples: (a) adición de fracciones comunes; (b) expresión decimal –fracción; (c) Notación científica; Operaciones algebraicas simples: (d) simplificación de expresiones; (e) evaluación –sustitución de valores; (f) resolución de problemas	(a): 1, 5, 7, 10; (b): 3, (c):2, 9; (d): 8, (e): 4; (f): 6,
III Resolución de problemas simples [aritméticos – algebraicos]	Procedimientos en la resolución de problemas simples [aritméticos y algebraicos]	Problemas aritméticos; Representación gráfica de ecuación algebraica simple	1, 2, 3, 4, 5 y 6; 7.

Tabla 2. Caracterización del Cuestionario E

Cuestionario Ev

Consideró dos secciones: a) dos reactivos relativos a la noción de pendiente; b) tres problemas que implican la noción de pendiente para sus resoluciones. La caracterización de sus contenidos se presenta en la tabla 3.

Sección	Objetivo: Reconocer	Contenido	Reacti-vos
I Resolución de sistemas de ecuaciones lineales a través del método analítico o grafico	El empleo de la fórmula de pendiente para encontrar la ecuación de la recta, algebraica y su representación y gráfica	(a): Encontrar de una ecuación la forma pendiente intercepción (b): Conociendo dos puntos encontrar la pendiente (c): despejar una literal de una formula (d):resolver una ecuación de primer grado con una incógnita	(a): 1 (b):2 (c):3 (d):4

II Resolución de problemas que se presentan en situaciones de su entorno académico, personal, social	La forma de identificación de elementos de funciones lineales a partir de representaciones tabulares, graficas y algebraicas en su ámbito personal y social	Solución de problemas mediante cálculos algebraicos simples: (a): sustitución del valor dado en el enunciado a la formula y despejar la incógnita para la obtención del resultado. (b): traducción del texto al lenguaje algebraico planteando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y su resolución (c) Análisis del problema para representarlo algebraicamente y obtener la solución	(a): 1 (b): 2, (c): 3

Tabla 3. Caracterización del cuestionario Ev

Resultados, análisis y conclusiones

Criterios para el análisis a los resultados: a) de la aplicación del cuestionario I: el recurso a otras nociones matemáticas para argumentar a favor de la respuesta (por ejemplo el recurso al uso del teorema de Pitágoras para argumentar a favor de la respuesta sobre la irracionalidad del número "raíz de dos"); congruencia en la argumentación (al confrontar las respuestas a dos reactivos); la interpretación del segmento diagonal del cuadrado "unidad"; b) del cuestionario E: identificación de nociones de operaciones aritméticas elementales; identificación: de nociones a cerca de números reales; de la simplificación y solución de operaciones algebraicas simples; procedimientos en la resolución de problemas simples [aritméticos y algebraicos]; cuestionario Ev: iidentificación del *uso* de la noción de pendiente para encontrar la ecuación de la recta; procedimientos en la resolución de problemas que implican el uso de representaciones tabulares, graficas y algebraicas. Para el análisis de las entrevistas: la confrontación de respuestas a los cuestionarios y las dadas al guión de la entrevista.

Cuestionario I

Mediante la estrategia del análisis centrado: a) en lo que argumentaron; b) en el recurso a otras nociones matemáticas para argumentar a favor de la respuesta (por ejemplo el recurso al uso del teorema de Pitágoras para argumentar a favor de la respuesta sobre la irracionalidad del número "raíz de dos"); c) contradicciones entre respuestas (por ejemplo: en el reactivo 1, la respuesta correcta ("raíz de dos" ,en su representación clásica y 1.4142: pertenecen a los números irracionales), en un reactivo posterior, la respuesta incorrecta (pertenecen a los racionales). De los resultados, se perfilan cuatro niveles referentes a las nociones adquiridas: a) noción aparentemente firme [15%]; b) noción que evidencia contradicciones [45%]; c) noción en proceso de adquirirse [10%]; d) noción ausente (respuestas sin-sentido) [30%]. Limitación de espacio no permite la inclusión completa de la concentración de los resultados generales en las tablas correspondientes a este apartado.

	Racionales-Irracionales			
Reactivo	1		2	3
Inciso	a) identificación	b) argumento	Representación Decimal	Representación argumento
%	4	-	-	13

Tabla 4.1. Concentración cuantitativa de respuestas correctas a los reactivos 1, 2, 3 [nociones de números racional e irracional]

	Orden en los reales								
Reactivo	4	6			7				
Inciso	Racio nales	R/ I	a) crecient e	b) decrecien te	c) (Pi; "raí z de 3"	Racional es en la recta	a) crecient e	b) decrecien te	c) identificaci ón
%	16	4 0	38	40	43	6	6	9	50

Tabla 4.2. Concentración cuantitativa de respuestas correctas a los reactivos 4, 6, 7 [Representación del orden de los reales en la recta]

	Inconmensurabilidad			Propiedades de las operaciones algebraicas								
Reactivo	5	8	9	10								
Propiedad	-	-	-	Idéntico		Inverso		Asociativa		Conmutativa		Distributiva
%	16	9	9	(+) 34	(x) 31	(+) 34	(x) 29	(+) 16	(x) 27	(+) 38	(x) 38	31

Tabla. 4. 3. Concentración cuantitativa de respuestas correctas a los reactivos: 5, 8, 9 [inconmensurabilidad]; 10 []

Cuestionario E

Se presentan dos ejemplos: la figura E1, evidencia que el uso de la jerarquía de los signos no fue reconocida se manifestó una tendencia a operarlos en el orden de la lectura de izquierda a derecha (confróntese con datos correspondientes en la tabla 4); no distinguieron las características del binomio (véase en la tabla 4 datos correspondientes a los reactivos 9 y 10 y figura. E2). La figura E3, corresponde a las dificultades para calcular el tanto por ciento. En la figura E4, se advierte el desconocimiento del contexto del problema relativo con el tema razones y proporciones estudiado en la unidad I.

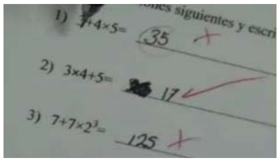
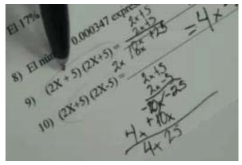
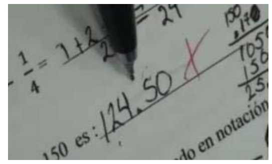
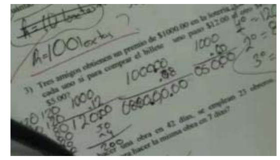
			

Figura. E1	Figura. E2	Figura. E3	Figura. E4

Reactivos	Aditivas y multiplicativas fracciones	Jerarquía	Por ciento	Notación científica	Simplificación, binomios, términos semejantes	%
1, 2, 3						11; 88; 6
6I; II: 1, 4, 7						34; 52; 27; 40
7-I; 5-III						22; 47
8I						52
9-10 I; 4-8 II						15; 15; 50; 50
	Resolución de problemas			Gráfica de ecuación simple		
1, 2, 3, 4, 6						50; 25; 15; 22; 11
7						20

Tabla 5. Concentración cuantitativa de respuestas correctas al Cuestionario E

Cuestionario Ev

El reactivo II-1(seleccionado para guía de entrevista): En una ciudad el costo de la electricidad está expresado por la fórmula: C = 0.07n + 65, …, C es el costo y n la cantidad de kw-hora consumidos. Calcula la cantidad de kw/h que corresponde a costos de $50, $76.50 y $125. Su resolución nos permitió identificar el conflicto que les representó el desconocimiento de los parámetros de la ecuación

	Proceso de soluciones algebraicas para identificar la pendiente		
Reactivos	Reconocer la pendiente en una ecuación lineal	Operaciones algebraicas básicas en la solución de igualdades	%
I: 1, 2			11; 88
I: 3, 4			34; 40
	Identificación de la pendiente mediante el proceso de solución del problema	Planteamiento a partir del enunciado del problema	
II: 1			11
II: 2, 3			20

Tabla 6. Concentración cuantitativa de respuestas correctas al cuestionario Ev

Entrevistas

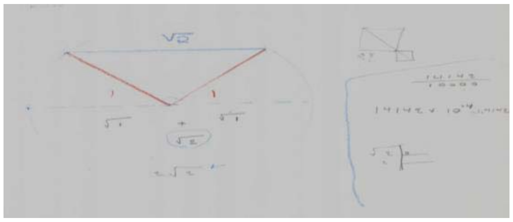


Figura 1

Entrevista I

I: Insistes, convénceme… ¿por qué “raíz de uno” más “raíz de uno” es “raíz de dos”?

E: [procede a realizar la operación correspondiente a encontrar el valor de “raíz de dos”… no lo logra]

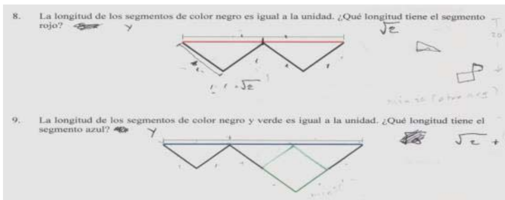


Figura 2

La respuesta a los reactivos 8 y 9 del C-I , evidencian la consistencia de los resultados en la entrevista…

[Confróntese las Figuras 1 y 2]

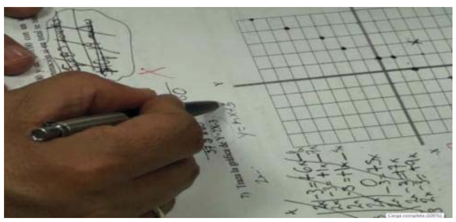


Figura 3

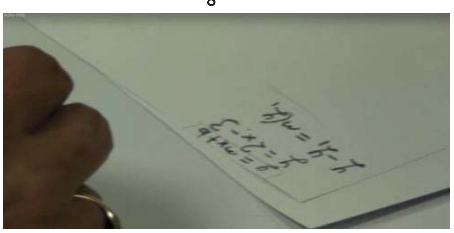


Figura 4

Entrevista -E

Docente : ¿este número como se llama en la ecuación ? Al: …

D: ¿ Recuerdas que era la m en la ecuación?

Al: [responde con dudas e inseguridad y no logra identificar el “2” como valor de la pendiente (m)]

Después de intentos fallidos regresa a las formas de expresión de encontrar la pendiente conociendo dos puntos pero en ningún momento consigue conocer el valor de la pendiente que en este caso es “2”

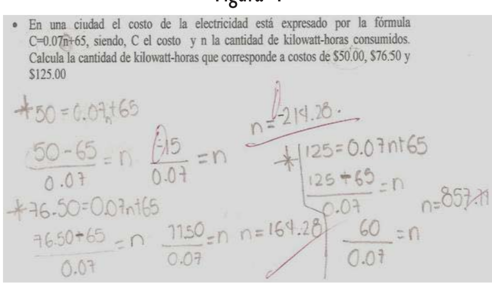


Figura 5

Entrevista -Ev

Docente:¿Cuánto hay que pagar si no hay consumo? Al: nada

D: ¿ Que representa en la ecuación que el consumo sea cero?….

D: A ver, ¿por qué no graficas la expresión?

Al: … [no logra identificar la ordenada al origen]

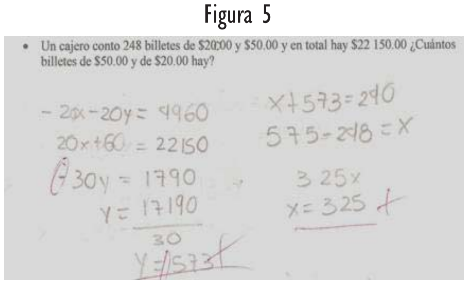


Figura 6

Entrevista –Ev

D: ¿ Cuantas variables tenemos ?

Al: dos

D: ¿ Como representamos los billetes de $50 y de $20 y que condición debe cumplirse?

Al: … [Se le dificulta el planteamiento y cuando lo logra falla en la resolución del sistema 2 x2]

Conclusiones

a) las ideas intuitivas relativas a las nociones básicas de los conceptos de número racional e irracional presentan confusiones importantes;

b) respecto a las representaciones de los números "$\sqrt{2}$; π; e" se manifiesta una ausencia en la comprensión de su origen incluso su utilidad en la solución de problemas;

c) la noción de inconmensurabilidad del segmento diagonal del cuadrado unitario, no se concibe como resultado de la aplicación del teorema de Pitágoras;

d) las propiedades de las operaciones aritméticas y algebraicas se identifican por eliminación.

Los resultados advierten: la presencia de aprendizajes deficientes ante los requerimientos para el logro de los aprendizajes propuestos en el programa de la UAÁ; desconocimiento del sentido de magnitud geométrica, comparación de segmentos y su relación con la definición de número irracional (e; π; $\sqrt{2}$) y sus representaciones. El uso de la calculadora inhibe, tal vez, los procesos cognitivos del estudiante orientados a la comprensión de los conceptos matemáticos en su sentido *formal*. La investigación *en curso* incorpora esta conclusión como su objeto del estudio de *medios de enseñanza* en el aula.

Referencias bibliográficas

Académica de Matemáticas, DEMS. (2004). *Álgebra. Libro para el estudiante.* México: IPN.

Butts, T., Phillips, E. y Shaughnessy, M. (2005). *Álgebra con aplicaciones.* Oxford: University Press.

Martínez, R., Sánchez, G. y Moctezuma, R. (2011). *Polilibro de Álgebra. CECyT No 4* México: IPN. Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Álgebra (DEMS-SA-IPN, 2008)

ZERO NO QUOCIENTE: LEVANTAMENTOS PRELIMINARES NA IDENTIFICAÇÃO DE DIFICULDADES EM ALUNOS DO SEXTO ANO

Bruna Zution Dalle Prane, Hellen Castro Almeida Leite, Jéssica Schultz Küster
Universidade Federal do Espírito Santo Brasil
brunazution@yahoo.com.br, profahellen@yahoo.com.br, jessica.skuster@gmail.com

Resumo. Neste artigo, analisamos e relatamos parcialmente, informações de uma pesquisa exploratória realizada em quatro escolas da região metropolitana de Vitória capital do Espírito Santo, Brasil, sendo duas públicas participantes do PIBID Pedagogia e duas privadas. Foram investigados erros cometidos por 89 educandos do sexto ano em quatro questões envolvendo zero no quociente. Utilizamos a metodologia de análise de erros (Cury, 2007 e Pinto, 2009) e emergiram 12 categorias, sendo a mais frequente a ausência do(s) zero(s) no quociente, ou escrito de forma equivocada. Pretendemos suscitar questões sobre a formação de professores generalistas e especialistas no que concerne a metodologias de ensino de conteúdos comuns aos quintos e sextos anos do ensino fundamental.

Palavras chave: análise de erros, zero no quociente

Abstract. In this study, we partially analyze and report, the results from a research carried out in four schools in Vitória, ES, Brazil, in which two were public and two were private schools. Errors made by 89 sixth grade students in four test questions involving zero in the coefficient have been investigated. The "error analysis methodology" was used and from that twelve categories emerged, the most *frequent* being the absence of zero in the coefficient, or being written by mistake. We intend to probe the training of generalist teachers and specialists regarding the methodologies used to teach fifth and sixth grades basic subjects in the elementary school.

Key words: error analysis, zero coefficient

Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) apresentam como um dos critérios de avaliação de matemática para o segundo ciclo (quarto e quinto anos do Ensino Fundamental):

> Realizar cálculos, mentalmente e por escrito, envolvendo números naturais e racionais e comprovar os resultados, por meio de estratégias de verificação. É importante também avaliar a utilização de estratégias de verificação de resultados, inclusive as que fazem uso de calculadoras (p. 94).

Porém, em nossa prática como professores da educação básica e superior, percebemos que em vários conteúdos onde é necessário o uso do algoritmo da divisão, os estudantes dos diversos níveis de ensino apresentavam dificuldade em operacionalizá-lo ou em explicar para outrem alguns passos do mesmo, ou seja, a fundamentação matemática. Observamos que as dúvidas ficavam mais acentuadas quando havia zero e/ou vírgula no quociente. Diante dessa constatação baseada em nossa prática docente e na troca de experiências, resolvemos investigar as dificuldades relacionadas ao algoritmo da divisão, quando há zero no quociente, trabalhando com a seguinte questão: identificar, analisar e classificar os erros cometidos por estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental em questões de divisão com zero no quociente.

Inicialmente, aplicamos cinco questões para outras turmas para um pré-teste. Finalmente, aplicamos como instrumento para a nossa pesquisa, as quatro questões a seguir para quatro turmas do sexto ano, com seus respectivos objetivos e índice de acertos:

Questão	*Tipo, resolução e índice geral de acertos*	*Objetivo(s)*
1) Joaquim comprou uma televisão de 42 polegadas que custava R$ 3.540,00, parcelados em cinco vezes iguais e sem juros. Qual será o valor de cada prestação que Joaquim deverá pagar? Explicite seus cálculos	Divisão de naturais, quociente inteiro. Resto zero. Um zero no quociente. 3540/5 = 708 *Acertos: 27%*	Perceber se o aluno atenta para o valor numérico enquanto resposta ao problema. Verificar se ele escreve o zero no quociente ou se o omite.
2) Tia Josefina morreu e deixou uma herança no valor de R$ 14.210,00 para os seus sete sobrinhos. Sabendo que cada sobrinho receberá o mesmo valor, quanto cada um ganhará? Explicite seus cálculos.	Divisão de naturais, quociente inteiro. Resto zero. Dois zeros no quociente. 14.210/7= 2030 *Acertos: 17%*	Investigar se o aluno escreve ambos os zeros no quociente. Observar se, e como, o zero do dividendo é "transferido" para o quociente. Verificar se os zeros dos centavos influenciam no cálculo.
3) Seis amigos foram viajar juntos e o valor total de todas as despesas ficou em R$ 654,42. Quanto cada um terá que pagar, sabendo que todos devem contribuir com o mesmo valor? Explicite seus cálculos.	Divisão de um nº decimal por um nº inteiro de um dígito. Quociente do tipo a0c,0d. 654,42 / 6 = 109,07 *Acertos: 28%*	Identificar como os alunos resolvem uma divisão de um nº decimal por um nº inteiro de um dígito, cujo quociente é um número decimal, com zero na ordem das dezenas e outro zero na ordem dos decimais. Observar se o aluno usa a regra "igualar as casas decimais e cortar a vírgula".
4) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explicite seus cálculos.	Divisão de um inteiro por outro inteiro de 3 dígitos, sendo os dois últimos zeros. 18.020/400 = 45,05 *Acertos: 8%*	Observar se o aluno "corta os zeros" antes de efetuar a divisão. Investigar se o aluno 'para' a conta quando encontra o resto 20 e não tem mais algarismos no dividendo para "abaixar". Verificar se os zeros dos centavos influenciam no cálculo.

Quadro 1 – Questões aplicadas para os alunos do sexto ano com seus objetivos (Fonte: as autoras).

Sujeitos da Pesquisa

As escolas Alfa e Beta são particulares e situam-se em dois diferentes municípios da região metropolitana de Vitória, estado do Espírito Santo, Brasil. Gama e Delta são escolas municipais de ensino fundamental (EMEFs) que passaram a ter convênio com o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), do curso de Pedagogia. Todos os nomes são fictícios e serão escritos como sendo do gênero masculino.

A *Escola Alfa* integra uma rede com seis escolas no estado do Espírito Santo. Dos 22 alunos matriculados apenas 18 participaram da pesquisa, com faixa etária de 10 a 13 anos. Na *Escola Beta*, a turma tem 30 alunos, com faixa etária de 10 a 13 anos, sendo que 28 participaram. *Escola Gama*: EMEF, com 25 alunos matriculados oriundos de classes sociais diversificadas e faixa etária entre 10 e 12 anos. Todos os alunos participaram da pesquisa. *Escola Delta:* EMEF com 30 alunos matriculados, 25 alunos frequentando, mas, somente 18 participaram da atividade. A maioria dos alunos são oriundos de classes sociais menos favorecidas e faixa etária de 10 a 15 anos.

Metodologia

A pesquisa consistiu em um estudo do tipo diagnóstico, um levantamento preliminar, visando uma investigação futura com docentes que atuam os 5ºˢ e 6ºˢ anos do ensino fundamental. Para analisar o material coletado, usamos a metodologia de análise de erros que, segundo Cury (2007, p. 63):

> Na analise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou o erro em si – que são pontuados em uma prova de avaliação da aprendizagem -, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emerge na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem.

Assim, utilizamos o material coletado para categorizar os erros dos educandos das quatro turmas avaliadas. Não com o simples objetivo de quantificar o percentual de erros e acertos, mas como uma "oportunidade didática para o professor" no sentido de oferecer "indícios importantes para a identificação dos processos subjacentes construção conceitual" e "novos elementos para o professor refletir sobre a sua prática". (Pinto, 2009, p. 139).

Procuramos analisar os erros com olhar questionador, que, de acordo com Bortoloti, Silva, Nascimento e Oliveira (2007, p. 2) é**:**

a) Dar voz ao que os alunos estão pensando e escrevendo sobre uma determinada situação-problema. Em paralelo e/ou posteriormente procurar;

b) Encontrar o ponto "exato" ou mais próximo em que um conceito ou procedimento foi construído de forma incorreta, apresentando falhas ou;

c) Descobrir que habilidades não foram desenvolvidas para resolver uma situação proposta;

d) Rever e repensar sobre os procedimentos de ensino utilizados para explorar determinado conceito visando com todas estas tentativas formas de planejar ações pedagógicas futuras que desestabilizem os erros cometidos e auxiliem a construção e desenvolvimento de definições, conceitos e procedimentos adequados e com significados.

Neste artigo apresentamos resultados do item (b), pois ao analisar as questões dos alunos queríamos saber o ponto exato onde a maioria dos alunos erra, para depois traçar intervenções que venham a dirimir as suas dúvidas. Já com relação ao item (a) nosso levantamento foi parcial, pois não tivemos a oportunidade de indagar os alunos e saber como pensaram ao resolver a questão.

Análise dos dados

As categorias que emergiram em nossa análise foram as que se seguem:

Ausência de cálculo e resposta (A); Desistência: só arma a conta e nada mais (D1); Desistência: arma a conta, começa a resolução e não termina (D2); Interpretação equivocada do enunciado (I); Resposta equivocada, sem cálculo explicitado (Q); Tabuada: erros relativos à multiplicação que faz parte do algoritmo da divisão (T); Subtração: erros relativos à subtração que faz parte do algoritmo da divisão (S); Zero no quociente: ausência do(s) zero(s), ou escrito de forma equivocada (Z); Estrutura do algoritmo: outros erros decorrentes da estrutura do algoritmo, diferentes dos 3 anteriores (multiplicação, adição e zero no quociente) (E). Somente na questão 4, utilizamos duas subcategorias: quando o aluno cortou um ou dois zeros do 400 (no caso o divisor) e/ou um zero do 18.020 (no caso, o dividendo) (ED00); considerou 20 como resto e não continuou a divisão (R20); outros erros (O), resposta e cálculos corretos (RC), resposta numérica correta com vírgula no lugar errado (RCV) e considerou os centavos como inteiros no dividendo (CD)

A seguir, apresentamos uma análise comparativa das escolas Alfa (α), Beta (β), Gama (γ) e Delta (δ) por questão e pelas categorias de análise (Cat.):

QUESTÃO 1

Cat.	α	β	γ	δ
A	2			
I	10	3	6	10
Q			1	
E	2	2	2	2
T	5	2	1	2
S				
Z		7	7	2
R Ca	1	12	7	4
RCV			1	
CD	1	1	2	

QUESTÃO 2

Cat.	α	β	γ	δ
A		1	4	4
D1				1
D2-		1		1
I	2	1	1	1
E	3	2	4	6
T	6	3	6	3
S	1	1		
Z	12	10	11	3
R				1
O				5
R Ca	3	6	4	2
RCV		2		1
CD	5		7	

QUESTÃO 3

Cat.	α	β	γ	δ
A	1		2	3
D2-		1		1
I	2	1	2	2
Q		1		
E	1		3	6
D00				
T	2		3	9
S		5		
Z	10	12	10	5
R Ca	3	12	8	2
RCV	1		1	
CD	2	1	1	

QUESTÃO 4

Cat.	α	β	γ	δ
A	3	2	10	8
D1	3	5	4	2
D2-	2	1		1
I	5	1	1	2
Q			1	
E	3	2	2	3
D00	1	6	2	2
T	3	3		3
S	1			1
Z	4	10	2	
R Ca		6	1	
R20			2	
RCV		1		
CD	2	2	3	

Tabela 1: Categorização das escolas com relação ao erros dos alunos.

Em todas as questões das quatro escolas, concordamos com Saiz (1996, p. 170), que também pesquisou dificuldades relacionadas à divisão, quando afirma que "as crianças carecem de recursos para reconhecer se sua solução é errada ou não. Na realidade, não chegam a analisar se o número obtido é o resultado do problema."

Em relação ao alto índice de erros na questão quatro, acreditamos, que, por ser uma divisão de dois naturais resultando em um quociente decimal, exige do aluno um conhecimento das propriedades válidas somente para os naturais e das que são válidas para ambos os conjuntos. Sobre a construção do conceito de números racionais e suas dificuldades, Moreira e David (2010, p. 67) afirmam que:

> Os significados das operações com os racionais se constroem a partir da discussão e da análise de uma diversidade de situações concretas nas quais se torna necessário reconhecer, comparar com o caso dos naturais e reestabelecer relações entre os números, abandonar outras, inferindo-se, a partir desse processo, a validade das propriedades.

Neste artigo, concentraremos nossas considerações sobre os erros dos alunos, apenas na questão quatro e o faremos por escola pesquisada.

Escola Alfa: Três alunos não escreveram nada nessa questão. Três armaram a conta, mas não efetuaram e outros dois alunos começaram a fazer, mas desistiram antes de terminar. Dois alunos multiplicaram o valor por 400 ao invés de dividir. Outros dois alunos somaram o valor de 18.020 com 400. Desses alunos mencionados, um escreveu na resposta: cada aluno pagará 181.600. Esse aluno não soube interpretar nenhuma das questões anteriores, e os outros alunos citados também não acertaram as outras questões.

Dos alunos que fizeram a atividade apenas seis dividiram o valor do custo por 400. Um aluno fez a conta como se no quociente estivesse apenas o número 4 e considerou também que 4x4=18, comprometendo assim toda a questão. Um aluno considerou que 4x4=1602 e outros dois alunos consideraram que 2x400=1800 e que 1802-1800 = 0.

Escola Beta: Dos 28 alunos que resolveram a quarta questão, somente um aluno resolveu a questão corretamente. Vale ressaltar dois pontos na resolução do aluno: primeiro que ao final da divisão o mesmo fez a prova real e segundo, que esta foi a única questão que ele fez mais de uma vez a divisão. Dois alunos fizeram a divisão correta, mas não colocaram a vírgula no lugar certo. Isto não aconteceu nas outras questões.

Seis alunos só montaram a conta. Alguns alunos alegaram que não terminaram a questão, pois o tempo para resoluções das foi curto. A situação demonstra que eles não sabiam qual conta deveriam fazer. Cinco alunos deixaram a questão em branco ou riscaram sua resolução para que não considerássemos. Um aluno resolveu a questão por multiplicação, ou seja, interpretou a questão de forma equivocada, fato que também aconteceu na questão um.

Treze alunos fizeram a divisão correta até os 45 inteiros. A partir deste momento há vários erros ou desistência dos alunos. As repostas que surgiram foram: 450, 455, 45, 400. Três respostas aparecem como sendo 45. Dessas, duas pararam quando o resto foi 20 e o outro não deixou resto. Um aluno colocou como resposta 455 e sua divisão não sobrou resto.

Um aluno informou a resposta 400 e não terminou a questão, deixando como resto 2020. Três alunos deram como resposta 450 e todos estes deixaram resto 20. É contraditório ver que esses alunos deixaram esse resto, pois na questão três, onde o cálculo é similar a este, os alunos resolveram corretamente. Neste caso, lembramos que Pinto (2009) relata que é necessário conhecer o que os alunos pensam quando estão realizando a atividade. Além disso ressaltamos a importância do professor incentivar que o aluno explicite verbalmente seu raciocínio.

A resposta de três alunos foi também 450, porém sem nenhum resto. Analisando as questões anteriores desses alunos, temos indícios que certos conceitos relacionados à divisão não estão muito bem sedimentados. Dois alunos erraram a divisão por questões elementares de tabuada de multiplicação e consequentemente o algoritmo também estava errado.

Escola Gama: Apenas um aluno acertou essa questão. Um somou 400 ao 18.020. Dez alunos deixaram a questão em branco. Quatro alunos armaram a divisão e não efetuaram. Seis alunos além de não colocarem o zero no quociente, deixaram o resto 20 na divisão, sendo que na questão três, resolveram a conta até concluí-la encontrando o resto zero.

Escola Delta: Nessa escola, sete alunos deixaram a questão em branco, dois armaram a conta e não calcularam e um aluno começou mas parou a conta pela metade. Um aluno dividiu o valor por 7 e não por 400. Outro aluno acertou as três primeiras questões, mas na questão 4 onde deveria dividir por 400, multiplicou, obtendo como resposta 90.100. Outro aluno também multiplicou por 400 ao invés de dividir. Dois alunos colocaram o 400 no divisor, mas realizaram a conta como se fosse apenas o 4 que estava ali, acreditamos que os alunos cortaram mentalmente os dois zeros do 400.

Uma resolução que nos chamou a atenção foi de um aluno que escreveu apenas o 4 no divisor. Esqueceu-se dos dois zeros? Ou 'cortou' com os zeros dos centavos? Ao efetuar a conta, ele faz as devidas subtrações e quando vê que o 2 não divide por 4, 'coloca o 0 no quociente e desce o zero do dividendo' e assim termina a conta. Um dos seus erros foi de tabuada da multiplicação, pois considerou que 4x4 = 17 e que 2x4=10.

Perspectivas e considerações finais

Estudos diagnósticos como estes, propiciam a identificação de alguns procedimentos que as crianças usam na resolução de problemas de divisão, permitindo ao professor antecipar possíveis respostas equivocadas e propor intervenções diante dessas respostas com contra-argumentos plausíveis para a faixa etária.

Com isso, acreditamos que o problema maior não seja o algoritmo da divisão, mas a não compreensão da função do zero e da vírgula em nosso sistema de numeração. Portanto, sugerimos aos professores dos quintos e sextos anos, que trabalhem com seus alunos as características do nosso sistema de numeração decimal e a função do zero na composição de qualquer número. E também, o papel da vírgula em nosso sistema de numeração, que é a de separar a parte inteira da parte decimal. Como foi mostrado aqui, na questão três proposta para os alunos do sexto ano, muitos consideraram 654,42 = 65.442. Após revisar e sedimentar esses conceitos, sugerimos que o professor faça divisões com material concreto, como por exemplo, o material dourado e notas de dinheiro, valorizando mais o conceito do que o formalismo. A próxima etapa seria fazer simultaneamente a divisão com o material concreto e com o algoritmo.

O levantamento de dificuldades como estas pode ajudar o professor e o licenciando a pensar sobre possíveis dificuldades e entraves cognitivos que seus alunos possuem. Talvez, também motivar discussões curriculares nas licenciaturas de Matemática e Pedagogia. Nas primeiras, para repensarem a estrutura curricular, de modo a levarem em conta a discussão de processos de ensino-aprendizagem de conteúdos aceitos como sendo das séries iniciais, mas que, via de regra, exigirão do futuro professor competência e ferramentas para que possa levar seus alunos a construírem tais conhecimentos. Pode ser uma forma de convencer o licenciando de que, mesmo que ele saiba operar bem com os algoritmos, isso pode não ser suficiente para o trabalho com alunos do 2º e 3º ciclos.

Recomendamos que os licenciandos tenham contato estreito com a análise de erros como metodologia de ensino e pesquisa. Concordamos com Cury (2009, p. 93) ao afirmar:

> As pesquisas sobre erros na aprendizagem de Matemática devem fazer parte do processo de formação dos futuros professores, pois, ao investigar erros, ao observar como os alunos resolvem um determinado problema, ao discutir as soluções com os estudantes, os licenciandos em Matemática estarão refletindo sobre o processo de aprendizagem nessa disciplina e sobre possíveis metodologias de ensino que vão implementar no início de suas práticas.

Consideramos também que a pesquisa, quando realizada por sujeitos atuantes em diferentes níveis de ensino, pode trazer um aprendizado muito rico para todos os envolvidos. De acordo com Fiorentini (2010, p. 53) concebemos nossa pesquisa como cooperativa ou colaborativa, ou seja, uma pesquisa "em que todos cooperam ou colaboram na realização conjunta do processo de investigação que vai desde sua concepção, planejamento e realização até à fase de análise e escrita do relato final". Por isso, sugerimos que os currículos das licenciaturas prevejam condições de espaço-tempo para o estudo e desenvolvimento de trabalhos como este na formação inicial de docentes.

Referências bibliográficas

Brasil. (1998). Ministério da Educação. Secretária de Educação Funadamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental, Matemática, Brasília.

Bortoloti, R.D.M.., Silva, C. V., Nascimento, J. C. e Oliveira, A. P. T. (2007). *Análise dos Erros Cometidos por Discentes de Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas.* Projeto de Pesquisa – Departamento de Química e Exata, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, BA.

Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica.

Fiorentini. D. (2010). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In M. C. Borba e J. L. Araújo (Orgs), *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática* (pp. 49-78) Belo Horizonte: Autêntica.

Moreira, P. C e David, M. M. M. S. **(**2010**).** *A formação matemática do professor:* licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica.

Pinto, N. B.(2009). *O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da matemática elementar.* Campinas, São Paulo: Papirus.

Saiz, I. (1996). Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In C. Parra e I. Saiz (Orgs), *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas* (pp.156-185). Porto Alegre: Arte Médicas.

A CORPORIFICAÇÃO DO CONCEITO DE CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS INFINITAS POR MEIO DE ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

Daila Silva Seabra de Moura Fonseca, Regina Helena de Oliveira Lino Franchi
Universidade Federal de Ouro Preto Brasil
dailasmfonseca@yahoo.com.br, reginafranchi@uol.com.br

Resumo. Este trabalho apresenta uma pesquisa, que usou a metodologia qualitativa e teve por objetivo verificar se atividades desenvolvidas para promover a corporificação dos conceitos, com a utilização do software GeoGebra, favorecem a compreensão do conceito de convergência de sequências e a transição do pensamento matemático elementar para o avançado. Os referenciais teóricos utilizados foram: o *Pensamento Matemático Avançado* e os *Três Mundos da Matemática*. Foram desenvolvidas atividades exploratórias, buscando a corporificação do conceito de convergência pela manipulação de sequências por meio dos recursos gráficos e numéricos do software. A análise dos dados permite concluir que as atividades promoveram a corporificação do conceito de convergência e a formação de uma base para o pensamento matemático avançado.

Palavras chave: três mundos da matemática, corporificação, convergência, sequências infinitas

Abstract. This paper presents research that used qualitative methodology and aimed at verifying if activities developed to promote the embodiment of concepts using the software GeoGebra contribute to the understanding of the concept of convergence of sequences and the transition from elementary to advanced mathematical thinking. The theoretical references used were: *Advanced Mathematical Thinking* and the *Three Worlds of Mathematics*. Exploratory activities were developed seeking the embodiment of the convergence concept by the handling of sequences through the graphic and numerical features of the software. Data analysis shows that the activities promoted the embodiment of the convergence concept and the formation of a basis for advanced mathematical thinking.

Key words: three worlds of mathematics, embodiment, convergence, infinite sequences

Introdução

É possível observar, nas disciplinas iniciais dos cursos superiores, as dificuldades apresentadas pelos alunos para compreensão de conceitos matemáticos. Uma dessas disciplinas iniciais é o Cálculo Diferencial e Integral, que tem índices de reprovação notoriamente altos. Entre os temas abordados no Cálculo estão as sequências e as séries infinitas, cujo tratamento matemático requer um tipo de pensamento mais abstrato, com características diferentes do pensamento matemático elementar, usualmente trabalhado no Ensino Médio.

O contexto descrito acima motivou uma pesquisa de mestrado (realizada pela primeira autora deste artigo e orientada pela segunda autora), com o objetivo de verificar se o desenvolvimento de atividades, buscando a corporificação dos conceitos, com utilização do *software* GeoGebra, contribui para a compreensão da convergência de sequências e séries infinitas, favorecendo a transição do pensamento matemático elementar para o avançado. A corporificação de conceitos é parte de um dos quadros teóricos utilizados como referência nessa pesquisa, denominado *Três Mundos da Matemática.* O outro se denomina *Pensamento Matemático Avançado.* Ambos discutem o ensino e a aprendizagem da matemática superior.

As atividades foram desenvolvidas no segundo semestre de 2011, nas aulas da disciplina Cálculo II, do curso de Engenharia de Produção de uma escola pública profissionalizante, localizada no interior do estado de Minas Gerais, Brasil, em que a primeira autora deste artigo atuava como docente. O desenvolvimento das atividades foi documentado através de gravações de áudio, gravações das telas dos computadores, registros escritos das atividades desenvolvidas e anotações no caderno de campo da professora-pesquisadora a respeito do comportamento dos alunos e do desenvolvimento das aulas. A análise dos dados nos indicou que as atividades promoveram a corporificação do conceito de convergência na maioria dos alunos e também que grande parte dos alunos possui potencial para a transição entre os três mundos da matemática, verificando-se, assim, o processo de passagem do pensamento matemático elementar para o avançado.

Trazemos para este artigo um recorte da pesquisa desenvolvida no mestrado, enfocando, mais especificamente, a corporificação da convergência de sequências. Discussões e resultados sobre a convergência de sequências e séries, nos Três Mundos da Matemática, podem se encontrados em Fonseca (2012).

Sobre os aportes teóricos utilizados

O quadro teórico *Pensamento Matemático Avançado* começou a ser discutido na década de 1970 por um grupo pesquisadores, dentre eles David Orme Tall e Tommy Dreyfus. Nesse quadro, discute-se, entre outras coisas, como se dá e quais são os problemas enfrentados na transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado. Para esta pesquisa, optou-se por trabalhar na linha definida por Dreyfus (1991) que considera o pensamento matemático avançado como um processo, composto por vários outros processos de aprendizagem que interagem entre si. Entre eles, destacam-se os de representar, visualizar, classificar, conjecturar, analisar, sintetizar, generalizar e abstrair. Para o autor, uma característica distintiva entre o pensamento matemático elementar e o avançado está na complexidade do conceito matemático e na forma como ele é tratado. Considera ainda que é possível passar de um para o outro por meio dos processos de representação e abstração, uma vez que, com eles, é possível gerenciar a complexidade da Matemática.

Sobre os *Três Mundos da Matemática*, Tall (2004), ao referir-se aos estudos realizados conjuntamente com Ana Poyter a respeito da conceitualização dos alunos sobre vetores, diz: “percebemos que havia não só três tipos de conceitos matemáticos (geométrico, simbólico e axiomático), havia na verdade três tipos muito diferentes de desenvolvimento cognitivo que habitavam três diferentes mundos da Matemática” (p. 2).

Os *Três Mundos da Matemática* são identificados por Tall como: mundo *conceitual/corporificado*, mundo *proceitual/simbólico* e mundo *formal/axiomático*. O mundo corporificado está na base do pensamento matemático e é fundamentado nas nossas percepções e ações sobre o mundo, ou seja, baseia-se “na percepção e reflexão sobre propriedades de objetos, inicialmente vistos e percebidos no mundo real, mas depois imaginados na mente” (Tall, 2008, p.8). Tall (2008) utiliza o termo *corporificado* para se referir ao pensamento construído, fundamentalmente, a partir de percepções sensoriais, ações e experiências de pensamento, no sentido de “dar um corpo” a uma ideia abstrata. O mundo proceitual é o mundo dos símbolos e processamentos que utilizamos, ao efetuarmos cálculos e manipulações algébricas, aritméticas, entre outros. Inicia-se com *ações* que são encapsuladas em conceitos “usando símbolos que nos permitem alternar facilmente de processos de *fazer* matemática para conceitos de *pensar* sobre” (Tall, 2004, p. 3). Por outro lado, o mundo formal é caracterizado pelo uso de definições formais para os conceitos, a partir das quais deduções são feitas, e pressupõe a construção de um sistema axiomático como, por exemplo, teoria de grupos, análise e topologia (Tall, 2003).

Os três mundos interagem entre si e possuem maneiras diferenciadas de demonstração. Considera-se verdade, no mundo corporificado, aquilo que é visível. A realização de um experimento para verificar se determinado resultado esperado ocorre pode ser um meio de realizar uma prova nesse mundo (Tall, 2004). No mundo proceitual, o cálculo com números, a manipulação de símbolos algébricos e a utilização desses símbolos para generalizar estabelece a verdade (Tall, 2003 e 2004). No mundo formal, a utilização de axiomas e de definições formais possibilita que deduções sejam feitas e assim se fazem as provas.

Tall (2003) aponta vantagens da utilização de *softwares,* nos quais os alunos podem manipular diferentes tipos de gráficos, para criação de abordagens corporificadas no Cálculo, dando fundamento para ideias refinadas da Análise. Além disso, Franchi (2007) argumenta sobre a frequência com que conjecturas aparecem em aulas em ambientes informatizados: a “comparação entre as representações gráficas, algébricas e numéricas, a observação e a reflexão sobre o observado podem levar à elaboração de conjecturas” (p. 184). Considerando dessa forma que os ambientes informatizados podem ser favoráveis à elaboração de conjecturas pelos alunos, Fonseca (2012) identifica esses ambientes como propícios para o desenvolvimento de atividades que visam levar os alunos a transitarem pelos Três Mundos da Matemática. Em Fonseca (2012), escolheu-se o *software* GeoGebra para o desenvolvimento das atividades, principalmente por ser um *software* de matemática dinâmica, gratuito e que possui as representações algébrica, gráfica e numérica interligadas.

Considerações sobre o desenvolvimento das atividades e resultados

As atividades foram elaboradas e aplicadas de forma que os alunos pudessem explorar a convergência de sequências, com vistas à corporificação do conceito, estimulando a formação de conjecturas, visando à passagem para o mundo proceitual e a formulação de uma base para as provas formais. Essas atividades foram aplicadas, em aulas práticas (em um ambiente informatizado utilizando o *software* GeoGebra) e posteriormente discutidas em aulas teóricas, momentos em que os conceitos foram formalizados.

Os recursos do *software* foram usados para abordagem dos conceitos, antes que os mesmos fossem introduzidos de modo teórico. Os termos "*converge*" e "*diverge*" só foram trabalhados com os alunos após a realização de todas as atividades exploratórias sobre sequências e, portanto, não era esperado que os alunos os utilizassem nas atividades iniciais. Foram exploradas diferentes formas de representação, buscando também estabelecer relações entre elas. Foram usados recursos algébricos (para as expressões das sequências), gráficos (para representação da sequência como função de domínio natural e como conjunto de pontos em uma reta) e numéricos (para cálculo dos valores dos termos da sequência e representação em uma planilha). Além das visualizações possíveis através dos gráficos e planilhas, estimularam-se reflexões de cunho teórico, com base na análise das distâncias entre termos consecutivos da sequência e das distâncias entre os termos da sequência e o ponto de aderência para sequências convergentes.

A título de exemplo, trazemos algumas das possibilidades de visualização do comportamento dos termos das sequências exploradas pelos alunos e que, no mundo corporificado, podem ser aceitas como provas da convergência. Para ver o comportamento dos termos da sequência, podemos utilizar dados gráficos ou numéricos. No caso dos gráficos, é possível representar os termos da sequência como pontos em uma reta ou como gráfico de uma função de domínio discreto. A figura 1 exemplifica essas representações para sequência $a_n = \frac{3n-2}{n}$, sendo que os pontos no eixo vertical (*Q*, pontos em uma reta) são as projeções ortogonais dos pontos (*P*) do gráfico da função sobre o referido eixo:

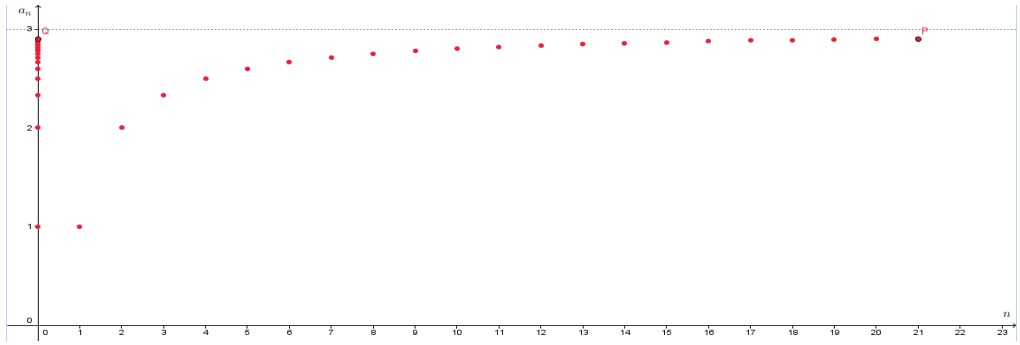
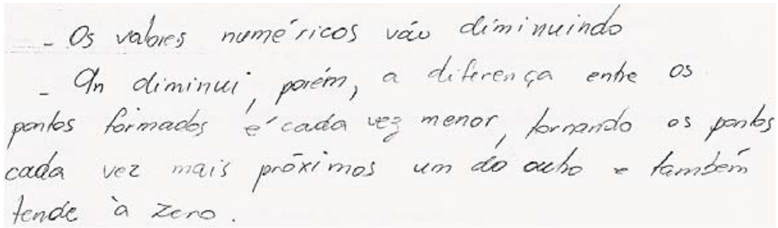


Figura 1: Corporificação da convergência da sequência $a_n = \frac{3n-2}{n}$ (Fonte: Elaborado por las autoras)

A figura anterior pode ser aceita como uma prova corporificada de que a sequência $a_n = \frac{3n-2}{n}$ converge e que o valor de convergência pode ser três, pois é possível visualizar e perceber que, à medida que aumentamos o valor de *n* (com o auxílio de uma ferramenta do GeoGebra chamada *Controle Deslizante*), o valor de a_n também aumenta e se torna cada vez mais próximo de três, já que não há qualquer indício de que irá ultrapassá-lo. Além disso, é possível observar, pela representação sobre uma reta (no eixo *y*), que as distâncias entre os termos consecutivos da sequência estão cada vez menores e/ou que as distâncias entre os termos da sequência e o possível valor de convergência (para sequências convergentes) estão cada vez menores.

Na análise dos dados, foi necessário buscar evidências da corporificação dos conceitos e da passagem do pensamento matemático elementar para o avançado nas palavras e/ou imagens desenvolvidas pelos alunos. Interpretamos que o aluno visualizar o comportamento da sequência com o aumento do número de termos (possível pelos recursos do software) possibilita a corporificação do conceito, pois entendemos que visualizar o comportamento é mais do que enxergar os termos que se apresentam, é realizar experiências de pensamento, tentando interpretar o que se enxerga para além do número finito de termos apresentados.

Uma evidência de corporificação é encontrada na resposta dos alunos em uma das atividades, na qual foi solicitado que analisassem o comportamento da sequência de termo geral $a_n = \frac{5}{n}$. Foram consideradas as representações: gráfica como função com domínio discreto (ponto *P*), gráfica como pontos sobre uma reta (ponto *Q*) e numérica, por meio da representação dos valores numéricos em uma planilha. Na figura 2, a seguir, representa-se a resposta de dois alunos, identificados como A15 e A25, sobre o que acontecerá com a essa sequência quando o valor de *n* tender ao infinito.



- Os valores numéricos vão diminuindo
- a_n diminui, porém, a diferença entre os pontos formados é cada vez menor, formando os pontos cada vez mais próximos um do outro e também tende à zero.

Figura 2: Resposta dos alunos A15 e A25 sobre o comportamento de uma sequência.

Entendemos que a convergência foi percebida pelos alunos, ao observarem que os valores numéricos vão diminuindo, tendendo a zero, e ainda que as diferenças entre os pontos também estão diminuindo. Vale destacar que a diminuição das diferenças, que foi percebida pelos alunos, pode ser o que Tall (2003) chama de raiz cognitiva, na medida em que, sendo significativa para os alunos, contém as sementes da expansão cognitiva para definições formais e posterior desenvolvimento teórico. Vislumbramos o Critério de Cauchy como possível expansão teórica para esse caso.

Em outra atividade desenvolvida posteriormente, em que se discutia a convergência da sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$, tentou-se aproximar do Critério de Cauchy, pedindo aos alunos que observassem o que acontecia com as distâncias entre dois pontos consecutivos da sequência. Nessa atividade, foram usadas duas representações: a dos valores numéricos dos pontos da sequência representados em uma planilha e também a representação como pontos de uma reta (ponto $Q = \left(0, \frac{n}{n+1}\right)$). A título de exemplo, apresentamos a resolução do aluno que denominamos A13. Na tela da figura 3, a coluna B traz os valores numéricos dos termos da sequência e a coluna C, os valores das diferenças. É interessante observar o uso do controle deslizante para aumentar o número de termos da sequência, que neste caso, chegou a 721.

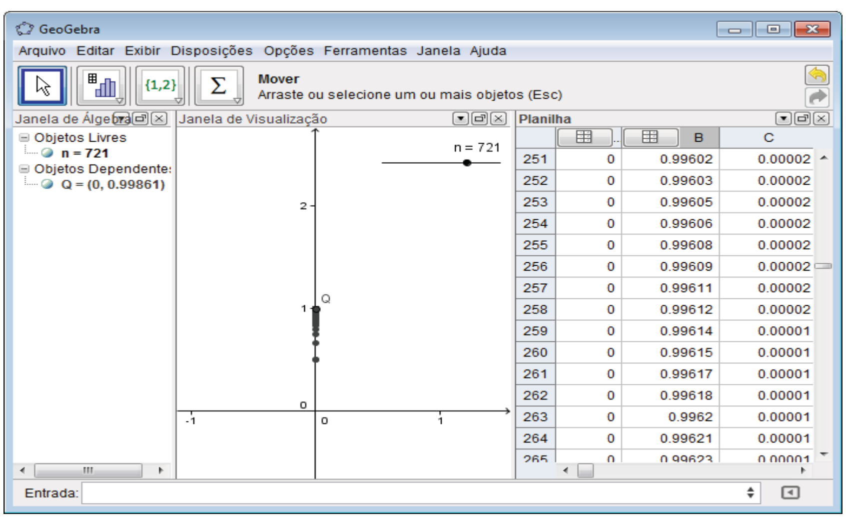
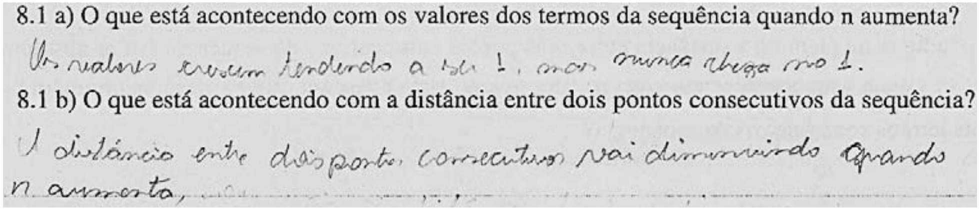


Figura 3: Manipulação do software para verificar o comportamento da sequência.

As respostas do aluno A13 a respeito do comportamento da sequência apresentada, obtidas com base na exploração dos recursos do GeoGebra, são apresentadas na figura 4 a seguir:



8.1 a) O que está acontecendo com os valores dos termos da sequência quando n aumenta?

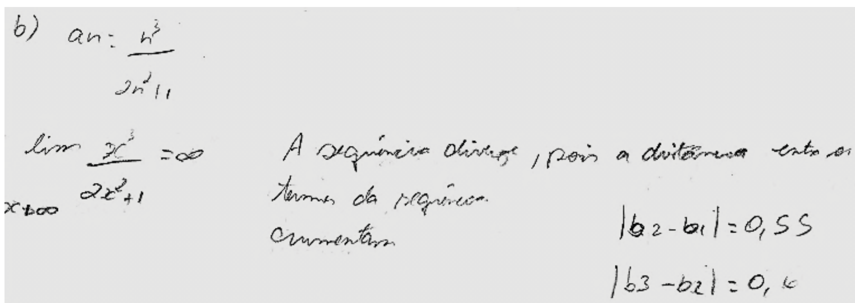
Os valores crescem tendendo a ser 1, mas nunca chega no 1.

8.1 b) O que está acontecendo com a distância entre dois pontos consecutivos da sequência?

A distância entre dois pontos consecutivos vai diminuindo quando n aumenta,

Figura 4: Resposta dada pelo aluno A13 sobre o comportamento da sequência.

Entendemos que a atividade contribuiu para a corporificação do conceito e um indício foi a resposta dada pelo mesmo aluno a respeito da convergência da sequência de termo geral $a_n = \frac{n^3}{2n^2+1}$ em uma atividade posterior de avaliação, como se observa na figura 5.



b) $an: \frac{n^3}{2n^2+1}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{2x^2+1} = \infty$

A sequência diverge, pois a distância entre os termos da sequência aumentam.

$|b_2 - b_1| = 0,55$

$|b_3 - b_2| = 0,6$

Figura 5: Resposta do aluno sobre a convergência da sequência na atividade avaliativa.

Interpretamos que o aluno A13 corporificou o conceito de convergência, na medida em que percebeu que a sequência não era convergente, porque as distâncias entre os termos estavam aumentando. Essas distâncias foram calculadas pelo aluno pelos módulos das diferenças entre os valores numéricos dos termos da sequência, o que nos dá indícios de que o aluno também atingiu o mundo proceitual. Nesse caso, podemos dizer que foi construída uma base a partir da qual o pensamento matemático avançado pode ser atingido.

A análise do conjunto de dados permite concluir que as atividades exploratórias, com uso dos recursos de manipulação e representação do *software,* contribuíram para a corporificação do conceito de convergência de sequências e para a formação de uma base para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos atividades desenvolvidas, buscando a corporificação do conceito de convergência de sequências, com o objetivo de facilitar a compreensão do referido conceito e, ao mesmo tempo, contribuir para a transição entre o pensamento matemático elementar e o avançado.

Pela análise dos dados, concluímos que esses objetivos foram atingidos. Foi possível perceber que os alunos participaram de forma ativa nas atividades, observando e agindo sobre o observado. As atividades possibilitaram diferentes formas de visualização e a construção de imagens mentais dos conceitos, permitindo a formação do conceito de convergência. Para Fonseca (2012), os dados indicam que a maioria dos alunos "com suas experiências de pensamento, formou a imagem mental de que a convergência de uma sequência ocorre quando os termos da sequência se tornam cada vez mais próximos de um valor, tendo assim corporificado o conceito de convergência" (p. 160).

Os dados nos indicam também que vários dos processos de aprendizagem, apontados por Dreyfus (1991), aconteceram na maioria das atividades. Entre eles, tiveram maior destaque os de representar, visualizar e conjecturar. Entendemos que, dessa forma, as atividades contribuíram para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado nos alunos.

É importante destacar a grande contribuição do ambiente informatizado para o desenvolvimento das atividades. Os recursos do *software* GeoGebra, utilizados nas atividades, tiveram influência decisiva no processo de corporificação do conceito de convergência, na medida em que possibilitaram a manipulação para construção das sequências de modo dinâmico, permitindo diferentes formas de representação e visualização. Além disso, a interface possível, entre essas diferentes formas, foi propícia para formulação e verificação de conjecturas.

Esperamos que este texto apresente algumas alternativas para trabalho em sala de aula com os conceitos de convergência de sequências. Estamos convictas de que atividades semelhantes às propostas neste trabalho, embora demandem tempo, trazem grande contribuição para construção de uma base sólida sobre a qual o pensamento formal poderá ser estruturado. Convidamos o leitor a explorar os diferentes recursos do s*oftware* e construir suas próprias atividades.

Referências bibliográficas

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. Tall (Org.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Londres: Kluwer Academic Publishers.

Franchi, R. H. O. L. (2007). Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e Informática como possibilidades para a Educação Matemática. In J. C. A. Barbosa, A. D. Caldeira, & J. L. Araújo, (Ed.), *Modelagem Matemática na educação matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais* (pp. 177-193). Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Fonseca, D. S. S. M. (2012). *Convergência de sequências e séries numéricas no Cálculo:* um trabalho visando a corporificação dos conceitos. Tesis de Maestría no publicada, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

Tall, D. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In L. M. Carvalho, & L. C. Guimarães (Ed.). *História e Tecnologia no Ensino da Matemática* 1, (pp. 1-28). Rio de Janeiro: Brasil.

Tall, D. (2004). *Introducing Three Worlds of Mathematics*. Recuperado el 26 de agosto de 2010 de http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004a-3worlds-flm.pdf

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking Mathematics. *Mathematics Education Research Journal,* 20, 5-24.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Jutta Cornelia Reuwsaat Justo, Kelly da Silva Rebelo, Simone Soares Echeveste
Universidade Luterana do Brasil Brasil
jcrjusto@gmail.com, rebelokelly@gmail.com, simone.eche@yahoo.com.br

Resumo. Neste trabalho, apresentamos os resultados do primeiro ano de uma pesquisa experimental e longitudinal que investiga a resolução de problemas matemáticos por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública no sul do Brasil. O objetivo é buscar o aprimoramento no desempenho dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental em resolução de problemas matemáticos aditivos e multiplicativos, qualificando a prática docente a partir de estratégias de formação continuada de seus professores. A comparação do desempenho dos estudantes no pré-teste e no pós-teste evidenciou avanços significativos em todas as séries, exceto no 6º ano do Ensino Fundamental.

Palavras chave: resolução de problemas, estrutura aditiva, estrutura multiplicativa, anos iniciais

Abstract. This paper presents the results of the first year of a longitudinal and experimental research that investigates the mathematical problem solving in elementary school at a public school in southern Brazil. The goal is to seek improvement in the performance of primary school students in additive and multiplicative problem solving, qualifying teaching practice strategies. A comparison of student performance in the pre-test and post-test showed significant progress in all grades except 6th grade of elementary school.

Key words: problem solving, additive structure, multiplicative structure, primary school

Introdução

A presente pesquisa é parte do projeto aprovado no Edital 2010 do Programa Observatório da Educação (Projeto financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível superior - CAPES e pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP) que se propõe a realizar a formação continuada de professores do Ensino Fundamental. O recorte traz a análise estatística dos resultados de uma pesquisa experimental que investiga a resolução de problemas matemáticos por estudantes de uma escola pública no sul do Brasil. O objetivo é buscar o aprimoramento no desempenho dos alunos do Ensino Fundamental em resolução de problemas matemáticos aditivos e multiplicativos, qualificando a prática docente a partir de estratégias de formação continuada de seus professores no próprio lócus escolar.

Resolução de problemas matemáticos e formação continuada

A resolução de problemas é uma atividade indispensável para construir o sentido dos conhecimentos. Os problemas oferecem a possibilidade de construção de conhecimentos matemáticos e de modelização de situações, o que ajuda a compreender o mundo que nos rodeia (Chamorro, 2003). Resolver um problema matemático exige conhecimentos que vão além de realizar contas adequadamente. Para escolher uma operação adequada que resolve um problema é necessário que se tenha uma rede de conceitos sobre as operações matemáticas, construindo significados ligados a diversas situações a que elas pertencem.

A semântica dos problemas matemáticos verbais influencia a compreensão dos problemas pelas crianças. A compreensão do problema implica em que o resolvedor interprete a situação-problema através da semântica e, a partir dela, estabeleça relações entre os números do problema, para então buscar a operação matemática que o auxiliará a encontrar a solução.

Vinte tipos de problemas aditivos foram classificados em quatro categorias semânticas: transformação, combinação, comparação e igualação (Orrantia, 2006; García, Jiménez e Hess, 2006; Miranda, Acosta, Tárraga, Fernández e Rosel, 2005). Duas dessas categorias referem-se explicitamente a uma ação - transformação e igualação, enquanto as outras duas estabelecem uma relação estática entre as quantidades do problema - combinação e comparação (Orrantia, 2006). Cada categoria semântica pode identificar distintos tipos de problemas dependendo da quantidade desconhecida. Em função da posição da incógnita, ou seja, dependendo de qual valor é desconhecido, os problemas possuem diferentes níveis de dificuldade.

Em relação aos problemas multiplicativos, Nunes e Bryant (1997) afirmam que há níveis diferentes de raciocínio e classificam os seguintes tipos de problemas: Correspondência um a muitos envolvendo os subtipos: multiplicação, problema inverso de multiplicação e produto cartesiano; Relação entre variáveis (covariação); e Distribuição. Os problemas de correspondência um a muitos envolvem a ideia de proporção, trabalhando com a ação de replicar. Dentre os seus subtipos destaca-se, para este trabalho, o de produto cartesiano (exemplo: Rita vai viajar levando 3 saias e 4 blusas. Quantos trajes diferentes ela pode vestir mudando suas saias e blusas?). De modo semelhante, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997) diferenciam quatro grupos de situações envolvendo problemas multiplicativos: Comparativa; Proporcionalidade; Configuração retangular; e Combinatória. Os problemas de combinatória (exemplo: Para a festa de São João da minha rua temos 6 rapazes e 8 moças para dançar a quadrilha. Quantos pares diferentes posso formar se todos os rapazes dançarem com todas as moças?) se assemelham aos de produto cartesiano classificados por Nunes e Bryant (1997).

Smole e Diniz (2001) consideram que o ensino baseado na resolução de problemas precisa compreender a aprendizagem de conceitos, a construção de estratégias e de procedimentos, além de habilidades metacognitivas. A metodologia de resolução de problemas leva em conta as habilidades cognitivas e metacognitivas, correspondentes à leitura do problema, à sua compreensão, à análise da situação, ao planejamento de uma solução, à avaliação de resultados;

e está vinculada a aspectos didático-metodológicos, como a discussão em classe de diferentes procedimentos de solução encontrados pelas crianças, promovendo a ampliação dos conhecimentos, a partir da interação entre os alunos e professor (Justo, 2009; Kilpatrick e Swafford, 2005; Krulik e Reys, 1997; Magina, Campos, Nunes e Gitirana, 2001; Nunes e Bryant, 2009, 1997; Polya, 1986; Vicente, Orrantia e Verschaffel, 2008). Os objetivos atitudinais a serem desenvolvidos para atingir a disposição em aprender são os seguintes: desenvolver confiança e convicção em suas habilidades; estar disposto a correr riscos e perseverar; e gostar de fazer matemática (Van De Walle, 2009).

Com relação ao conhecimento matemático do professor, Marcelo (1993) ressalta que os componentes do conhecimento didático em matemática são quatro: 1) Conhecimento da disciplina: propósitos para ensinar, as ideias mais importantes, conhecimentos prévios a considerar; 2) Conhecimentos sobre os alunos: sobre os seus processos de aprendizagem, o que é mais fácil ou difícil para eles; 3) Meios de ensino: o tratamento que os textos dão ao conteúdo, às atividades e aos problemas; e 4) Processos de ensino: a atenção aos estudantes, atenção à apresentação do conteúdo e atenção aos meios, tanto textos como materiais.

A formação continuada aqui proposta privilegia visões compartilhadas em que a colaboração entre o grupo de professores e seus formadores está em evidência e no qual a própria escola se constitui como lócus de formação (Imbernón, 2009, 2010; Fullan e Hargreaves, 1998; Boavida e Ponte, 2002).

Entendemos que o rendimento escolar do aluno não é consequência direta, ou somente, da prática do professor, pois, se o fosse, não teríamos rendimentos tão diferenciados em uma mesma sala de aula. Sabemos que há outros fatores intervenientes no rendimento escolar. No presente estudo, entretanto, enfatizamos que a prática do professor também é um fator relevante para o rendimento satisfatório ou não do aluno, mesmo que não seja o único.

A Pesquisa

Apresenta-se um estudo experimental que será realizado em quatro anos, por etapas, em uma escola pública de São Leopoldo/RS. A escola possui classes da Educação Infantil ao 6º ano do Ensino Fundamental. Os alunos da Educação Infantil e do 1º ano não fazem parte das investigações. Em 2011, primeiro ano de pesquisa, tivemos 214 alunos e 13 professores participantes. O objetivo geral do estudo é buscar o aprimoramento no desempenho dos alunos do Ensino Fundamental em resolução de problemas matemáticos aditivos e multiplicativos, qualificando a prática docente a partir de estratégias de formação continuada.

Testes sobre a resolução de problemas matemáticos foram necessários para evidenciar a melhora ou não do desempenho dos alunos. Pré e pós-testes foram aplicados no início e final do ano letivo. Os testes propunham a resolução de 15 problemas matemáticos aditivos e multiplicativos para o 2º e 3º anos, e 16 problemas para o 4º, 5º e 6º anos. As crianças receberam os problemas por escrito e puderam resolvê-los da forma que considerassem conveniente (com ou sem material de contagem; desenhos). Uma análise estatística da comparação dos resultados considerou testes paramétricos e não paramétricos, como o *t-student*, o *Wilcoxon* e o *Mann-Whitney*.

A pesquisa contempla encontros para formação de professores em que duas professoras da escola têm o papel de pesquisadoras com a colaboração de auxiliares de pesquisa. Cabe às professoras pesquisadoras organizar e coordenar o processo na Escola através de reuniões de estudos, elaboração de material de apoio, além de uma assessoria permanente ao trabalho do professor na perspectiva de um grupo colaborativo. Estudos sobre o ensino de resolução de problemas e temas que minimizem os obstáculos encontrados nos processos de ensino e de aprendizagem matemática são elencados pelo grupo de professores durante os encontros de formação para serem estudados. Embora seja um projeto da escola, em 2011, a adesão à formação foi voluntária, sendo que 13 de 23 professores participaram dos encontros.

Em 2011, ocorreram cinco encontros de formação, referentes à resolução de problemas de estrutura aditiva e foram iniciados estudos acerca de estrutura multiplicativa, assim como foi estudada a construção do número. Para isso, além de estudos teóricos foram utilizados jogos matemáticos, materiais manipulativos e softwares.

Desempenho em problemas aditivos e multiplicativos

Segue a análise estatística dos resultados, onde comparamos o desempenho dos estudantes nos pré e pós-testes. A comparação torna-se necessária para que possamos verificar se a formação realizada com os professores influenciou na aprendizagem dos estudantes. Esta discussão ocorre sobre a quantidade e tipo de erros cometidos. Os erros considerados na correção dos testes foram de raciocínio, de procedimento de cálculo, de falta de atenção, de erro na resposta escrita e em branco.

Resultados do 2º Ano

Ao compararmos os resultados (Tabela 1), entende-se que houve melhora na aprendizagem, principalmente ao se observar a diminuição de erros de raciocínio e de procedimentos de cálculo.

Tipo de Erro	Pré	Pós
	N	N
Raciocínio	44	20
Procedimento de cálculo	25	13
Em branco	*48*	*45*
Falta de atenção	12	7
Erro na resposta escrita	21	11
Total de erros	*150*	*96*

n= número de erros ocorridos

Tabela 1. Comparação dos Tipos de Erros Pré X Pós (2º ano). (Fonte: A pesquisa).

Apesar dessa evidência, observamos que os estudantes do 2º ano ainda apresentam um número elevado de questões não resolvidas (em branco), o que pode ser considerado como falta de compreensão e aprendizagem dos conceitos envolvidos. Assim como, pode demonstrar a falta de confiança dos alunos em sua capacidade de resolver problemas.

Resultados do 3º Ano

No 3º ano, considera-se a possibilidade de que os alunos tenham recebido auxílio do aplicador (professor) para resolução dos problemas no pós-teste, visto que houve grande diminuição em erros de raciocínio e de questões deixadas em branco.

Tipo de Erro	Pré	Pós
	n	N
Raciocínio	90	31
Procedimento de cálculo	43	17
Em branco	42	7
Falta de atenção	9	8
Erro na resposta escrita	*11*	*41*
Total de erros	195	104

n= número de erros ocorridos

Tabela 2. Comparação dos Tipos de Erros Pré X Pós (3º ano). (Fonte: A pesquisa).

Em contrapartida, observa-se um aumento significativo no número de erros na resposta escrita que não são compatíveis com a diminuição de erros de raciocínio, evidenciando que o estudante, apesar de ter encontrado um cálculo que soluciona o problema, ao respondê-lo, demonstra não ter compreendido a situação-problema.

Resultados do 4º Ano

Apesar da diminuição significativa do número total de erros entre pré e pós-teste, o maior índice de erros ainda apresentados são de raciocínio, pois representam mais de 60% dos erros cometidos.

Tipo de Erro	*Pré*	*Pós*
	n	n
Raciocínio	**217**	**143**
Procedimento de cálculo	42	41
Em branco	51	36
Falta de atenção	11	6
Erro na resposta escrita	19	9
Total de erros	**340**	**235**

n= número de erros ocorridos

Tabela 3. Comparação dos Tipos de Erros Pré X Pós (4º ano). (Fonte: A pesquisa).

Os erros de raciocínio são aqueles em que os alunos não encontram uma solução adequada ao problema, denotando uma falta de compreensão da situação.

Resultados do 5º Ano

Esses estudantes apresentaram uma melhora significativa na resolução dos problemas, percebida principalmente na queda nos erros de raciocínio. No entanto, ainda houve um pequeno aumento nos erros de procedimento de cálculo (erro em alguma etapa do cálculo adequado a solucionar o problema) e de falta de atenção (falha na cópia de números, por exemplo).

Tipo de Erro	*Pré*	*Pós*
	n	N
Raciocínio	132	72
Procedimento de cálculo	24	29
Em branco	23	5
Falta de atenção	3	8
Erro na resposta escrita	15	8
Total de erros	*197*	*122*

n= número de erros ocorridos

Tabela 4. Comparação dos Tipos de Erros Pré X Pós (5ºano). (Fonte: A pesquisa).

Percebe-se que houve uma diminuição significativa no número de questões em branco, o que denota uma maior compreensão e/ou segurança e perseverança dos estudantes em resolver problemas.

Resultados do 6º Ano

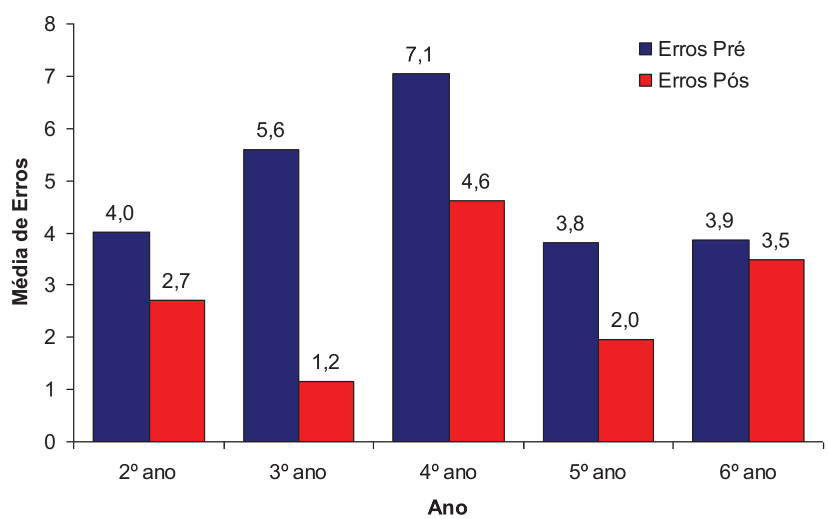
Estas turmas evidenciaram um número elevado de erros em procedimento de cálculo no pré e no pós-teste comparativamente com os outros anos.

Tipo de Erro	*Pré*	*Pós*
	n	N
Raciocínio	146	135
Procedimento de cálculo	*74*	*64*
Em branco	48	34
Falta de atenção	3	1
Erro na resposta escrita	15	6
Total de erros	*286*	*240*

n= número de erros ocorridos

Tabela 5. Comparação dos Tipos de Erros Pré X Pós (6º ano). (Fonte: A pesquisa).

O 6º ano apresentou pouco avanço nos erros de raciocínio. O que justifica a diferença não significativa ao compararmos a quantidade total de erros entre o pré e o pós-teste, diferentemente das outras séries, onde houve redução significativa na quantidade de erros. O gráfico 1 apresenta uma comparação entre o total de erros ocorridos nos pré e pós-testes de cada uma das séries investigadas, demonstrando que apenas no 6º ano não houve redução significativa.



Fonte: A Pesquisa.

Gráfico 1. Comparação da quantidade total de erros

Os resultados encontrados a partir do desempenho dos estudantes corroboram os resultados de outras pesquisas da área da eficácia escolar e o que vários pesquisadores atualmente estão apontando: que o professor tem um efeito maior do que anteriormente se pensava no desempenho do aluno (Brooke e Soares, 2008; Justo, 2009; Marzano, Pickering e Pollock, 2008).

Considerações finais

O primeiro ano de pesquisa nos leva a crer que o conhecimento dos diferentes problemas matemáticos aditivos e multiplicativos e o conhecimento da metodologia de resolução de problemas pelos professores favorecem a aprendizagem dos alunos. Os resultados também apontam para a necessidade de promover atividades em que os estudantes desenvolvam habilidades metacognitivas e cognitivas, para que os auxiliem na precisão de seus cálculos, na interpretação dos problemas e na autorregulação de suas aprendizagens.

Os momentos de formação e os resultados dos testes nos levam a perceber que os professores precisam *aprender a aprender* para *aprender a ensinar*. Para isso, é necessário propor situações de aprendizagem que os desafiem ao seu crescimento profissional.

Referências bibliográficas

Boavida, A M. e Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. En GTI (Ed.). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (p. 43-55), Lisboa: APM.

Brasil. (1997). Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática*. Brasília.

Brooke, N. e Soares, J.F. (Eds) (2008). *Pesquisa em eficácia escolar.* Belo Horizonte: Editora UFMG.

Chamorro, M. C. (Ed.). (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria.* Madrid: Pearson Educación.

Fullan, M. e Hargreaves, A. (1998). *A escola como organização aprendente.* Porto Alegre: Artmed.

García, A. I., Jiménez, J. E. e Hess, S. (2006). Solving Arithmetic Word Problems. *Journal of Learning Disabilities*, *39(3)*, 270-281.

Imbernón, F. (2009). *Formação permanente do professorado.* São Paulo: Cortez.

Imbernón, F. (2010). *Formação continuada de professores.* Porto Alegre: Artmed.

Justo, J. C.R. (2009). *Resolução de problemas matemáticos aditivos: possibilidades da ação docente*. Tese de Doutorado não publicada, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Brasil.

Kilpatrick, J. and Swafford, J. (Eds). (2005). *Helping Children Learn Mathematics.* Washington: National Academy Press.

Krulik, S. e Reys, R.E. (1997). *A resolução de problemas na matemática escolar.* São Paulo: Atual.

Magina, S., Campos, T.M.M., Nunes, T. e Gitirana, V. (2001). *Repensando Adição e Subtração*. São Paulo: PROEM Editora.

Marcelo, C. (1993). *Cómo conocen los profesores la materia que enseñan:* algunas contribuciones de la investigación sobre el conocimiento didáctico del contenido. Acesso em 24 de outubro de 2009 de http://ocw.pucv.cl/cursos-1/epe1137/materiales-de-clases-1/unidad-2/construccion-conocimiento-profesional.

Marzano, R.J., Pickering, D.J. e Pollock, J.E. (2008). *O ensino que funciona.* Porto Alegre: Artmed.

Miranda, A., Acosta, G., Tárraga, R., Fernández, M.I. e Rosel, J. (2005). Nuevas tendencias en la evaluación de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas: el papel de la metacognición. *Revista de Neurologia*, *40(1)*, 97-102.

Nunes, T. e Bryant, P. (2009). *Paper 4:* Understanding relations and their graphical representation. Nuffield Foundation, London. Acesso em 24 de junho de 2010 de www.nuffieldfoundation.org.

Nunes, T. e Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista de Psicopedagogia*, *23(71),* 158-180.

Polya, G. (1986). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciências.

Smole, K.S. e Diniz, M.I. (Eds). (2001). *Ler, escrever e resolver problemas.* Porto Alegre: Artmed.

Van De Walle, J.A. (2009). *Matemática no Ensino Fundamental.* Porto Alegre: Artmed.

Vicente, S., Orrantia, J. e Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales. *Infancia y Aprendizaje*, *31(4),* 463-483.

LUGAR GEOMÉTRICO Y LA RECTA EN EL PLANO: ANTECEDENTES PARA SU ENSEÑANZA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Ana María Ojeda Salazar, Héctor Santiago Chávez Rivera, Fausto Mendoza Díaz
amojeda@cinvestav.mx, hchavez@cinvestav.mx, mendizf@hotmail.com México
DME, Cinvestav; CECyT No 4 "Lázaro Cárdenas", IPN

Resumen. En el marco de un acuerdo interinstitucional, se investiga e indaga acerca de la formación matemática de estudiantes de bachillerato tecnológico. Se aplicaron dos cuestionarios a 39 estudiantes de tercer semestre, uno sobre los fundamentos del tema de lugar geométrico de la recta en el plano y otro sobre los conocimientos requeridos para acceder a su enseñanza. Además, se entrevistó a dos estudiantes individualmente acerca de sus respuestas en el primer cuestionario. Los datos obtenidos revelaron deficiencias en la identificación y cálculo de una pendiente, en la expresión verbal, gráfica o simbólica de lugares geométricos simples, confusión entre segmento de recta y recta, desconocimiento de procedimientos geométricos elementales, de operatividad algebraica y falta de identificación de términos de expresiones simbólicas. La enseñanza de la recta en el curso de Geometría Analítica tuvo que enfrentar estas condiciones desde el principio.

Palabras clave: comprensión, lugar geométrico, recta, bachillerato

Abstract. Under an interinstitutional agreement, a qualitative research and an inquiry were carried out about the mathematical background of technical high school students. Two questionnaires were applied to 39 students at third semester, one focused on the fundamentals of the locus of the straight line in the Cartesian plane, the other dealt with the knowledge the students required to be taught that subject. In addition, two students were individually interviewed about their answers in the first questionnaire. The data obtained revealed students' deficiencies to identify and calculate the slope and to express simple loci, either verbally, graphically or symbolically; they did not discriminate between a straight line segment and a straight line, they lacked of basic geometrical and algebraic procedures, and failed to identify the terms of symbolic expressions. The teaching of the straight line in the Analytic Geometry course had to face these conditions from the outset.

Key words: understanding, locus, straight line, high school

Introducción

De las reformas recientes al nivel medio superior (SEMS-SEP, 2008; www.profordems.cfie.ipn.mx/profordems3ra/modulos/mod1/pdf/modulo1/Sistema_Nacional_Bachillerato.pdf) surge la interrogante de si sus estudiantes poseen los conocimientos requeridos para lograr los objetivos propuestos. Por ello, en condiciones de tiempos reales de aula, se ha venido investigando sobre la comprensión de estudiantes del bachillerato tecnológico de fundamentos para el estudio de temas de matemáticas, al tiempo que el docente ha venido indagando acerca del conocimiento de los alumnos requerido para la enseñanza de esos temas. Estas acciones conjuntas de indagación de la docencia e investigación se realizan bajo un acuerdo interinstitucional. Este informe se refiere al lugar geométrico de la recta en el plano, que se imparte en la unidad de aprendizaje de Geometría Analítica. El tema fue seleccionado por el docente.

Las preguntas de la investigación y de la indagación fueron, respectivamente:

- ¿Qué caracteriza a la comprensión de los estudiantes del bachillerato tecnológico de los fundamentos del lugar geométrico de la recta en el plano cartesiano para acceder al estudio del tema?
- ¿Cuál es el conocimiento efectivo de los alumnos previo a la enseñanza del lugar geométrico de la recta en el plano cartesiano?

Elementos teóricos y antecedentes

El *lugar geométrico* de la recta en el plano es el conjunto de puntos que satisfacen que la pendiente de sus segmentos, determinados por cualquier par de puntos de la recta, es constante. Los teoremas básicos de interés aquí que atañen a la recta implican distancia entre puntos, segmentos de recta definidos por pares de puntos, rectas perpendiculares, paralelas, intersección de rectas, bisección de segmentos y de ángulos. Las cuestiones principales que estudia la Geometría Analítica son: dada una ecuación algebraica, determinar el lugar geométrico correspondiente; dado un lugar geométrico en un sistema de coordenadas, determinar la expresión algebraica respectiva (Leithold, 1982).

Recientemente, Martínez, Mendoza, Chávez, Garnica y Ojeda (2012) han señalado algunas dificultades de estudiantes de bachillerato para reconocer las funciones trigonométricas (en particular la tangente), las medidas de ángulos notables y la ausencia de formación en las construcciones con regla y compás.

En el ámbito de los recursos semióticos, en particular de la gráfica construida en un sistema de dos ejes coordenados perpendiculares, Acuña (2006) ha advertido de la disociación de fondo y figura, ya que los estudiantes conciben una gráfica como dibujo; no se percatan del papel de la escala en los ejes coordenados ni del carácter infinito de la recta. Pomerantz (1985) ha señalado que la organización perceptual al procesar la información se basa en discriminaciones y agrupamientos resultantes de los rasgos del objeto percibido que atraen la atención del individuo, como la configuración, que provoca la percepción de lo global en detrimento de la del detalle.

Método

A 39 estudiantes de tercer semestre de bachillerato tecnológico se les aplicaron dos cuestionarios, que denominamos CI y CE. Para informar de su conocimiento de cinco aspectos de los fundamentos de la recta como lugar geométrico y de su expresión, el cuestionario CI planteó en 10 reactivos preguntas abiertas (véase la Tabla 1). El cuestionario CE se refirió a lo requerido para acceder a la enseñanza del tema: ubicación de puntos en el plano cartesiano, identificación de la expresión algebraica respectiva y de la pendiente (CE; véase la Figura 1).

Aspecto	Objetivo	Contenido
Relaciones Reactivos 1 y 9	Expresar en forma verbal características implícitas de los ángulos formados por dos rectas perpendiculares, justificar el *signo* de la pendiente y graficar los cuatro casos.	Rectas perpendiculares, ángulos rectos y su medida, pendiente positiva, negativa, cero e indefinida, plano cartesiano.
Postulado de la Geometría Plana Reactivos 2 y 3	Expresar en forma verbal y gráfica la unicidad de "*por un punto que no pertenece a una recta se puede trazar una y sólo una recta perpendicular*" y un procedimiento para construir la perpendicular.	*Notación* (para identificar a los objetos geométricos), circunferencia, semejanza o triángulo isósceles, perpendicularidad, distancia. Pertenencia a un objeto.
Distancia Reactivos 4, 5 y 6	Nombrar en forma verbal la "longitud de un segmento" en diferentes situaciones. Usar los reactivos 4 y 5 para expresar en forma verbal o gráfica cómo es la distancia entre dos rectas paralelas y justificar su descripción.	Notación, perpendicularidad, longitud de un segmento, intersección, paralelismo, distancia entre paralelas, distancia de un punto a una línea recta. Pertenencia a un objeto.
Producto cartesiano Reactivos 7 y 8	Expresar en forma gráfica la correspondencia entre los puntos del plano y sus pares ordenados. Expresar en forma simbólica (a) las coordenadas de un punto, (b) de un cociente, de la tangente de un ángulo y concluir que son iguales.	Notación, plano cartesiano, distancia, coordenadas, línea recta en el plano cartesiano, razón, pendiente, función trigonométrica, perpendicularidad.
Expresión gráfica, escrita y simbólica Reactivo 10	Expresar en otras dos formas equivalentes expresiones de forma simbólica, gráfica o verbal.	Conjunto, ordenada y abscisa, distancia, regiones y rectas en el plano cartesiano, desigualdad, notación $P(x, y)$, polígono y vértices.

Tabla 1. Caracterización del cuestionario CI.

Los cuestionarios se presentaron impresos en papel para su contestación individual manuscrita, en a lo más 55 minutos, a la hora de la clase de matemáticas. Por sus respuestas al cuestionario CI y su disposición a participar, se entrevistó a dos estudiantes individualmente, con formato semiestructurado, para profundizar en su comprensión de conceptos del tema de interés. Las entrevistas, videograbadas y transcritas, duraron 1 hora, se realizaron en cámara Gesell y el entrevistado escribió en papel con lápiz lo que requirió para contestar.

Las entrevistas

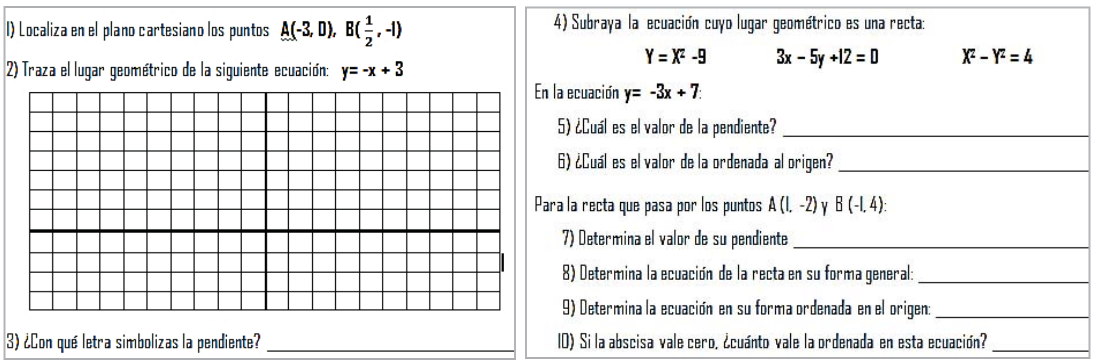
El objetivo de las entrevistas fue informar acerca de contestaciones particulares al cuestionario de dos de los estudiantes. Para la primera entrevista se consideraron los reactivos 2, 3, 8 y 9, y se refirió a establecer la correspondencia entre un punto y sus coordenadas no numéricas (representantes genéricos), diferenciar entre línea recta y segmento, dar cuenta de la inclinación de una línea recta y cuantificar su pendiente. Todo el planteamiento se refirió al plano cartesiano.

Para la segunda entrevista se consideraron los reactivos 3 y 5, y se refirió a precisar, geométricamente, la "distancia entre un punto y una línea recta" (se consideró la distancia entre un punto dado y un punto sobre la línea recta, o sea la distancia entre dos puntos), a dar cuenta de las características del plano cartesiano, a la construcción de la línea recta perpendicular dados un punto y una línea recta que no lo contiene.

El cuestionario CE

Tres aspectos se consideraron en el cuestionario CE para identificar el perfil de los estudiantes previamente a la enseñanza de la recta en el plano cartesiano. Esos aspectos fueron: identificación de la expresión algebraica de la recta y de su pendiente; ubicación de puntos en el plano cartesiano y las expresiones verbal, gráfica y simbólica de la recta.

La Figura 1 presenta los reactivos del cuestionario CE.


1) Localiza en el plano cartesiano los puntos A(-3, 0), B($\frac{1}{2}$, -1)

2) Traza el lugar geométrico de la siguiente ecuación: y= -x + 3

3) ¿Con qué letra simbolizas la pendiente? ______

4) Subraya la ecuación cuyo lugar geométrico es una recta:

$Y = X^2 - 9$ $\quad$ $3x - 5y + 12 = 0$ $\quad$ $X^2 - Y^2 = 4$

En la ecuación y= -3x + 7:

5) ¿Cuál es el valor de la pendiente? ______

6) ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen? ______

Para la recta que pasa por los puntos A (1, -2) y B (-1, 4):

7) Determina el valor de su pendiente ______

8) Determina la ecuación de la recta en su forma general: ______

9) Determina la ecuación en su forma ordenada en el origen: ______

10) Si la abscisa vale cero, ¿cuánto vale la ordenada en esta ecuación? ______

Figura 1. Presentación del cuestionario CE.

Resultados de investigación

Para el análisis de los datos obtenidos con los instrumentos de investigación aplicados se consideraron los procedimientos exhibidos por los estudiantes y sus formas de expresión.

Cuestionario CI

La Tabla 2 resume los datos de contestación correcta a los reactivos del instrumento.

Reactivos	Postulados de Geometría	Producto Cartesiano	Distancia	Relaciones	Expresiones: verbal, gráfica y simbólica	Máximo % de resp. correctas
1						23%
2, 3						2.6%, 0%
4, 5, 6						0%, 0%, 13%
7, 8						21%, 0%
9						5%
10						13%

Tabla 2. Resultados generales de la aplicación del cuestionario CI.

No obstante que la educación secundaria introduce los temas del plano cartesiano, de la recta y de su expresión simbólica, y que esta última vuelve a ser tema de estudio en el primer semestre del bachillerato tecnológico en la unidad de aprendizaje de Álgebra, el desempeño general del grupo de estudiantes fue muy deficiente.

Para cuatro reactivos (3, 4, 5 y 8) no se obtuvo una sola respuesta correcta. Solamente 40% de los estudiantes identificaron las coordenadas de puntos en el plano cartesiano, pero ninguno advirtió en el reactivo 8 una expresión gráfica de la constancia de la razón de cambio en *y* al cambio en *x* como la pendiente de una recta (véase la Figura 2); incluso, no reconocieron la correspondencia entre la gráfica y la expresión verbal, escrita, *cociente del cambio sobre* y *al cambio sobre* x *al desplazarse el punto* P *hacia el punto* Q.

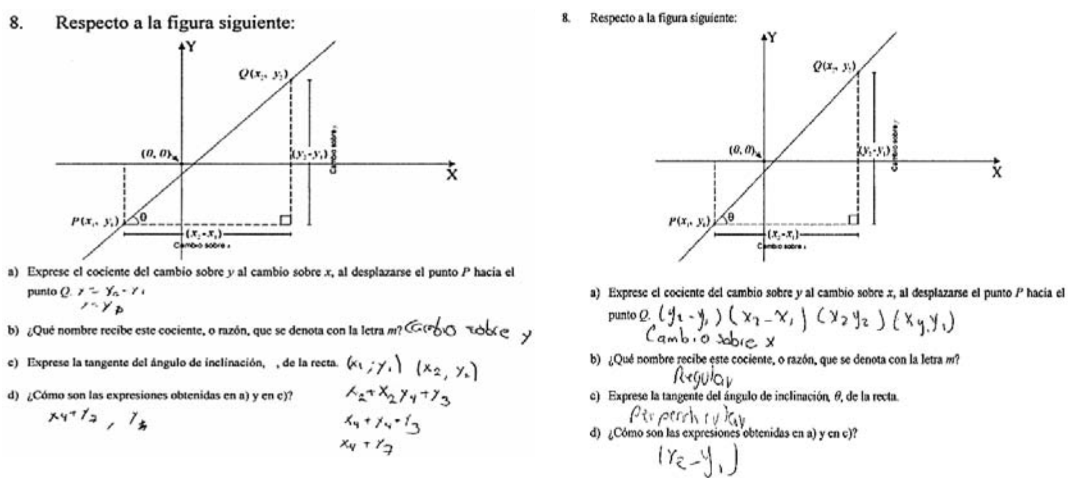


Figura 2. Pendiente en el reactivo 8: dos casos.

Los estudiantes no pudieron referirse a lugares geométricos sencillos en el plano cartesiano de forma verbal, ni gráfica ni simbólica. Ningún estudiante logró describir el procedimiento para trazar una perpendicular a una recta que pase por un punto que no pertenezca a ella.

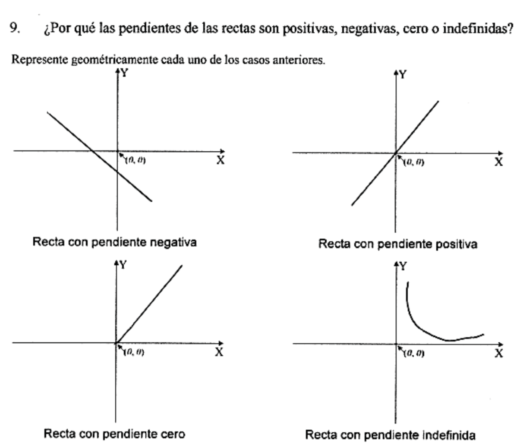


Figura 3. Tipos de pendientes: respuestas de un caso típico del grupo.

Dado un sistema coordenado cartesiano en el reactivo 9, ningún estudiante identificó una pendiente indefinida, sólo 5% a una pendiente 0 y 11% a pendientes distintas de 0 (véase la Figura 3). Los trazos de los estudiantes meramente revelaron la prevalencia del plano cartesiano como fondo, de sus regiones como un todo y del origen, sin dar sentido incluso al tipo de objeto (recta) cuyo trazo se solicitó en cada caso. Esto concuerda con lo indicado por Pomerantz (1985) y coincide con lo señalado por Acuña (2006).

Las entrevistas

Los interrogatorios realizados reafirmaron la necesidad de insistir en el carácter infinito de la recta, de considerar la rotación de los ejes del sistema coordenado de referencia para desactivar el anclaje a la horizontal al considerar rectas en general, de hacer énfasis en la identificación de la pendiente de una recta cualquiera. Más aún, incluso para conceptos que se introdujeron desde la escuela primaria, se requiere promover la expresión oral del estudiante para que los dote de sentido ante una presentación figural o gráfica, o simbólica, y viceversa.

En los pasajes transcritos que citamos, I denota la intervención del investigador y E_I la del estudiante entrevistado. El siguiente se refiere al reactivo 3 para el que no se obtuvo una sola respuesta correcta:

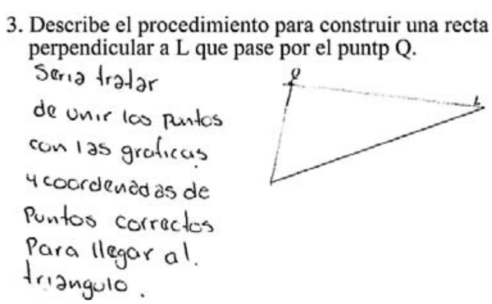


Figura 4. Descripción de la construcción

E_I	Perpendicular es cuando se cruzan dos rectas.
I	Traza dos rectas paralelas.
E_I	¿Paralelas? … Serían [traza dos segmentos de recta paralelos].
I	¿Esas dos líneas qué cumplen?
E_I	Que tienen que estar … este … a la misma distancia.
I	¿Y las perpendiculares qué deben cumplir?
E_I	Que formen ángulos de 90°.

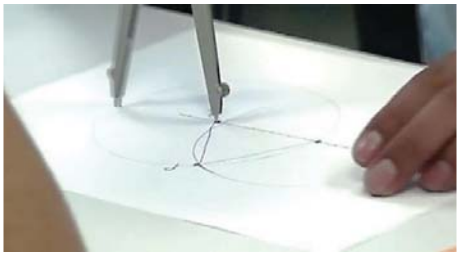
Durante el interrogatorio se revelaron confusiones entre objetos geométricos y las magnitudes numéricas de sus dimensiones:

I	¿Esas dos cosas se llaman… eso último que acabas de trazar se llaman…
E_I	Segmentos.
I	Segmentos. ¿Me puedes decir cómo son sus longitudes?
E_I	O sea …
I	¿Cómo son? ¿Cómo son? ¿Qué es la longitud?
E_I	La longitud es lo que mide...
I	Tú,… así, a simple vista, me puedes decir … este … ¿cómo son?

E_1	Son paralelas, ¿no?. O…
I	¡No!, sus longitudes. … ¿Qué es la longitud?
E_1	Es lo que mide.
I	Lo que mide. ¿Eso puede ser paralelo? O sea, lo que mide ¿puede ser paralelo?
E_1	Pues sí.
I	¿Por qué?
E_1	Porque ………..
I	A ver, dime la medida de uno de ellos.
E_1	Cinco.
	Cinco. Y, ¿de la otra [se refiere a la longitud del otro segmento]?
E_1	Pues, igual, cinco.
I	Bueno, [pero] ¿cómo puedo decir que dos números son paralelos? O ¿por qué? ¿Qué me permite decir eso?
E_1	Porque son iguales, o sea…
I	¡No, son iguales!
E_1	Bueno, la cantidad que es sí, pero…, o sea…
I	¿Qué puedo decir de dos números? Por ejemplo, o sea, más ó menos …. Yo te doy dos números, o pienso dos números y tú me puedes decir “esos números son …” ¿Qué son? ¿Cómo son?
E_1	Son… este…
I	¿Cómo pueden ser esos números? O sea, por ejemplo,… no te fijes en cuáles son los números… el tres y el once, por ejemplo. ¿Cómo [son]?... ¿Qué me puedes decir de ellos?... ¡Pero al compararlos,… no verlos individualmente!
E_1	Que son…
I	¿Son iguales los números?
E_1	No.
I	No, ¿verdad? ¿Cómo me podrías decir que no son iguales?
E_1	Que… son… de diferentes tamaños. Bueno, tienen valor distinto.
…	………………………
I	Y los números, ¿cómo son entre sí?
E_1	Altos y bajos.
I	No se usa[n] esa[s] palabra[s] de “altos” y “bajos”. Sino que… uno es más ¿qué…?
E_1	El otro. Es mayor que él.
I	¡Es mayor que! Entonces, ¿te fijas? Lo que vamos a comparar aquí no son los objetos, van a ser sus longitudes.

La experiencia de la construcción de figuras geométricas con regla y compás se reveló inexistente (véase la Figura 5).

I: ¿Cómo puedes dividir en dos partes iguales un segmento de recta?



I: ¿Pero lo que tú hiciste asegura realmente que esta recta [se refiere al segmento central remarcado en la figura] sea perpendicular a ésta [se refiere a *R*]?

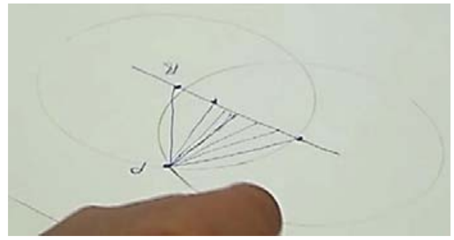


Figura 5. Construcciones propuestas para llegar a la de la perpendicular.

Sin embargo, durante la entrevista se evidenció la bondad de la construcción sólo con regla y compás para favorecer el razonamiento geométrico, mediante la articulación de la descripción de procedimientos para identificar propiedades de lugares geométricos.

I	¿En dónde crees… que deba de colocar… el segmento, o cómo debo trazar el segmento… para que… sea el de menor longitud [se refiere al segmento central remarcado en la figura en comparación con los otros trazados desde el punto *P* hacia la recta *R*]?
E_1	Que sea el de menor …
I	Sí.
E_1	Al centro… o sea…
I	¿Al centro de quién?
E_1	De la recta. Bueno, hay … partir de … sí, hacerlo de forma, en este caso, vertical. A donde…
I	Vertical. ¿Qué significa así, "vertical"?
E_1	Parado, se puede decir. O sea, ¿cómo le digo …? Sí, supongamos, del punto donde es… al… No, pero de esta forma quedaría… Porque si es de otra…
I	Tú dices vertical, ¿pero por qué vertical? O sea… No, no me queda claro, ¿por qué vertical?
E_1	Porque, o sea, entre ……… O sea vertical, porque… es la menor porque… o sea, como no llega al … a la recta, se puede decir… Ya, conforme a eso, ya podría ser… conforme se va abriendo, se puede decir, se van haciendo los segmentos más grandes [señala a los otros segmentos trazados desde el punto *P* hacia la recta *R* a uno y otro lado del central en la figura (véase la Figura 5)].

Finalmente, el estudiante logró realizar y describir el procedimiento para dividir un segmento de recta en dos partes iguales.

Resultados de indagación: Cuestionario CE

La Tabla 3 resume los porcentajes de respuestas correctas al cuestionario CE. Los estudiantes sólo poseían los conocimientos elementales para localizar puntos en el plano cartesiano; 70% no contestó las preguntas relativas a la gráfica para el lugar geométrico. El desconocimiento de las expresiones simbólicas fue casi total, pues un prorrateo entre los tres reactivos más representativos de ese aspecto (3, 5 y 6) indicó sólo 14% de respuestas correctas. Finalmente, la falta de competencias relativas al Álgebra requeridas (reactivos 7, 8 y 9) se manifestó con cero respuestas correctas o con sólo una (reactivo 10).

Reactivos	Lugar geométrico y la recta	Producto Cartesiano	Expresiones:			Máximo % de
			verbal	Gráfica	Simbólica	resp. correctas
1						73%
2						27%
3						11%
4						43%
5, 6						14%, 24%
7						0%
8, 9						0%, 0%
10						3%

Tabla 3. Resultados generales de la aplicación del cuestionario CE.

Por tanto, se concluyó un estado de conocimientos generales del grupo muy deficiente previo a la enseñanza del tema de interés.

Conclusiones

Los resultados de la investigación de la comprensión de los estudiantes de los fundamentos necesarios para acceder al estudio del tema de la recta en el plano cartesiano, coincidentes con los de la indagación que efectuó la docencia acerca de la comprensión de los estudiantes de los requerimientos para someterlos a la enseñanza respectiva, indican condiciones desfavorables no sólo para el logro de los resultados de aprendizaje esperados de la enseñanza de la recta, sino en general de los de la unidad de Geometría Analítica en el bachillerato tecnológico. Las deficiencias provienen no sólo de la educación básica, sino también de las unidades de aprendizaje de Álgebra y de Geometría y Trigonometría de los dos semestres previos al de interés aquí. Estos resultados demandan estrategias de enseñanza informadas puntualmente del estado inicial del conocimiento de los estudiantes, a fin de subsanar las insuficiencias que auguran el fracaso del proceso de la educación matemática. De igual forma, se impone un examen de la articulación con el nivel básico de educación para una formación matemática efectiva, continua e integral.

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2006). Tratamientos como dibujo y como figura de la gráfica en tareas de construcción e interpretación por estudiantes de bachillerato, el caso de los ejes cartesianos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 215-236). México: Santillana-Cinvestav.

Leithold, L. (1982). *El Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

Martínez, R.; Mendoza, F.; Garnica, I.; Chávez, H. y Ojeda, A.M. (2012). Conocimiento adquirido y el círculo trigonométrico: implicaciones para el bachillerato tecnológico. R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 131-140. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa.

Pomerantz, J. R. (1985). Perceptual organization in information processing. In A.M. Aitkenhaid and J.M. Slack (Eds), *Issues in cognitive modeling* (pp. 127-158). New Jersey: Erlbaum Associates.

SEMS-SEP. (2008). *Reforma integral de la Educación Media Superior en México: La Creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*. México: SEP. Recuperado el 28 de noviembre de 2011 de http://www.profordems.cfie.ipn.mx/profordems3ra/modulos/mod1/pdf/modulo1/Sistema_Nacional_Bachillerato.pdf.

UNA DESCOMPOSICIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA: UN MODELO COGNITIVO PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO

Cristóbal Valdivia Sepúlveda, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
cristobal.matematico@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. El propósito del presente reporte es dar a conocer los resultados de la elaboración de una Descomposición Genética, sobre el concepto de la Regla de la Cadena, a partir de la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y la Tríada de Piaget y García (Piaget y García, 1989): Intra, Inter y Trans. La estructura general del estudio está basada en el ciclo de investigación que contiene la teoría: Análisis teórico; Diseño y aplicación de instrumentos; Análisis y verificación de datos. En el segundo de estos componentes se diseñó y aplicó un cuestionario y también una entrevista a once estudiantes de una Universidad chilena. Los resultados obtenidos dan cuenta de los constructos necesarios que un aprendiz muestra en relación al concepto Regla de la Cadena.

Palabras clave: regla de la cadena, teoría apoe, descomposición genética

Abstract. The purpose of this report is to present the results of the development of a genetic decomposition, on the concept of the chain rule, from Theory APOS (Action, Process, Object and Schema) and the triad of Piaget and Garcia (Piaget and Garcia, 1989): Intra, Inter and Trans. The general structure of the study is based on the research cycle that contains the theory: theoretical analysis, design and implementation of tools, Analysis and verification of data. In the second of these components are designed and implemented a questionnaire and an interview with eleven students from a Chilean university. The results obtained show the necessary constructs that an apprentice takes on the concept of the Chain Rule.

Key words: chain rule, theory apos, genetic decomposition

Introducción

Nuestro objeto de estudio se sitúa en el cálculo diferencial que incluye un sin fin de conceptos que se convierten en herramientas –que utilizan los aprendices– para resolver situaciones problema: máximos y mínimos, zonas de crecimiento y decrecimiento de funciones, razón de cambio, entre otras. En todos ellos surge un denominador común para dar respuesta a dichos problemas, el concepto de la Regla de la Cadena, como un constructo necesario y fundamental.

Diversas investigaciones realizadas en torno a la Regla de la Cadena han identificado dificultades en su aprendizaje: respecto de la simbología presente en la definición (Horvath, 2008 y Kabael, 2010); una instrumentalización de esta regla (Jojo, Brijlall & Maharaj, 2010); débil comprensión de la composición de funciones como elemento clave en el aprendizaje de la Regla de la Cadena (Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, DeVries, St. John, Tolias & Vidakovic, 1997 y Cottrill, 1999).

En base a nuestra experiencia como docentes en cursos de cálculo diferencial, en la enseñanza superior, hemos podido apreciar que la Regla de la Cadena es aprendida de manera mecánica, de memoria, es decir, los estudiantes utilizan un algoritmo para poder derivar funciones que correspondan a una composición entre dos o más funciones. Este algoritmo, según las propias palabras de nuestros estudiantes, se aplica "*derivando" desde la función que está más "afuera" y, posteriormente, continúan con aquella que está "dentro" de la función recién derivada*. Veamos un ejemplo.

Consideremos la función $f(x)=(2x^3–4x)^2$, entonces los estudiantes comienzan derivando el exponente 2 que está "afuera" de $2x^3–4x$, obteniendo $2(2x^3 - 4x)$. A esta última expresión multiplican la derivada de lo que está "dentro" de *f*, es decir $6x^2 - 4$, obteniendo –a través del producto de ambas expresiones– finalmente:

$$f'(x) = 2(2x^3 - 4x)(6x^2 - 4)$$

Consideramos que esta manera de mirar la derivada de una función compuesta, le entrega un valor puramente mecánico e instrumental a la Regla de la Cadena. Se pierde, entonces, consciencia de la poderosa herramienta que representa para ser utilizada, por ejemplo, en la resolución de problemas –tal como lo mencionamos anteriormente –. No existe, además, reflexión en la manera en que varios conceptos (composición de funciones, derivadas, funciones) se van integrando en esta regla que permite derivar funciones compuestas.

Cabe destacar que nuestra investigación aún se encuentra en desarrollo, y en este artículo se presentan los resultados que arrojaron los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario. Según este contexto nos hemos planteado dos preguntas que guían nuestra investigación: ¿Cómo abordan los aprendices el concepto de la Regla de la Cadena? y ¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales necesarios para el aprendizaje de ésta?. En la búsqueda de posibles respuestas, nos propusimos dos objetivos generales de investigación: primero indagar en las construcciones mentales que puede utilizar un estudiante como estrategia cognitiva para construir el concepto Regla de la Cadena y, segundo, describir y caracterizar los niveles de comprensión que se pueden tener de ella y el paso de un nivel a otro, mediante los niveles de Esquema Intra, Inter y Trans.

Marco teórico: la teoría APOE

La investigación se realiza bajo el alero de la teoría APOE, como marco teórico y metodológico. Por tanto, el estudio es de corte esencialmente cognitivo. Ella emerge como una herramienta que se acopla a la problemática que hemos identificado, debido a que atiende el cómo se pasa de un estado de conocimiento a otro (ideas obtenidas originalmente de

Piaget), y plantea un modelo que se preocupa de la manera en que se construyen o aprenden los conceptos matemáticos.

En la construcción de conceptos se pueden observar tres construcciones mentales básicas, que no son –necesariamente– secuenciales: Acción, Proceso y Objeto. La primera de ellas corresponde a "una transformación de un objeto que es percibido, por el sujeto, como algo externo" (Trigueros, 2005, p. 8). Las reacciones que tiene el sujeto son consecuencia de estímulos externos que le entregan indicaciones precisas sobre qué debe hacer. Los estímulos pueden ser de tipo físico o mental. La segunda construcción mental *proceso* ocurre cuando las acciones se repiten y el sujeto reflexiona, tomando conciencia de ellas. La tercera construcción mental Objeto ocurre cuando se encapsula un Proceso que corresponde:

> Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces se estará pensando en un proceso como un objeto (Dubinsky, 1996, p. 28)

Es importante mencionar que el modo para pasar de una construcción mental a otra es la *Abstracción Reflexiva*. Esta noción (también recogida de las ideas de Piaget) constituye el mecanismo principal en la construcción del conocimiento matemático y corresponde al proceso mediante el cual un individuo realiza acciones sobre los objetos que son fuente de estudio, y a partir de ello se establecen relaciones o propiedades. El conjunto de acciones a las que nos referimos vienen a constituir los mecanismos mentales: interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación.

En APOE hablamos de la noción de *esquema* que emerge de las ideas piagetianas y corresponde a la "colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática" (Trigueros, 2005, p. 11).

Niveles de esquema

De la noción de Esquema recién entregada se desprende que los esquemas no son estáticos, sino más bien, es una noción que está en constante evolución, dependiendo de las situaciones a las cuales se vea enfrentado un individuo. En la medida que la exigencia conceptual –de un problema– aumente, ocurrirán modificaciones en los esquemas, de modo que permitan dar una respuesta coherente. Por lo tanto, la elaboración de nuestra Descomposición Genética

(DG) que describe en detalle los aspectos constructivos de un fragmento del conocimiento matemático, tendrá incorporada la tríada de Piaget y García (Piaget y García, 1989) que nosotros hemos denominado: Intra-Regla de la cadena, Inter-Regla de la cadena y Trans-Regla de la cadena.

- *Nivel de esquema Intra-Regla de la cadena:* Se entenderá por la construcción de acciones, procesos y objetos de un mismo concepto, pero de manera aislada. Es decir, no existen relaciones –y si existen, son débiles– entre las construcciones mentales en torno al concepto.
- *Nivel de esquema Inter-Regla de la cadena:* Lo entenderemos por la existencia de relaciones entre diferentes conceptos relacionados con una misma área de la matemática.
- *Nivel de esquema Trans-Regla de la cadena:* Se entenderán aquellas relaciones que resultan ser coherentes entre los diferentes conceptos, de manera que puedan ser utilizados para poder resolver alguna situación problema. Lo que caracteriza este tercer nivel de los dos primeros, es la toma de conciencia –que tiene el individuo– para utilizar o no algún esquema.

Ciclo de investigación de APOE

Esta investigación se enmarca en un modelo cognitivo sobre la construcción del concepto Regla de la Cadena, llamada DG (Dubinsky, 1991), que es el resultado de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por dicha teoría (Asiala et al., 1996): análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de datos. Estas tres componentes determinan la estructura general de la investigación.

En el proceso de elaboración de la DG de la Regla de la Cadena describimos y caracterizamos las construcciones mentales que consideramos prerrequisitos, las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación) mentales empleados, que conforman una vía mediante el cual un estudiante puede construir, de manera adecuada, el concepto que estudiamos. Además, los niveles de la tríada de la construcción de un esquema (Intra, Inter y Trans) permitirán dar cuenta del desarrollo del esquema de esta regla, mediante la descripción de características que definen cada nivel.

Descomposición genética hipotética

La DG que hemos construido (Figura 1) recoge elementos de la DG aportada por Clark y su grupo (Clark, et. al., 1997), que posteriormente fue validada por el estudio realizado por Cottrill (1999). Sin embargo, nuestro aporte al estudio de la Regla de la Cadena será una DG con construcciones mentales que describen un modelo a través del cual un aprendiz puede construir el concepto de estudio. Además, la DG está planteada a partir de la propia matemática, explicitando conceptos –mediante símbolos y signos– que están puestos en juego en la construcción de la Regla de la Cadena.

En la DG que proponemos existen tres conceptos matemáticos fundamentales que la sustentan: función, composición de funciones y la diferenciación. Consideramos que el camino viable para construir el concepto Regla de la Cadena considera, por una parte, una construcción mental Objeto *f* que corresponde a la compuesta de dos funciones *g* y *h*. Este constructo mental se *desencapsula* en los procesos que le dan origen: $x \to g(x)$ y $x \to h(x)$. Ellos corresponden a la Descomposición, entendido como el procedimiento *inverso* de componer. Para ello es necesario reconocer que para cualquier elemento del dominio de *f*, se tiene que: $f(x) = g(h(x))$ y en consecuencia $f = g \circ h$, para todo elemento del conjunto A (nótese que, desde el punto de vista matemático, buscamos obtener la Regla de la Cadena "desmenuzando" la composición de funciones. No comenzamos por componer dos funciones, sino mas bien, dado *f,* se deben encontrar dos funciones –*g* y *h*– que compuestas generen *f*)

Por otro lado tenemos –en la DG– funciones diferenciables como una construcción mental Objeto, que se *desencapsula* en el álgebra de derivadas como un *Proceso*. Posteriormente debe ocurrir una *coordinación* (de las funciones *g* y *h*) de los *Procesos* Descomposición y Álgebra de derivadas para obtener un nuevo Proceso, $g'(h(x))$Esto último tiene que ver con evaluar *h(x)* en la derivada de *g*.

La construcción mental *Proceso* $g'(h(x))$ se *encapsula* en el *Objeto* Regla de la Cadena a través del producto, obteniéndose $f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$, para todo elemento del Dominio de *f*.

A partir del Objeto del concepto de la Regla de la Cadena, se describen los tres niveles del desarrollo de un Esquema. A continuación entregaremos características específicas para cada etapa.

Consideraremos que un aprendiz muestra un nivel de Esquema Intra-Regla de la Cadena cuando:

- ❖ Utiliza la Regla de la Cadena como un conjunto de reglas –aisladas– para calcular derivadas de funciones compuestas.
- ❖ Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones compuestas, pero sólo a cierto tipo, sin lograr abarcar la derivada de cualquier función compuesta.

Por otra parte, el nivel de Esquema Inter-Regla de la Cadena está caracterizado por aquellas respuestas y razonamientos que suceden cuando un aprendiz:

- ❖ Utiliza la Regla de la Cadena para derivar cualquier tipo de funciones compuestas.
- ❖ Establece relaciones entre las distintas derivadas de una función compuesta, utilizando cualquiera de las dos notaciones dispuestas para ello (Notación de Leibniz o de composición de funciones).

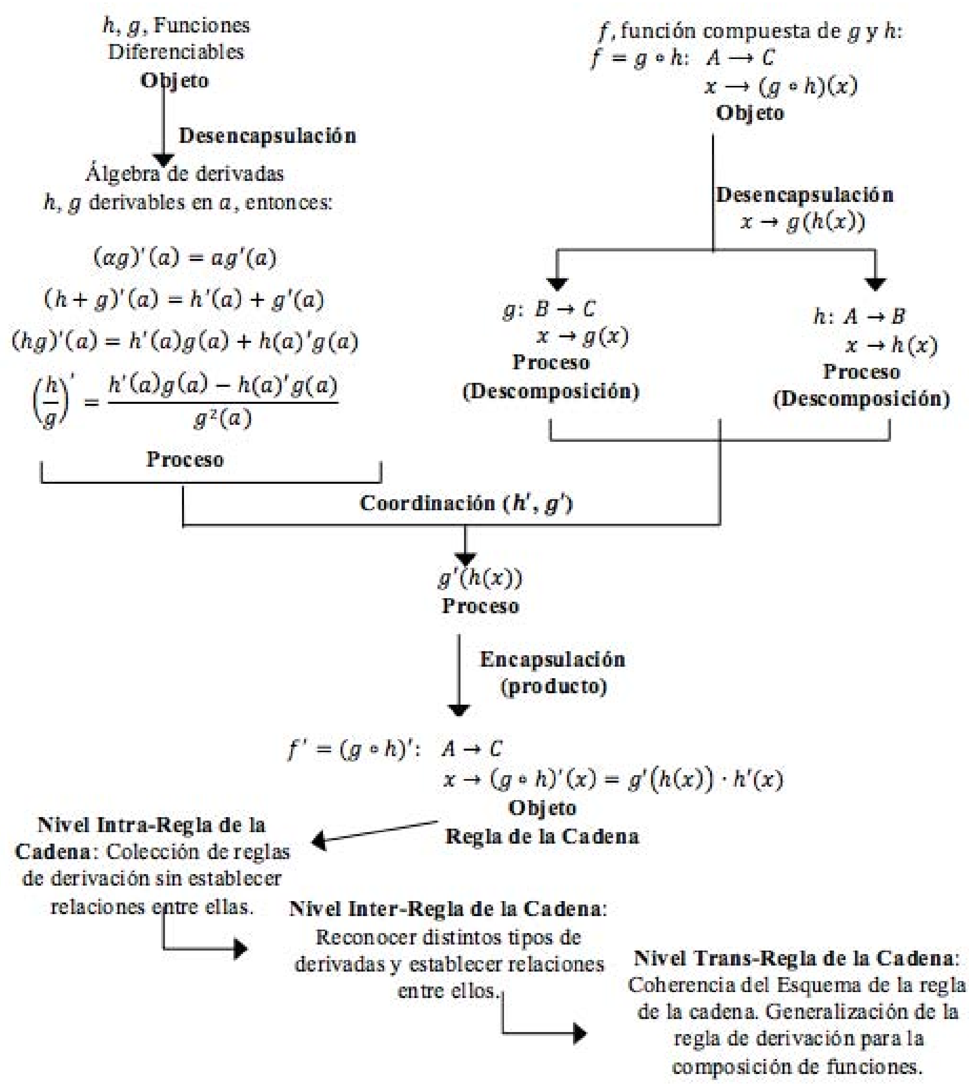


Figura 1: Descomposición Genética Hipotética del concepto Regla de la Cadena

Finalmente, las características que definen el último nivel de Esquema Trans-Regla de la Cadena, están presentes cuando el aprendiz:

- Reconoce la regla de la cadena no como un conjunto de reglas, sino más bien como una única regla que se aplica a la derivada de funciones compuestas.
- Considera a la Regla de la Cadena como un todo integrado, que se puede utilizar a cualquier tipo de funciones compuestas.

Diseño y aplicación de instrumentos

En la segunda componente del Ciclo de investigación se elaboró un cuestionario y una entrevista. En esta oportunidad, sólo damos cuenta del cuestionario que se ha aplicado, debido a que la investigación se encuentra aún en curso.

El objetivo que persigue el cuestionario es indagar en las construcciones y mecanismos mentales –presentes en la DG– que consideramos prerrequisitos para construir el Objeto Regla de la Cadena. La aplicación de este instrumento se realizó a once estudiantes de la carrera Pedagogía en Matemática, de una Universidad de la comuna de Valparaíso, en Chile. La condición para participar voluntariamente del proceso fue haber aprobado algún curso que abordara temas del cálculo infinitesimal, específicamente derivadas.

Algunos resultados

Aún cuando la investigación se encuentra todavía en desarrollo, expondremos, a modo de ejemplo, uno de los resultados que hemos obtenido con la aplicación del cuestionario.

Si ponemos atención a las producciones del estudiante siete (E7) en la pregunta 6 (Figura 2) del cuestionario, podemos apreciar que responde correctamente los cuatro incisos. En el primero de ellos (Figura 3) *desencapsula* la función *f* en dos construcciones mentales *proceso* –funciones *h* y *g*– que al componer generan *f*. A su vez –para el segundo inciso– estos *procesos* son *coordinados* con otro *proceso* de la derivada, a través de los cuales obtiene *h'(x)* =2 y $g'(x) = 3x^2$. La coordinación recién mencionada obtiene un nuevo *proceso* de evaluar $h(x)$ en $g'(x)$. Finalmente E7 *encapsuló* este último *proceso* en el *objeto* Regla de la Cadena, a través del producto entre $g'(h(x))$ y $h'(x)$.

6. Considere la función $f(x) = (2x-3)^3$
   a) Determine $g(x)$ y $h(x)$ de modo que $(g \circ h)(x)$
   b) Deje expresado el producto de $g'(h(x))$ con $h'(x)$
   c) Calcule $f'(x)$
   d) De b) y c) ¿Podría usted conjeturar algo? Justifique su planteamiento.

Figura 2: Pregunta 6 del cuestionario

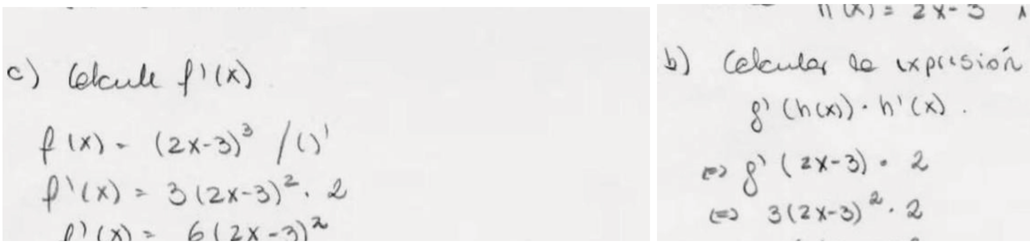


Figura 3: El estudiante siete identifica satisfactoriamente las funciones g y h en el primer inciso (izquierda), y expresa de manera correcta el producto de las derivadas de g(h(x)) con h(x), en el segundo inciso (derecha) de la pregunta seis, del cuestionario.

En el inciso c) de la pregunta seis (Figura 4), el estudiante siete calcula la derivada de la función *f* correctamente para luego, en el inciso siguiente, conjeturar que, para derivar *f*, se debe derivar una composición de funciones, tal como se puede apreciar en la figura 4. Con ello, E7 ha dejado en evidencia que ha construido el concepto Regla de la Cadena a partir de la derivada de una composición de funciones.

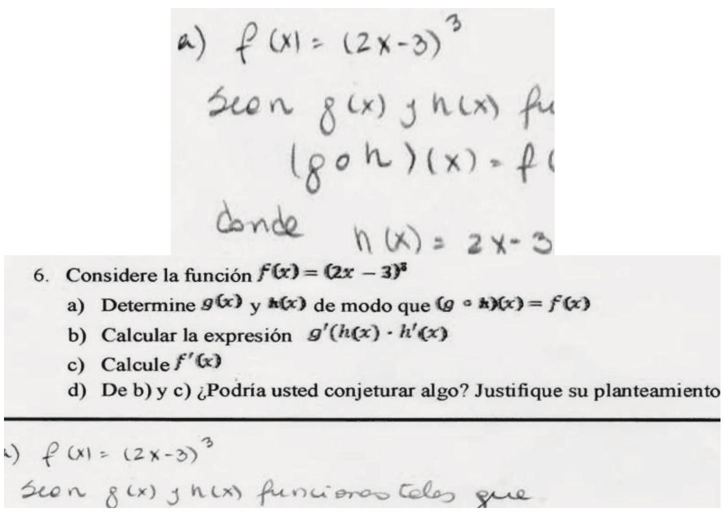


Figura 4: El estudiante siete deriva la función f(x) en el inciso c) (izquierda) y en el inciso d) (derecha) el sujeto concluye la Regla de la Cadena. Pregunta seis, del cuestionario.

A manera de conclusión

En este artículo se propuso una DG del concepto Regla de la Cadena, y las evidencias recogidas hasta ahora muestran que los estudiantes logran construir –por lo menos hasta la construcción mental *objeto*– este concepto a través del modelo que plantea nuestra DG. Logramos observar, además, que algunos estudiantes no tienen una adecuada estructura mental de la composición de funciones. Ello a su vez influye directamente en la dificultad que tuvieron para construir la Regla de la Cadena. Esto implica que la compuesta de funciones y el álgebra de derivadas de funciones corresponden a estructuras mentales prerrequisito.

Resultó que las dificultades de los estudiantes no está en componer dos funciones (digamos *g* y *h*), sino más bien en encontrarlas, de modo que al componer generen una función distinta (*f*, de modo que $f = g \circ h$). Desde esa perspectiva, la DG propuesta –en comparación a la elaborada por Clark y su grupo (Clark, et. al., 1997)– proporciona mayor información de las construcciones mentales que podrían ser fortalecidas en los estudiantes, para facilitar la construcción del concepto Regla de la Cadena.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education 2,* 1-32. Providence, RI: American Mathematical Society.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeCries, D., St. John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The case of the chain rule. En *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 345- 364.

Cottrill, J. (1999). *Students` Understanding of the Concept of Chain Rule in first year Calculus and the Relation to their Understanding of Composition of Functions.* Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, Indiana.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 25-31.

Horvath, A. (2008). Looking at calculus students' understanding from inside-out: The relationship between the chain rule and function composition. *Conference on Research in undergraduate Mathematics Education,* San Diego, CA: SIGMAA on RUME.

Jojo, M., Brijlall, D. & Maharaj, A., (2010). A genetic decomposition of the chain rule: work in progress. *Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education,* (3), 77-82.

Kabael, T. (2010). Cognitive development of applying the chain rule through three worlds of mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal*, *24*(2), 14-28.

Piaget J. & Garcia R. (1989). Psychogenesis and the history of science (H. Feider, Trans.) New York: Columbia University Press. (Original work published 1983).

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en Matemática Educativa a nivel superior. *Educación matemática*, *17*(1), 5-31.

ESTRATÉGIAS DE ATENÇÃO E DE INTERAÇÃO NA AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA DE UNIVERSITÁRIOS DE GUARULHOS: VALIDAÇÃO DE UMA ESCALA

Washington de Mendonça, Maria Helena de Oliveira, Verônica Yumi Kataoka, Felipe Franco Gabriel
Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN Brasil
washington_de@uol.com.br, mhelenapalma@gmail.com, veronicayumi@terra.com.br, felipe.gabriel@gmail.com

Resumo. O estudo buscou evidências de validade de uma escala que avalia o uso intencional de estratégias de atenção e interação na autorregulação da aprendizagem de Estatística em 182 universitários de dois cursos tecnológicos de uma faculdade de Guarulhos: Logística (n = 134) e Gestão Financeira (n = 48), recém-concluintes da disciplina de Estatística que responderam um questionário de perfil, um teste de conhecimento estatístico e uma escala de estratégias de atenção e de interação com 15 afirmativas – 9 questões sobre interação e 6 sobre atenção. A análise fatorial revelou uma estrutura de quatro dimensões correlacionadas entre si, o que indica que existe uma dimensão maior subjacente a todas elas, portanto pode ser assumido que a escala é predominantemente unidimensional resultado esse coerente com a proposta inicial da escala e com os fundamentos teóricos do estudo. As propriedades psicométricas dos itens e do teste indicam evidências de validade da escala.

Palavras chave: autorregulação, estratégias de atenção e de interação

Abstract. The study sought evidence of validity of a scale that evaluates the use of intentional strategies of attention and interaction on self-regulation of learning Statistics in 182 college two technology courses at a college of Guarulhos: Logistics (n = 134) and Financial Management (n = 48), recent graduates of the discipline of Statistics who answered a profile questionnaire, a test of statistical knowledge and a range of strategies for attention and interaction with 15 affirmative - 9 questions about interaction and 6 on attention. Factor analysis revealed a four-dimensional structure of correlated, indicating that there is a greater dimension underlying them all, so it can be assumed that the scale is predominantly one-dimensional result that is consistent with the original proposal of the scale and with the theoretical the study. The psychometric properties of the test items and indicate evidence of validity of the scale.

Key words: self-regulation, strategies of attention and interaction

Introdução

Este trabalho faz parte de uma pesquisa mais ampla que tem como objetivo principal investigar o uso intencional de estratégias de memória, de atenção e de interação nos processos de autorregulação da aprendizagem de Estatística de estudantes de cursos superiores de tecnologia do município de Guarulhos, em São Paulo e sua relação com os níveis de letramento estatístico. As estratégias de aprendizagem resultam da utilização dos processos psicológicos superiores que são aqueles que caracterizam o funcionamento psicológico tipicamente humano: ações conscientemente controladas, atenção voluntária, memorização ativa, pensamento abstrato, comportamento intencional. Para estudar as estratégias vinculadas aos processos de autorregulação da aprendizagem utilizou-se como referencial a teoria sociohistórica de Vigotski (2003, 2010) e para mostrar a importância da aprendizagem estatística utilizou-se Gal (2002).

Segundo Gal (2002), tal aprendizagem é fundamental para o exercício crítico da cidadania, pois permite o entendimento de fenômenos e tendências de relevância social e pessoal, taxas de criminalidade, crescimento populacional, produção industrial, aproveitamento educacional. Destaca-se no contexto deste estudo a sua importância na formação e atuação profissional.

Em 1974, Mahoney e Thoresen descreveram os processos básicos que atuam na autorregulação. Para esses pesquisadores os processos são três: 1) auto-observação e a auto-monitorização: que eram utilizadas para estabelecer as finalidades da ação e avaliar os progressos conseguidos; 2) autorreflexão ou autoavaliação, que comparava os objetivos alcançados aos objetivos perseguidos e estudava os processos utilizados; 3) autorreação e o autorreforço que agiam perante aos resultados alcançados no sucesso ou no insucesso.

Na sociedade do conhecimento, a evolução das tecnologias da informação tem gerado mudanças culturais, profissionais e sociais. A escola em consonância com estas mudanças deve "educar os seus estudantes para que eles saibam de uma forma autônoma, crítica e motivada assumir um papel construtivo nas suas próprias aprendizagens ao longo da vida" (Silva, Duarte, Sá & Simão, 2004, p.12).

Essas mudanças atingem também os professores que, em todos os níveis de ensino, devem estimular o desenvolvimento de competências de autorregulação nos seus alunos e em si mesmos, utilizando-se de todo aparato tecnológico disponível.

Estudos mostram que os estudantes que fazem uso de processos de autorregulação "são mentalmente ativos durante a aprendizagem, exercem um controle sobre os processos cognitivos, metacognitivos e motivacionais (...) e conseguem conferir significado pessoal ao ato de aprender." (Silva *et al*, 2004, p.13).

Os pesquisadores que se dedicam ao estudo da autorregulação da aprendizagem pelo estudante consideram que ela se processa por meio de diferentes fases e utiliza-se de diferentes processos psicológicos. Para Silva (2004) pode-se distinguir três fases: 1ª) a fase de antecipação e preparação; 2ª) a fase da execução e controle; 3ª) a fase da autorreflexão e autorreação. A primeira fase "é influenciada por crenças motivacionais, como as crenças de autoeficácia, as expectativas de resultados e as orientações motivacionais" (p. 20). A segunda fase "os estudantes põem em ação os processos ou estratégias que acompanham a concretização do plano delineado anteriormente e que ajudam a dirigir a ação" (p. 20). Na última fase "distinguem-se os processos de auto-avaliação, influenciados por pensamentos como as atribuições, os padrões auto-impostos e as auto-reações positivas ou negativas que vão influenciar os processos de adaptação" (p. 22).

Segundo Zimmerman (1986, apud Silva *et al*, 2004), em uma abordagem sociocognitiva, "a autorregulação na aprendizagem refere-se ao grau em que os indivíduos atuam no nível metacognitivo, motivacional e comportamental, sobre os seus próprios processos e produtos de aprendizagem, na realização das tarefas escolares" (Zimmerman, 1986, apud Silva *et al*, 2004, p. 23). Para Silva (2004), em qualquer que seja a atividade, a autorregulação implica esses componentes, na medida em que toda ação para ser regulada pelo indivíduo exige que: 1) tenha consciência dos objetivos a atingir; 2) conheça as exigências da ação que quer realizar; 3) discrimine e organize os seus recursos internos e externos para concretização da ação; 4) avalie o nível de realização atingido; 5) altere os procedimentos utilizados se o resultado que chegou não o satisfaça. Para que estudantes e professores desenvolvam a autorregulação devem ser elaborados programas de intervenção que considerem esses níveis apontados por Zimmerman.

Para Vygotsky (2003, p.38), a linguagem permite o controle do comportamento e a planificação de ações, portanto desempenha importante função reguladora. É a capacidade de simbolização propiciada pela internalização da linguagem que torna possível elaborar mentalmente a ação e agir sobre as diferentes partes que a compõe. Ao longo do desenvolvimento da criança, a linguagem vai exercendo uma função de regulação da ação. Num primeiro momento a linguagem dos adultos exerce uma função incentivadora e depois, uma função inibidora. Com a apropriação da linguagem, a criança passa a exercer por si só essas funções por meio da emissão de verbalizações dirigidas a si mesma. (Lopes da Silva, 1986 *apud* Silva *et al,* 2004).

Veer e Valsiner (2009) destacam que até a idade adulta as pessoas aprendem a fazer uso de meios externos para direcionar a ação, finalmente esses instrumentos culturais se internalizam.

Na busca das relações reais entre o processo de desenvolvimento e a capacidade de aprendizado, Vigotski (2003) apontou a existência de dois níveis de desenvolvimento: o nível de desenvolvimento real, que é "o nível de desenvolvimento das funções mentais da criança que se estabelecem como resultado de certos ciclos de desenvolvimento completados" (p.111) e o nível de desenvolvimento potencial "determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes" (p.112). O primeiro nível caracteriza-se pelos produtos finais do desenvolvimento, pelas funções que já amadureceram, enquanto que segundo se caracteriza aquelas funções que ainda não amadureceram, aquelas que pela interferência de outras pessoas afetam significativamente o resultado da ação individual. A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) é a distância entre estes dois níveis, é um espaço de mediação social onde é possível avançar para níveis de desenvolvimento cognitivo mais complexo.

O conceito da ZDP delimita a importância dos processos interacionais na aprendizagem ao demonstrar como um processo de origem social (interpessoal) – aprender por meio da mediação com aquele que é mais experiente na tarefa – transforma-se em um processo psíquico (intrapessoal) por meio da internalização que é o mecanismo responsável por essa transição, ou seja, é um processo de reconstrução interna de uma atividade externa (Salvador, 1999). O que caracteriza esse processo de desenvolvimento como essencialmente social, que permite a passagem de um plano social para um plano individual, são as trocas, as experiências partilhadas, os diálogos e as colaborações entre os envolvidos (Palangana, 2001).

A escola é o lugar onde o aluno tem a possibilidade de apropriar-se do conhecimento hierarquicamente sistematizado. O professor, entendido como mediador entre o aluno e o objeto do conhecimento, atua no sentido de reconstruir o saber por meio de estratégias intencionalmente planejadas. Durante as aulas, o professor interage com o aluno e vice-versa. Em suas exposições, ele passa as informações de forma que o aluno possa entender, ou seja, o professor atua para criar intencionalmente uma ZDP para que o aprendizado aconteça. Para saber se o aluno está entendendo, ele o questiona e assim pode detectar se está havendo, no plano intrapsicológico, uma reestruturação das relações que ocorreram no âmbito interpsicológico. Quando o aluno expõe o que entendeu, o professor cria a oportunidade do aluno reorganizar e aumentar o grau de articulação e de verbalização do próprio pensamento. Caso haja algum erro, após a exposição, o professor poderá fazer a devida correção.

A criação de ZDP pelo professor objetiva incrementar a capacidade de compreensão e atuação autônoma do aluno, ou seja, que aquilo que ele realiza hoje com a ajuda do professor possa realizar de maneira independente outro dia. É importante salientar que em uma sala de aula, devido à heterogeneidade dos alunos, podemos nos deparar com uma infinidade de ZDP. Nessa situação, corre-se o risco de se intervir de maneira única, homogeneizando as ações e dificultando o aprendizado. Cabe ao professor, em seu planejamento, considerar tais diferenças e por meio da interação com seus alunos favorecer a criação de ZDP. Segundo Onrubia (2009), não se pode esperar que houvesse uma lista de comportamentos concretos e fixos que aplicados diretamente, assegurem a criação de ZDP.

No processo de desenvolvimento, o homem adquire a capacidade de dirigir voluntariamente a sua atenção para elementos do ambiente que julga relevante. Essa seleção voluntária depende, entre outros fatores, da atividade que desenvolve e que é "construída ao longo do desenvolvimento do individuo em interação com o meio em que vive". (Oliveira, 2009, p. 77). Essa atenção é denominada voluntária. Em contrapartida, existe a atenção involuntária cujo mecanismo, segundo Oliveira (2009), também é "mediada por significados aprendidos ao longo do desenvolvimento" (p. 78).

Luria (1979) divide o processo de construção da atenção voluntária em etapas. A primeira é aquela em que a criança não domina a linguagem e aqui a atenção fica "dividida entre duas pessoas: a mãe orienta a atenção e a criança se subordina ao seu gesto indicador e à palavra" (p.25). É a mãe que aponta para determinado objeto e diz o nome deste. Luria (1979) classifica como uma "etapa exterior pela fonte e social pela natureza" (p.25). Uma transformação radical acontece com a evolução da linguagem pela criança, pois esta "já é capaz de deslocar com autonomia a sua atenção, indicando esse ou aquele objeto com um gesto ou nomeando-o com a palavra correspondente" (p.25). Temos, portanto, "uma nova forma de organização interior da atenção, social pela origem, mas interiormente mediada pela estrutura" (p.25).

A facilidade com que a criança transfere a atenção de um objeto para outro nos faz muitas vezes acreditar na involuntariedade, entretanto isso se deve ao desenvolvimento dos "processos de linguagem internos e intelectuais da criança que vão se tornando tão complexos e automatizados" (Luria, 1979, p.26).

Para Vigotski (2010), a atenção involuntária manifesta-se por meio do interesse e defende também que esse interesse deve ser o foco do processo de aprendizagem. Ele afirma que: "A atenção infantil é orientada e dirigida quase exclusivamente pelo interesse, e por isso a causa natural da distração é sempre a falta de coincidência de duas linhas na questão pedagógica: do interesse propriamente dito e daquelas ocupações que são propostas como obrigatórias" (Vigotski, 2010, p. 162).

A função do professor deve consistir apenas em orientar e regular as atividades do aluno. Para Vigotski (2010) "do ponto de vista psicológico, o mestre é o organizador do meio social educativo, o regulador e controlador da sua interação com o educando" (p. 65).

Os fundamentos teóricos explicitados neste tópico constituíram a base da elaboração da escala de estratégias de atenção e de interação na autorregulação da aprendizagem de Estatística. Este estudo propõe-se a expor as evidências de validade dessa escala aplicada a alunos de cursos tecnológicos do município de Guarulhos, por meio da aplicação da técnica de análise fatorial.

Método

A escala foi aplicada a 182 universitários de dois cursos tecnológicos de uma faculdade de Guarulhos, São Paulo: Logística (n = 134) e Gestão Financeira (n = 48) que concluíram a disciplina de Estatística recentemente.

Os estudantes responderam questionário de perfil, teste estatístico e escala de Estratégias de Atenção e de Interação na Aprendizagem de Estatística (Oliveira, Silva, Kataoka & Vendramini, 2010) com 15 afirmativas - 9 questões sobre interação e 6 sobre atenção. Para cada afirmativa, as possibilidades de resposta foram: sempre, quase sempre, quase nunca e nunca, com pontuação de 4 até 1 para as afirmativas positivas e de 1 até 4 para as afirmativas negativas respectivamente. Dessa maneira, a pontuação total pôde variar entre 15 e 60. Para realizar a análise fatorial foi utilizado o software SPSS (Statistical Package for the Social Sciences), versão 18.0.

Para este estudo, destacam-se apenas os resultados obtidos no processo de validação da escala de estratégias de atenção e de interação na autorregulação da aprendizagem de Estatística.

Resultados e discussões

Na verificação da adequação dos dados ao modelo estabelecido pela análise fatorial, foi utilizado o teste KMO, cujo valor encontrado foi 0,699; o que, de acordo com Kaiser e Rice (1974), pode ser considerado bom. O coeficiente alfa de Cronbach geral foi de 0,595, revelando uma consistência interna mediana da escala.

A análise fatorial revelou quatro dimensões da escala de estratégias de atenção e de interação na aprendizagem de Estatística, conforme aparecem na Tabela 1.

Fator	Denominação	Questões da Escala	
		Positivo	Negativo
1	Interação pró-ativa	I_2, I_2, I_5, I_6, I_7	-
2	Planejamento e aprofundamento	A_1, A_2, A_3, A_5	-
3	Tática superficial		A_4, A_6
4	Autorregulação de contexto de interação	I_1, I_3	I_4

Nota: As questões da escala que começam por I refere-se à subescala de Interação e as que começam por A a subescala de Atenção.

Tabela 1 - Dimensões da escala de estratégias de atenção e de interação determinadas pela Análise Fatorial

A dimensão 1 da escala, denominada "Interação pró-ativa", reuniu as questões I_2, I_5, I_6, I_7 que expressam estratégias de interação em que o estudante assume o comando da interação expressando a própria opinião, perguntando, pedindo ajuda para o professor quando tem dificuldade de entendimento e oferecendo ajuda aos colegas das aulas de Estatística quando estes não entendem. São movimentos, diligências do estudante para fazer ocorrer a interação. Ele toma para si a incumbência de fazer acontecer a aprendizagem, sendo assim, essa dimensão expressa ações altamente autorreguladas que potencializam a interação propiciada no espaço específico da Zona de Desenvolvimento Proximal.

A dimensão 2, denominada "Planejamento e aprofundamento" reuniu as questões A_1, A_2, A_3, A_5 que expressam estratégias de atenção nas quais os estudantes realizam ações como preparar os materiais da aula, ler os textos ou materiais de Estatística e das demais disciplinas do curso com antecedência. Além disso, nessa dimensão estão presentes ações de aprofundamento da aprendizagem de Estatística por meio de busca de textos, informações e explicações adicionais. Essas ações expressam comportamento muito positivo em termos de autorregulação da aprendizagem, pois são resultados de controle autoconsciente sobre a aprendizagem.

A dimensão 3, denominada "Tática superficial", reuniu as questões A_4, A_6 que caracterizam estratégias de atenção de última hora. Tática como meios postos em prática para sair-se bem na avaliação. São ações realizadas em cima da hora ou quase em cima da hora. Nesse sentido, providenciam os textos/materiais de Estatística e das demais disciplinas do curso e fazem a leitura desses materiais somente nos dias que antecedem a avaliação ou até no mesmo dia. Essas duas questões da escala são consideradas negativas justamente porque revelam ações superficiais que colocam a aprendizagem e a consequente apropriação do conhecimento em segundo plano. Os comportamentos expressos nessas questões revelam pouco ou nenhum engajamento com a aprendizagem de Estatística e podem ser decorrentes da dificuldade do aluno em atribuir significado para o conteúdo da disciplina.

A dimensão 4, denominada "Autorregulação de contexto de interação", reuniu as questões I_1, I_3 consideradas positivas que revelam um contexto situacional e criam condições de ambiente espacial (sala de aula) e de relacionamento propícios para a aprendizagem de Estatística, ou seja, há um arranjo ou disposição para que a interação entre os colegas aconteça e propicie a aprendizagem possível na ZDP. No entanto, na mesma categoria há a questão I_4 considerada no estudo como negativa, porque de certa forma nega a potencialidade do processo interacional professor-aluno, na medida em que o estudante se restringe a apenas responder as perguntas formuladas pelo professor de Estatística, revelando atitude passiva de não engajamento com o processo ou dificuldade de relacionamento com o professor de Estatística.

Duas questões da escala (I_8 e I_9) não se vincularam e não constituíram dimensão de análise, por isso foram excluídas exigindo nas aplicações futuras da escala análises específicas e revisão das mesmas. Essa exclusão gera a necessidade de análises e estudos posteriores no entendimento das estratégias representadas nas questões excluídas das análises.

Considerações finais

Os resultados obtidos pelo processo de validação da escala de estratégias de atenção e interação pela análise fatorial mostraram significativa coerência com os fundamentos teóricos do estudo, pois as quatro dimensões de análise são consistentes. Cada uma delas reuniu de forma bastante lógica questões que revelam práticas culturais comuns de autorregulação de estratégias de atenção e de interação. Em decorrência é possível considerar que a referida escala é instrumento para outros estudos e pode auxiliar os estudantes universitários a diagnosticar a autorregulação do seu processo de aprendizagem de Estatística, bem como os professores de Estatística de cursos superiores a entenderem melhor os processos de aprendizagem de seus alunos e a planejarem ações que regulem estratégias de interação e de atenção, criando caminho para processos autorregulatórios para essas estratégias.

Referências bibliográficas

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70* (1), 1-25.

Kaiser, H. F. & Rice J. (1974). Little Jiffy, Mark Iv. *Educational and Psychological Measurement*, 34(1), 111-117.

Luria, A. R. (1979). *Curso de psicologia geral* (Vol. 3). Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira S.A., vol. 3.

Mahoney, M. J. e Thoresen, C. E. (1974). *Self-control: power to the person*. San Francisco: Brooks Cole.

Oliveira, M. K. (2009). *Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico* (1ª. ed.). São Paulo: Scipione.

Oliveira, M. H. P., Silva, C. B., Kataoka, V. Y. & Vendramini, C. M. M. (2010). Validação de uma escala de autorregulação da aprendizagem de Estatística: um estudo com universitários de cursos tecnológicos de São Paulo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 1277-1285. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Onrubia, J., Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Solé, I. & Zabala, A. (2009). *O construtivismo na sala de aula* (6ª. ed.). São Paulo: Ática.

Palangana, I. C. (2001). *Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky* (4ª. ed.). São Paulo: Summus.

Salvador, C. C. (1999). *Psicologia da educação*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Silva, A. L., Duarte, A. M., Sá, I. & Simão, A. M. V. (2004). *Aprendizagem auto-regulada pelo estudante*. Porto: Porto editora.

Veer, R. V. D. & Valsiner, J. (2009). *Vygotsky uma síntese* (6ª. ed.). São Paulo: Edições Loyola.

Vigotski, L. S. (2003). *A formação social da mente* (6ª. ed.). São Paulo: Martins Fontes.

Vigotski, L. S. (2010). *Psicologia pedagógica* (3ª. ed.). São Paulo: WMF Martins Fontes.

Zimmerman, B. J. (1986). Development of self-regulated learning: which are the key subprocesses? *Contemporary Educational Psychology*, 11, 307-313.

ENSEÑANZA Y COMPRENSIÓN DE LA RECTA COMO LUGAR GEOMÉTRICO EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Fausto Mendoza Díaz, Ana María Ojeda Salazar, Héctor Santiago Chávez Rivera
Cecyt No. 4 IPN México
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav
mendizf@hotmail.com, amojeda@cinvestav.mx, hchavez_santiago@cinvestav.mx

Resumen. Ya que la línea recta y los conceptos que implica, tales como la pendiente, son fundamentales para la educación matemática superior, se realizó una evaluación diagnóstica a un grupo al inicio del curso de Geometría Analítica de bachillerato tecnológico, estructurada según los conocimientos elementales previos requeridos para esa asignatura. El resultado fue la calificación máxima 3.75, en escala de 0 a 10. Por tanto, se indagó, mediante el uso de medios alternativos en la enseñanza (entre ellos un programa de cómputo) y entrevistas estructuradas en cámara Gesell, la comprensión resultante de los estudiantes de lugar geométrico y de la recta.

Palabras clave: bachillerato, comprensión, lugar geométrico, medios

Abstract. Since the straight line and the concepts it involves, such as the slope, are fundamental for higher mathematics education, a diagnostic evaluation was applied to a group at the beginning of the course of Analytic Geometry at a technological high school, regarding the previous basic knowledge required to study that subject. The result was 3.75 at the top rating, on a scale of 0 to 10. Therefore, by using alternative means of teaching (including a computer program) and structured interviews in a one-way screen room, we inquired about the results of students' understanding of the locus of the straight line.

Key words: high school, understanding, locus, media

Introducción

En los términos de un acuerdo académico interinstitucional suscrito en la Cd. de México entre el DME de Cinvestav y el CECyT No 4 del IPN, se desarrollan acciones de investigación y de indagación de la enseñanza de las matemáticas, de sus condiciones y de sus resultados, en la comprensión de los estudiantes de temas selectos de matemáticas en el bachillerato tecnológico. Aquí informamos del desarrollo de indagaciones de la enseñanza a un grupo de 3er semestre en un curso de Geometría Analítica, en particular respecto al tema del lugar geométrico de la recta en el plano.

Objetivo general y antecedentes

El Seminario de Vinculación se ha propuesto: Estudiar las causas posibles de los problemas, derivados de los procesos de enseñanza y de aprendizaje desarrollados en el aula, identificados por los profesores titulares de las *unidades de aprendizaje* de matemáticas, para construir propuestas alternativas a los problemas en cuestión.

En los planes y programas de estudio de enseñanza secundaria para matemáticas (SEP, 2011, p. 90) los contenidos de cada grado están organizados en cinco bloques. Para el segundo grado, el bloque 3, en su punto 3.7 refiere: “Anticipar el comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando se modifica el valor de b mientras el valor de m permanece constante” (SEP, 2011, p. 90). El punto 3.8 refiere: “Analizar el comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando cambia el valor de m, mientras el valor de b permanece constante” (SEP, 2011, p. 90). Para el tercer grado, el bloque 1 relativo a gráficas establece en el punto 1.6: “Analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa” (SEP, 2011, p. 118); en el bloque 3 el punto 3.5 refiere: “Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos (SEP, 2011, p. 126), mientras que el punto 3.6 refiere: “Establecer la relación que existe entre la forma y la posición de la curva de funciones no lineales y los valores de las literales de las expresiones algebraicas que definen a estas funciones (SEP, 2011, p. 127).

Marco de referencia

Acuña (2006) realiza importantes aportaciones mediante sus observaciones relativas al tratamiento que el estudiante de bachillerato da a las gráficas, como dibujo y no como figura, en tareas de construcción e interpretación. La autora muestra que “los ejes cartesianos, como marco de referencia de la gráfica son, en ocasiones, interpretados sólo como dibujo, situación que entorpece la interpretación o construcción de la gráfica” (p. 216). Además, el estudiante considera signos gráficos que le son significativos, en lugar de tomar los ejes cartesianos como referencias.

El tema de nuestro interés se imparte en “La unidad de aprendizaje Geometría Analítica [que] pertenece al área de formación Científica, Humanística y Tecnológica básica de Bachillerato Tecnológico del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional” (DEMS, 2009, p. 2). El programa de estudios indica los propósitos que rigen a la enseñanza y la modalidad de ésta:

> Las *competencias disciplinares* (general y particulares) implican, como principales objetos de conocimiento: lugares geométricos, línea recta, cónicas, coordenadas polares y ecuaciones paramétricas. Cada *competencia* se desagrega en resultados de aprendizaje (RAP) que se tratan mediante actividades sustantivas, con el propósito de indicar una generalidad para desarrollar las secuencias didácticas que atenderán cada RAP (DEMS, 2009, p. 2).

Para constatar el logro de los objetivos, el ejercicio docente se guía por los resultados de:

La *evaluación formativa*, cuya finalidad principal es conseguir el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje en un momento en el que todavía puede producirse. Por tanto, deberá aplicarse durante el desarrollo del propio proceso didáctico.

La *evaluación sumativa*, que coincide con lo que tradicionalmente se ha entendido por evaluación. Es la más utilizada en las instituciones docentes y la que se conoce con mayor precisión. Su característica fundamental es que se utiliza *al final de cada periodo de aprendizaje*. La finalidad de este tipo de evaluación es determinar el grado de consecución de los objetivos de aprendizaje por parte del alumno. Determina su posición relativa situándolo en una escala de calificaciones conocida.

Condiciones para el desarrollo del programa. Para la unidad de aprendizaje de Geometría Analítica se señalan 90 horas por semestre. El programa de estudio asigna 45 horas (50% del programa) para el estudio del tema de la recta. Toda la unidad 1 señala como competencia particular a lograr que el estudiante resuelva "problemas de lugares geométricos, en particular de la línea recta, empleando las propiedades del plano cartesiano, en situaciones académicas y sociales" (DEMS, 2009, pp. 7-9). Esta unidad incluye tres RAP, a saber: RAP 1: "describe lugares geométricos, mediante la localización de puntos en el plano cartesiano", RAP 2: "manipula los elementos de la ecuación de la línea recta en sus diferentes expresiones", RAP 3: "emplea las condiciones de la línea recta en la solución de problemas, mediante el uso de ecuaciones, en situaciones académicas y sociales" (DEMS 2009, pp. 7-9).

Preguntas de indagación

Para esta unidad se seleccionó el tema de la recta, el cual se ubica en la 1ª unidad, porque se consideró que su tratamiento favorecería la comprensión del estudiante, quien está al menos relativamente familiarizado con ese tema por su introducción en la educación secundaria; otra razón es que el tema incorpora varios conceptos fundamentales de la matemática en general, como pendiente, longitud, etc. Las preguntas que se planteó la docencia respecto al tema de la recta seleccionado de esta unidad de aprendizaje fueron:

- ¿Cuáles son las condiciones iniciales del conocimiento de los estudiantes respecto al requerido por del plan de estudios respectivo (véase DEMS, 2009, p. 5) para acceder a la enseñanza del tema de la recta en el aula?
- ¿Cuál es el resultado de la implementación de una estrategia de enseñanza de la recta, en la que se utilice un programa de cómputo y un libro de texto, en la comprensión de los estudiantes del contenido enseñado?

Métodos e instrumentos

Con carácter cualitativo, se implementaron acciones en el aula del curso de Geometría Analítica para enfocar el desarrollo de su enseñanza y sus resultados en la comprensión de los estudiantes. La Tabla 1 presenta, en orden cronológico por su aplicación, la caracterización de los instrumentos aplicados para recopilar datos para la indagación: tres cuestionarios (CE, CF, CS), una estrategia de enseñanza (AM) y una entrevista individual (G-EG).

Resultados y análisis

CE. En el cuestionario CE de diagnóstico aplicado el primer día de clases, el reactivo 1 proporcionó el plano de coordenadas rectangulares con las unidades indicadas en cada eje y planteó: *¿Puedes representar en la gráfica la siguiente ecuación?* **y= 2x + 4**. Ningún alumno respondió correctamente este reactivo y solamente 6 alumnos de 44 (14%) pudieron discernir que la gráfica correspondía a una recta, pero no la trazaron correctamente. 10 alumnos (23 %) sólo trazaron un punto que no pertenece a la recta (Figura 1) y 14 alumnos (32%) no contestaron.

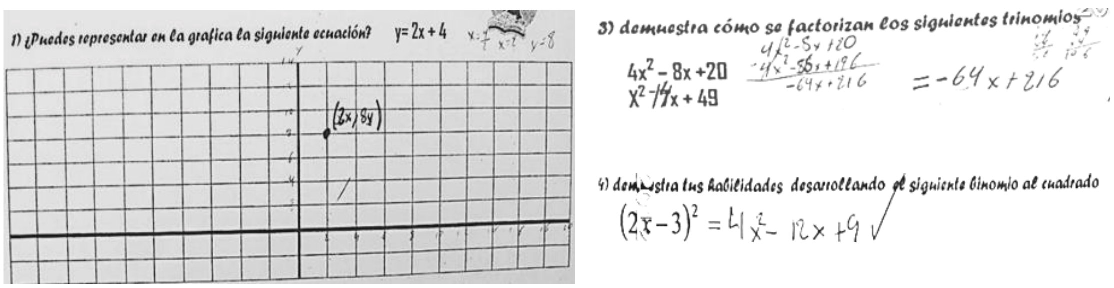


Figura 1. Expresión gráfica y simbólica en las respuestas a los reactivos 1, 3 y 4.

De los reactivos 2, 3 y 4 (véase la Figura 1) para aplicación del álgebra, sólo en el 4, que corresponde al desarrollo de un binomio al cuadrado, se obtuvo el mayor número de respuestas correctas (5 alumnos de 44, o 12%); las respuestas incorrectas fueron muy diversas y la más recurrente, de 4 alumnos de 44 (9%), fue la suma del cuadrado del primero y segundo términos.

Tabla 1.Organización y caracterización de los instrumentos diseñados para la indagación.

Instrumentos y técnicas	Objetivo	Contenido	Criterios de revisión	Condiciones
CE 4 reactivos Impreso en papel para contestación individual con lápiz.	Identificar conocimiento adquirido previo al de la recta y nociones de lugar geométrico. Definir estrategias	De secundaria: 4 reactivos: R-1: Plano cartesiano, R-2: Álgebra en G. A., R-3 y R-4: Álgebra para su aplicación en G.A., expresiones verbales,	2.5 p/reactivo R-1 Dada ecuación, determinar gráfica. R-2, 3,4: proceso de solución y	Aplicación en aula, al inicio del curso. Uso de calculadora y regla. 44

	de enseñanza.	simbólicas.	respuesta de ecuaciones, factorización, y productos notables.	estudiantes. Duración: 50 min.
AM Uso GeoGebra. Hojas control impresas para contestación individual con lápiz. Videograba-ción	Crítica, análisis y conclusiones de conceptos de G. A., con medio digital para una presentación dinámica.	Distancia entre dos puntos, pendiente de una recta y valores notables.	Esta sesión dio origen al cuestionario *CF*	Exposición magistral en aula Proyección del uso del GeoGebra por el docente 23 estudiantes Duración: 40 min.
CF 2 reactivos del texto (Cruz, 2003, p. 126) Impreso para contestación individual.	Identificar avance en conocimiento adquirido para refinar enseñanza cuando el aprendizaje aún puede producirse (DEMS 2009)	Interpretar y aplicar pendiente de una recta. Pertenencia de puntos a una recta y formas de la ecuación de una recta. Gráfica auxiliar.	Peso: 5 p/reactivo. Tipos de respuesta: SS (sin sentido), SR (sin respuesta).	Actividad para su desarrollo extra clase. 23 estudiantes
CS 7 reactivos. Impreso en papel para contestación individual con lápiz.	Determinar el grado de consecución de los objetivos de aprendizaje por parte del alumnado.	R-1 y R-2: Perímetro y área de Un triángulo en el plano cartesiano, puntos, representación gráfica para explorar respuestas. Distancia entre puntos. R-3, R-4: Elementos de la recta, características, formas algebraicas y operatividad. R-5 y R-6: Pendiente. Interpretar lugar geométrico. R-7: División de segmento de recta en una razón dada.	Elegir 6 de los 7 reactivos. Nota máxima 6 Ponderación: 1 punto, o proporcionalmente por procedimiento de resolución. R-1, R-2 y R-7 no se consideran para análisis en este estudio.	Aplicación en aula Uso de calculadora y regla. 27 alumnos Contestación en 50 min.
G-EG 2 reactivos Videograbación y escritura en papel con lápiz	El alumno conteste preguntas desprendidas del análisis de las contestaciones a los cuestionarios aplicados a fin de obtener elementos para una valoración cualitativa de la enseñanza.	Lugares geométricos de ecuaciones de primer grado y segundo grado, tabulaciones y gráficas respectivas en plano cartesiano, identificación y cálculo de pendientes	Reactivos (Figura 7) originados del R1 del *CE*, requieren trazar el lugar geométrico de ecuaciones de primer grado. El análisis sólo consideró la interpretación a las preguntas y sus respuestas.	Aplicación en cámara Gesell. Un caso seleccionado por respuestas a CE y disposición al interrogatorio Duración: 60 min.

Nomenclatura: *G. A.:* Geometría Analítica*; R-#:* reactivo #;

CE: cuestionario de diagnóstico; *AM:* Uso de medios en la enseñanza en aula;

CF: Cuestionario de valuación formativa; *CS:* Cuestionario de evaluación sumativa;

G-EG: Guión de entrevista individual en cámara Gesell.

La Figura 2 resume las puntuaciones obtenidas con la aplicación del cuestionario CE.

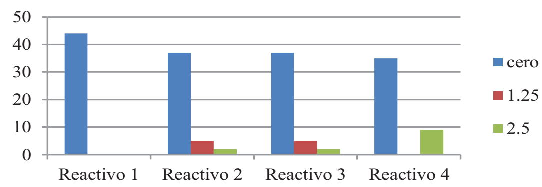


Figura 2. Resultados de la aplicación del cuestionario CE.

Estrategia AM y cuestionario CF. Bajo la consideración de los resultados de la aplicación del cuestionario CE se diseñó una estrategia de enseñanza que consistió en lo siguiente: se impartió una sesión de clase grupal, en la que se utilizó el programa de cómputo *GeoGebra* (Hohenwarter, M., *GeoGebra*.www.geogebra.org.) para realizar una recapitulación de los temas de lugar geométrico y recta. Al finalizar la enseñanza, se proporcionó una hoja de trabajo CF con dos reactivos tomados del texto (Cruz, 2003, p. 126), para su resolución extraclase. El reactivo 1 solicitó: "*Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -2/3 y que pasa por el punto (5, 7)*"; 17 alumnos de 23 (74%) no utilizaron el valor proporcionado de la pendiente ni su aplicación a la ecuación de la recta, de los seis estudiantes restantes sólo tres calcularon el resultado correcto y los otros tres cometieron errores en el proceso algebraico. El reactivo 2, que planteó: "*hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $P_1(1, 2)$ *y* $P_2(-3, 5)$", sólo un alumno (4%) lo contestó correctamente, seis alumnos (26%) más calcularon el valor de la pendiente, cinco estudiantes (22%) calcularon la distancia entre los dos puntos y consideraron ésta como el resultado final. El resto de los estudiantes omitió su respuesta (SR en la Figura 3) o presentaron trazos arbitrarios y sin sentido (SS en la Figura 3) relativos a una recta. Se manifestó el desconocimiento casi total de las propiedades de pertenencia de puntos a una recta y se agudizó aún más la confusión de la información que poseen los estudiantes de los fundamentos de matemáticas, puesto que no los condujo al resultado correcto. No obstante, los estudiantes sí utilizaron el plano coordenado anexo al reactivo, y la mayoría trazó el segmento de recta de manera correcta, aunque no se le requirió. En resumen, sólo un alumno de 23 (4%) contestó correctamente. El estado general del grupo después de este ejercicio fue: cuatro estudiantes (17%) obtuvieron una calificación aprobatoria, tres de ellos con 8, el restante con 10 y consiguieron una mejoría relativa respecto a sus resultados en el cuestionario CE de diagnóstico, pero el 83% del grupo todavía exhibió un desempeño muy deficiente. Los resultados de la aplicación de CF se resumen en la Figura 3.

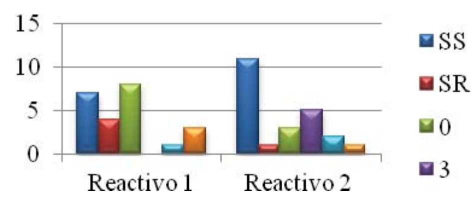


Figura 3. Resultados del cuestionario CF: Dos reactivos, 23 estudiantes.

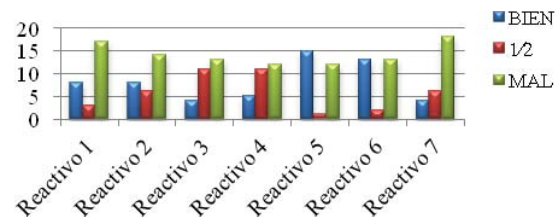


Figura 4. Resultados del cuestionario CS.

Cuestionario CS. La Figura 5 resume los tipos de desempeño en este instrumento. De un total de 27 alumnos, 12 obtuvieron resultados de 3 puntos o más, que se considera aprobatorio. Los reactivos 1, 2, y 7 correspondían a temas de la unidad de aprendizaje no relativos a este estudio, el reactivo 3 sólo obtuvo cuatro respuestas correctas, el 4 sólo cinco respuestas correctas. Para ambos reactivos 5 y 6, que implican obtener la pendiente y determinar el lugar geométrico, ningún alumno consiguió determinarlo correctamente, 15 alumnos de 28 (54%) obtuvieron el valor correcto de la pendiente.

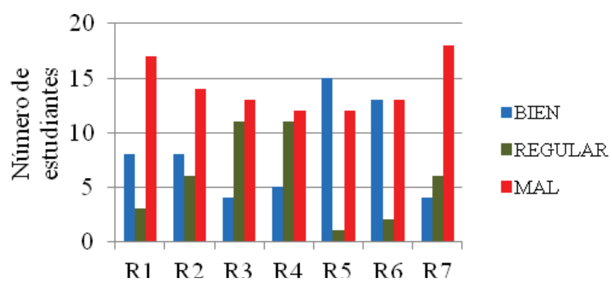


Figura 5. Resultados del cuestionario CS de evaluación sumativa.

Guión de entrevista G-EG. El diseño de la entrevista se basó en preguntas desprendidas del análisis de las contestaciones dadas al instrumento CE por la entrevistada y consistió, por tanto, en la presentación del problema para su solución ante preguntas orales. Las cuestiones fundamentales tratadas fueron la de lugar geométrico y la interpretación de la pendiente (véase la Tabla 1). La estudiante entrevistada (véase la Figura 6) enfrentó dificultades para determinar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen una ecuación algebraica y no consiguió operar correctamente los conceptos de intersección con los ejes, simetría, ni extensión de una curva. En lo relativo a la pendiente, manifestó nociones y relacionó la inclinación de una recta con la pendiente, pero mostró confusiones al pretender hacerla equivalente a la longitud del segmento en análisis; logró discernir finalmente que ciertos valores de la pendiente pueden ser positivos o negativos y que se relacionan con el grado de inclinación de la recta. La entrevistada cometió errores en la ubicación de los puntos en el plano y en los cálculos; inicialmente su trazo de la recta en el plano se restringió al de los segmentos determinados por los puntos resultantes de la tabulación, lo cual coincide con el señalamiento de Acuña: …*la prolongación infinita de una recta que, de modo forzoso, se representa como sólo un segmento* (2006, p. 219). Sin embargo, reconoció el tipo de pendiente por su signo en la ecuación dada. A la ecuación de segundo grado la asoció con un triángulo.

Prof.: Entonces, si tú representaras esta ecuación necesitarías dos puntos y ya puedes hacer su representación, si tienes la ecuación, con dos puntos ya puedes representarla. Tú ya sabes qué tipo de figura geométrica te daría esta ecuación (se le indica una ecuación de primer grado) ésta es una recta, ¿y ésta otra? (se le muestra a la alumna una expresión de segundo grado).

Alum: Un triángulo.

Prof.: ¿Por qué un triángulo? ¿En qué te fundamentas para decir que es un triángulo?

Alum: No, es una recta.

Prof.: Una recta. Entonces, ¿en qué te fundamentas para decir que es una recta?

Alum.: Porque me basé en el valor de ‘x’ y ‘y’ para trazar la ecuación.

Prof.: Vamos a hacer una sesión de Analítica. Con esta hoja que tenemos aquí vamos a encontrar algunas expresiones. Si ves, ahí tenemos una expresión algebraica, que es ésta. ¿Me puedes decir otro nombre con que se le llama a esta expresión algebraica?

Alum.: Una ecuación.

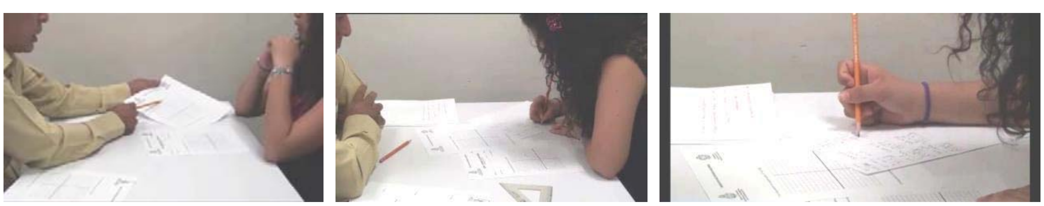


Figura 6. Forma tabular y gráfica de $y = x + 5$ y $y = -x + 5$ en la entrevista.

Prof.: ¿Puedes hacer el trazo de la figura, con esa expresión algebraica?

Alum: Necesito suponer un valor “x” y luego sustituirlo y darle un valor a “y”

Prof.: ¿Puedes hacerlo y representarlo gráficamente?

Alum: (Realiza operaciones; véase en la Figura 7, izq.).

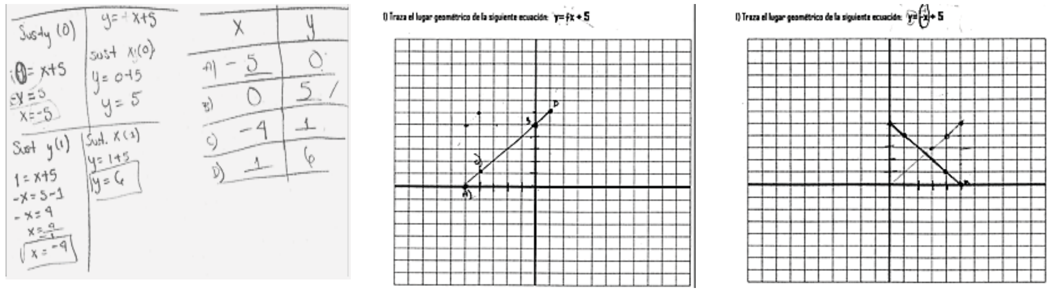


Figura 7. Registro de las respuestas de la alumna en hojas de control.

Conclusiones y observaciones

Los resultados del cuestionario CE revelaron que la educación secundaria no contribuyó a la comprensión de los alumnos de la recta como lugar geométrico. Aunque fue novedoso el uso del *GeoGebra* en la enseñanza, los resultados obtenidos señalan que este recurso no contribuyó de inmediato a la comprensión del tema de la recta. No obstante, durante la enseñanza de temas posteriores los estudiantes lo utilizaron de manera más eficiente en la búsqueda de respuestas a preguntas que se les planteaban y en la realización de ejercicios. Por su parte, el uso del libro de texto (Cruz, 2003) no resultó en lo esperado por el docente, según su experiencia anterior en la enseñanza del mismo tema a otros grupos de estudiantes. Los textos clásicos de Geometría Analítica (Lehmann, 2004, por ejemplo) delegan el tratamiento gráfico al lector. Los resultados obtenidos concuerdan con lo señalado por Acuña (2006), como el hecho de que el estudiante "… confunde la representación (el segmento) con lo representado (la recta), en especial porque las rectas como objetos matemáticos infinitos no pueden ser dibujadas. La idea de una recta que se detiene si el trazo del lápiz cesa tiene carácter empírico" (Acuña, 2006, p. 229).

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2006). Tratamientos como dibujo y como figura de la gráfica en tareas de construcción e interpretación por estudiantes de bachillerato, el caso de los ejes cartesianos. *Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*, pp. 215-236. México: Santillana-Cinvestav.

Cruz, T. (2003). *Geometría Analítica*. México: EDIMAF.

DEMS. (2009). Dirección de Educación Media Superior. *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Geometría Analítica*. México, D. F.: IPN.

Lehmann, Ch. H. (2004). *Geometría Analítica*. México: LIMUSA.

Hohenwarter, M. (2009). *GeoGebra3.2*. Recuperado el 15 de abril de 2011 de http://www.geogebra.org

SEP (2011). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2011*. México: Autor

RESOLUCION DE PROBLEMAS DE CRIPTO-ARITMETICA EN PRIMARIA

Noelia Londoño Millán, David Benítez Mojica, Ana Lucia Ruiz Vigil
Universidad Autónoma de Coahuila México
noelialondono@uadec.edu.mx

Resumen El tema a tratar hace referencia a resultados parciales de una investigación sobre resolución de problemas que se realizó con 38 alumnos de la escuela pública, Héroe de Nacozari, de Saltillo, Coahuila México, en el turno matutino, los niños del estudio tenían edades entre 9 y 11 años. Como estaban empezando el quinto de primaria, los problemas se diseñaron con contenidos temáticos de cuarto grado. En esta investigación se encontraron varias estrategias heurísticas y varias creencias que usan los alumnos al resolver problemas. En este artículo únicamente se centra la atención en problemas de cripto-aritmética. Al analizar los resultados de encontró que una de las estrategias heurísticas utilizadas mayormente por los alumnos es el ensayo-error, a veces de forma sistemática. Dentro del sistema de creencias hubo dos prototipos que llamaron la atención, los alumnos creen que para solucionar los problemas que involucran letras, la solución esta asociada a un orden alfabético, o a calificaciones obtenidas en la escuela.

Palabras clave: cripto-aritmética, problema, estrategias, recursos

Abstract. The theme will refers to partial results of an investigation into troubleshooting was performed with 38 students of the public school, Nacozari Hero, Saltillo, Coahuila Mexico, on the morning shift, the children in the study were aged between 9 and 11 years. As they were starting the fifth grade, the problems were designed with thematic content of the fourth degree. This research found several heuristic strategies and various beliefs that students use to solve problems. This article only focuses on crypto-arithmetic problems. In analyzing the results found that one of the heuristics used by students is mostly trial and error, sometimes systematically. Within the belief system there were two prototypes that drew attention, students believe that to solve problems involving points, the solution is associated with an alphabetical order, or grades in school.

Key words: crypto-arithmetic, problem, strategies, resources

Introducción

La cripto-aritmética se plantea como una alternativa de la resolución de problemas que puede ser empleada por alumnos desde edades tempranas, en donde pasan de simplemente resolver ejercicios con soluciones únicas a problemas que requieren de poner en práctica no solo conocimientos sino también habilidades del pensamiento. En el presente documento se expone el marco teórico seguido en la investigación y corresponde a la resolución de problemas, así como la metodología empleada, el análisis de resultados y las conclusiones a las que llegamos luego de darle seguimiento a las soluciones y respuestas otorgadas por los niños tanto de manera escrita como verbal.

Referente teórico

Para empezar conviene dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué características tiene el enfoque de resolución de problemas?

Para esta pregunta existen varias perspectivas de respuesta; la primera es la propuesta presentada por George Polya (1965) que presenta una lista de pasos a seguir para solucionar un problema en forma exitosa; estos pasos son:

1. Entender el problema,
2. Planear una solución,
3. Ejecutar el plan,
4. Revisar la solución.

En cada etapa Polya explica su contenido. Puede decirse que esta propuesta es el inicio de esta teoría. El enfoque de Polya tiene muchas virtudes. Sin embargo, para autores como Allan Schoenfeld, Miguel de Guzmán y John Mason, el modelo de Polya es incompleto.

Schoenfeld citado por Santos (1992) realiza un conjunto de investigaciones, donde compara el desempeño de los estudiantes de primeros semestres de las carreras de matemáticas con el trabajo que ejecutan los matemáticos profesionales, cuando resuelven los mismos problemas. La perspectiva para la resolución de problemas que se tendrá en cuenta en esta investigación se fundamenta en la propuesta de Shoenfeld (1985), quien plantea que en la resolución de problemas intervienen cuatro dimensiones, las cuales ejecutadas en conjunto hacen posible la resolución de problemas en forma exitosa; estas dimensiones son:

1. Estrategias cognitivas
2. Dominio de conocimientos
3. Estrategias metacognitivas
4. Sistema de creencias

Metodología

Sobre la población. Los niños participantes en este estudio iniciaban el quinto año de primaria, en dos escuelas públicas: Héroe de Nacozari y General Francisco Coss Ramos, de Saltillo Coahuila.

Sobre los instrumentos. En principio se habló tanto con las maestras encargadas de los grupos como con las directoras de las dos escuelas, sobre la resolución de problemas de cripto-aritmética, y como los niños no conocían este tipo de problemas, ni como se solucionaban, se acordó dedicar algunas clases explicando las reglas bajo las cuales se debía resolver cada problema.

Ya para la realización del estudio se construyó una serie de problemas de cripto-aritmética que implicaban el dominio de las cuatro operaciones básicas. Los niños los desarrollaron en hojas, que luego fueron analizadas por el grupo de trabajo.

Otra técnica utilizada para recabar la información fueron las entrevistas clínicas aplicadas a los niños, con la debida autorización por escrito de las directoras de las escuelas y de los padres de familia.

También se pudo grabar video, cuidando de no mostrar las caras de los niños por respeto a la identidad de los menores. Por lo cual en el video solo aparecen las manos, las voces y sus respectivas soluciones.

Las reglas que los niños debían seguir en la solución fueron las siguientes:

Remplazar cada letra o símbolo por un número desde 0 hasta nueve (de un dígito)

A cada letra o símbolo diferente se le asigna un número diferente.

A letras o símbolos iguales se asignan números iguales.

Respetar las reglas de las operaciones aritméticas.

Sobre los problemas propuestos. Cada problema incluía las operaciones básicas.

Problema 1: Si A, B y C representan números distintos y menores que 10 ¿Cuál es el valor de A, B y C, de tal manera que se verifique la siguiente multiplicación?

$$\begin{array}{r} 6\ A\ A\ 1 \\ \times\ 8 \\ \hline 5\ 0\ 6\ B\ C \end{array}$$

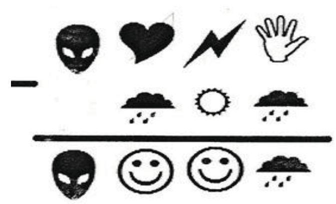
Problema 2: Encuentra una solución de:

$$\begin{array}{r} C\ A\ T \\ \times\ \ T\ O \\ \hline T\ A\ V\ O \\ +\ C\ A\ T\ \ \\ \hline O\ O\ S\ O \end{array}$$

Problema 3. Halla los números para que la suma sea correcta.

$$\begin{array}{r} B\ A\ D\ U \\ +\ \ P\ E\ C \\ \hline D\ E\ D\ O \end{array}$$

Problema 4. Remplaza cada símbolo por un número de tal manera que la resta sea correcta



Dentro de las habilidades y conocimientos necesarios para resolver de forma adecuada los problemas planteados están:

Conocimientos

a) Dominio del algoritmo de las operaciones básicas

Habilidades

a) Leer y comprender cada uno de los datos en el enunciado del problema.

b) Entender con claridad lo que le pide en el problema.

c) Aplicar las operaciones adecuadas.

d) Aplicar de manera correcta las reglas dadas

e) Interpretación de la solución obtenida.

f) Ser sistemático durante el proceso de solución

En la tabla siguiente se muestran los resultados cuantitativos en porcentajes que se obtuvieron en los cuatro problemas

Problemas de cripto-aritmética			
Número del problema	Correctos	Incorrectos	Sin respuesta
1	42%	37%	21%
2	16%	25%	59%
3	2%	31%	67%
4	2%	37%	61%

Como puede verse, menos de la mitad de los niños tuvieron éxito en la soluciones. Algunas de las justificaciones que daban los alumnos sobre los problemas es que nunca los habían visto así, que las maestras si les ponen las operaciones pero con las cifras completas. También se expresaron de este tipo de problemas como difíciles y complicados.

A continuación se muestran algunas de las soluciones realizadas por los niños, aunque muchas veces fueron fallidas.

La siguiente respuesta corresponde a la dada por Karen

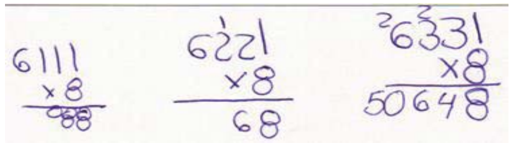


Figura 1. Respuesta de Karen

Karen utiliza la estrategia de ensayo – error, la imagen muestra como, ella empieza con el número uno, luego usa el dos y por último el número tres y encuentra el resultado correcto, el uso de la estrategia de control lleva a la alumna a una solución correcta. También hubo casos en los que los alumnos no llegaron a los resultados correctos, sin embargo sus soluciones permitieron identificar otras estrategias y creencias que están presentes en los alumnos al solucionar este tipo de problemas.

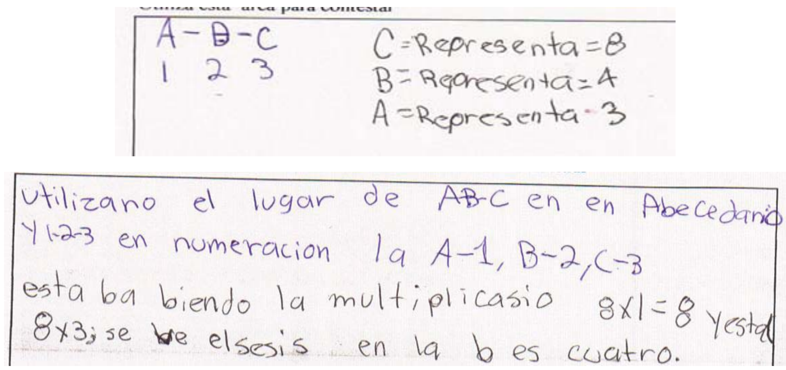


Figura 2. Respuesta de Krissel, explicando la asignación de valores.

Como puede verse en el manuscrito realizado por Krissel, ella en primera instancia tuvo la creencia que las letras correspondían de acuerdo al orden del alfabeto por lo tanto los números 1,2,3 respectivamente eran los que les correspondían; pero al realizar las operaciones se da cuenta que no era como ella creía, así que hace una rectificación en la respuesta, en la solución se puede ver dos dimensiones planteadas por Schoenfeld (1995) la primera tiene que ver con el sistema de creencias, y es la primero que se le ocurre a la alumna, equiparar las letras con el lugar que ocupan en el orden alfabético. La otra dimensión tiene que ver con el control, el razonamiento respecto a la solución le ayuda a descartar la primera creencia errónea, es la conjunción de las distintas dimensiones que le permiten llegar a un resultado correcto.

Los siguientes casos son alumnos que intentaron buscar la respuesta sin tener éxito:

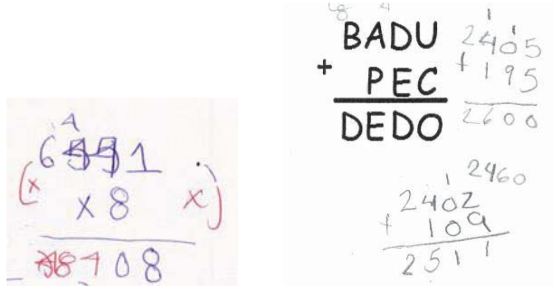


Figura 3. Respuesta de Francisco.

Hubo alumnos que remplazaron las letras, tratando únicamente que se verificara la operación y olvidaron las reglas dadas, como por ejemplo que cada letra diferente le corresponde un número diferente, para este caso Francisco usa el cero para la letra D y también para la letra O, en su primer desarrollo.

También se presentó la situación en que solamente verificaron las reglas de operación, sin controlar que la operación estuviera correcta, un caso de esta situación se muestra en la solución dada por Guadalupe.

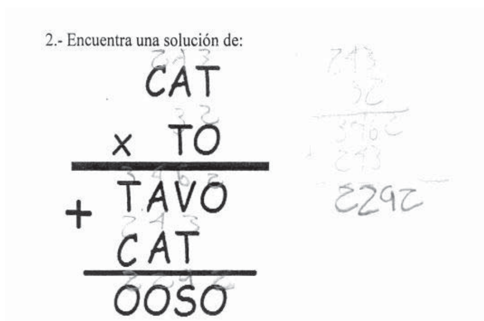


Figura 4. Respuesta de Guadalupe

El siguiente problema fue resuelto de manera correcta por un solo alumno, desafortunadamente, no dejo evidencia en el proceso de solución y tampoco pudimos hacerle la entrevista, porque no se contó con la autorización de sus padres.

Nos llamó la atención que los niños que intentaron solucionarlos usaron unos criterios bastante especiales: en la mano hubo niños que anotaron un cinco, y al preguntarles por qué, dijeron que tiene cinco dedos, en la carita feliz contaron los ojos, también contaron las gotas de lluvia, etc. Situaciones que no los llevarían hacia un resultado correcto.

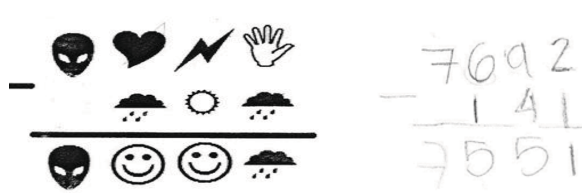


Figura 5. Respuesta correcta de un alumno

Conclusiones

- La estrategia más común usada por los alumnos es ensayo error.
- De un conjunto de reglas, los alumnos las atienden parcialmente.
- Se descubrió que hay alumnos que quinto año que desconocen el proceso de la multiplicación
- Este tipo de problemas les resulta más interesante que resolver simples operaciones, repitiendo muchas veces el algoritmo de las operaciones.
- Se encontraron algunas creencias de los alumnos al resolver los problemas:

  Las letras A, B, C corresponden a calificaciones por tanto A=9, B = 8 y C = 7

  Las letras deben remplazarse de acuerdo al orden alfabético, por tanto A=1, B = 2 y C = 3
- Si ya encontraron unos valores para las letras en un problema las quieren heredar a otro, aunque no tengan ninguna relación

Luego que el alumno domina el algoritmo de una operación, los problemas de cripto-aritmética le representan retos, que lo hacen pensar y los invita a emplear varias estrategias de solución.

Algunas estrategias que se deben seguir para la solución de este tipo de problemas son

1. Formulación. Es un tanto difícil encontrar los problemas propuestos, pero luego que se aprende se pueden crear miles.
2. Analizar las opciones iniciales. Se debe discutir sobre las posibles opciones de solución, sin empezar a resolverlo.
3. Usar la lógica. Aunque sea a edades tempranas los niños deben usar procesos lógicos que los lleven a hacerse preguntas sobre las posibles soluciones.
4. Solución conjunta. Ayuda de manera significativa el trabajo en equipo.
5. Garantizar los conocimientos. Si un alumno no sabe los algoritmos de las operaciones básicas. el uso de la cripto-aritmética será un tiempo perdido.

Sugerencia: consideramos que cada maestro debe propiciar que el alumno enfoque sus actividades de aprendizaje alrededor de preguntas en donde sus objetivos sean el reflexionar, atacar y resolver las interrogantes presentadas. Las actividades sugeridas son aquellas en donde el conocimiento pueda ser desarrollado y en donde el alumno pueda cuestionar el problema, buscar formas de solución y pueda plantear otros problemas y vemos la cripto-aritmética como una opción que se pudiera poner en práctica.

Referencias bibliográficas

Benítez, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios en la resolución de problemas con el uso de tecnología.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Polya, G. (1965). *¿Como plantear y resolver problemas*? México: Trillas.

Ruiz, A. (2009). *Estudio sobre las estrategias heurísticas que utilizan los estudiantes de primaria en la resolución de problemas matemáticos*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Coahuila. México.

SEP. (1998). *Libro para el maestro*. *Matemáticas cuarto grado.* México: Autor

Santos, M. (1992). Resolución de problemas: el trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática, 4* (2), 16-24.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problema Solving*. New York: Academic Press.

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA FACILITAR LA TRANSICIÓN ENTRE LA ARITMÉTICA Y EL ÁLGEBRA

Alma Rosa Pérez Trujillo, Ana Deysi Pérez Hernández, Hipólito Hernández Pérez
Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Chiapas México
almarpt@hotmail.com, anayde2002@hotmail.com, polito_hernandez@hotmail.com

Resumen. En esta investigación se realizó una secuencia didáctica para el nivel básico (secundaria), con la finalidad de facilitar el transito entre la aritmética y el álgebra. La secuencia didáctica diseñada se ha puesto en escena con estudiantes de entre 11 y 12 años de edad, los cuales están cursando el primer grado de educación secundaria, de manera particular se trabajó con estudiantes de la escuela pública José Emilio Grajales ubicada en Chiapa de Corzo, Chiapas, presentamos aquí la secuencia didáctica y algunos de los resultados obtenidos en las puestas en escena, los cuales permitieron la validación de la misma, ya que los estudiantes pudieron transitar entre la aritmética y el álgebra de una forma sencilla al trabajar con la secuencia.

Palabras clave: aritmética, algebra, secuencia didáctica

Abstract. I This research involved a teaching sequence for the education basic level (secondary school), in order to make transition easy between arithmetic to algebra. The teaching sequence was designed with students staged between 11 and 12 years old, who are enrolled in the first grade of secondary education, particularly worked with "Emilio José Grajales" students, located in Chiapa de Corzo, Chiapas and belongs to public sector, we present, the teaching sequence and some results obtained in the staging, which allowed the validation of the same sequence, the students could make transition between arithmetic to algebra in a simple way, working with the sequence.

Key words: **words:** arithmetic, algebra, didactical sequence

Introducción

Esta investigación giró en torno a la problemática que tienen los alumnos al iniciar la secundaria con el uso del álgebra, ya que en la primaria se abordan mayoritariamente conocimientos aritméticos. En la enseñanza escolar de la aritmética los alumnos afrontan con éxito problemas de adicción, sustracción y multiplicación, a través de un amplio conjunto de estrategias pero hay dificultad de aprendizaje en las operaciones algebraicas. La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas y abstractas dentro de las matemáticas escolares. Sin embargo, en este proceso se presentan diferentes obstáculos, consideramos que a través de la secuencia didáctica que hemos diseñado los alumnos desarrollan una forma de pensamiento que les permite expresar situaciones, así como utilizar las técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas matemáticos, a fin de posibilitar las interrelaciones entre el plano aritmético y el algebraico. Nuestra propuesta didáctica esta fundamentada en el marco teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas propuesto por Guy Brousseau (2007) y en la metodología de la Ingeniería Didáctica de Michèle Artigue (1995); en conjunto la teoría y la metodología nos permitieron diseñar y validar una secuencia didáctica que facilita el proceso de transición entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico.

Marco teórico

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) propone el enfoque de una construcción que permite comprender las interacciones sociales entre alumnos, docentes y saberes matemáticos que se dan en una clase y condicionan lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden. De acuerdo con Brousseau (2007) una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado, es decir, un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente, que lo considera como una herramienta.

En la TSD Brousseau (2007) propone un modelo a partir del cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ambiente escolar, el autor retoma la hipótesis central de la epistemología genética de Jean Piaget como un marco para modelizar la producción de conocimientos matemático, se va construyendo esencialmente a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que son generados a su vez por otro problema, concibe conocimientos como resultado de la adaptación de un medio. Este modelo representa el proceso de producción de conocimientos matemáticos de los estudiantes a partir de dos tipos de interacciones básicas: la interacción de alumno con una problemática que brinda resistencias y retroacciones que utilizan sobre los conocimientos matemáticos situados con los estudiantes, la interacción del docente con el alumno a propósito de la interacción del alumno con la problemática matemática. A partir de ellos postula la necesidad de un medio pensando y sosteniendo con una intencionalidad didáctica. De acuerdo a lo anterior un medio sin interacciones didácticas es insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos que se desea que el alumno construya, concibiendo no se puede acceder al saber matemático si no se dispone de un medio. Entonces una situación es didáctica cuando un individuo (generalmente el profesor) tiene la intención de enseñar a otro individuo (generalmente el alumno) un saber matemático dado explícitamente y debe darse en un medio. Los dos tipos de interacciones básicos, sujeto/medio y alumno/docente, conforman en la TSD un sistema, es decir, que no pueden concebirse de manera independiente unas de las otras. En nuestro caso estas interacciones se establecen tomando como base la situación didáctica que hemos diseñado. En el siguiente apartado abordaremos la metodología que seguimos en la investigación.

Metodología

En investigación se abordó la transición de la aritmética al álgebra, a través de un desarrollo del sentido numérico y pensamiento algebraico, lo cual implica que los alumnos aprendan utilizar los números y las operaciones en distintos contextos, así como tener la posibilidad de modelizar situaciones y resolverlas, es decir, de expresarlas en lenguaje matemático y algebraico, desarrollar las deducciones necesarias y obtener un resultado que cumpla con las condiciones formadas, los modos de expresión simbólica y pensamiento abstracto que se desarrollan por medio del estudio del álgebra, como son extraer información, comprender procedimientos y saber utilizarlos.

Pare ello la metodología empleada es la Ingeniería Didáctica; de acuerdo a Artigue (1995) la Ingeniería didáctica es una forma de trabajo didáctico equiparable el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Según Douady (1995, p. 61) "el termino ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un *profesor-ingeniero,* con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos." A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor.

De acuerdo con lo anterior la ingeniería didáctica es un producto resultante de un análisis *a priori* con el fin de realizar un proceso de aprendizaje en el transcurso de interacción entre el profesor y los alumnos donde se ejecuta el producto final, adecuado a la dinámica de la clase. En la investigación hemos llevado a cabo todas las fases establecidas en la metodología de la ingeniería didáctica propuestas por Artigue (1995): Análisis Preliminar, Diseño de la Secuencia, Análisis *a priori*, Puesta en escena, Análisis *a posteriori* y Validación.

Siguiendo las fases de la metodología de la ingeniería didáctica, el alumno construye conocimientos nuevos que le permiten transitar fácilmente entre el aprendizaje aritmético y algebraico mediante el trabajo con la secuencia didáctica diseñada para tal fin. La secuencia didáctica que se aplicó a los alumnos de primer año de secundaria, está formada con tablas, números y figuras geométricas en donde los alumnos pueden observar como va aumentando la figura geométrica, se pide que completen tablas de sucesiones, además identificaran las sumas, restas y multiplicaciones, se realizan diferentes preguntas sobre las actividades propuestas con la intención que el alumno se vea comprometido a resolver y construir fórmulas a fin de generalizar los procesos construidos. El diseño se divide en tres actividades, con las que se espera que los alumnos superen obstáculos que a los que se enfrentan al trabajar con tópicos algebraicos, esto se logra a través de la utilización de fórmulas sencillas para calcular perímetros y áreas de las figuras con las que están trabajando, ya que estas fórmulas sólo han sido vistas como abreviaturas de los procedimientos.

Resultados

El análisis de la transición del pensamiento aritmético al algebraico tiene el fin de motivar y despertar el interés en los estudiantes de forma atractiva mediante una secuencia didáctica y lograr un aprendizaje significativo y además ayudar a los alumnos a que se involucren en la actividad, pongan en juego su saber matemático anterior (aritmética) y lleguen a desarrollar correctamente ideas matemáticas nuevas (álgebra) a partir de sus propias experiencias.

Se construyeron sucesiones de números o figuras geométricas a partir de una regla teniendo como objetivo interpretar las literales que aparecen en la formulas aplicándola con números generales, y comprender el cambio que se realiza utilizando variables, simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información. Presentamos enseguida las actividades que forman parte de la secuencia didáctica diseñada.

Actividad 1: Jugando con cuadritos

⇒ Alexa y Elisa juegan a formar cuadrados con cuadritos con medida de 1 en cada lado. Alexa construyó los cuadros y los acomoda así:

1 2 3…

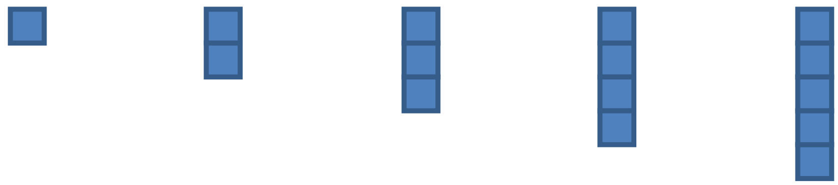
1. Dibuja los 2 cuadros que siguen:
2. ¿Cuántos cuadritos se necesita para hacer el cuarto cuadrado?
3. ¿Y el quinto?
4. ¿Cuántos cuadritos necesitarías para formar un cuadrado número 10?
5. ¿Qué procedimiento utilizaste para encontrar el número de cuadritos del decimo cuadrado?
6. Describe una regla que indique cómo calcular el número de cuadritos para cualquier número de figuras o lado del cuadrado.
7. Compara la regla que obtuviste con las obtenidas por el resto del grupo.
8. Completa la siguiente tabla con el procedimiento que utilizaste:

Número de figuras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	20	50
Lado del cuadrado	1	2	3										
Número de cuadritos	1	4	9										
Área del cuadrado	1	4	9										

9. Explica que tendrías que hacer para encontrar el número de cuadrados que corresponde a la figura *n-ésima*.
10. Escribe una fórmula para el número de cuadrados correspondientes a la *n-ésima* figura.
11. ¿Explica qué relación observas entre el lado del cuadrado y su área?

Actividad 2: Formando columnas

⇒ Alexa y Elisa ahora juegan a formar columnas con los cuadritos



1 2 3 4 5

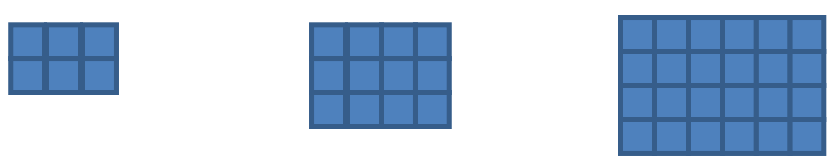
1. Dibuja las 2 columnas que siguen:
2. ¿Cuántos cuadritos se necesita para hacer la cuarta columna?
3. ¿Y para la quinta?
4. ¿Cuántos cuadritos necesitarías para formar la columna número 10?
5. ¿Qué procedimiento utilizaste para encontrar el número de cuadritos de la 10ª columna?
6. Describe una regla que indique cómo calcular el número de cuadritos para cualquier número de columna.
7. Compara la regla que obtuviste con las obtenidas por el resto del grupo.
8. Completa la siguiente tabla con el procedimiento que utilizaste:

Número de figuras	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**20**	**50**
Número de cuadritos	1	2	3										
Perímetro de la columna	4	6	8										

9. Explica que tendrías que hacer para encontrar el perímetro que corresponde a la columna n-ésima.
10. Escribe una fórmula para el número de cuadrados correspondientes a la *n-ésima* figura.

Actividad 3: Formando rectángulos

⇒ Alexa y Elisa ahora juegan a formar rectángulos con los cuadritos. Laura construyo los rectángulos utilizando los cuadritos así:



1 2 3

1. Dibuja el cuarto rectángulo.
2. ¿Cuántos cuadritos tendrá el quinto rectángulo?
3. ¿Cuántas cuadritos tendrán el rectángulo número 10?
4. ¿Qué operación hiciste para encontrar el número de cuadritos del 10 rectángulo?
5. Describe una regla que indique cómo calcular el número de cuadritos para cualquier número de figuras o lados del rectángulo.
6. Compara la regla que obtuviste con las obtenidas por el resto del grupo.
7. Completa la siguiente tabla, llamaremos lado **a** a la altura y lado **b** a la base:

Número de figuras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	20	50
Lado a	2	3	4										
Lado b	3	4	5										
Número de cuadritos	6	12	20										

8. Explica que tendrías que hacer para encontrar el número cuadrado que corresponde a la figura *n-ésima*.
9. Escribe una fórmula para el número cuadrado correspondiente a la *n-ésima* figura.
10. Comprueba la fórmula que obtuviste

Para observar el proceso de validación de la secuencia didáctica que han llevado a cabo los alumnos, hemos realizado un ejercicio en el cual se confronta el análisis *a priori* con el análisis *a posteriori* (ver la Tabla 1), como resultado de la confrontación el diseño de la secuencia o los supuestos desprendidos del estudio son revisados y en este caso son validados.

Tabla 1. Confrontación del análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*

<table>
<tr><th colspan="4">Actividad 1, 2 y 3 (Parte 1)</th></tr>
<tr><th>Actividades propuestas</th><th>A priori</th><th>A posteriori</th><th>Validación</th></tr>
<tr><td rowspan="2">En esta primera parte compuesta de los ejercicios 1 al 4 de cada una de las actividades mencionadas se le solicita al alumno que complete una serie de figuras, armadas de acuerdo a una secuencia.
Se le pide además que indique el número de cuadritos que forman una figura que ocuparía el decimo lugar en la serie.</td><td>Se pretende que el alumno logre con facilidad la transición de lo aritmético a lo algebraico, tomando como base las sucesiones de números y figuras geométricas</td><td>El alumno logró ver que los ejercicios presentan algún patrón de comportamiento en las figuras, encontraron algunos de los términos que dan continuidad a la sucesión.</td><td rowspan="2">Todos los alumnos respondieron acertadamente a lo que se les solicitaba, ellos encuentran la progresión geométrica de una forma sencilla.
La mayoría de los alumnos inicio la actividad contando los cuadritos ya que las figuras eran pequeñas, después tuvieron que buscar una regla para saber cuantos cuadritos hay y obtener el resultado fácilmente.</td></tr>
<tr><td>Deberá construir sucesiones de números o figuras geométricas a partir de una regla y comprender el cambio que se realiza utilizando variables, simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información.</td><td>Todos los alumnos dibujaron los cuadros que se les solicitaba ellos encuentran una progresión geométrica, completaron todos los ejercicios correctamente siguiendo patrones numéricos y geométricos.</td></tr>
</table>

Tabla 1. Confrontación del análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* (continuación)

Actividad 1, 2 y 3 (Parte 2)			
Actividades propuestas	*A priori*	*A posteriori*	*Validación*
En los ejercicios (5, 6 y 7) propuestos se le pidió al alumno que describa el procedimiento que utilizó al contestar el ejercicio número 4 y que trate de convertirlo en una regla, como punto final que compare lo que escribió con lo descrito por sus compañeros.	El estudiante deberá establecer relaciones entre las cifras o términos de una operación aritmética para producir o verificar resultados entre los datos que aparecen en las actividades.	Encontraron la regla de la actividad 1 es multiplicar el lado por lado. Desde esta actividad el alumno llamado Rigo alcanza a relacionar letras para encontrar una regla general LxL En la actividad 2 la regla que explicaron todos fue sumar cada cuadrito de la figura. multiplicar A x b Para la actividad 3 los alumnos en esta parte todos iniciaron con la regla de multiplicar la base por la altura y la alumna Carolina llego a expresarlo con variables.	La mayoría de estudiantes alcanzan a estructurar una regla sencilla para dar respuesta a los ejercicios propuestos. Uno de los estudiantes incluso presenta una regla a través de una fórmula.
Actividad 1, 2 y 3 (Parte 3)			
Actividades propuestas	*A priori*	*A posteriori*	*Validación*
En estas actividades se le pide al alumno obtener una regla o fórmula para aplicarla a la tabla que han completado. Se establece un consenso a través de la comparación de la regla que obtuvieron con las obtenidas por el resto del grupo. Se quiere llegar a la construcción	El aprendizaje del álgebra para los estudiantes nace de la necesidad de trabajar con números de los cuales desconocen su valor, así que le asignamos variables para poder hacer operaciones como sumas, restas, multiplicaciones, divisiones. El alumno puede desarrollar por medio del estudio del álgebra, cómo poder extraer información de cuadros, tablas y comprender fórmulas y	Construyó y comprendió la sucesiones de números o figuras geométricas a partir de una regla y percibo el cambio que se realiza utilizando variables, simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información, mucho más útil El alumno logro llegar a generar una regla para llegar a la solución de las actividades, utilizaron letras para generar la	El alumno comprende que operación utilizar pero se le dificulta un poco percibir en que ocasión utilizar las operaciones y en lo general llego a definir y encontrar como aplicar y utilizar las tablas siguiendo los patrones numéricos. Los alumnos contestaron que contar los cuadritos pero para encontrarlo con facilidad seria multiplicar lado por lado.

de la explicación sobre cómo encontrar el número de cuadritos que está conformado la *n-ésima* figura y así como encontrar una regla para ellos.	saber utilizarlas. Se pretende que el estudiante llegue a generalizar una regla o fórmula para la solución en una forma sencilla para resolver el problema, lo cual implica el descubrir regularidades utilizando variables.	fórmula general sustituyeron la letra por los valores, y llegaron a descubrir la regularidad de las figuras, por ejemplo el alumno Rigo obtuvo la regla utilizado letras: multiplicar L x L Para otro alumno la respuesta lo represento así: multiplicar lado x lado $\begin{array}{r} 10 \\ \times 10 \\ \hline 100 \end{array}$	El estudiante desarrollo los conocimientos que trae de la primaria con el cual puede aplicar lo aprendido con enseñanzas nuevas, como la contar, restar, multiplicar y representar una regla general utilizando variables.

Fuente: Adaptada de "Secuencia didáctica para facilitar la transición entre la aritmética y el álgebra", de A. Pérez, 2012, pp. 64-66.

Conclusiones

Al término de la primaria, el alumno tiene conocimientos aritméticos, y un poco de algebraicos, aunque no están definidos como tal, cuando el alumno ingresa a la escuela secundaria, se inicia formalmente con la enseñanza del álgebra lo que implica el pasar de lo aritmético a lo algebraico; comienza con el manejo de conceptos algebraicos, y posteriormente el alumno conoce cómo debe aplicarse, sin embargo este transito no siempre se logra, en esta investigación partimos de ese hecho.

De acuerdo con lo investigado y con la secuencia didáctica propuesta se llego a la conclusión que a los alumnos se les facilita este transito mediante la construcción de figuras geométricas y tablas con patrones numéricos. El grupo de alumnos que participo en el las puestas en escena de la secuencia didáctica, fue capaz de entender el proceso que necesitaba realizar, con lo cual se facilita el tránsito entre lo aritmético a lo algebraico, el trabajo realizado consistió en percibir patrones y así como expresar y escribir la regla de este patrón mediante las actividades propuestas, las cuales involucran los esquemas numéricos y geométricos.

Los alumnos pudieron detectar semejanzas y diferencias entre las figuras geométricas propuestas y los números, así como generalizar operaciones aritméticas partiendo de casos particulares hasta llegar a formular una regla general. La idea que llegan a concebir los alumnos es que es posible operar con la literal que representa una medida cualquiera, de este modo se inicia también el trabajo con expresiones algebraicas equivalentes. Se puede seguir un proceso similar para otras fórmulas, como las del área del cuadrado y del rectángulo. Por lo tanto, a través del trabajo con la secuencia didáctica que diseñamos se pudimos obtener elementos de análisis que nos permiten mostrar del tránsito de lo aritmético a lo algebraico.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. En D. Fregona (Trad.), Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 61-97). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Pérez, A. (2012). *Secuencia didáctica para facilitar la transición entre la aritmética y el álgebra*. Tesina no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas. México.

LA EVALUACIÓN COMO OPORTUNIDAD DE MEJORA PARA LOS SEMINARIOS REPENSAR

Adriana Gómez Reyes
CCH Sur, UNAM México
CECyT 13, IPN
orodelsilencio@yahoo.com.mx

Resumen. Los Seminarios Repensar tienen la intención de acercar a investigadores educativos y maestros en diferentes materias: Matemáticas, Bioquímica, Cultura Financiera y Comunicación. Este planteamiento se hace a través de un diálogo entre investigadores y maestros a través de videoconferencia en una comunidad virtual. Como red responsable de los Seminarios, tenemos la necesidad de mejorarlos, por lo que buscamos su evaluación a través del uso de herramientas como rúbricas y listas de cotejo.

Palabras clave: evaluación, proceso de mejora, seminario, videoconferencia.

Abstract. Rethinking Seminars are intended to get close educational research and teaching in several subjects, namely Mathematics, Biochemistry, Financial Culture and Communication. This approach takes place through a dialogue between researchers and teachers via videoconference in virtual communities. As organizers of the Seminars, we have the need of improved them, looking for its assessment through tools like rubrics and checking lists.

Key words: assessment, process improvement, seminar, videoconference

Introducción

El Seminario Repensar las Matemáticas (SRM) viene desarrollándose desde hace varios años, actualmente se desarrolla el 8° ciclo, completando más de 50 sesiones, disponibles en la página de la Red de Investigación e Innovación en Educación Estadística y Matemática Educativa (RIIEEME). Su objetivo es vincular los resultados de investigación con la práctica docente y para ello se sirve de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC), particularmente de la videoconferencia y las comunidades virtuales. Con cada sesión se constituye un módulo, el cual consta del documento de referencia (producto de investigación) que aporta el investigador, un video con el diálogo entre este y un profesor (transmitido en vivo por videoconferencia e internet y grabado para consultas posteriores), y el foro de interacción entre el investigador y los participantes en el SRM. A partir de esta experiencia se han generado nuevos Seminarios Repensar (SR) en otras disciplinas, actualmente se encuentran en su segundo ciclo el Seminario Repensar la Bioquímica (SRBQ), el Seminario Repensar la Cultura Financiera (SRCF) y el Seminario Repensar la Comunicación (SRC).

Estos seminarios cuentan con características propias de una Innovación Educativa (Ortega, 2007); viéndolos desde esta perspectiva, se vuelve indispensable considerar los indicadores que permiten hacer un seguimiento de estos proyectos para observar sus avances y alcances (Dander, Suárez y Torres, 2012).

En el año 2010 el Instituto Politécnico Nacional abrió la convocatoria para proyectos multidisciplinarios los cuáles tienes como finalidad promover la investigación a través de redes multidisciplinarias y con colaboración de distintas unidades académicas. Aprovechando el acercamiento que se da entre estos proyectos con la Innovación Educativa se registró un proyecto que consta de siete módulos, cuatro módulo disciplinares, uno de cada uno de los SR (Matemáticas, Bioquímica, Cultura Financiera y Comunicación) y otros tres que funcionan como transversales y sirven de apoyo a los módulos disciplinares. Entre los módulos transversales, se encuentra el correspondiente a la Evaluación. Cada uno de los módulos del Proyecto Multidisciplinario funciona como un proyecto de investigación, manteniendo la relación entre todos ellos, pero con preguntas propias. Este trabajo se enfoca en una de las preguntas de investigación planteadas por el módulo de evaluación: *¿Cómo evoluciona la evaluación al pasar del SRM a los otros SR?*

Marco teórico-metodológico

La evaluación es un proceso que consiste en la emisión de juicios de valor con respecto a un proceso o producto (Garza, 1994), en particular nos interesa el proceso de evaluación como una oportunidad de mejora (Stufflebeam y Shinkfield, 2005).

La Innovación Educativa es un proceso complejo, por lo que su evaluación debe considerar múltiples factores, la elaboración de indicadores resulta en una ardua tarea, aun cuando se desarrolla por una red entusiasta y bien asesorada (Dander, Suárez y Torres, 2012). La evaluación debe basarse en variedad de instrumentos (Gómez, 2007), que permitan recopilar y organizar información suficiente para tomar las decisiones que logren la mejora del proceso (Flores y Gómez, 2009).

<table>
<tr><th>Dimensión 1</th><th>Dimensión 2</th><th>Dimensión 3</th><th>Dimensión 4</th><th>Dimensión 5</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Diseño de una propuesta de innovación coherente con los criterios de calidad de la docencia.</td><td colspan="3">Desarrollo de formas de actividad conjunta de profesor y estudiantes.</td><td rowspan="2">Uso de las TIC como mediadoras en la ayuda educativa ajustada del profesor al aprendizaje del estudiante y entre estudiantes.</td></tr>
<tr><td>La elaboración del significado y la atribución del sentido.</td><td>Logro de la autonomía y la autorregulación del aprendizaje.</td><td>Favorecer el uso del trabajo cooperativo como instrumento educativo y de apoyo al aprendizaje de los estudiantes.</td></tr>
</table>

Tabla 1. Dimensiones del impacto de la innovación (de Soto, Suárez y Gómez, 2012)

Cuando se pretende evaluar el impacto de la innovación se requiere considerar un marco como el de las dimensiones que se muestran en la Tabla 1, propuestas por Mauri, Coll y Onrubia (2007, citado en Soto, Suárez y Gómez, 2012). Esto impacta en la evaluación tanto de los Seminarios como de los participantes, pues es con ellos donde debemos buscar el impacto de los SR.

El módulo de evaluación definió tres objetivos:

- Evaluación del desarrollo de cada sesión específica.
- Evaluación del Seminario Repensar de manera global.
- Evaluación de los participantes del Seminario Repensar.

Cada una de estas evaluaciones tiene más similitudes que diferencias en los diferentes Seminarios Repensar, aunque se nota una cierta evolución de un ciclo a otro. Aun cuando no se planea un final para los SR, administrativamente requieren de una cierta periodicidad, por lo que se plantean en ciclos anuales, que pueden variar entre 5 y 10 sesiones. La planeación y la evaluación se hacen por ciclos, el SRM está en el octavo ciclo, mientas el resto de los SR comienzan su tercer ciclo.

La evaluación específica de cada sesión, se lleva a cabo a través de una rúbrica y una lista de cotejo. Ambos instrumentos se han conservado sin modificaciones significativas de un SR al otro. La elección de la rúbrica se debe a que esta herramienta tiene como principal ventaja la posibilidad de mostrar a los agentes participantes del proceso, lo que se espera de ellos para lograr el desarrollo en una situación óptima (Gómez, 2007), permitiendo que cada uno haga un análisis de hacia donde debe enfocar sus propios esfuerzos. La rúbrica de las sesiones del SR considera tres momentos de trabajo para cada una de las videoconferencias: previo a la sesión, durante la sesión y posterior a la sesión; describiendo tanto la situación ideal, como la no deseada y una situación intermedia en cada rubro, pero esta se concentra en la responsabilidades del investigador y del profesor dialogante, como principales agentes de la sesión. La lista de cotejo, ejemplificada en la Ilustración 1, se enfoca a lo que sucede durante la sesión, pues es este un momento crítico para el que deben tenerse preparados diferentes objetos y deben atenderse diferentes puntos simultáneos, por lo que este instrumento de evaluación (Flores y Gómez, 2009) permite observar que todo esté listo, a tiempo y en coordinación con otros factores que pueden complicar o ayudar al desarrollo de la sesión. Esta lista de cotejo, a diferencia del instrumento original, incluye el momento en que debe desarrollarse la actividad y quien es el responsable.

Seminario Repensar las Matemáticas. Séptimo ciclo
Coordinación de logística, S49
Responsables: José Luis Torres

Frente a cámaras: BRH, LST
Apoyo en el estudio IPN: JTJ Jaime Torres Juárez, AGR, Adriana Gómez Reyes, CFE, Claudia Flores Estrada, F, Fernanda, MERS,
Apoyo en líneas: Víctor Hugo Luna Acevedo

		SI	No	Responsable
Antes	Compra de agua para los invitados (2 botellas de agua de 0.5L)			AGR
12:00 – 13:00	Pruebas de conectividad de la conexión por videoconferencia			Técnicos IPN
	Explicación del protocolo de la sesión, atención a Luis Radford			BRH, LST
12:30 – 13:00	Entrega de piezas a los técnicos con los nombres de todos los participantes Entrega de semblanza (LST)			CFE (Listo)
	Entrega de 2 DVD para los técnicos, para hacer copias de la sesión			CFE y JLTG
13:00 – 13:30	Control de pantallas – Verificar que aparezcan las piezas y los nombres de los participantes			JTJ
	Control del correo del srm@ipn.mx			AGR
	Control del foro de la RIIEEME http://repensarlasmatematicas.wordpress.com/sesion-s46/			LST y BRH (en sus ipad)

Ilustración 1. Segmento de Lista de cotejo

La evaluación del Seminario en su conjunto se lleva a cabo a través de la caracterización de cada una de la sesiones, para hacer un concentrado de la información total y construir un mapa de cada uno de los ciclos. La caracterización incluye información general, que se conserva de un SR al otro; pero incluyen también aspectos de la investigación que no se pueden conservar de un SR a otro. Actualmente se tiene desarrollado el formato de caracterización del SRM, y se ha concentrado la información de los primeros ciclos, pero se han detectado dos puntos importantes a considerar para pasar a los otros SR:

- la clasificación de la línea de investigación, y
- la clasificación de la temática disciplinar.

La temática disciplinar debe estar definida por la red responsable del Seminario, pero las línea de investigación surgen del análisis de las investigaciones observadas. En el caso de la investigación en Matemática Educativa, éstas líneas están bien definidas por tener algún tiempo que una red de investigadores trabaja en esta línea, en particular se adoptaron las línea de investigación del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV (2008) que se muestran en la Tabla 2, pero en otras áreas (como Cultura Financiera) no existe un grupo de investigación dedicado a la educación de esta área. Es este, un primer punto a observar para el estudio de la transición entre el SRM y los otros SR.

L01	Cognición.
L02	Enseñanza del cálculo y el análisis.
L03	Entornos tecnológicos del aprendizaje de las matemáticas.
L04	Estudios de género en educación matemática.
L05	Formación de profesores de matemáticas.
L06	Pensamiento geométrico.
L07	Pensamiento aritmético y algebraico.
L08	Construcción social del pensamiento matemático.
L09	Didáctica de la estadística y la probabilidad.
L10	Resolución de problemas.
L11	Fundamentos, Historia y Epistemología de las Matemáticas.

Tabla 2. Líneas de investigación.

La evaluación de los participantes tiene como base las entradas en los foros (a cargo de un módulo transversal) y un ensayo que se debe presentar al final del ciclo. Las participaciones en los foros se clasifican con respecto a si son comentarios o preguntas y a la relación como se relacionan con otras entradas. Para evaluar el ensayo se elaboró una rúbrica donde se analizan los puntos que se consideran importantes, como la influencia que las sesiones puedan tener en el trabajo docente. En este punto es donde las dimensiones del impacto de la Innovación (Mauri, et al, 2007 citado en Soto et al, 2012) van marcándose en la evolución del instrumento. En la Tabla 3 se muestra la rúbrica utilizada para evaluar los ensayos correspondientes al SRM.

	Explícitamente	Implícitamente	No se muestra
¿Reconoce una línea de discusión en los foros?	Comentar sobre esta línea, y si se reconoce en solo un foro o si une los de varias sesiones	Hacer explicita esta línea y hacer comentarios tendientes a dar seguridad y ampliar lo que el evaluado sugiere.	Mencionar alguna línea que se reconozca en los foros que pueda estar relacionada con la propuesta del evaluado.
¿Llega a conclusiones a partir del análisis de la línea de discusión en los foros?	Comentar estas conclusiones, y lo bueno que es llegar a ellas, implica madurez en las ideas y confianza independientemente de si estamos o no de acuerdo.	Comentar sobre ideas sugeridas, dar ideas que pudieran apoyarlas o refutarlas según el caso.	Comentar sobre la importancia de llegar a conclusiones, de expresar y sustentar nuestras ideas.
¿Se plantean cambios en la práctica docente?	Comentar sobre el planteamiento.	Comentar sobre los cambios que supone el evaluador y sobre su importancia	Recomendar cómo podría hacerse.

	Explícitamente	Implícitamente	No se muestra
¿Se incorpora algún resultado de investigación revisado en alguna de las sesiones?	Comentar sobre la incorporación de la investigación a la práctica docente.	Comentar sobre la importancia de hacer explícito el uso de los resultados en la investigación.	Recomendar porqué es importante hacerse y ejemplificar sobre cuáles podrían incorporarse.
Presentar un trabajo que vaya más allá de lo planteado en alguna sesión	Comentar sobre la propuesta.	Comentar sobre la propuesta.	Recomendar cómo podría hacerse.
¿Incluye opiniones?	Sugerir cómo avanzar hacia una argumentación más sólida.	Sugerir cómo avanzar hacia una argumentación más sólida.	Recomendar cómo podría hacerse.
¿Incluye una argumentación clara y precisa?	Comentar sobre la propuesta		Recomendar cómo podría hacerse.

Tabla 3. Rúbrica para la evaluación de los Ensayos del SRM.

La diferencia entre un SR y el otro tiene que ver con lo que la red responsable considera más importante, por ejemplo, algún módulo considera cuestiones más conceptuales, mientras que otro resalta la metodología de enseñanza. Los puntos detectados como diferencias serán los que nos brinden la información para trasladar la evaluación de un SR a otro. Por ejemplo, el SRBQ utiliza un el documento de la Ilustración 2 para la autoevaluación de trabajo en foros.

Aspecto	Algunas veces (1)	La mayoría de las veces (2)	Siempre (3)
Comparto mis ideas			
Mis aportes son originales			
Estoy abierta(o) a la interacción			
Leo los aportes de los otros			
Mis aportes son concisos			
Escribo en altas y bajas			
No me aparto del tema del foro			
Sustento mis aportes			
Integro mis evidencias de trabajo			

Ilustración 2. Autoevaluación del trabajo en foros.

La detección de los puntos críticos a estudiar es el primer paso, alcanzado ya por nuestro trabajo, actualmente nos encontramos en la recopilación de la información siendo el análisis de dicha información lo que nos permitirá responder cabalmente.

Resultados

Los puntos a analizar para estudiar la transición que sufre la evaluación de un seminario a otro, se enlistan a continuación:

- Clasificación de los contenidos en la caracterización de las sesiones.
  - Contenidos disciplinares
  - Líneas de investigación
- Análisis de los ensayos finales elaborados por los participantes.
  - Puntos de interés

Los avances que se tienen actualmente corresponden a la detección de estos puntos de análisis y de su exploración en el SRM, por ser este el que cuenta con más información. Hasta el momento se ha realizado la caracterización de 36 sesiones del SRM sin lograr aún la conformación del mapa del Seminario, por cantidad de información y la necesidad de que éste se lea con suficientemente facilidad.

Conclusiones

El planteamiento de evaluación del presente trabajo debe considerarse como un proceso dirigido a la operatividad de los Seminarios, así como al paso de la experiencia del SRM a los otro Seminarios Repesar.

La respuesta a nuestra pregunta de investigación *¿Cómo evoluciona la evaluación al pasar del SRM a los otros SR?* está reflejada justamente en las observaciones que se hacen a través de la construcción y aplicación de distintos instrumentos.

En cuanto al desarrollo de cada sesión, la lista de cotejo utilizada en el SRM a pasado a formar parte del resto de los seminarios. Para la caracterización de los otros Seminarios no se ha logrado superar la falta de líneas de investigación establecidas. Para la evaluación de los participantes se han dado coincidencias (cómo el uso de rúbricas) pero algunos Seminarios han decidido integrar nuevos instrumento.

La evolución de la evaluación del SRM al resto de los SR, ha subrayado las coincidencias de los diferentes Seminarios tanto como las diferencias, las cuáles están dadas tanto por las cuestiones disciplinares como por los puntos destacados por la red responsable.

La organización adecuada de la información permite la funcionalidad de procesos que requieren el trabajo coordinado de los diferentes agentes, en particular de los miembros de las redes responsables. Pero el principal aprendizaje que deja esta experiencia, es, justamente la necesidad de instrumentos de evaluación que permitan la organización y adecuada fluidez del proceso innovador, pero que evolucione y se perfeccione en base a la experiencia y a la propia evaluación.

Agradecimiento. A partir de 2011, a través de la Secretaría de Investigación y Posgrado, el Instituto Politécnico Nacional (IPN), abre la posibilidad de registro de los llamados Proyectos multidisciplinarios (Secretaría de Investigación y Posgrado, IPN, 2011). Este formato fue considerado completamente acorde para los SR

Referencias bibliográficas

Dander, A., Suárez, L., y Torres, J. (2012). Propuesta para el diseño y construcción de un sistema de indicadores de innovación educativa. *Congreso Internacional de Educación. Evaluación.* Tlaxcala: Universidad Autónoma de Tlaxcala.

Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV. (2008). *Líneas de investigación. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.* Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/lineasinv/lineasinv.php en septembre 2009

Flores, H., y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática, 2*(2), 117-142.

Garza, V. (1994). La evaluación educativa. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *9*(23), 807-816.

Gómez, A. (2007). *Evaluación en actividades con uso de tecnología.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Ortega, P. R. (2007). Modelo de Innovación Educativa. Un marco para la formación y el desarrollo de una cultura de la Innovación. *Revista Iberoamericana de Educación a Distacia,10*(1), 145-173.

Secretaría de Investigación y Posgrado, IPN. (2011). *Convocatoria Multidsiciplinarios.*, Sistema de Administración de Programas y Proyectos de Investigación. Recuperado de http://www.sappi.ipn.mx en marzo 2012.

Soto, A., Gómez, A. y Suárez, L. (2012). La innovación educativa centrada en la docencia. *Congreso Internacional de Educación. Evaluación.* Tlaxcala: Universidad Autónoma de Tlaxcala.

Stufflebeam, D. L. y Shinkfield, A. J. (2005). *Evaluación sistemática. Guía teórica y práctica* . España: Temas de educación Paidos.

TRANSFORMACIONES LINEALES. UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE

Isabel Maturana Peña, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. El artículo que presentamos a continuación corresponde a una investigación en proceso en didáctica de la matemática relacionada al concepto de transformación lineal; bajo la teoría APOE como marco teórico y un diseño metodológico correspondiente a un estudio de caso múltiple. A partir de esta investigación se obtendrá documentación sobre el esquema del concepto Transformación Lineal reconociendo tres interpretación en este, es decir interpretación matricial- interpretación geométrica – e interpretación funcional, las cuales son articuladas por el concepto de combinación lineal, así proponemos una forma para investigar diversos conceptos fundamentales para el álgebra lineal.

Palabras clave: algebra lineal, transformación lineal, apoe

Abstract. The article below corresponds to a research process in Didactics of mathematics related to the concept of linear transformation; under theory APOE as theoretical framework and methodological design corresponding to a multiple case study. From this research will provide documentation on the schema of the linear transformation concept recognizing three interpretation in this, i.e. interpretation matrix - geometric interpretation - and functional interpretation, which are articulated by the concept of linear combination, so propose a way to investigate various fundamental concepts for linear algebra.

Key words: linear algebra, linear transformation, apos

Introducción

Nos proponemos investigar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para la construcción y o reconstrucción del concepto transformación lineal; reconoceremos, en el concepto, componentes de origen geométrico, funcional y matricial, entendiendo cada uno de estos componentes como diferentes interpretaciones de una misma definición. La definición del concepto transformación lineal, desde lo que hemos llamado su interpretación funcional, corresponde a: sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo K. La función $T: V \to W$ se llama Transformación Lineal de V en W si las dos propiedades siguientes son verdaderas para todo u y v en V y para cualquier escalar c en K.

$$T\,(u+v)= T\,(u) + T\,(v)$$

$$T\,(cu)= c\,T\,(u)$$

(Larson y Edwards, 2004)

Esta definición planteamos entenderla como una síntesis matemática de la linealidad, que captura en su forma mas simple, y restringido a R, R^2 y R^3, que corresponde en cierta forma, a un tipo especifico de transformaciones de figuras geométricas; por otra parte esta síntesis con carácter funcional evoluciona convergiendo a las matrices a modo de representación, por lo que pensamos es apropiado documentar un enfoque enseñanza – aprendizaje globalizador del concepto. Cada interpretación está siendo descompuesta en sus elementos fundamentales y articulados por el concepto matemático de combinación lineal; de esta forma nuestro estudio propone, y basándose en la metodología propia de la teoría APOE, una descomposición genética, DG, del concepto transformación lineal que incorpore las tres interpretaciones del concepto, geométrica – funcional - matricial.

La enseñanza del álgebra lineal es un tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemática para carreras como ingeniería y licenciatura en ciencias; por otra parte existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que poseen los estudiantes para comprender los conceptos relativos al álgebra lineal, por ejemplo Dorier y su equipo de investigadores han logrado establecer un tipo de fenómeno propio del álgebra lineal a través de la descripción del obstáculo del formalismo (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski,1997). Por otra parte, según Dubinsky, Dauterman, Leron y Zazkis (Dubinsky, Dauterman, Leron, y Zazkis, 1994) el problema central en el aprendizaje de los conceptos en esta materia radica en que, el estudiante debe hacer uso de conceptos abstractos, pero su tendencia es ha trabajar con procedimientos mecánicos, limitando su comprensión sobre los conceptos involucrados. Esto pone en tela de juicio el conocimiento alcanzado de la enseñanza de estas materias, y hay quienes piensan que, en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra lineal no son exitosos.

En particular sobre el concepto de transformación lineal la documentación hasta ahora obtenida da cuenta que representa un obstáculo mayor; son diversas las investigaciones en didáctica de la matemática que han abordado su problemática de aprendizaje, gran parte de las perspectivas sitúan la problemática alrededor del obstáculo del formalismo. Algunas investigaciones de interés sobre el tema; Molina y Oktaç en el 2007, en su estudio llamado "Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico", recaban evidencias sobre la problemática de aprendizaje del concepto transformación lineal centran su atención desde la perspectiva intuitiva, considerando la teoría sobre la intuición y los modelos intuitivos, el trabajo identifica y determina el grado de interferencia de aquellos modelos que pudieran tener algunos estudiantes, que sustituyen al concepto de transformación lineal, en un contexto geométrico. Bajo la interpretación geométrica encontramos la investigación realizada en el año 2006 por Uicab y Oktaç "Transformaciones Lineales en un ambiente de geometría dinámica", la investigación da cuenta de la ausencia de razonamiento teórico en los estudiantes, al resolver el problema de extensión lineal, consistente en determinar una transformación lineal por medio de las imágenes de los vectores de una base, el marco teórico utilizado es la aproximación teórica del pensamiento práctico, versus el pensamiento teórico. Ambas investigaciones recopilan evidencias sobre el aprendizaje del concepto transformación lineal desde una perspectiva que incluye lo geométrico como un camino a la visualización del concepto, concluyendo que persisten los problemas de aprendizaje. En el año 2010, Roa y Oktaç, presentan su trabajo; "Construcción de una Descomposición Genética: Análisis Teórico del Concepto Transformación Lineal", la investigación se sustenta en la teoría APOE proporcionó como resultado de investigación una descomposición genética del concepto, que consideró dos formas de construcción, uno considerando el concepto de función asimilando el concepto de espacio vectorial y la otra donde el concepto transformación lineal es un caso particular del concepto de función, ambas basadas en la interpretación funcional del concepto transformación lineal.

Las investigaciones antes citadas dan cuenta de los problemas de aprendizaje en diferentes aspectos relativos al concepto de transformación lineal, a partir de estas evidencias proponemos una mirada más global al concepto incorporando tres interpretaciones arraigadas a los aspectos: Geométrico- Funcional- Matricial, dichas presentaciones estarán articuladas por el concepto de combinación lineal, esta hipótesis se sustenta en que él álgebra lineal posee dentro de sus orígenes epistemológicos una componente geométrica, y una fuerte componente teórica que la enriquece, con un carácter globalizador.

Es desde una perspectiva cognitiva que pretendemos abordar la problemática y algunas de las preguntas que proponemos como una forma de aproximación a esta son: *¿Es posible que incorporando diferentes interpretaciones del concepto transformación lineal, se logre un aprendizaje más completo? y ¿Es posible que al considerar aspectos globales del concepto transformación lineal, podamos modelar de mejor forma el comportamiento del obstáculo del formalismo?* Por otra parte *¿Cuáles son las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para comprender el concepto de transformación lineal?* La problemática a tratar, a pesar de tener componentes epistemológicos involucrados, son los factores de tipo cognitivo los que predominan, por lo que una propuesta del tipo cognitiva es apropiada para desarrollar la investigación.

Los datos proporcionados por las diferentes investigaciones en el área señalan incuestionablemente que las transformaciones lineales son un tema cuyo aprendizaje decididamente no se logra, por lo general en los cursos de álgebra lineal; pensamos que una aproximación adecuada y completa proviene de los estudios que ha realizado el grupo RUMEC, entre otros.

Planteamos que la dificultad del problema está en comprender el objeto matemático en su totalidad; la que involucra aspectos geométricos- funcionales y matriciales. Como hemos mencionado algunos de estos aspectos han sido abordados, por ejemplo; en el año 2010, Roa y

Oktaç investigaron el concepto transformación lineal en su interpretación funcional, por otra parte, la interpretación geométrica del concepto aparece reportada por Molina y Oktaç en el año 2007. Sobre Documentación relacionada con el concepto transformación lineal en su interpretación matricial existen escasos reportes explícitos sobre la forma en que esta versión es aprendida por los estudiantes. Por lo que hemos priorizado dentro de las etapas de investigación esta interpretación del concepto.

Nuestra hipótesis de trabajo es que el aprendizaje (la construcción) del concepto transformación lineal se alcanza de forma más completa, si se transita entre lo práctico y lo teórico, considerando a la componente geométrica como una forma de visualización de la transformación lineal, de modo que el estudiante tenga la oportunidad de recurrir primero a su conocimiento ingenuo, no formal, de graficación y luego, en un ambiente más conocido, preocuparse de la buena definición de la interpretación funcional de trasformación lineal, para poder alcanzar de forma eficaz a la interpretación matricial de la transformación lineal, la cual constituye su forma más eficiente de presentación.

El marco teórico APOE

Hemos decidido hacer uso de la teoría APOE como sustento teórico para determinar las construcciones mentales necesarias para construir un esquema del concepto de transformación lineal en tres interpretaciones. Pensamos que este marco teórico proporciona el tipo de evidencias necesarias para el logro de los objetivos de esta investigación. A continuación describiremos las componentes generales de la teoría.

La teoría APOE, fue creada por Dubinsky (1991), y sus fundamentos se encuentran en la teoría Piagetana sobre la construcción del conocimiento, APOE asume el concepto de *abstracción reflexiva* de Piaget, el cual originalmente propone describir el desarrollo del pensamiento lógico infantil, pero en la teoría APOE se extienden los alcances de la abstracción reflexiva para comprender el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

Dubinsky de esta forma utiliza la idea *abstracción reflexiva*, dada por Piaget, para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto matemático determinado, bajo la hipótesis que "*el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas*" (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276).

El propósito central de Dubinsky con esta teoría es *entender cómo las matemáticas se aprenden*, bajo el supuesto que las nociones claves que construyen el conocimiento están, las de "acción, objetos, procesos y esquemas" (APOE).

Una acción es cualquier transformación física o mental de un objeto para obtener otro objeto, cuando el sujeto reflexiona sobre una acción, él puede comenzar a establecer un control consciente sobre ésta. Entonces la acción es interiorizada y ésta se convierte en un proceso. Se define un objeto a partir de la encapsulación de uno o varios procesos. Un objeto puede ser des encapsulado para obtener un proceso del cual surgió. Finalmente, la noción de esquema se adopta e interpreta como una colección coherente de objetos y procesos y otros esquemas.

Los esquemas son las construcciones más complejas que podemos determinar de un fragmento de conocimiento matemático, al mismo tiempo, son estructuras inacabadas que evolucionan por la asimilación de un nuevo objeto y la acomodación de las estructuras por las nuevas relaciones que entabla el objeto. Una característica fundamental de los esquemas es su coherencia, que alude a la capacidad del individuo para establecer si un esquema le permite solucionar un problema particular.

Es el propósito de esta tesis dar cuenta de la evolución de los esquemas inmersos en el concepto transformación lineal, desde una perspectiva que integra tres esquemas que coordinados proponen dar luces del esquema que corresponde al concepto de transformación lineal; como hemos mencionado hasta ahora los reportes existentes sobre el tema han tratado parcialmente estos esquemas y las aproximaciones desde la teoría APOE para el concepto de transformación lineal consideraron la documentación desde la perspectiva funcional del concepto.

Diseño metodológico

Esta investigación propone comprender los procesos mentales que subyacen a las estrategias de aprendizaje del álgebra lineal en estudiantes universitarios. Particularmente, nos interesa describir los mecanismos y las construcciones mentales que un estudiante realiza para aprehender el concepto de transformación lineal; para ello, se utilizará la teoría cognitiva APOE (acción-proceso-objeto-esquema), la cual posee su ciclo de investigación, el cual nos proporcionara evidencias empíricas de aquellos mecanismos y construcciones. Como es sabido, las estructuras mentales que un individuo ha desarrollado previamente determinan la construcción de nuevos conceptos, en particular, los matemáticos. Para examinar estos procesos pensamos se requiere de registros de observación de discursos, que permitan el análisis de los actos y procedimientos que son realizados por los estudiantes, por lo que una aproximación adecuada es el estudio de casos múltiple.

Estudio de casos múltiple

Consideramos pertinente utilizar un diseño metodológico de estudio de casos múltiple, pues son particularmente apropiados para realizar investigaciones en un determinado periodo de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad de su enseñanza-aprendizaje (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992), permitiendo una aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo. Por otra parte es preciso dejar en claro que nuestras conclusiones provendrán de la teoría APOE.

Las unidades de estudio serán alumnos universitarios que hayan finalizado exitosamente el curso de álgebra lineal de carreras como: ingeniería, licenciatura en ciencias y pedagogía en matemática; en cuyo avance curricular no hayan reprobado las asignaturas de álgebra básica y cursen a lo sumo el sexto semestre de su primera carrera, para descartar en lo posible que sus construcciones mentales se limiten acciones y/o procesos. Por otra parte se considera un número similar de mujeres y de hombres, para evitar sesgos indebidos en el estudio.

A cada uno de los casos de estudio se aplicará el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como Descomposición Genética, DG; un diseño, basado en la DG teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, & Thomas, 1996). La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción de las construcciones mentales que realizan los estudiantes; y a partir del análisis de los datos obtenidos, se lo puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos. Una DG propiamente tal es el resultado de la aplicación completa de las tres componentes de ese ciclo, que permite documentarla con los datos empíricos.

Por otra parte se trabajará con una unidad de análisis que se determinara, atendiendo a los criterios antes mencionados y se diseñarán registros de observación y protocolos de entrevistas semi-estructuradas, previstas por la teoría las cuales se video grabarán. Ver tabla 1 donde se resume la información.

Tipo de estudiante	Caso1 Ingenieria Civil	Caso2 Licenciatura En ciencias	Caso3 Pedagogía En matemática
Estudiante Universitario que cursa- o ha cursado álgebra lineal	Cuestionario (1) Entrevista(3) Registros de observación(3)	Cuestionario (1) Entrevista(3) Registros de observación(3)	Cuestionario (1) Entrevista(3) Registros de observación(3)

Tabla 1

Como este ciclo de investigación propio de la teoría facilita documentar mediante una descripción detallada y próxima la construcción de los conceptos matemáticos que realizan los estudiantes; suponemos que la investigación proveerá, además, de elementos para una comprensión más acabada de conceptos involucrados o subyacentes al de transformación lineal, como son los de isomorfismo, y también acerca del concepto de diagonalización, utilizado en diversas ramas de la Matemática.

Resultados esperados

Aportar a la didáctica de la matemática información clara y precisa sobre la forma en que los estudiantes construyen el concepto de transformación lineal y los conceptos subyacentes a el, estableciendo un sustento teórico que permitirá la reproducibilidad de los resultados.

Ofrecer un conjunto de sugerencias didácticas que contribuyan a la descripción de los mecanismos mentales utilizados para el aprendizaje del concepto transformación lineal entendido este como una triada de complejidades geométricas- funcionales y matriciales; teniendo como marco teórico referencial la teoría APOE, desde la cual es posible elaborar un programa de auto-evaluación docente, proponer la realización de Seminarios de docencia con el propósito de comunicar los resultados.

Publicar y difundir la forma los resultados de esta forma de aproximación a los conceptos referidos al álgebra lineal.

Aportar a la didáctica del álgebra lineal una forma para estudiar el comportamiento del fenómeno del formalismo desde la teoría APOE como eje fundamental; por medio de la integración de múltiples interpretaciones de los conceptos, estas (interpretaciones) serán determinadas por los investigadores basados en la epistemología propia de los conceptos y que deberían ser articulados por conceptos basales y propios de la teoría.

Trabajo avanzado

En relación al trabajo avanzado hemos considerado pertinente presentar dos aspectos en desarrollo de la investigación, el primero se relaciona con la recopilación de antecedentes sobre investigaciones y/o publicaciones referidas a las dificultades de aprendizaje del concepto transformación lineal; el segundo aspecto que determinamos importante es el objeto matemático en el estudio, y para complementar esta mirada se realizo una revisión de textos de álgebra lineal de donde se obtuvo información acerca de la forma de presentación del concepto. Por otra parte se han construido dos descomposiciones genéticas hipotéticas, una sobre la interpretación matricial del concepto transformación lineal y otra sobre la interpretación funcional del concepto, la cual no responde a los supuestos propuestos por

Roa; los reportes de estos avances serán publicados prontamente. Para finalizar formularemos algunas nociones generales sobre el elemento articulador.

Para la interpretación matricial hemos desarrollado una investigación que estudió las construcciones mentales para la reconstrucción del Teorema del Cambio de Base para Vectores (TCBV), se logró documentar las dificultades que los estudiantes poseen en la reconstrucción del TCBV; en concreto se detecto dificultades en la coordinación de los procesos de construcción de la matriz de coordenadas y del teorema como objeto matemático. Esta pendiente la componente geométrica y la articulación del diseño general.

La combinación lineal, elemento articulador

Hemos decidido destacar esta definición pues en ella se aprecia el concepto que proponemos como articulador de estas interpretaciones. Consideremos la definición simplificada de Transformación Lineal, donde las dos propiedades que la definen se reducen en una de la siguiente forma:

$$T\ (c\ u+d\ v)= c\ T\ (u) + d\ T\ (v),$$

Para todo *u* y *v* en *V* y para cualquier escalar c, d *en* K, (Larson y Edwards, 2004).

Recordemos la definición de combinación lineal propuesta en el Larson, diremos que un vector $v \in V$, donde V es un espacio vectorial sobre K, es combinación lineal de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ subconjunto de V si existen escalares en el cuerpo, no todos nulos tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n$. (Larson y Edwards, 2004). Dicha definición restringida a la combinación lineal de dos vectores se reduce a $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, de esta forma, el concepto de combinación lineal esta inmerso en la definición de transformación lineal, y es lo que caracteriza este tipo de funciones.

Para la interpretación geométrica del concepto transformación lineal, se tiene que la combinación lineal es un elemento que se preserva; y se logra su comprensión a través del teorema fundamental para el álgebra lineal, es decir cuando logramos entender que en una base se define el espacio vectorial, por lo que es posible definir la transformación lineal conociendo el comportamiento de las bases de los espacios vectoriales relacionados por la transformación lineal; este teorema permite para una aproximación geométrica los elementos fundamentales, pues simplifica la descripción de los vectores a los elementos basales.

Desde otra perspectiva este elemento articulador, la combinación lineal, se encuentra presente en los sistemas de ecuaciones lineales lo que nos permite transitar hacia las matrices, pues es posible reescribir el sistema de ecuaciones como una ecuación matricial. La descripción matricial del sistema corresponde a su vez a la búsqueda de la preimagen de un vector descrito en términos de sus coordenadas.

Para la interpretación matricial hemos de reconocer en la definición de la matriz asociada a la transformación lineal algunos elementos de interés, para ello deberemos recordar que dada una $T:V \to W$ transformación lineal entre dos espacios vectoriales sobre K, finito dimensiónales V y W. Sea $B = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ una base de V y $B' = v_1', v_2', v_3', \ldots, v_m'$ una base de W. La matriz A de orden $m \times n$ cuyas columnas son: $T(v_1)_{B'}, T(v_2)_{B'}, T(v_3)_{B'} \ldots T(v_n)_{B'}$ es la única matriz que satisface $T(v)_{B'} = A\, v_B$, para todo $v \in V$.

Uno de los elementos de interés es $T(v)_{B'}$, que corresponde a las coordenadas del vector v en la base B', expresado en términos de la combinación lineal, las coordenadas corresponden a los escalares que hacen posible expresar un vector como combinación lineal de otros. De esta forma estamos cerrando este ciclo donde cada una de las interpretaciones del concepto TL se encuentra relacionada estrechamente al concepto de combinación lineal.

Estos son algunos de los elementos puestos en juego para describir una descomposición genética del concepto transformación lineal en sus tres interpretaciones. Entender los elementos emergentes es parte de la tarea por realizar.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Arnal, J., Del Rincón, D., Latorre, A. (1992). *La investigación colaborativa. En Investigación Educativa: Fundamentos y Metodología*. Editorial Labor: Barcelona, España.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet , R. y Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire: L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble, 105-147.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. y Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. *Educational studies in Mathematics*, 27, 267-305.

Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273–280). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Larson, R. y Edwards, B. (2004). Transformaciones lineales. En Noriega (Eds.), *Introducción al Álgebra Lineal* (pp. 353-399).México. Editorial Limusa.

Molina, J. Oktac, A. (2007). Concepciones de la Transformación Lineal en un Ambiente Geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 241-273.

Roa, S., Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13* (1), 89-112. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Uicab, R. y Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9* (3), 459-490.

O PAPEL DA ABSTRAÇÃO NO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Lilian Nasser
Universidade Federal do Rio de Janeiro IM- UFRJ Brasil
CETIQT/SENAI
lnasser@im.ufrj.br

Resumo. A transição do pensamento matemático elementar para o avançado gera dificuldades em alunos do Ensino Superior, pois requer a construção de fundamentos intuitivos para conceitos matemáticos mais elaborados. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva, levando à abstração. Três processos contribuem para a abstração: representação, generalização e síntese. Neste trabalho, a diferença entre generalização e abstração é esclarecida, por meio de exemplos. Também serão abordados os três tipos de abstração destacados por Piaget: as abstrações empírica, pseudo-empírica e reflexiva. Os alunos devem perceber que não basta verificar uma afirmativa para alguns exemplos, mas é preciso justificá-la de modo genérico, chegando à abstração para casos mais gerais

Palabras clave: pensamento matemático avançado, abstração, aprendizagem

Abstract. The transition from the elementary to the advanced mathematical thinking generates difficulties in university students, since it requires the construction of intuitive foundations for more elaborated mathematical concepts. This transition requires a cognitive reconstruction, leading to the abstraction. Three processes contribute for the abstraction: representation, generalization and synthesis. In this work, the difference between generalization and abstraction is clarified, by means of examples. Also, the three types of abstraction detached by Piaget will be focused: the empirical, pseudo-empirical and reflexive abstractions. Students must perceive that it is not enough to verify the validity of an affirmation for some examples only, but it must be justified in a generic way, leading to the abstraction for more general cases.

Key words: advanced mathematical thinking, abstraction, learning

Introdução

Alunos ingressantes no Ensino Superior apresentam muitas dificuldades nas disciplinas da área de Matemática, notadamente em Cálculo e Álgebra Linear. Essas dificuldades se devem, principalmente, a lacunas na aprendizagem da Matemática básica e ao caráter abstrato dos conceitos abordados nessas disciplinas. O ensino, na grande maioria das disciplinas do Ensino Superior, segue o esquema 'teorema – demonstração – exemplo – aplicação'. Esse modelo tem diversas vantagens e até funciona bem para alunos de graduação em Matemática, mas não atende à grande maioria dos alunos da licenciatura ou dos demais cursos que têm o Cálculo como disciplina de serviço. Dreyfus (1991) relata várias pesquisas que mostram os problemas de aprendizagem gerados por esse modelo de ensino.

Muitas vezes os professores do Ensino Superior não atentam para o fato de que os alunos necessitam fazer uma transposição cognitiva para construir uma aprendizagem significativa.

Em geral, na Escola Básica, o aluno toma conhecimento dos resultados principais da Matemática já prontos, sem ter a oportunidade de acompanhar sua evolução histórica. Segundo Tall (1991),

> [...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições. (Tall, 1991, p. 20)

Essa transição requer uma reconstrução cognitiva, cuja ausência contribui para as dificuldades enfrentadas pelos alunos calouros, ao lidar com as abstrações. Enquanto na Matemática elementar os conteúdos seguem uma coerência, na Matemática avançada, os alunos devem construir entidades abstratas, por meio de deduções a partir de definições formais.

Abstração é definida no Dicionário Aurélio, como o *´ato de separar mentalmente um ou mais elementos de uma totalidade complexa (coisa, representação, fato), os quais só mentalmente podem subsistir fora dessa totalidade´*. De acordo com essa definição, a abstração em Matemática é uma habilidade que nem sempre é dominada pelos alunos ingressantes no Ensino Superior, e seu desenvolvimento deve ser estimulado pelos professores das disciplinas básicas.

Desenvolvendo a habilidade de abstração

A habilidade de abstração deve ser desenvolvida desde os primeiros anos de escolaridade. Os conceitos de número, reta e quadrado são exemplos de objetos matemáticos que dependem de uma abstração.

Três processos contribuem para a abstração: representação, generalização e síntese. No caso dos números, por exemplo, é imprescindível que os alunos entendam a diferença de *representação* de um número natural e de um número racional: enquanto o número natural tem uma representação numérica única, um número racional representa uma classe de equivalência, com infinitos elementos, que são representações distintas para o mesmo número. Se esse conceito não for bem construído, os alunos não dominam o conceito de frações equivalentes, e essa dificuldade cria obstáculos para a aprendizagem de diversos conceitos, como porcentagem e escalas de ampliação ou redução.

Dreyfus (1991) afirma que

> [...] representação e abstração são, então, processos complementares em direções opostas: por um lado, um conceito é frequentemente abstraído de várias de suas representações e, por outro lado, as representações são sempre representações de um conceito mais abstrato. Quando uma única representação

de um conceito é usada, a atenção pode estar focada nela, em lugar do objeto abstrato. Entretanto, quando diversas representações são usadas em paralelo, a relação com o conceito abstrato correspondente se torna importante. (Dreyfus, 1991, p. 38).

A *generalização* implica na identificação de elementos comuns ou de um padrão, permitindo a expansão de domínios de validade. Uma prática para desenvolver a habilidade de generalização é explorar o reconhecimento de padrões desde os anos iniciais, que mais tarde podem facilitar a introdução à álgebra e na representação em linguagem algébrica de uma lei de formação.

Mas é preciso distinguir entre generalização e abstração. O conceito de espaço vetorial é um bom exemplo para ilustrar essa distinção. Trabalhando inicialmente com os espaços IR^2 e IR^3, a generalização para o espaço de n variáveis, o IR^n, é praticamente automática, preservando as operações de adição e multiplicação por escalar. No entanto, a transposição para a noção de um espaço vetorial V constitui uma *abstração*, em que é preciso identificar as operações inerentes a esse espaço vetorial, e suas propriedades.

O processo de *síntese* consiste em combinar ou compor partes de modo a formar um bloco inteiro, compacto. Esse inteiro constitui mais do que simplesmente a soma das partes, dá origem a uma única entidade, onde as partes se interrelacionam. Dreyfus (1991, p.35) cita como exemplo de síntese a imersão de vários tópicos de Álgebra Linear estudados separadamente, como ortogonalização de vetores, diagonalização de matrizes, transformação de bases, resolução de sistemas lineares. Mais adiante, todos esses fatos, a princípio desconexos, se fundem, formando um conteúdo unificado, graças a um processo de síntese.

A seguir são apresentados exemplos reais, observados em salas de aula.

Exemplos

O seguinte problema foi proposto para alunos ingressantes num curso técnico pós- médio:

Num campeonato, cada time deve enfrentar todos os seus concorrentes apenas uma vez. Determine o número de partidas desse campeonato, quando há: a) 5 times; b) 8 times; c) n times.

Por meio de esquemas, tabelas ou representação gráfica, os alunos foram capazes de perceber que no caso de 5 times, há 10 partidas, e que quando há 8 times disputando o campeonato, são necessárias 28 partidas para definir o campeão. No entanto, a grande maioria dos alunos não foi capaz de fazer a generalização para n times. A instrução de que n representava um número qualquer levou muitos alunos a escolherem um determinado valor para o n e calcular o número de partidas num campeonato com esse número de times.

O raciocínio e a representação usados para definir o número de partidas com os números definidos de times podem ajudar na generalização. Neste caso, a confecção de uma tabela para o campeonato facilita a visualização de que cada um dos n times joga com todos os outros (n – 1) times. Portanto, são n x (n - 1) partidas. Como os times se enfrentam uma única vez, é preciso dividir por 2, para eliminar a duplicidade de jogos, chegando ao número de partidas para o campeonato com n times: $\frac{n(n-1)}{2}$.

A tabela a seguir mostra a representação do número de partidas num campeonato com 5 times. A configuração triangular facilita a obtenção da lei de formação para o caso de n times (generalização).

Times	T 1	T 2	T 3	T 4	T 5
T 1		X	X	X	X
T 2			X	X	X
T 3				X	X
T 4					X
T 5					

Tabela 1- Esquema para a solução do caso de 5 times

Quando esses alunos tiveram que encontrar o número de partidas de um outro campeonato, seguindo outra modalidade, muitos ignoraram as novas regras e responderam como se fosse o mesmo esquema já visto anteriormente. Ou seja, mesmo alguns alunos que conseguiram generalizar o problema do 1º tipo de campeonato, não conseguiram pensar num esquema "mata-mata", ou seja num campeonato que, em cada partida, um competidor é eliminado. Nesse caso, os alunos não chegaram à abstração.

Um exemplo de abstração ocorreu numa turma de Cálculo II (Nasser, Sousa e Torraca, 2012). O tópico era Coordenadas Polares, e a questão proposta foi a seguinte:

Determine todos os pontos de interseção das cardióides $R = 1 + \cos\theta$ e $R = 1 - \operatorname{sen}\theta$.

O objetivo era que os alunos traçassem os gráficos das curvas e igualassem as duas equações polares, percebendo que os pontos de interseção se referem ao ângulo θ que satisfaz à igualdade $\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta$, ou seja, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$. No entanto, um aluno apresentou a solução mostrada na figura 1 a seguir, aplicando a translação e a reflexão de gráficos, enfatizada pela professora em outro contexto, na disciplina de Cálculo I.

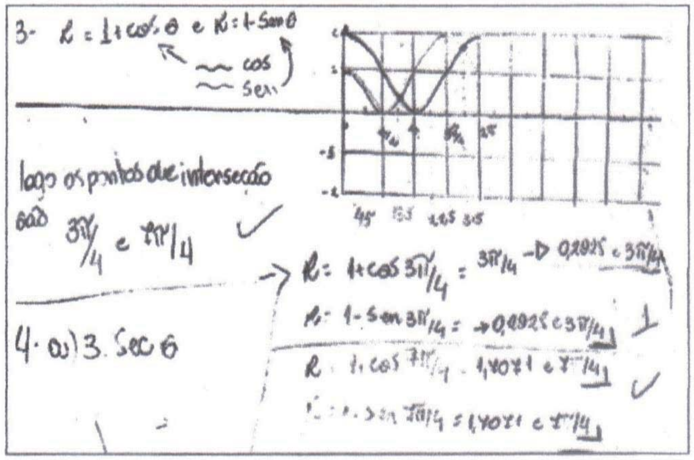


Figura 1: Transformação de gráficos aplicada em outro contexto.

O trabalho com geometrias não euclidianas é outro exemplo de atividade que requer abstração, uma vez que as leis válidas na Geometria Euclidiana devem ser abandonadas. Isso constitui uma dificuldade para os alunos, acostumados a lidar apenas com os axiomas e propriedades da geometria Euclidiana. Devem admitir que em outras geometrias é possível formar triângulos com dois ângulos retos ou com soma dos ângulos internos menor que 180º. Por exemplo, no trabalho com geometrias finitas, os alunos devem aceitar que uma reta tem apenas um número finito de pontos e que, muitas vezes, as interseções aparentes nos diagramas não constituem pontos reais de interseção.

Na Escola Básica, o conceito de proporcionalidade aparece em vários conteúdos, ao longo dos anos de escolaridade. As noções de dobro e triplo, os múltiplos de um número, as frações equivalentes, as escalas nos mapas, a razão entre figuras semelhantes são apenas alguns exemplos. Mais adiante, todas essas idéias se unem no conceito de função linear, incluindo ainda as noções de progressões aritméticas e juros simples.

De acordo com Dreyfus (1991, p. 40), além da representação, generalização e síntese, envolvidos na abstração, outros processos devem ocorrer interligando os elos de cadeias de conhecimento, como: descoberta, intuição, verificação, prova e definição.

Tipos de abstração

Piaget distinguiu três tipos de abstração: a abstração empírica, a abstração pseudo-empírica e a abstração reflexiva.

A a*bstração empírica* depende da observação externa de cada indivíduo a respeito de propriedades do objeto em questão. As propriedades estão no objeto, mas são percebidas externamente do ponto de vista de cada indivíduo.

> De acordo com Piaget, esse tipo de abstração leva à extração de propriedades comuns de objetos e a generalizações extensivas, isto é, a passagem de "alguns" para "todos", do específico para o geral. (Dubinsky, 1991, p. 97)

No caso da *abstração pseudo-empírica*, entram em jogo também ações introduzidas nos objetos pelo sujeito. Considere, por exemplo, uma abstração alcançada a partir de um esquema ou representação do objeto criada pelo sujeito. Nesse caso, a abstração é empírica porque depende das propriedades do objeto, mas também depende da configuração criada pelo sujeito. É, portanto, um exemplo de abstração pseudo-empírica.

A *abstração reflexiva* se origina no indivíduo e depende de suas ações. Esse tipo de abstração está associado não apenas às ações propriamente ditas, mas também às inter-relações entre essas ações. O mais importante neste tipo de abstração é a construção de novas combinações a partir da conjunção de abstrações. Esse aspecto construtivo da abstração reflexiva exerce um papel fundamental no pensamento matemático avançado.

De acordo com Dubinsky (1991, p. 99),

> [...] a abstração reflexiva difere da abstração empírica, pois lida com ação em oposição a objetos e difere da abstração pseudo-empírica no sentido de que trata, não tanto com as ações propriamente ditas, mas com as interrelações entre ações. (Dubinsky, 1991, p. 99)

Nesse trabalho, Dubinsky (1991, p. 98) cita vários conceitos matemáticos considerados por Piaget como resultados de abstrações reflexivas, como o conceito de grupos, a teoria geral de categorias, a impossibilidade de construir o conjunto de todos os conjuntos e o conceito matemático de função.

Portanto, a abstração reflexiva pode ser uma ferramenta poderosa no ensino e aprendizagem de conteúdos da educação superior que envolvem o pensamento matemático avançado. Por meio da sua compreensão, é possível criar caminhos e desenvolver sequências didáticas que ajudem nossos alunos a desenvolver habilidades para construir significativamente conceitos básicos.

Referências bibliográficas

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: *Kluwer Academic Publisher.*

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: *Kluwer Academic Publisher.*

Nasser, L; Sousa, G. A.; Torraca, M. A. (2012). Promovendo a Prontidão para a Aprendizagem de Cálculo. En F. Sabrá (Org), *Inovação, Estudos* e *Pesquisas: reflexões para o universo têxtil* e *de confecção, 3* (pp. 43-54). Rio de Janeiro: Estação das Letras e Cores.

Tall, D. (1991).The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: *Kluwer Academic Publisher.*

FACTORES ASOCIADOS A UNA EVALUACIÓN ACADÉMICA EN LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA: HERRAMIENTA ESTRATÉGICA PARA INCREMENTAR LA CALIDAD DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE

Nelly Elizabeth González de Hernández
Universidad Central de Venezuela - Facultad de Ciencias Económicas y Sociales FaCES - Escuela de Administración y Contaduría EAC Venezuela
gonzalne@yahoo.com

Resumen. La problemática del bajo rendimiento en los cursos de matemática de la Escuela de Administración y Contaduría en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad Central de Venezuela (4 de cada 10 estudiantes aprueban los cursos), es la razón principal para proponer una investigación que evalúe aspectos críticos para alertar a estudiantes, profesores y autoridades universitarias sobre posibles deficiencias en los conocimientos y destrezas matemáticas de los estudiantes del ciclo básico de la carrera y proponer medidas que contribuyan a subsanar dichas fallas y en consecuencia a mejorar algunas variables que inciden en la calidad del proceso enseñanza-aprendizaje. Esta investigación guarda una estrecha relación con un conjunto de características que van desde la formación del docente hasta el uso de la tecnología en el aula.

Palabras clave: evaluación, aprendizaje, medición, matemática, calidad

Abstract. I The problem of low performance at mathematics courses at the Escuela de Administración y Contaduría of the Facultad de Ciencias Económicas y Sociales of the Universidad Central de Venezuela (4 out of 10 students pass the courses) is the main reason for proposing research that identifies critical aspects in order to alert students, faculty and university officials about possible gaps in mathematical knowledge and skills of students in the basic cycle of the career and to propose measures to help remedy the failures and thus to improve some variables that affect the quality of teaching-learning process. This research is closely related to a set of features ranging from teacher training to technology usage in the classroom.

Key words: assessment, learning, measurement, mathematics, quality

Introducción

En numerosas oportunidades en nuestra Institución se ha abordado en diferentes estudios las razones del bajo rendimiento en las asignaturas de Matemática. En la mayoría de esos trabajos se señala el origen del problema en el estudiante, como actor protagonista, olvidando que son muchas las circunstancias que afectan el resultado de los cursos. Atendiendo a esta reflexión se propone una investigación que atienda: al estudiante, por supuesto, como un importante interesado en el proceso de aprendizaje, al docente como unidad y como parte de un equipo que trabaja para enseñar con calidad y. a las Cátedras como elementos de una organización que debe funcionar de manera coordinada y convenientemente supervisada.

El Proyecto se desarrolla con el apoyo del Consejo de Desarrollo, Humanístico y Científico de la Universidad Central de Venezuela (CDCH UCV) y está planteado en dos Etapas que deben ejecutarse en el plazo de dos años.

En esta oportunidad, se espera dar a conocer la estructura del Proyecto en la Reunión

Latinoamericana de Matemática Educativa RELME, con la firme esperanza que en próximos encuentros se pueda compartir los resultados y promover la posibilidad de contrastar los hallazgos con experiencias similares a la que ocupa esta investigación.

Marco teórico

Las instituciones públicas de educación superior enfrentan actualmente el reto de mejorar su calidad académica con recursos cada vez más escasos, y a la vez, hacer frente a las demandas de los nuevos contextos sociales y económicos de una sociedad globalizada.

La valoración y la evaluación del rendimiento académico en matemática vienen desempeñando, desde hace poco tiempo, una función de importancia creciente en Educación Matemática. Así se acredita en numerosos trabajos y en la formación de grupos de investigación con especial interés en el tema.

El tema de la evaluación académica en espacios de enseñanza de matemática, ha sido estudiado por varios investigadores a nivel internacional como nacional, tenemos algunos estudios, los cuales de una u otra forma guardan relación con el presente trabajo de investigación, que a continuación se presenta:

Abarca y Sánchez (2005) en las investigaciones realizadas sobre los factores generales que inciden en el rendimiento académico, han encontrado (según lo expresado por los estudiantes) que un obstáculo clave en el bajo rendimiento académico son sus deficiencias en el perfil cognitivo, además de conocimientos disciplinarios insuficientes. Definen dos dificultades primordiales: no saben estudiar y no saben aprender. En el terreno de las habilidades de aprendizaje se localizan dos tipos: Competencias para pensar y comprender vs. Repetir y memorizar en las diversas disciplinas, y el conocimiento de técnicas de estudio, que sobre todo apuntan a cómo revisar la bibliografía y comprenderla.

Tonconi (2010) en su trabajo "Factores que influyen en el rendimiento académico y la deserción de los estudiantes de la Facultad de Ingeniería Económica de la Universidad Nacional Abierta (UNA)" revela que a pesar que esas organización educativa va renovando su estructura curricular de acuerdo a las necesidades interinstitucionales y coyunturales de la región y del país, estas estructuras deben ser mejoradas en la toma de decisiones, con investigaciones permanentes para identificar los problemas comunes o individuales de la Institución. Conclusión que ratifica la decisión que estamos planteando en la Escuela de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela (EAC UCV) pues no solamente este tipo de evaluación se hace sino que nuestra revisión curricular está estancada y no se actualizan programas oficialmente desde hace aproximadamente 15 años.

González (2009) en su trabajo titulado "Problemática del bajo rendimiento estudiantil en Venezuela" refiere como ese rendimiento afecta considerablemente la vida académica de nuestras máximas casas de estudio y advierte que esa medida del rendimiento es limitada si se define como una tasa de promoción, fracaso o deserción, ya que sólo se tiene en cuenta el éxito o no, prescindiendo del nivel en que se consiga el aprendizaje y el ritmo en los estudios. Si ese rendimiento se define en términos de notas es una medida insuficiente, en el rendimiento, concepto no directamente medible, influye una gran cantidad de variables.

El estudio del rendimiento académico ha sido una preocupación constante en el campo de la investigación educativa. Cada año se publican, a nivel internacional, gran cantidad de artículos y reportes en relación con este tema. Por ejemplo, las revistas American Educational Research Journal y Educational Researcher de la Asociación Americana de Investigación Educativa publican regularmente resultados de investigaciones que tratan de explicar el desempeño en educación en diferentes niveles. La Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, cada año crece en cuanto a número de participantes y también en este espacio el tema de la evaluación académica, en las diferentes formas de participación, es un actor constante.

Se considera que la actualidad del tema permitirá el intercambio de numerosos espacios donde la Educación Matemática es motivo de preocupación y por supuesto se mejorará el resultado del trabajo docente en la Escuela de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela.

La investigación

La motivación para realizar la investigación es, como ya se comentó, la inquietud de mejorar el rendimiento estudiantil y académico con la ayuda de estrategias gerenciales que hoy día se califican de estratégicas: la definición de la Misión y la Visión de las partes académico-administrativas de la Institución, la identificación de factores de riesgo para definir los procesos de prevención adecuados, la definición de métodos de evaluación y control, en pocas palabras la definición de herramientas que permita trabajar como un equipo coordinado donde permanente se revise indicadores eficientes que adviertan sobre alguna desviación y conduzcan de manera segura a los objetivos que se tracen.

Identificado el problema, como un resultado del trabajo que no satisface al docente, al estudiante y a la institución se proponen los siguientes objetivos en las distintas etapas.

Objetivos de la investigación

Objetivo general

Evaluar los aspectos académicos en la enseñanza de Matemática en la carrera de Administración y Contaduría para determinar los aspectos críticos que inciden en el bajo rendimiento de los estudiantes y así proponer soluciones que ayuden a superar los obstáculos en la enseñanza y el aprendizaje.

Objetivos específicos de la primera etapa

- Identificar las herramientas aritméticas y algebraicas que deben poseer los estudiantes de nuevo ingreso en Matemática para abordar con éxito los estudios de Administración y Contaduría, así como también el perfil en Matemática del estudiante al iniciar cada uno de los cursos de la asignatura
- Analizar la situación de los conocimientos matemáticos básicos de los alumnos de Matemática I, II y III en la carrera de Administración y Contaduría
- Indagar el rendimiento actual de los cursantes de Matemática en la EAC
- Analizar la situación académica de profesores de Matemática de la EAC para recomendar procesos que eliminen o reduzcan debilidades y acentúen fortalezas en su trabajo docente
- Definir los factores críticos que inciden en el bajo rendimiento académico en Matemática de los estudiantes de la EAC UCV
- Realizar diagnósticos de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los cursos de matemática de las carreras de Administración y Contaduría.

Objetivos específicos de la segunda etapa

- Realizar diagnósticos de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje, de los estudiantes que se encuentran afectados por las Normas de Permanencia, en los cursos de matemática de las carreras de Administración y Contaduría.
- Diseñar programas de intervención pedagógica de acuerdo con los resultados obtenidos en los diagnósticos
- Revisar el contenido programático de Matemática I, II y III en la EAC UCV
- Establecer indicadores que permitan el monitoreo del rendimiento estudiantil para la intervención pedagógica oportuna

Logros esperados

En la Etapa I se espera lograr una propuesta de organización y diseño de un Curso de Iniciación en Matemática (incluirá medidas académicas y administrativas) para estudiantes de nuevo ingreso. También una oferta de organización y diseño de un Curso de Revisión en Matemática (incluirá medidas académicas y administrativas) para estudiantes regulares y finalmente el diseño de un programa de actualización de los docente de Matemática previa discusión de los informes académicos y administrativos.

En la Etapa II se elaborará un conjunto de estrategias para la asesoría remedial y preventiva de los estudiantes de la cátedra de matemática. Estas estrategias serán presentadas a la subunidad de Asesoramiento Académico de la EAC UCV en un informe donde se trate de manera específica el tema y se desea proponer programas de intervención pedagógica de acuerdo con los resultados obtenidos en los diagnósticos y programa de monitoreo del rendimiento estudiantil para la intervención oportuna. Como tema final se abordará una propuesta de revisión curricular de Matemática. Este logro se materializará con un documento donde se describa la opinión de los docentes, su entrega se realizará a la Comisión de Curriculum de la EAC UCV.

Metodología

El estudio tendrá dos objetos de estudio. Por una parte los profesores de la EAC UCV y por otra a los estudiantes de los tres primeros semestres, de las carreras de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela (tanto regulares como afectados por normas de permanencia). La población anterior se elegirá, mediante muestreo estratificado y procurando utilizar, en la medida de lo posible, los procedimientos que garanticen una buena representatividad de las características fundamentales de las poblaciones objeto de estudio.

Dado el carácter eminentemente exploratorio del presente estudio, se trabajará con una muestra que permitirá evaluar aspectos específicos. Tales características del estudio lo harán poseer sólo validez interna, con lo que no se puede extrapolar sus resultados como conclusiones poblacionales. La verificación de las variables conduce a entender que las distintas categorías presentes en las distintas opciones de respuestas a las preguntas específicas, conforman variables aleatorias distribuidas multinomialmente. Este tipo de variables tiene el problema de no permitir realizar la estimación de la varianza, no obstante, al detectar una de las categorías que resulte de interés particular, el resto de las categorías pueden ser consideradas como presentes en un único conjunto. Ello conduce a la posibilidad de homologar las respuestas a la categoría de interés como un “éxito” y todas las restantes como “fracasos” y permitiría, consideradas así las respuestas, enfrentar el problema de la muestra como si se tratase de una situación de muestro de proporciones (binomial) y aplicar las técnicas usuales de estimación del tamaño de muestra.

Las expresiones usadas para tal fin vienen dadas por las ecuaciones definidas por Cochran (1995) y son las siguientes:

$$n_0 = \frac{t^2 PQ}{d^2} = \frac{t^2 PQ}{V} \quad ;$$

$$n = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0 - 1}{N}} \cong \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}} \quad ;$$

Suponiendo: $V = \frac{pq}{n_0}$

En las que las variables utilizadas representan:

P: Proporción esperada de "éxitos"

Q: (1 – P), proporción esperada de "fracasos"

d2: Varianza estimada a priori

t2: Relación entre el nivel de significación y el EMA (Error máximo admisible por causas ajenas al muestreo)

n0: Estimación adelantada del tamaño de muestra.

n: Tamaño de muestra definitivo

N: Tamaño total de la población

p y q: Valores estimados de las proporciones P y Q mediante una muestra piloto o un estudio anterior.

De las muestras anteriores y en función de los resultados obtenidos, se elegirán submuestras intencionales, de tamaño por determinar, para cada uno de los estudios cualitativos de profundización previstos.

Instrumentos para recolección de datos

Los instrumentos para la recolección de datos serán cuestionarios y pruebas objetivas para los estudios cuantitativos y entrevistas individuales semiestructuradas, análisis de tareas y observación participante para los estudios cualitativos.

Instrumentos y técnicas de análisis de datos

Para el análisis de la información se harán estudios descriptivos de resultados: tablas y gráficos de frecuencias, medidas, etc.

Estado actual de la investigación

Desde el año 2011 se viene trabajando en este proyecto aun cuando no contaba con el respaldo formal del CDCH. Se inició como una inquietud desde la Cátedra de Matemática y por el reclamo, completamente justificado, de otras Cátedras que requieren una formación satisfactoria en el uso de herramientas matemáticas. Ello condujo al diseño de la Investigación y a su presentación a nuestras autoridades en la búsqueda de los recursos para acometerla.

En el transcurso del primer trimestre del año 2012 se recibió el documento donde la propuesta era aprobada por el CDCH y con ello el compromiso de difundir y compartir la experiencia pues es de suma importancia las observaciones externas y la posibilidad de compartir los resultados.

De inmediato, el equipo de investigación se dedicó a la preparación de los instrumentos de investigación y procesamiento, entre ellos: El diseño de instrumentos para encuestas y entrevistas a docentes de la Cátedra de Matemática del Departamento de Estadística y Matemática, la edición de los instrumentos para efectuar el diagnóstico de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Matemática I, II y III, el diseño de instrumentos para encuestas y entrevistas a docentes de cátedras que requieren la Matemática como herramienta y la definición de las características de las variables (tipo, rango, opciones de respuesta, códigos asociados, secuencia en el proceso de transcripción, valores perdidos).

Estos instrumentos se aplicarán al inicio del Segundo Semestre del año 2012 pues es el momento ideal para contactar a los alumnos de nuevo ingreso y porque también corresponde al periodo cuando los docentes se reúnen a reflexionar para planificar el trabajo del semestre.

Existe el compromiso de proceder a procesar la información de manera inmediata pues mucho de los resultados serán presentados a la Comisión de Revisión Curricular de la Escuela de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela quien exige precisamente que, cada Departamento y Cátedra se pronuncie sobre los cambios que los programas de la carrera exige.

Conclusiones

Esta investigación abre un debate interesante pues guarda una íntima relación con los procesos de enseñanza-aprendizaje y con un conjunto de variables que van desde las características de la planta docente hasta las facilidades de herramientas para apoyar el trabajo en el aula. Por esto, más allá de cualquier otra consideración, es importante resaltar la importancia de reflexión con sentido sobre todas aquellas prácticas docentes de las que somos sujetos y objetos, para revalidar nuevas formas de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Abarca A. y Sánchez, M. (2005). La deserción estudiantil en la educación superior, *Revista Actualidades Investigativas en Educación 5* (2), 1-22.

Cochran, W. (1995). *Técnicas de Muestreo*. México: Compañía Editorial Continental S.A

González, P. (2009). Indicadores sintéticos del rendimiento estudiantil. *Revista de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes* 2(1), 70-93

Tonconi, J. (2010). Factores que influyen en el rendimiento académico y la deserción de los estudiantes de la Facultad de Ingeniería Económica de la Universidad Nacional Abierta. *Cuadernos de Educación y Desarrollo* 9(11), 7-59

DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES EN TAREAS MATEMÁTICAS QUE HACEN USO DE DIFERENTES REPRESENTACIONES

Martha Leticia García Rodríguez, Alma Alicia Benítez Pérez
ESIME-IPN, CECyT 11-IPN México
martha.garcia@gmail.com, abenitez@ipn.mx

Resumen. El objetivo de este trabajo es identificar los factores que influyen para que el alto nivel de demanda cognitiva de una tarea se mantenga durante la implementación de la misma. Se analizó el trabajo de nueve estudiantes inscritos en el primer semestre de una carrera de ingeniería. Los elementos teóricos que se tomaron en cuenta para el análisis, incluyen la demanda cognitiva de una tarea y su relación con los aprendizajes de los estudiantes. Se utilizó una metodología cualitativa de tipo experimental y la actividad se desarrolló durante dos sesiones y en dos etapas. Se obtuvo evidencia para afirmar que la posibilidad de utilizar distintas representaciones para explorar la tarea, favoreció el que los estudiantes pusieran en práctica sus conocimientos previos para resolver con éxito la tarea.

Palabras clave: tarea matemática, demanda cognitiva, competencias, representaciones

Abstract. The aim of this paper is to identify the elements that maintain the high level of cognitive demand in a task during the students work. We analyzed the work of nine students enrolled in the first half of an engineering career. The theoretical framework for analysis includes the task cognitive demand and relationship to student learning. We use qualitative and experimental methodology; the experience took place during two sessions in two stages. Evidence was obtained to assert that the use of different representations to explore the task, favored the student´s work to put into practice prior knowledge to successfully solve the task.

Key words: mathematical task, cognitive demand, competences, representations

Introducción

En la primera década del siglo XXI hemos sido testigos de reformas educativas que se han realizado en diferentes países, algunas sin consolidar, otras apenas inician pero todas orientadas a satisfacer los enormes desafíos que plantean las sociedades contemporáneas. Las realizadas en Europa han influido en gran parte del mundo, como se puede constatar con la puesta en marcha del Proyecto Tuning para América Latina. En México algunas universidades fueron elegidas por la Secretaría de Educación Pública, para participar en el proyecto Tuning para América Latina (Proyecto Tuning para América Latina, 2007). En las reformas se destaca la pertinencia de incluir en la formación escolar de los individuos, el desarrollo de *competencias claves* que los capaciten para resolver problemas en diferentes contextos. En cuanto a los contenidos, se establecen estructuras conceptuales que incluyen procedimientos y su conexión con otras ciencias; el énfasis está en proporcionar experiencias de aprendizaje en diferentes contextos. El aprendizaje se concibe asociado con aspectos cognoscitivos, valores y normas sociales vigentes. Proenza y Leyva (2006).

En relación con las matemáticas, en las reformas se identifica como prioritario: a) plantear como punto central del currículo las finalidades de la educación matemática, para ajustarlas a las necesidades del ciudadano y de la sociedad; b) promover el papel social de la educación matemática en un mundo en que la tecnología desempeña un papel dominante; c) considerar la resolución de problemas como centro de las matemáticas escolares y, d) acompañar las propuestas de innovación y reformas curriculares con materiales desarrollados de acuerdo con propuestas didácticas y textos (Proenza y Leyva, 2006). También se considera orientar la reflexión de los estudiantes para que conciban esta disciplina: como una herramienta para entender e interpretar un fenómeno y no como una secuencia de algoritmos para ser memorizados y aplicados; como una forma de identificar patrones, realizar conjeturas y verificarlas y como una forma de comunicar, a sus compañeros y profesores, el conocimiento que logran de las matemáticas utilizando el lenguaje formal y el escrito (ICAS, 2010). Sin duda alguna el desarrollo de estas competencias está ligado a la instrucción que los estudiantes reciben en el aula, Arbaugh y Brown (2004) señalan que las actividades que realizan los estudiantes en el salón de clase, como la resolución de problemas, son tan importantes que pueden ser consideradas el corazón de las clases de matemáticas, por lo que resulta fundamental la selección o el diseño de las mismas.

Las ideas anteriores forman parte del sustento teórico de dos investigaciones que se llevaron a cabo en el IPN (Números de Registro 20111060 y 20110397) y que tuvieron como objetivo desarrollar competencias matemáticas en estudiantes de bachillerato del área de ciencias exactas y de ingeniería. Una pregunta que guío las investigaciones fue ¿Qué factores influyen para que el nivel de demanda cognitiva de una tarea se mantenga durante la implementación de la misma? Para dar respuesta a la pregunta se establecieron como objetivos específicos: a) Analizar las características de las tareas matemáticas de acuerdo con el nivel de demanda cognitiva que requieren de los estudiantes; b) Conocer los antecedentes académicos de los estudiantes y relacionarlos con los objetivos curriculares c) Analizar el trabajo de los estudiantes en las tareas.

Elementos teóricos

¿En qué medida, una actividad que se realiza en el aula promueve el desarrollo de conceptos y habilidades que se consideran esenciales en las matemáticas? ¿Qué información es útil para conocer la naturaleza de la enseñanza y la forma en que ésta se puede mejorar? Es posible considerar el proceso de enseñanza como la interacción entre diversos elementos que incluyen: las interacciones del profesor con los estudiantes como el elemento principal; los conocimientos del profesor y los estudiantes, las tareas propuestas, la evaluación y los materiales utilizados en clase. Ponce, Preiss y Núñez (2010) consideran que el tipo de pensamiento que los estudiantes ponen en acción al resolver los problemas es lo que determina su aprendizaje; por lo que conocer sobre los procesos que desarrollan los estudiantes en las aulas, las relaciones entre las características de la instrucción y los aprendizajes de los estudiantes se convierte en una herramienta importante para subsanar las deficiencias de los estudiantes.

En la perspectiva teórica del proyecto se utiliza el término tarea para hacer referencia a las actividades propuestas a los estudiantes. Schultz (2009) define el término *tarea* como una actividad que se lleva a cabo en la clase y que dirige la atención de los estudiantes para desarrollar una idea matemática particular, también es posible utilizar una secuencia de tareas para formar la idea, cada una de ellas incluye problemas o ejercicios. Las tareas diseñadas o seleccionadas por el profesor deben promover el desarrollo de competencias matemáticas, por lo que resulta fundamental conocer cuáles son las características que hacen que una tarea cumpla con estos objetivos.

Stein, Smith, Henningsen, & Silver (2009), señalan que una tarea matemática puede ser analizada considerando el tipo de razonamiento que los estudiantes ponen en práctica para realizarla. Los mismos autores utilizan el término *demanda cognitiva* para hacer referencia al tipo y al nivel de pensamiento que los estudiantes requieren para involucrarse y resolver con éxito la tarea. Describen dos aspectos a considerar para evaluar una tarea; 1) ir más allá de las características superficiales de una tarea, ya que estas con frecuencia no indican el nivel de complejidad matemática de la tarea; 2) el nivel de demanda cognitiva depende de los estudiantes que la ejecutan. Stein & Smith (1998) consideran los siguientes niveles para clasificar las tareas: a) Bajo nivel de demanda cognitiva (Memorización); b) Bajo nivel de demanda cognitiva (Procedimiento sin conexiones); c) Alto nivel de demanda cognitiva (Procedimiento con conexiones) y d) Alto nivel de demanda cognitiva (Trabajar en matemáticas). Dos características fundamentales de este nivel son: que la información es representada en múltiples formas, y que las conexiones entre las representaciones ayudan al desarrollo de significados. Parnafes y diSessa, (2004) apuntan que cada representación utilizada resalta aspectos de un concepto, y que al emplear varias representaciones los estudiantes enriquecen la comprensión del mismo. Al respecto García y Benítez (2011) señalan que la información subyacente en cada representación es percibida en forma diferenciada por los estudiantes y que una tarea que hace uso de diferentes representaciones promueve la transferencia del conocimiento adquirido en cursos anteriores.

Metodología

En el desarrollo de la investigación se utilizó una metodología cualitativa que incluyó las siguientes fases:

1) Aplicación de un conjunto de tareas matemáticas ubicadas en un alto nivel de demanda cognitiva; 2) Análisis del trabajo de los estudiantes en las tareas.

Participantes y recolección de datos Las tareas se aplicaron a un grupo de nueve estudiantes que se encontraban inscritos en el primer semestre de una carrera de ingeniería. La actividad se desarrolló durante dos sesiones y en dos etapas; en la primera los nueve estudiantes trabajaron en equipos de tres, y en la segunda, dos estudiantes a los que nos referiremos como Estudiante A, y Estudiante B, expusieron al resto del grupo el trabajo que habían realizado. Los materiales empleados incluyeron lápiz y papel, calculadora científica y pizarrón; las sesiones fueron grabadas con un equipo de audio y video.

Tarea de las diagonales de un cuadrado. Las diagonales de un cuadrado de lado 8 se encuentran sobre los ejes coordenados, determine las coordenadas de los vértices del cuadrado.

La tarea se ubicó en el nivel tres de la taxonomía propuesta por Smith y Stein, (1998), alto nivel de demanda cognitiva (procedimiento con conexiones) porque orienta la atención de los estudiantes al uso de procedimientos para desarrollar niveles de entendimiento profundo de los conceptos e ideas matemáticas; sugiere trayectorias explícitas o implícitas a seguir y es posible representarla en múltiples formas diagramas visuales o simbólicamente, las conexiones entre múltiples representaciones ayuda a desarrollar significados y demanda un alto grado de esfuerzo cognitivo.

El contenido matemático de las tareas. Las tareas incluyen ideas matemáticas que forman parte de los antecedentes de los estudiantes: teorema de Pitágoras; congruencia de triángulos, concepto de simetría, sistema de coordenadas rectangulares y características para la construcción de un cuadrado. Tienen como característica el establecer relaciones entre diferentes representaciones, lo que de acuerdo con Parnafes y diSessa (2004), contribuye al desarrollo de significados.

Relación del contenido matemático de las tareas con los antecedentes académicos de los estudiantes: Los estudiantes inscritos en la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral procedían en su mayoría de un bachillerato tecnológico, habían cursado las asignaturas de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.

Resultados y discusión

Los elementos que se consideraron en el análisis son: a) la forma en que los estudiantes representan y explican a sus compañeros la tarea planteada; b) la identificación de los recursos matemáticos que los estudiantes emplean y, c) el análisis de la forma en que relacionan los recursos con la representación que utilizan.

En la primera etapa de la implementación, el profesor propuso a los estudiantes trabajar en forma individual durante algunos minutos. En la fase de exploración de los estudiantes, una constante fue utilizar la simetría del cuadrado para establecer relaciones entre las longitudes de los cuatro segmentos que lo forman (Figura 1).

Fig. 1. Trabajo exploratorio de los estudiantes A y B.

En la segunda etapa los estudiantes A y B explicaron a sus compañeros la forma en la que habían trabajado en la tarea. En los siguientes párrafos se presenta el trabajo realizado por cada uno de los estudiantes. Los paréntesis rectangulares, corresponden a comentarios del profesor-investigador.

Para el estudiante A la posición de la figura no representó ninguna dificultad, La representación gráfica favoreció que identificara la posibilidad de utilizar el teorema de Pitágoras en uno de los triángulos del cuadrado, señaló que al tratarse de un cuadrado el triángulo que se forma es rectángulo.

> Estudiante A: Partiendo de los datos que nos dan, de que las diagonales coinciden con los ejes coordenados, tenemos que estos son los lados [señala el triángulo superior de trazo grueso que forma el cuadrado con el eje X]… entonces lo que nos piden es determinar las coordenadas de los vértices. Para eso, podemos formar un triángulo, y por teorema de Pitágoras tenemos catetos y tenemos una hipotenusa y el resultado iría así [determina en forma algebraica la longitud de la hipotenusa del triángulo] (Figura 2).

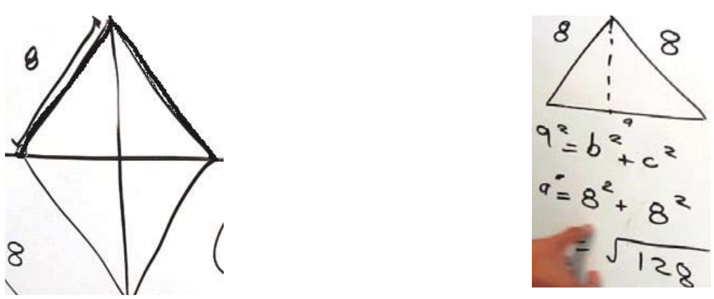


Fig. 2. Segunda construcción del estudiante A.

Con el valor que determinó y retomando de nuevo la simetría de la figura escribió las coordenadas de los vértices del triángulo.

Estudiante A: Llegamos a que el resultado de la hipotenusa es $\sqrt{128}$, eentonces esta sería la distancia desde el vértice hasta el otro vértice. Pero lo que nos pide es la coordenada, entonces a partir del cero de los ejes coordenados tenemos que determinar distancia entre dos. Y la primera coordenada es $\left(\frac{\sqrt{128}}{2},0\right)$ y para el de acá [señala el vértice izquierdo del cuadrado] es $\left(-\frac{\sqrt{128}}{2},0\right)$ {Escribe las coordenadas de los cuatro vértices] (Figura 3).

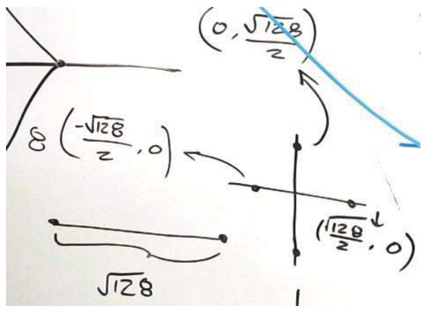


Fig. 3. El estudiante A determina las coordenadas solicitadas.

El estudiante B también utilizó la simetría de la figura, pero le pareció más conveniente modificar la posición de la misma. Preservando las propiedades del cuadrado, realizó una nueva construcción y a partir de ella determinó la longitud de una diagonal del cuadrado.

Estudiante B: yo primero, igual que A, vi que el cuadrado tiene ocho de lado y sus vértices están en los ejes, entonces lo moví [señala el cuadro] y lo puse sobre el eje x, de tal manera que tuviera ocho de largo y ocho de ancho y los ángulo rectos quedaran sobre los ejes. Y así puedo usar el teorema de Pitágoras [escribe el desarrollo] para obtener la medida de la hipotenusa [señala la diagonal del cuadrado] que mide $8\sqrt{2}$ (Figura 3).

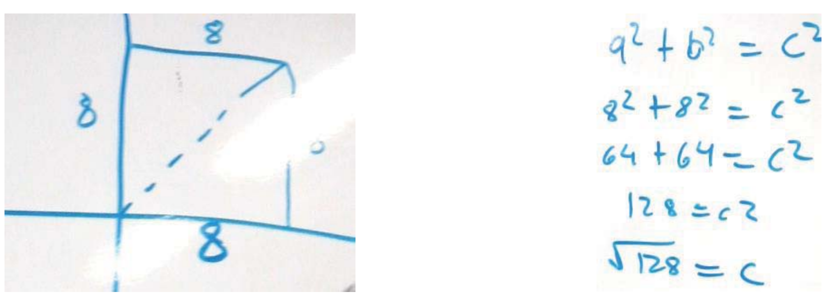


Fig. 4. Segunda figura y desarrollo del estudiante B.

La segunda construcción realizada por el estudiante B, ayudó para que ganara confianza en el manejo de las relaciones, entre la figura inicial que dibujó, y la nueva construcción. Lo anterior se puedo constatar en el siguiente episodio, con la construcción de una tercera figura y la verificación que realiza para comprobar su conjetura. Aún cuando en la verificación omite un signo menos en la coordenada x de uno de los puntos, la explicación aporta evidencia de que entendía el procedimiento que debía realizar.

> Estudiante B: entonces esto lo vamos a tener que dividir entre dos [señala la diagonal del cuadrado], porque es como si tuviéramos la diagonal de nuevo sobre el eje x [traza una tercera figura con el cuadrado en la posición inicial]. Entonces mide $8\sqrt{2}$ y la mitad es $4\sqrt{2}$ en cada lado [señala un segmento del origen a la izquierda y a la derecha]. Entonces determinamos que sus vértices van a estar en $4\sqrt{2}$ y $-4\sqrt{2}$ (Figura 4).
>
> Profesor-investigador: ¿Lo puedes verificar? [El estudiante B escribe un procedimiento algebraico para verificar su resultado].

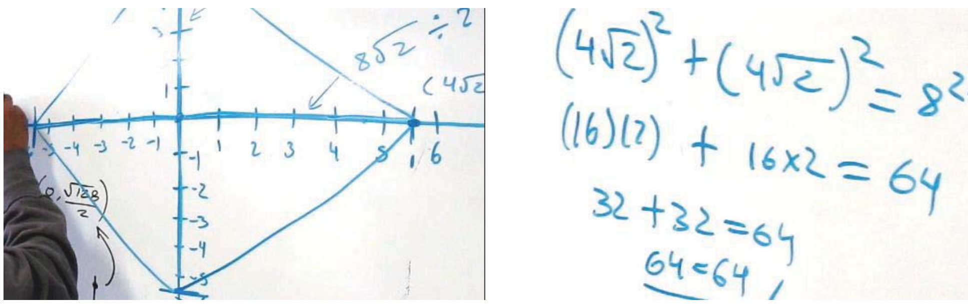


Fig. 5. Tercera figura y verificación realizada por el estudiante B.

Conclusiones

En relación con los factores que influyeron para que el alto nivel de demanda cognitiva de la tarea (procedimiento con conexiones) se mantuviera, es posible señalar que la posibilidad de representar el enunciado del problema mediante una figura incidió para que los estudiantes pusieran en práctica sus conocimientos previos: propiedades del cuadrado y el teorema de Pitágoras, lo que contribuyó para que cambiaran a la representación algebraica y resolvieran la tarea con éxito.

Fue posible identificar que la participación del profesor-investigador contribuyó para que la demanda cognitiva de la tarea se mantuviera. En la tarea analizada se identificó que el profesor-investigador solicitó al estudiante B (segunda etapa), que verificara su resultado, lo que ayudó para que el estudiante confirmara que había establecido en forma correcta las relaciones entre los datos del problema y para que mostrara a sus compañeros que su resultado era correcto. Lo anterior coincide con lo señalado por Torres, Reyes y Barrera (2011) quienes afirman que la formulación constante de preguntas a los estudiantes y la atención que se brinda a sus respuestas, orientan las acciones de los estudiantes hacia la búsqueda de relaciones, significados o explicaciones y fomentan la discusión con lo que se mantiene el alto nivel en la demanda cognitiva de una tarea.

En cuanto al diseño de la tarea, hay evidencia para afirmar que resulta fundamental considerar los antecedentes matemáticos con que cuentan los estudiantes y relacionarlos con los objetivos curriculares, ya que ambos son factores que inciden en el nivel de demanda cognitiva de una tarea.

Agradecimientos. Las autoras agradecen el patrocinio otorgado por la Comisión y Fomento a las Actividades Académicas [COFAA-IPN] y por la SIP del IPN (Números 20111060 y 20110397).

Referencias bibliográficas

Arbaugh, F. y Brown, C. (2004). What makes a mathematical task worthwhile? Designing a learning tool for high school mathematics teachers. En R. Rubenstein y G. Bright (Eds.), *Perspectives on the teaching of mathematics* (pp.27–41) Reston, VA: NCTM.

García M. y Benítez A. (2011). Using Multiple Representations to Make and Verify Conjectures. *US-China Education Review 1*(3), 430-437.

Intersegmental Committee of the Academic Senates (ICAS), (2010). Statement of competencies in mathematics expected of entering college students. Recuperado el 10 de noviembre de 2011 de: http://icas-ca.org/competencies-in-mathematics.

Informe Final Proyecto Tuning América Latina 2004-2007, *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina.* Recuperado el 16 de julio de 2011 de:

http://tuning.unideusto.org/tuningal/index.php.

Parnafes, O. y diSessa, A. (2004). Relations between patterns of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for the Mathematics Learning 9,* 251-280.

Ponce, L., Preiss D. y Núñez, M. (2010). Demanda cognitiva en la clase de matemáticas chilena, *Primer Congreso interdisciplinario de Investigación en Educación.* Recuperado el 10 de enero de 2012 de: http://www.ciie2010.cl/? page=view_programa_completo.

Proenza, Y. y Leyva, L. (2006). Reflexiones sobre la calidad del aprendizaje y de las competencias matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación* (40), 6, 1-11.

Schultz, K. (2009). *Cognitive Demand and Technology Use in High School, Selection and Implementation of task*. PhD University of Georgia Athens, Georgia.

Smith, M. &.Stein, M. (1998).Selecting and creating mathematical task: From research to practice, *Teaching mathematics in the Middle School 3*(5), 344-350.

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M., y Silver, E. (2009). The mathematical task framework. *Implementing standards based mathematics instruction* (pp. 1-13). USA: NCTM.

Torres, A., Reyes, A. y Barrera, F. (2011). Procesos de diseño e implementación de tareas de aprendizaje matemático con alta demanda cognitiva. *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas.* Recuperado el 11 de agosto de 2012 de: http://www.uaeh.edu.mx/sistema_investigacion/funciones/bajarArchivo_web.php?producto=3817&archivo=Torres-Reyes-Barrera-2011.pdf.

ORGANIZAÇÕES DIDÁTICAS, MATEMÁTICAS E PEDAGÓGICAS PROPOSTAS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO

Elizabeth Fraccaroli Jammal, Marlene Alves Dias
Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN Brasil
bethjammal@gmail.com, alvesdias@ig.com.br

Resumo. Neste artigo apresentamos uma breve discussão sobre as relações institucionais esperadas do ponto de vista das organizações matemáticas, didáticas e pedagógicas propostas para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio do Brasil. Trata-se de uma pesquisa documental e as análises são efetuadas via documentos oficiais elaborados e publicados a partir das propostas de mudanças indicadas na Lei de Diretrizes e Bases – LDB de 1996. As análises dos documentos oficiais indicam que se espera que os estudantes sejam capazes de resolver tarefas que representam situações e problemas matemáticos, de outras ciências e do cotidiano, reconhecendo os objetos matemáticos que permitam suas resoluções.

Palavras chave: organizações didáticas, matemáticas e pedagógicas. geometria

Abstract. I In this article we present a brief discussion on the institutional relations expected, from the viewpoint of mathematical, didactical and pedagogical organizations, proposals for the teaching and learning of Analytic Geometry in high school in Brazil. This is a documentary research and analyses are performed by official documents prepared and published from the proposed changes set out in the Law of Guidelines and Bases (LDB) 1996. The analyses of official documents indicate that students are expected to be able to solve tasks that represent mathematical situations and problems, of other sciences and the everyday, recognizing the mathematical objects that allow their resolutions.

Key words: didactical, mathematical and pedagogical organizations. geometry

Introdução

O presente estudo decorre de questionamentos advindos da prática escolar, da busca de compreensão das dificuldades enfrentadas por professores e estudantes e da perspectiva de encontrar meios para superar tais dificuldades em relação ao ensino e aprendizagem das noções de Ponto e Reta, na disciplina de Geometria Analítica, no Ensino Médio.

Busca-se para tanto fazer uma análise das expectativas nacionais das organizações matemáticas, didáticas e pedagógicas propostas para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio do Brasil via documentos oficiais. Escolhe-se assim analisar a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (1996), os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio PCNEM, Brasil (2000), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio Nacionais PCN+, Brasil (2006) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, São Paulo (2008).

A escolha desses documentos se deve ao fato de serem indicações construídas com a intenção de orientar o professor em sua prática diária e ajudá-lo a efetuar escolhas mais adequadas à realidade das classes e das regiões em que trabalham, isto é, desenvolver técnicas culturalmente possíveis.

Observa-se que uma relação didática se estabelece quando há um projeto de ensino com intenção de aprendizagem. Essa relação é construída por um conjunto de regras implícitas e explícitas que determinam as obrigações e as responsabilidades entre professor e estudantes, além de incluir um terceiro componente: o saber.

Referencial teórico

Para identificar as organizações didáticas, matemáticas e pedagógicas escolhemos como ferramenta didática de análise a noção de "topos" do estudante e do professor conforme definição de Chevallard e Grenier (1997). O "topos" do professor ao iniciar uma relação didática é o de identificar meios de fazer emergir os conhecimentos do estudante de forma que ele os mobilize, em contextos distintos daquele em que aprendeu, para responder a uma determinada situação. O "topos" do estudante é o lugar no qual o mesmo tem a sensação de ter um papel na execução de suas tarefas, um papel que lhe é próprio.

Observa-se que Pedagogia e Didática são aqui tratadas do ponto de vista da didática francesa, ou seja, a Pedagogia é considerada como técnica e não como ciência; é vista como a arte de conduzir e organizar a classe. Já, a Didática está associada à aprendizagem disciplinar e à transposição do saber de uma determinada disciplina. Nesse sentido, a Didática se fundamenta sobre a própria Matemática e em suas questões específicas.

Metodologia

Tendo em vista a fundamentação das análises propostas quando das relações institucionais esperadas do ponto de vista das organizações matemáticas, didáticas e pedagógicas propostas para o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio, o presente estudo foi iniciado a partir de uma prospecção dos trabalhos e pesquisas sobre a transição entre o Ensino Médio e Superior, em particular no ensino de Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Trata-se de uma pesquisa documental para a qual foi efetuada uma análise de documentos oficiais na perspectiva de verificar quais as relações institucionais esperadas para a introdução das noções de ponto e reta no plano no Ensino Médio. Nestes documentos foram observados os "topos" do professor e dos estudantes, ou seja, qual o papel que se espera que professores e estudantes desempenhem no processo de ensino e aprendizagem.

Resultados encontrados

As orientações encontradas nos documentos analisados apontam possibilidades para que os sistemas de ensino ou as escolas, a partir de um projeto pedagógico, apresentem novas alternativas de organização curricular mais comprometida com o mundo do trabalho, com a produção científica e o avanço tecnológico e a formação humana e intelectual do estudante.

Dessa forma, ao definir seu projeto pedagógico, a escola e a equipe escolar devem propiciar condições para que o estudante possa atingir os objetivos definidos na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (1996), tais como reconhecer os fundamentos básicos da investigação científica; reconhecer a ciência como uma atividade humana em constante transformação; consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental no intuito de garantir a continuidade de estudos, compreenderem os processos produtivos, preparar-se para o mundo do trabalho e para o exercício da cidadania, desenvolver uma sólida formação ética e desenvolver autonomia intelectual.

A análise das relações institucionais esperadas do ponto de vista das organizações matemáticas, didáticas e pedagógicas propostas para o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio levam a considerar que, ao final do processo de ensino e aprendizagem no Ensino Médio, espera-se que os estudantes sejam capazes de resolver tarefas que representam situações e problemas matemáticos, de outras ciências e do cotidiano, reconhecendo os objetos matemáticos que permitam suas resoluções.

Apresenta-se a seguir uma breve síntese das relações institucionais esperadas do ponto de vista das organizações didáticas e pedagógicas dos documentos analisados.

Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei 9.394/96)

O documento apresenta uma perspectiva de mudança para o ensino em todos os níveis em função das transformações sociais por que passa a sociedade e as novas características associadas às revoluções técnico/industrial e à informática. Para tanto, a Lei nº 9.394/96 define um currículo básico composto por uma base nacional comum complementada por uma parte diversificada associada às características regionais, culturais e econômicas que deve estar associada aos conhecimentos prévios dos estudantes. Esse mesmo documento destaca ainda, entre outros aspectos, a importância da educação tecnológica básica, a compreensão do significado da ciência e propõe que se adotem metodologias de ensino e avaliação que estimulem a autonomia dos estudantes.

Conferindo uma nova identidade ao Ensino Médio, a Lei 9.394/96, indica que o Ensino Médio passa a fazer parte integrante da Educação Básica, na perspectiva de integrar numa mesma e única modalidade, finalidades até então dissociadas, ou seja, oferecer uma educação equilibrada de forma articulada. Essa perspectiva visa uma aprendizagem permanente, de forma continuada, tendo como foco central a construção da cidadania em função dos processos sociais que se modificam.

Dessa forma, no documento é ressaltado que o objetivo é dar ao Ensino Médio um caráter de formação geral ao indivíduo em oposição a uma formação específica. Além disso, especifica-se que o currículo deve contemplar conteúdos e estratégias de aprendizagem que permitam ao estudante desenvolver competências e habilidades básicas essenciais para a realização de atividades na vida em sociedade e nos meios de produção, isto é, do ponto de vista didático deve-se optar por conteúdos que possam servir para o progresso e crescimento pessoal e intelectual dos estudantes e do ponto de vista pedagógico visa-se desenvolver estratégias que possam servir para a formação para o trabalho e para o desenvolvimento da cidadania.

Assim, com a criação da Lei nº 9.394/96, buscando construir uma proposta nacional para a escola, foi elaborado uma série de documentos que apresentam parâmetros norteadores para o trabalho das disciplinas.

Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, PCNEM, Brasil (2000), apresentam uma reforma curricular fundamentada nas mudanças do conhecimento e seus desdobramentos quando se consideram as relações sociais e o mundo do trabalho. Estabelecem orientações para o currículo das disciplinas em cada ciclo a partir dos quais a escola pode desenvolver seu próprio projeto pedagógico. Eles expressam o empenho em apresentar ideias do "que se quer ensinar", "como se quer ensinar" e "para quem se quer ensinar", dando um caráter genérico dos objetivos, conteúdos, avaliações e orientações pedagógicas.

No que concerne à metodologia de ensino, o documento descreve que o importante é que haja a troca de experiências entre professor e estudante, sendo que neste momento de troca de informações o professor não terá atitudes diretivas, mas terá uma conduta relacional, a qual permite ao estudante criar, experimentar, relacionar. Essa nova proposta de trabalho está associada ao "topos" pedagógico esperados do professor e do estudante, que deverão trabalhar como uma equipe trocando experiências.

Isso permite considerar que, quanto ao "topos" pedagógico proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, Brasil (2000), é enfatizado a formação geral do estudante e o desenvolvimento de sua capacidade para formular problemas e soluções, pesquisar, selecionar e analisar informações ao invés de memorizá-las. Sendo assim, cabe ao professor propor situações que propiciem o desenvolvimento desse tipo de "topos" e ao estudante de aceitá-las e desenvolvê-las.

Orientações Curriculares para o Ensino Médio Nacionais

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio Nacionais, PCN+, Brasil (2006), têm como objetivo delinear as metas para o ensino das disciplinas do Ensino Médio no Brasil e sugerem uma organização curricular do Ensino Médio, tendo como suporte a interdisciplinaridade e a contextualização. Apresentam estratégias metodológicas como exemplos que relacionam conteúdos e competências e são dadas opções que proporcionam um trabalho com projetos interdisciplinares.

Proposta Curricular do Estado de São Paulo

Fundamentada nas mudanças sociais que impulsionaram mudanças na Lei de diretrizes e Bases, LDB, Lei 9.394/96, nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, DCNEM, Resolução nº 03/98 e nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, Brasil (2000), a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, São Paulo (2008), leva em conta a complexidade cultural, as dimensões sociais, econômicas e políticas e a diversidade de produtos tecnológicos e científicos e de linguagens e códigos que compõem o cotidiano do cidadão e cuja não apropriação pode corresponder à exclusão social.

O documento propõe um currículo que desenvolva competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais. Para tanto é construído material (caderno do professor e do aluno) específico para professores e estudantes que orienta a gestão e auxilia o desenvolvimento do conteúdo em sala de aula.

Feitas as considerações acima, apresenta-se um breve resumo dos resultados encontrados quanto às organizações didáticas, matemáticas e pedagógicas nos documentos analisados.

Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, PCNEM, Brasil (2000): a organização pedagógica enfatiza a formação geral do estudante e o desenvolvimento de sua capacidade para formular problemas e soluções, pesquisar, selecionar e analisar informações ao invés de memorizá-las. Cabe assim ao professor propor situações que propiciem o desenvolvimento dessa organização.

Orientações Curriculares para o Ensino Médio Nacionais, Brasil (2006):

- ❖ Do ponto de vista pedagógico encontramos exemplos de estratégias metodológicas.
- ❖ Do ponto de vista didático são consideradas opções para a construção de projetos que associam conteúdos da própria matemática e das outras ciências.

Proposta Curricular do Estado de São Paulo, São Paulo (2008):

- ❖ Organização didática: Os conteúdos são organizados por bimestre e disciplina.

- Organização pedagógica: definição das habilidades e competências, seguidas de orientações para gestão da sala de aula, avaliação e recuperação, bem como sugestões de métodos e estratégias de trabalho nas escolas.

- O Caderno do Professor apresenta-se como um manual prático de pedagogia e didática, trazendo o quê e como ensinar.

Em relação ao conteúdo matemático encontramos as seguintes orientações.

Orientações encontradas quanto à Organização Matemática da Geometria Analítica

Nos documentos oficiais analisados observa-se uma proposta de um conjunto de três eixos estruturadores que possibilitam a seleção de temas que promovam o desenvolvimento de uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos e que tenham uma relevância científica e cultural garantindo maior significação para a aprendizagem.

- Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas. Isso corresponde à manipulação dos ostensivos e a evocação dos não ostensivos associados. Por exemplo, qual é equação da reta r da figura?

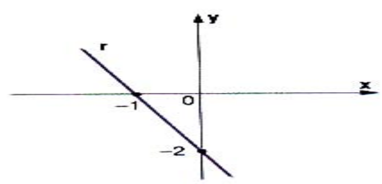


Figura 1: Representação de uma reta no plano cartesiano.

- Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação problema. Por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medir diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema por meio da geometria analítica.

- Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas ou conceito de distâncias na geometria analítica, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas ou estudo de retas na geometria analítica.

- Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades. Por exemplo, no estudo das diferentes representações de uma reta em Geometria Analítica, estabelecer os métodos que permitam a passagem de uma representação à outra.
- Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, observar que a representação cartesiana de uma reta no plano é dada por uma única equação, enquanto que uma representação paramétrica é dada por apenas um parâmetro.
- Reconhecer a conservação contida em toda igualdade, congruência ou equivalência para calcular, resolver ou provar novos fatos. Por exemplo, ao resolver uma equação ou um sistema de equações lineares, compreender que as operações realizadas a cada etapa transformam a situação inicial em outra que lhe é equivalente, com as mesmas soluções.
- Compreender a necessidade e fazer uso apropriado de escalas. Por exemplo, na construção de gráficos ou em representações de figuras no plano cartesiano.
- Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações. Por exemplo, optar entre modelos algébricos ou geométricos para obter determinadas medições.
- Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada. Por exemplo, associar os conhecimentos desenvolvidos em Geometria Analítica com os de Álgebra Linear. Outro exemplo corresponde a relacionar a noção de função afim com a equação de uma reta no plano.

Exemplo: Técnica da Representação na Forma Reduzida e Representação Funcional de uma Reta

Sejam A(2, 1) e B(1, 3) pontos pertences a reta r.

Sabemos que dois pontos distintos determinam uma única reta (axioma da geometria euclidiana). Dessa forma, considerando um ponto e calculando a declividade da reta r, pode-se determinar sua representação na forma reduzida.

Dados dois pontos tais que $x_1 \neq x_2$, pode-se concluir que se trata de uma reta não vertical, logo existe uma função afim f:IR → IR tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Como o gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos A e B conclui-se que essa reta coincide com a reta r procurada.

Nesse caso, como a taxa de variação da função afim a = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ coincide com o coeficiente angular m da reta r, temos:

$$a = m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Logo, dado um ponto (x_0, y_0) e conhecida a declividade da reta m = $\dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ determina-se sua representação na forma reduzida, isto é,

$$y - y_0 = m\,(x - x_0).$$

Para o caso particular considerado a declividade de r ou o coeficiente angular de r é dado por $m = tg\,\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, então $m = \dfrac{3-1}{1-2}$, logo $m = -2$.

Considerando A (2, 1) como um dado ponto de r, P(x, y) um ponto qualquer de r e m = – 2. Substituindo A e m na representação da reta na forma reduzida:

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$, temos:

$$y - 1 = -2\,(x - 2).$$

Efetuando as operações indicadas encontra-se y = –2x + 5 que é representação funcional da reta r e quando f(x) = –2x + 5 é a função afim cujo gráfico é uma reta não vertical.

Observa-se aqui que a tecnologia utilizada para determinar a representação da reta na forma reduzida é descrita, explicada e justificada por meio do axioma da geometria euclidiana, a saber, dois pontos distintos determinam uma única reta, da noção de reta não vertical e das noções de função afim e gráfico da função afim.

Lages Lima, Carvalho, Wagner, Morgado (2000) prova as afirmações: "Dados arbitrariamente (x_1, y_1), $(x_2,y_2) \in IR^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim f:IR → IR tal que $f(x_1)=y_1$ e $f(x_2)=y_2$." e "Toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim." (Lages Lima, Carvalho, Wagner, Morgado, 2000, p.90-91)

- Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos distintos.

Considerações finais

A análise desses documentos mostrou, inicialmente, existir uma preocupação institucional nacional em mudar as condições de ensino e aprendizagem no Ensino Médio.

Os documentos apontam para uma nova organização curricular comprometida com o mundo do trabalho, além da produção científica, do avanço tecnológico, da formação humana e intelectual do estudante, descaracterizando, desta forma, o por eles descrito como "ensino tradicional", isto é, descontextualizado, compartimentado e baseado no acúmulo de informações.

Do ponto de vista da organização pedagógica são dados exemplos de métodos e estratégias para auxiliar o professor na elaboração do seu plano de ensino e do ponto de vista da organização didática são sugeridos os conteúdos matemáticos e o trabalho interdisciplinar e contextualizado.

Do ponto de vista da organização didática da Geometria Analítica é indicado o estudo das retas no plano e retas e planos no espaço contemplando o estudo dos vetores, isto é, não se restringindo apenas à representação desses objetos matemáticos por meio de um conjunto de equações lineares.

Mas, quando se consideram as articulações e os diferentes níveis de tratamento das noções de ponto e retas no plano não existem exemplos precisos para esse trabalho, mesmo se a proposta é que se articulem os conhecimentos matemáticos na própria matemática, nas outras ciências e no contexto de vida dos estudantes, esse trabalho é deixado completamente a cargo dos professores.

É importante ressaltar que os conhecimentos que os estudantes precisam mobilizar quando se introduz novas noções são fatores, muitas vezes, desconhecidos dos professores, tanto do Ensino Médio como do Ensino Superior. Portanto, para que os professores possam realizar a tarefa que lhes é atribuída, isto é, trabalhar com situações contextualizadas em diferentes contextos é preciso que os mesmos disponham de materiais que auxiliem esse trabalho.

Referências bibliográficas

Brasil (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio – Parte I: Bases Legais.* Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

Brasil (2006). *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza Matemática e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

Chevallard Y. et Grenier, D.(1997). Le topos de l' éleve. En *Actes de la IX école d' été de didactique des mathématiques deHoulgate* (pp. 35-38). Houlgate: Association de Recherche en Didactique des Mathématiques.

Lages Lima, Carvalho, Wagner, Morgado (2000). *A Matemática do Ensino Médio*. Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática.

São Paulo (2008) *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas.

PROPUESTA DE INNOVACIÓN: POTENCIA DE UN PUNTO EXTERIOR A LA CIRCUNFERENCIA

Daniela Bonilla Barraza
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
yodbb1@yahoo.es

Resumen. La propuesta de innovación surge por las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la geometría proporcional, en particular, en la propiedad Potencia de un punto exterior a la circunferencia.Para su diseño se considera como referente teórico, la articulación propuesta por Montoya (2010), complemento entre "Paradigmas geométricos" de Houdement y Kuzniak y los Procesos de Pruebas de Balacheff. En base a antecedentes obtenidos de un estudio epistemológico del objeto, se diseñan distintas pruebas que propician el tránsito entre los paradigmas de la geometría natural (GI) y la geometría axiomática natural (GII) , aportando así en el aprendizaje de la propiedad en estudio.

Palabras clave: paradigmas geométricos, procesos de prueba, igualdad de áreas

Abstract. The proposed innovation arises from the students' difficulties in learning geometry proportional, in particular, on the property of a power point outside the circunferencia.Para its design is considered as a theoretical reference, the joint proposal by Montoya (2010), complement between "geometric Paradigms" of Houdement and Kuzniak and Balacheff testing processes. Based on records obtained from an epistemological study of object, different tests are designed to foster the transition between the paradigms of natural geometry (GI) and Natural axiomatic geometry (GII), thus contributing to the learning of the property under consideration.

Key words: geometric paradigms, testing processes, equal areas

Descripción de la problemática

En Chile, el eje que presenta mayor dificultad en su aprendizaje es la geometría, esto se refleja en la mediciones nacionales, por ejemplo: En la prueba de selección universitaria donde "geometría presenta, año a año, el menor porcentaje medio de respuestas correctas y el mayor porcentaje medio de respuestas omitidas " (proceso de admisión 2012 documento n°13,2011, p.3). El currículum de la asignatura de matemática, considera al razonamiento, como un pilar fundamental en el proceso de aprendizaje, entendido como: "La capacidad para resolver problemas, formular conjeturas, verificar la validez de procedimientos y relaciones, razonar bajo hipótesis"(fundamentos ajustes curricular de educación matemática, 2009, p.2). Sin embargo, el tratamiento del objeto, potencia de un punto exterior a la circunferencia, dista de lo anterior, puesto que se propone que los estudiantes demuestren esta propiedad, sin realizar previas conjeturas.

En general la propiedad se convierte en una "fórmula" para calcular medidas de segmentos a través de las ecuaciones.

Tanto en el programa de estudio como en los textos escolares, se plantea una única forma de probar la propiedad, a partir de relaciones de semejanza de triángulos, cabe destacar que no se exhiben actividades donde los estudiantes puedan deducir relaciones entre trazos y determinar en forma empírica la veracidad de las propiedades.

Antecedentes

El objeto Potencia de un punto exterior a una circunferencia, se ubica en el programa de segundo año medio (14- 15 años) en la unidad "Sobre las Circunferencias y sus Ángulos", con el fin de desarrollar un contenido específico: distinción entre hipótesis y tesis.

Las actividades (figura 1) limitan el trabajo del aprendiz a escribir solo las proporciones que derivan de la semejanza de triángulos para llegar a establecer que los productos son constantes.

Demostrar que una circunferencia divide a las secantes trazadas desde un mismo punto en dos segmentos tales, que el producto de la medida de la secante por la del segmento externo a la circunferencia es constante.

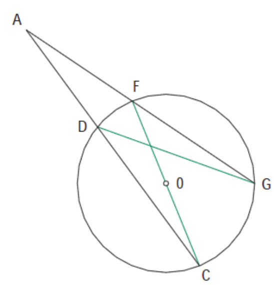


Figura 1: Ejemplo de actividad (Ministerio de Educación, 2004, p.89)

Los textos escolares, muestran ejemplos de demostraciones de las propiedades (figura 2), y una vez obtenida la relación es utilizada en el cálculo de medidas de segmentos a través de las ecuaciones (figura 3).

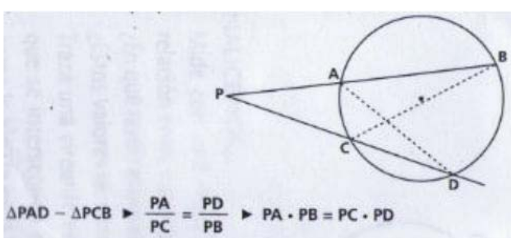


Figura 2: ejemplo de demostración
(Baeza, García, & Villena, 2005)

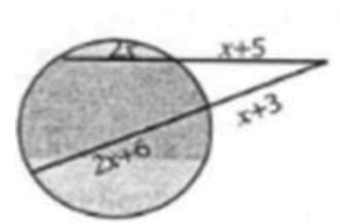


Figura 3: Cálculo de medidas de segmentos
(Cid Figueroa, 2008)

Consideramos que el enfoque algebraico que predomina en los textos escolares, y las demostraciones mostradas en el programa de estudio no son suficientes para alcanzar un razonamiento en torno a la propiedad en estudio.

Estudio epistemológico

A continuación se presentan dos etapas importantes en la evolución del objeto matemático en estudio, que serán considerados para el diseño de la secuencia.

El concepto potencia de un punto exterior a la circunferencia ha evolucionado a través de la historia de la matemática, hace su primera aparición en los elementos de Euclides en el año 300 a .c, como una proposición relacionada a la circunferencia, la demostración se basa en la igualdad de áreas de rectángulos y cuadrados.

Posteriormente el concepto de potencia de un punto exterior a la circunferencia es introducido por el matemático Jacob Steiner en el desarrollo de la geometría proyectiva. Este enfoque asocia un valor determinado a la potencia de un punto independiente de la recta, el valor varia si el punto es exterior, interior o está en la circunferencia.

La potencia de un punto P respecto a una circunferencia de radio r es igual a la cantidad $|d^2 - r^2|$, donde d es la distancia del punto P al centro de la circunferencia.

A partir del siglo XX, el objeto potencia de un punto adquiere variadas interpretaciones en distintas áreas de estudio. Actualmente es tratado en los programas oficiales de nuestro país, como una propiedad de las rectas secantes en la circunferencia, que se prueba a partir de triángulos semejantes, donde se pretende que los aprendices conjeturen y demuestren la propiedad, y luego la apliquen en el cálculo de medidas de segmentos.

Marco teórico

El diseño de la propuesta de innovación del objeto matematico "Potencia de un punto exterior en la circunferencia", considera elementos del marco teórico : Paradigmas y Espacio de trabajo geométrico , propuesto por Houdement y Kuzniak (2000, 2006) y los procesos de prueba de Balacheff (1987).

Houdement y Kuzniak identifican tres paradigmas que estan presentes en la enseñanza de la geometría, y cuya función es permitir que el estudiante construya su propio espacio de trabajo geométrico guiado por el docente, estas son: Geometría Natural (GI), Geometría Axiomática Natural (GII), Geometría Axiomática formalista (GIII).

Algunas características de los paradigmas GI y GII

En la geometría natural(GI) , está permitido el juego permanente de ir y volver entre el referente teórico y la realidad, no está presenta la axiomática formal de la geometría de Euclides. Se puede comprobar empíricamente las afirmaciones, los medios de prueba son de tipo material, se permite medir con instrumentos , trabajo con pliegues , cortes .. etc.

La Geometría Axiomática Natural(GII), requiere abstracción de la figura geométrica que es descrita por las propiedades. Se utiliza una parte del referente teórico(axiomática de Euclides). El uso de artefactos como medio de prueba no está permitido, sólo son usados para construcciones geométricas.

Balacheff (Balacheff, 1987) distingue dos tipologías de pruebas, pragmáticas e intelectuales. Las pruebas pragmáticas son aquellas que recurren a la acción sobre los objetos y supone la posibilidad de tener acceso a realización material de una tarea para justificar afirmaciones sobre ellos. Estas son : Empirismo ingenuo, Experimento crucial y ejemplo genérico. Las pruebas intelectuales provienen de una forma particular de razonar, donde se articulan argumentos, cadenas de argumentos, con una clara producción en una lengua simbólica, sin hacer uso de los objetos materiales. Estas son : Experimento mental, demostración, cálculo sobre el enunciado.

Descripción de la propuesta de innovación

La propuesta busca que los estudiantes comprendan la potencia de un punto exterior a la circunferencia, a través del tránsito entre los paradigmas GI y GII, lo que conlleva al paso de pruebas pragmática a intelectuales.

Se presenta un extracto de las actividades propuestas fundamentadas en el marco teórico.

Secuencia de aprendizaje

Actividad 1: Dada una circunferencia y un punto P exterior a ella (figura 6), determine, si es posible, un segmento de recta secante que pase por el punto P y corte a la circunferencia en dos puntos, donde el producto entre la medida del segmento exterior (PA) y el segmento total (PB) sea el máximo.

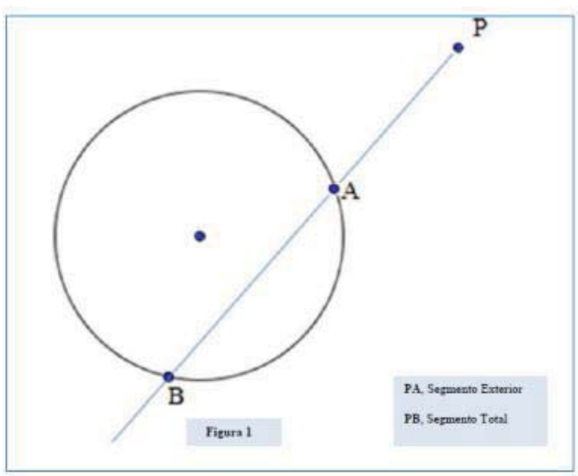


Figura 1

a) Trace rectas secantes desde el punto P a la circunferencia, realice las mediciones de los segmentos exteriores y segmento total, calcule el producto entre la medida de ellos *b) ¿Cómo son los productos obtenidos?*

c) Exponga los resultados en el curso, argumentando su conjetura.

Actividad 2: A partir de la figura 1, se generan rectángulos y cuadrados, como se muestran en las figuras 2 ,3 y 4.

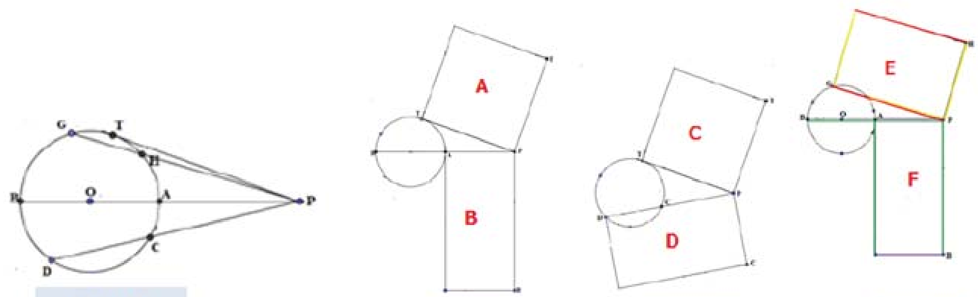
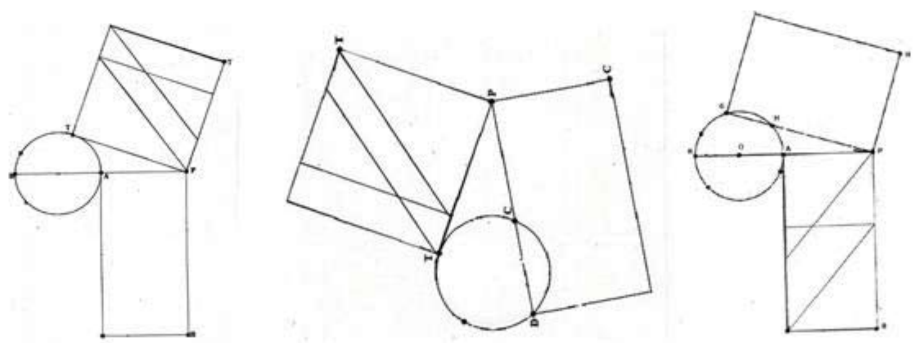


Figura 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

Considerando los segmentos marcados en la circunferencia de la figura 1 y la construcción presentada en la figuras 2, 3 y 4.Explica, ¿Cómo son las áreas de los polígonos que se forman en cada una de las figuras?

2) A continuación se presentan figuras donde se ha construido un puzzle, a través de la experimentación pruebe si se cumple la conjetura prevista.



a) ¿Cómo son las áreas de los polígonos de la figura?

b) Escribe una expresión donde se verifique la relación de las áreas de los polígonos.

c) ¿Cómo son los productos entre los segmentos exteriores a la circunferencia y los segmentos totales? Fundamente a partir de lo experimentado

Análisis de las actividades 1 y 2

Las actividades 1 y 2 se enmarcan dentro del paradigma de la geometría natural(GI), los objetos son representados por dibujos (líneas,puntos ,círculos,rectángulos, cuadrados,entre otros) los cuales son manipulados, la tipología de pruebas es de tipo pragmática.

En la actividad 1 está presente el empirismo ingenuo, el estudiante realiza mediciones para establecer una conjetura, se basa en la experimentación para validar sus conclusiones.

La componente cognitiva visualización genera en el aprendiz imprecisiones (puede pensar que la recta que pasa por el diametro es la de mayor producto), por lo tanto ,no es suficiente para deducir conclusiones , sino , que necesita de otras componentes, como son las pruebas.

En la actividad 2 , el tipo de prueba es " ejemplos genéricos", los estudiantes justifican la afirmación considerando los casos como representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación. La visualización, en la formación de los rectángulos y cuadrados permite generar posibles predicciones, en relación a la posibilidad de equivalencia en el valor de las áreas, en este punto la manipulación de los objetos a través del armado del puzzle , como prueba , permite verificar la igualdad de áreas(figura7)

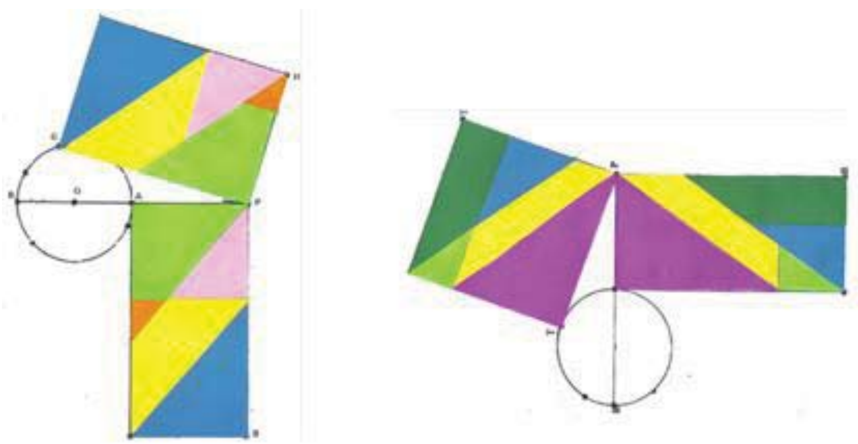


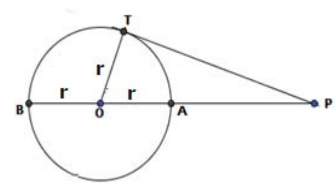
Figura 4: igualdad de áreas

Actividad 3

Sea P, un punto exterior a la circunferencia de centro O y radio r, T punto de tangencia a la circunferencia. Llamaremos d a la distancia desde el punto P al centro de la circunferencia.

Pruebe que $PT \cdot PT = PA \cdot PB$.

Sugerencia: Escriba en función de d y r los siguientes segmentos PO, PA, PB.



Análisis de la actividad 3

Esta actividad se encuentra en el paradigma de la geometría axiomática natural (GII), tiene por objetivo validar las propiedades encontradas en las actividades anteriores, a través de un razonamiento hipotético deductivo, donde se considera la axiomática de la geometría euclidiana como referente teórico. El proceso de prueba es de tipo intelectual, en particular, experimento mental, el razonamiento del sujeto se independiza de la representación del objeto, se observa un guión que no tiene necesariamente la estructura de una demostración. Se pretende que los estudiantes a través de relaciones geométricas, como, el teorema de

Pitágoras, determinen la expresión $|d^2 - r^2|$ para la potencia de un punto exterior a la circunferencia, donde d es la distancia desde un punto P exterior a la circunferencia al centro O de ella y r es el radio de la circunferencia.

Reflexiones finales

Se sugiere la aplicación de la propuesta de innovación, a estudiantes que se inician en el estudio de propiedades geométricas (14- 15 años), es importante iniciar con pruebas de tipo pragmáticas, donde se privilegia un razonamiento deductivo (GI) , para luego dar paso a pruebas intelectuales, donde se potencia un razonamiento hipotético – deductivo (GII). Siendo el tránsito entre los paradigmas GI y GII clave para propiciar el desarrollo del razonamiento matemático.

El diseño expuesto, acerca a los estudiantes a la concepción de demostración, en el sentido de Balacheff. Claramente para alcanzar este nivel de razonamiento es necesario intencionar el tránsito de GII a GIII.

Es fundamental promover la comprensión del objeto matemático, potencia de un punto en la circunferencia, independiente de la posición del punto. El cual se relaciona directamente con elementos presentes en el diseño, como, el valor de la potencia de un punto exterior a la circunferencia.

Referencias bibliográficas

Baeza, A., García, M., y Villena, M.(2005). *Texto del estudiante Segundo año medio*. Santiago: Santillana del pacífico

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematiques, 2*, 147-176.

Cid, E. (2008). *Texto del estudiante Segundo año medio*. Santiago: Cal y canto

Houdement, C., y Kusniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique des mathématiques et des sciences cognitives 11*, 175-216.

Houdement, C., y Kuzniak, A. (2000). Formation des maitres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques, 20*(1), 175-216.

Ministerio de Educación , Unidad de curriculum y evaluación.(2004). *Matemática programa de estudio Segundo Año Medio*.Santiago:Mineduc.

Ministerio de Educación, Unidad de curriculum y evaluación (2009). *Fundamentos del ajuste curricular en Matemáticas*.Santiago: Mineduc .

Montoya, E. (2010). *El Razonamiento en Matemáticas*. Valparaíso: Pontificia Universidad católica de Valparaíso.

Proceso de admisión 2012 documento n°13. (2012).(sf).Recuperado el 05 de octubre de 2011 de http://www.demre.cl/text/publicaciones2012/septiembre/publicacion16 (29092011).pdf.

ALGUNAS DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON DERIVADAS

Noelia Londoño Millán, Alibeit Kakes Cruz, Victoria Guadalupe Decena García
Universidad Autónoma de Coahuila México
noelialondono@uadec.edu.mx

Resumen. A través de este documento se dan a conocer los resultados parciales encontrados en un estudio realizado a estudiantes de primer año de licenciatura, siendo el objeto central indagar acerca de las dificultades que presentan en la resolución de problemas en el área de las matemáticas, los que se podrían resolver usando la derivada. Para esta parte de la investigación se diseñó y aplicó un diagnóstico el cual contenía cuatro problemas referidos a: graficación de funciones, extremos de funciones, funciones por ramos y tangente a una curva. El análisis de resultados deja ver cómo a pesar de haber cursado y aprobado el curso de cálculo I (cálculo diferencial) y llevado un 80% el curso de cálculo II (cálculo integral), muy pocos alumnos logran utilizan la derivada como una herramienta para solucionar los problemas propuestos.

Palabras clave: problema, derivada, estrategias, recursos

Abstract. Through this document disclosed partial results found in a study of freshmen graduate, being the central object inquire about the difficulties encountered in solving problems in the area of mathematics, which could be solved using the derivative. For this part of the research was designed and applied a diagnosis which contained four problems related to: graphing functions, features extremes, functions by classes and tangent to a curve. Analysis of results reveals how despite having taken and passed the course of Calculus I (calculus) and led to 80% during calculation II (integral calculus), very few students attain the derivative used as a tool to solve the proposed problems.

Key words: problem, differential, strategies, resources

Introducción

En matemáticas, la derivada es un tema obligado en el diseño curricular de todos los programas de cálculo I (cálculo diferencial), de cualquier ingeniería, licenciatura en matemáticas, física o afines, por considerarse una herramienta importante, y es tarea del docente universitario enseñar los conocimientos, desarrollar las habilidades y fortalecer las aptitudes de los estudiantes de nivel licenciatura, para que el alumno tenga un panorama más amplio a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas.

Es de dominio público que existe un universo de dificultades en el dominio de las matemáticas en general y el uso de la derivada en particular, para la resolución de problemas en varios contextos. El reporte de investigación que se presenta a continuación contiene resultados respecto a la problemática que presentan los estudiantes en la resolución de problemas en un contexto puramente matemático, y que para resolverlos era necesario contar con algunos conocimientos teóricos como las reglas de derivación, identificar funciones por tramos, interpretación geométrica de la derivada, criterio de la primera y segunda derivada, ente otros.

De manera general el documento contiene el referente teórico usado en la investigación, también aparece la metodología, en la cual se especifican las características de los procesos seguidos para llevar a cabo la investigación, en ella se describen los instrumentos aplicados, así como también, las características de los participantes en el momento de la aplicación. En otro apartado se desarrolla la discusión de los resultados en el cual se hace un análisis cuantitativo y cualitativo, para luego obtener las conclusiones, mostrando por último las referencias bibliográficas que se tuvieron en cuenta durante el desarrollo de la investigación.

Referente teórico

Las reformas educativas recientes que se han realizado, no solo a nivel de México sino a nivel del mundo coinciden en incluir la resolución de problemas como una fuente importante de conocimiento y aprendizaje de las matemáticas. A este respecto Schoenfeld (1992) se refiere a la resolución de problemas matemáticos como una tarea no tan simple para el individuo que aspira realizarla, es decir, una tarea que requiere algún grado de dificultad, lo que representa al menos un obstáculo y donde la sencillez no se vislumbra en la solución de dicho problema.

Para esta investigación se tuvo en cuenta la teoría de resolución de problemas Schoenfeld (1992) y Polya (1965), por un lado el dominio de conocimientos sobre derivadas, específicamente las reglas de derivación, entender el concepto de función derivable, identificar extremos de una función, etc. Y en lo que respecta a estrategias heurísticas se prestó atención especial a las siguientes: hacerse preguntas respecto a la incógnita, hacer una gráfica, enunciar el problema de manera diferente y particularizar.

Metodología

En este apartado se incluye una pequeña descripción de las personas participantes en el estudio, las características del instrumento, así como también las condiciones bajo las cuales fue aplicado.

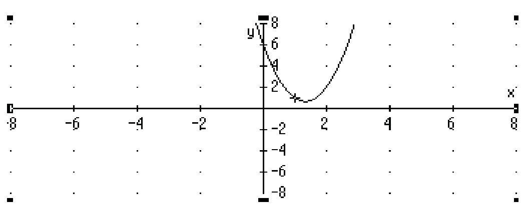
Participantes en el estudio. En el estudio participaron 14 estudiantes de licenciatura, cuyas edades estaban entre los 17 y 19 años, en el momento de aplicación (mayo de 2011), los alumnos estaban terminando el primer año de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila.

Acerca del instrumento. La información fue recabada a través de un diagnóstico el cual fue diseñado con el objetivo de indagar sobre la resolución de problemas en el contexto puramente matemático. Antes del diseño se consultó el programa oficial de la asignatura de cálculo I, de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, el cual incluye en una de sus unidades el estudio del concepto de derivada y sus aplicaciones, "Unidad IV: Derivada de una función (reglas de derivación), derivadas de orden superior, derivación implícita, aplicaciones (utilizando la computadora en la resolución de problemas planteados).” (Facultad de ciencias físico matemáticas, 2010, p. 73). También se hizo una revisión bibliográfica de algunos textos que se sugieren en el programa oficial de cálculo I, Anton (1991), Leithold (1999), etc. y que estaban a disposición de los alumnos en la biblioteca de la facultad y la infoteca central.

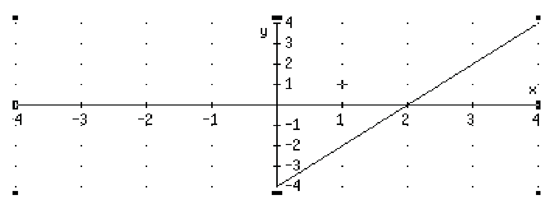
Del mismo modo se indagó con los alumnos de licenciatura en matemáticas aplicadas (de segundo a octavo semestre) que habían llevado cálculo diferencial, acerca de temas de derivadas que habían visto y en la investigación sólo se incluyeron los temas que tuvieron mayor frecuencia como extremos en un intervalo, funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada, concavidad de un a función y el criterio de la segunda derivada, así como también análisis de gráficas y problemas aplicados a máximos y mínimos.

Teniendo en cuenta lo anterior se procedió a diseñar el instrumento el cual estuvo conformado por cuatro problemas a saber: El primero se refiere a la gráfica de una función, el problema consta de un enunciado y cuatro opciones de respuesta, siendo la opción a, la respuesta correcta. La dificultad de este problema radica en que la curva que debían seleccionar correspondía a la derivada de la función, y no al revés como están acostumbrados los alumnos.

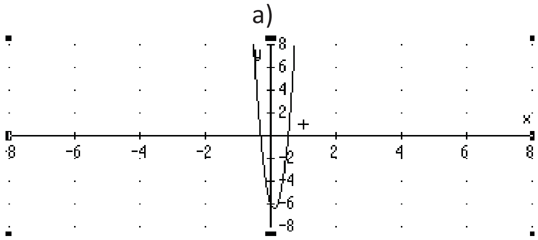
Problema 1. Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ la gráfica de su derivada es:



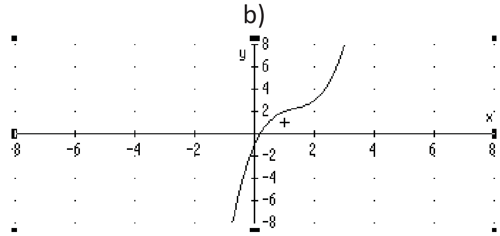
a)



b)



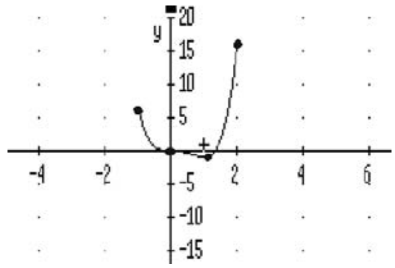
c)



d)

Para el segundo problema se averiguó por los extremos de una función polinómica, en un intervalo, conocida la función y su respectiva gráfica.

Problema 2. Hallar los extremos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en el intervalo $[-1,2]$.



Un tercer problema planteado se refiere a un concepto clave en cálculo: ser diferenciable, la tarea del estudiante consistió en construir una función (definida por tramos) que sea derivable. Este problema pone al estudiante en una situación poco usual, ya que lo normal es darle la función para que el alumno la derive y generalmente continúa y en una sola expresión. Cabe mencionar que este problema tres es similar al planteado por Selden et al. (1999), con algunas modificaciones.

Problema 3. Para qué valores de a y b es derivable la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - x, & si\ x < 0 \\ ax + b, & si\ x \geq 0 \end{cases}$

El cuarto problema se refiere a la interpretación geométrica de la derivada, dada la ecuación y algunos puntos de la misma.

Problema 4. Halla los coeficientes de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ sabiendo que su gráfica pasa por (0,3) y por (2,1) y en este último punto, su recta tangente tiene pendiente 3.

Luego que los alumnos solucionaron cada problema se solicitó que elaboraran una lista con las estrategias y los conocimientos que utilizó para resolver cada problema.

Sobre las condiciones de aplicación. Todos los alumnos participantes habían cursado y aprobado el curso de cálculo I, esto porque para solucionar los problemas era necesario contar con algunos conocimientos teóricos respecto a la derivada como como: concepto de función derivable, grfica de la función, interpretación geométrica, reglas de la derivación. Las respuestas dadas fueron de forma individual, ya que deseaba conocer sobre la resolución de problemas de cada alumno. El tiempo utilizado fueron dos horas clase por problema, aunque hubo alumnos que emplearon menos tiempo. A los alumnos se les informó que las respuestas que dieran no iban a ser evaluadas en ninguno de los cursos que estaban llevando en el semestre.

Análisis de resultados

Los resultados obtenidos fueron analizados desde el aspecto cuantitativo y cualitativo. En cuanto al primer aspecto se clasificó la información en respuestas correctas, si cumplía con lo solicitado en cada pregunta, sin importar el método utilizado por el estudiante; respuesta incorrecta si había solución y ello no correspondía a la pregunta y la opción no contestó, para aquellos que dejaron el espacio en blanco, o simplemente expresaron no poder hacerlo.

A continuación se muestra una tabla general con los porcentajes de los resultados obtenidos por pregunta.

Problema	Correcto	Incorrecto	No Contestó
1	64%	36%	0%
2	28%	36%	36%
3	0%	50%	50%
4	7%	64%	29%

Tabla 1. Resultados por problema del desempeño de los alumnos.

Al analizar los resultados de forma cualitativa se observa un aceptable desempeño 64% en la pregunta uno, la cual involucra la gráfica de la función derivada. La mayoría de los alumnos aplicó de manera correcta las reglas para la primera derivada, de una función polinómica, de grado tres: *si* $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$, entonces su primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 8x + 6$, la dificultad mayor en esta pregunta, residió en que los alumnos no tuvieron la habilidad de seguir derivando para encontrar el comportamiento de la función $f'(x)$ y hallar sus características, lo único que hicieron fue elegir una de las dos funciones que tuvieran comportamientos cuadráticos y el 36% incurrieron en el error de elegir la opción c como respuesta correcta.

Luego de todo el proceso vale la pena preguntarse ¿se hubieran obtenido los mismos resultados si en las opciones de respuesta aparecieran únicamente funciones cuadráticas?

Para el segundo problema donde se pedía los extremos de la función en un intervalo, el 36% de los alumnos se limitó a responder solamente usando la gráfica sin realizar cálculo alguno y al preguntarles sobre como obtuvo el resultado, la mayoría se limitó a contestar "que sólo mirando la gráfica", y como la gráfica estaba a escala el resultado no en todos los casos fue el correcto. Otros únicamente respondieron los extremos para $x = -1$ y $x = -2$, desconociendo como extremo el valor de la función en $x = 1$.

Otro caso importante que debe resaltarse de estos resultados, es el nulo desempeño mostrado por los alumnos en el problema tres, donde se debía construir una función por tramos que fuera derivable. Para responder esta pregunta era necesario: primero que los alumnos formaran una función continua en $x = 0$, dentro de los conocimientos necesarios para solucionar este problema se requiere la definición de función continua, límites laterales, que pudiera garantizar en $x = 0$ el mismo valor para f(x) en cada tramo. Luego que la función es continua se debía garantizar que "el pegue" sea suave, esto es, que al calcular la pendiente de la recta tangente por la izquierda en cero, sea igual a la pendiente de la recta tangente calculada por la derecha en cero. La derivada calculada en $x = 0$, para este caso, proporciona la pendiente de la recta tangente, solo era necesario hallar la derivada de cada tramo en $x = 0$ e igualarlas. Esto permite encontrar los términos *a* y *b* de la función definida por tramos.

Una de las estrategias que hubieran podido usar los alumnos es la particularización, es decir, asignarle valores *a* y *b* de manera específica siendo sistemáticos. Otra opción pudiera ser la de realizar una gráfica que les hubiera servido como una guía para orientar a una posible solución.

Entre las respuestas no se encontró ninguna solución correcta, solamente algunos intentos fallidos, que se muestran en las figuras No 1a y 1b, dadas por el mismo estudiante.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x, & si\, x < 0 \\ ax + b, & si\, x \geq 0 \end{cases}$$

Para $a<0$ o $a>0$ y $b>0$

Figura 1a. Respuesta proporcionada por un alumno a la pregunta 3

Porqe se pede para cualquier
a y b que cumbla la condición.

Figura 1b. Respuesta proporcionada por un alumno a la pregunta 3

Este alumno solo expresa de manera equivocada que es válido para $a < 0$ o $a > 0$ y $b > 0$ y luego hace más extenso su error "se puede para cualquier *a* y *b* que cumpla la condición".

Otra respuesta para este mismo problema se muestra en la Figura No 2. :

*Si lo vi en clase
pero fue hace
mucho tiempo y
no recuerdo el
procedimiento

Figura 2. Respuesta proporcionada por un alumno la pregunta 3

Dentro de la resolución de problemas se reconoce como una estrategia heurística, asociar el problema con otro parecido que se haya resuelto antes, la dificultad de este estudiante es que no requiere recordar un problema, sino el procedimiento, cosa que es cognoscitivamente algo más complejo de lograr.

Otro aspecto a resaltar es que los alumnos no ven la derivada como una herramienta para solucionar los problemas planteados, como es el caso de las respuestas dadas en el problema cuatro, en el cual sólo el 7% lo responde correctamente, sin embargo en las justificaciones dadas y los procesos no utilizan la derivada. También se notó que no utilizan toda la información proporcionada en el enunciado.

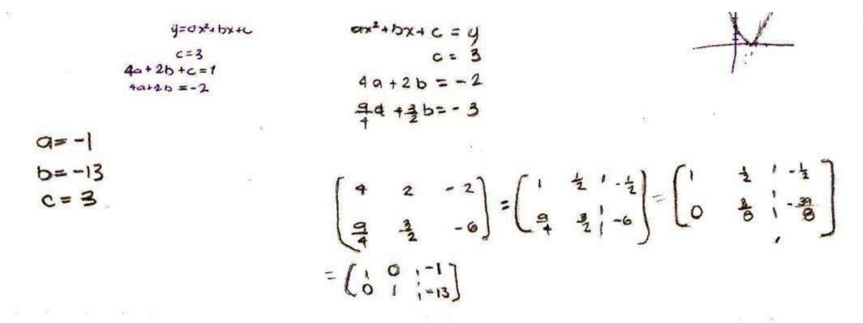


Figura 3. Respuesta incorrecta por el alumno a la pregunta 3

Este alumno como muestra la figura No 3 construye un sistema de ecuaciones lineales, con las variables a y b y lo intenta solucionar usando conocimientos de algebra lineal. También como estrategia elabora una gráfica, a pesar de ello no obtiene una respuesta correcta.

Conclusiones

En términos generales se encontró que los alumnos:

No tienen claridad en cómo desarrollar o llevar a la práctica las definiciones y los teoremas tales como función creciente y decreciente, puntos críticos así como el criterio de la primera derivada y límites laterales, que se deben implementar para resolver apropiadamente los problemas propuestos.

Solo utilizan otras herramientas como tablas o gráficas y no ven como una herramienta importante recurrir a la derivada.

Manifiestan en algunas preguntas que ya no recuerdan cómo responder a los problemas argumentando que ya paso tiempo de haber visto el tema.

La mayoría logran entender los problemas, esto es, de acuerdo con Polya comprender un problema implica descubrir cuáles son los datos, las incógnitas, las condiciones.

No ponen en práctica ninguna de las siguientes estrategias cognitivas: particularizar, resolver un problema más simple, estudiar casos especiales, usar ensayo y error, iniciar de atrás para adelante, las cuales pudieron resultar de gran ayuda para que los alumnos lograran resolver los problemas plateados en esta investigación

A pesar que los estudiantes debían tener el dominio de algunos conocimientos tales como: extremos en un intervalo, análisis de las gráficas así como límites en el infinito; necesarios para responder los problemas que les fueron planteados, su desempeño no muestra que esos conocimientos estén siendo utilizados de manera efectiva en la resolución de problemas. Decena (2011).

Referencias bibliográficas

Anton, H. (1991). *Cálculo y Geometría Analítica*. México: LIMUS.

Decena, V. (2011). *Algunas dificultades que presentan los estudiantes de licenciatura al resolver problemas de aplicaciones a la derivada*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Coahuila. México.

Leithold, L. (1999). *El Cálculo*. 7 edición. México: OXFORD.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to thinking mathematically: problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370) New York: Macmillan.

Selden, A., Selden, J., Hauk, S. y Mason, A. (1999). Do calculus students eventually learn to solve non-routine problems. *Departament of Mathematics Technical Report*. Tennessee Technological University. USA.

O PENSAMENTO NARRATIVO NA CONSTRUÇÃO DE SIGNOS NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ALGÉBRICOS DE ALUNOS DE 8º. ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Maurílio Antonio Valentim
Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN Anhanguera Brasil
valenttinos@yahoo.com.br

Resumo. A linguagem, oral ou escrita, é uma das formas de expressarmos nossos pensamentos, mas como podemos realizá-lo quando o mesmo é matemático? Muitas pesquisas que envolvem as linguagens estão sendo realizado o que demonstra a atual preocupação com este tema. Com o apoio teórico de Bakhtin, Vygotsky, Bruner, Vergnaud, entre outros, vou enveredar também neste universo e verificar como a linguagem pode influenciar na construção de signos Matemáticos em alunos de 8º (oitavo) ano de uma escola municipal de Juiz de Fora (MG). A pesquisa será realizada, com os alunos, em três etapas; em assembléia, em equipe e individual.

Palavras chave: linguagem, pensamento, leitura, escrita, educação matemática

Abstract: The language, oral or written, is one way to express our thoughts, but how can we do it when it is math? Many studies involving languages are being performed which demonstrates the current preoccupation with this theme. Through theoretical and Bakhtin, Vygotsky, Bruner, Vergnaud, among others, we will be embarking also in this universe and seeing how language can influence the construction of mathematical signs in students of 8th (eighth) year of a municipal school in Juiz de Fora (MG). The research will be conducted with students in three stages, in assembly, team and individual.

Key words: language, thought, reading, writing, mathematics education

Introdução

O aporte teórico entre os estabelecidos no projeto de pesquisa de doutoramento levou em consideração as relações de suas teorias com o objetivo da pesquisa. Desde o início de minha jornada como educador de uma das disciplinas que ainda provoca temor aos alunos – a Matemática –, tenho como preocupação, ou angústia, a constatação do baixo desempenho obtido nas avaliações, tanto nas elaboradas por mim para a turma quanto nas realizadas pelo setor público, demonstrando que na maioria das vezes não houve uma aprendizagem significativa do conteúdo.

Não conseguir este objetivo para um professor provoca um sentimento de incapacidade e leva a busca por metodologias que possam dar condições de superar essa realidade, torna-se mais que desafio. Nessas minhas buscas e com a experiência construída com o passar do tempo constatei que uma das dificuldades dos alunos está no entendimento da simbologia matemática.

Utilizarei o termo de "língua materna" de Machado (1998) para me referir ao estudo da disciplina da língua portuguesa, que de acordo com ele é imprescindível para o ensino de Matemática, mesmo que esta tenha sua própria linguagem. Sob esse aspecto Smole (1993) afirma que não devemos imputar aos professores da língua materna a missão de sanar uma das reclamações mais comuns dos professores de Matemática que é a dificuldade dos alunos na interpretação de enunciados. Devemos lembrar que, apesar da necessidade do uso da língua materna, nas aulas de Matemática, o ensino dessa disciplina tem algumas peculariedades, além da simbologia. Quando se fala "pro cê", por mais estranho que possa parecer, a mensagem foi transmitida e entendida, mesmo estando fora dos padrões culto da língua materna, ou seja, "para você". Em Matemática, não há possibilidade de mudança na representação de um signo, pois ela pode acarretar a erros. Se escrevermos x^3 (x elevado a terceira potência) é diferente de $\frac{x}{3}$ (x sobre 3, ou x dividido por 3).

Como a forma de construção de signos passa pela palavra, em um movimento reverso com o pensamento expresso na linguagem, poderei estabelecer estas relações entre os autores Jerome Bruner, Lev S. Vygotsky, Mikhail Bakhtin e Gerard Vergnaud.

As pesquisas em linguagens nas aulas de matemáticas, ora com o foco no docente atuante ou em formação, ora nos discentes estão se multiplicando. A quantidade de teses, dissertações e artigos proliferam com aberturas de espaço em eventos nos quais outrora não pensaríamos encontrar, como o COLE – Congresso de Leitura do Brasil, que desde 2003 abriga o Seminário de educação Matemática (em 2012 acontece o SELEM, Simpósio de Leituras e escritas em Educação Matemática, desvinculando-se do COLE). Com a premissa de que a leitura estará sempre auxiliando uma melhor escrita é importante que ampliemos nossas atividades de leitura procurando sempre aplicá-la em nosso cotidiano profissional. Na maioria dos casos, temos programas de curso que não privilegiam a leitura. Podemos formar leitores se não o somos? Smole (1993) nos chama a atenção para o fato de que mesmo como professores de Matemática devemos atuar como incentivadores na prática da leitura e mostrar aos nossos alunos as relações da matemática com as demais disciplinas.

> É certo que a linguagem matemática consiste de símbolos bem definidos que representam conceitos fundamentais, mas também é certo que para expressá-los oralmente tomamos emprestados termos da língua materna que podem ter diferentes significados dentro e fora da matemática e para construir a compreensão da linguagem unidimensional da matemática faz-se necessário que o aluno tenha noção da diversidade de seu uso. (Smole, 1993, p. 4)

Pensamento e linguagem matemática

De acordo Bruner (1997), há dois tipos de pensamento, o pensamento narrativo e o lógico - cientifico também chamado de paradigmático. Ele defende que esses dois modos de pensamento constroem as realidades ordenando a experiência de forma individualizada, mas mesmo assim eles se completam sem que um se reduza ao outro.

> Existem dois modos de funcionamento cognitivo, cada um fornecendo diferentes modos de ordenamento de experiência, de construção de realidade. Os dois (embora complementares) são irredutíveis um ao outro. Esforços para reduzir um modo ao outro ou para ignorar um às custas do outro inevitavelmente deixam de captar a rica diversidade do pensamento. (Bruner, 1997, p. 12)

Os dois modos pensamentos juntos constroem a realidade sem se sobreporem. Enquanto o paradigmático faz uso da lógica, o narrativo foca no como aconteceu.

O pensamento paradigmático associa-se ao discurso teórico e ao logos, ou seja, está baseado na utilização de argumentos para estabelecer o ideal de um sistema formal e matemático de descrição e explicação. Por sua vez, a narrativa, mítica ou literária, aborda a maneira pela qual as intenções humanas se comportam nas mais diversas situações. Nesse sentido, as histórias, que são criadas, traçam relatos de ações humanas em circunstâncias de experiência localizadas num tempo e espaço definidos, enquanto o discurso teórico tenta ir além dos fatos particulares, visando formulações de princípios gerais e abstratos. (Bruner, 2001).

> [...] As realidades narrativizadas, eu suspeito, são demasiadamente onipresentes, sua construção é demasiadamente habitual ou automática para ser acessível à fácil inspeção. Vivemos em um mar de histórias, e como os peixes que (de acordo com o provérbio) são os últimos a enxergar a água, temos nossas próprias dificuldades em compreender o que significa nadar em histórias. Não que não tenhamos competência em criar nossos relatos narrativos da realidade – longe disso-, somos, isso sim, demasiadamente versados. Nosso problema, ao contrário, é atingir uma consciência do que fazemos facilmente de forma tão automática, o antigo problema da prise de conscience.(Bruner, 2001, p.139 e 140)

Considerando o pensamento lógico-científico como proveniente do pensamento narrativo, utilizarei o discurso externo escrito como estratégia para conhecer como se dá essa transição ou criação. Considero que por meio do pensamento narrativo dos alunos, o professor poderá conhecer o processo de (re)construção do pensamento matemático podendo interferir adotando metodologias e ou estratégias que melhor atender seus objetivos.

De acordo com Vygotsky. "A comunicação por escrito repousa sobre o significado formal das palavras e, para transmitir a mesma ideia, exige uma quantidade de palavras bem maior do que a comunicação oral. (2010, p.186.). Dentro dos conceitos propostos por ele, dois são importantes para nosso estudo pelo fato de podermos analisá-los com base no cotidiano, no conceito espontâneo (também chamado de cotidiano) e o conceito científico.

Os conceitos espontâneos são formados a partir da interação do sujeito com o meio, suas vivências e situações concretas que depois de utilizado são generalizados. Os conceitos científicos por sua vez são enunciados no ambiente formal e nascem como generalizações da realidade. O processo de desenvolvimento dos dois tipos de conceitos difere-se no fato que com base nos conceitos espontâneos são formados os conceitos científicos que por sua vez reorganizam os conceitos espontâneos. Vygotsky traz para a discussão sobre a formação de conceitos espontâneos e conceitos científicos a noção de Zona de Desenvolvimento Proximal – ZDP, que se constitui na:

> [...] distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais ativos. (Vygotsky, 2010, p. 97)

Destacando assim a necessidade de se propor situações em que o aluno possa realizar a atividade com ajuda indo além do que seria capaz de fazer individualmente - o que evidencia a importância do trabalho em parceria com outros sujeitos mais competentes para provocar reestruturações e as modificações nos esquemas de conhecimento que possibilitará, aos poucos, uma atuação mais autônoma pelo sujeito aprendiz.

Estimular a escrita nos alunos fará com que eles necessitem de uma rol de palavras com uma organização de ideias que não poderá ser feita se não houve uma significação para ele daquilo no qual ele deve se expressar. Vygostky (1979) ainda afirma que para transformar pensamento em palavras é necessário a passagem pelo significado já que um pensamento não tem um correspondente em palavras.

Parafraseando Bakhtin, a construção de um signo se faz quando se aproxima um conceito com um outro signo e isso ficará mais fácil no momento em que o significante se torna signo.

Estaremos utilizando as idéias de Bakhtin sobre os conceitos de "signos". Para ele tudo que é ideológico é um signo, "sem signos não há ideologia" (Bakhtin, 2010, p. 31) e:

> São objetos naturais, específicos, [...], assim um sentido que ultrapasse suas próprias particularidades. Um signo não existe apenas como parte de uma realidade; ele também reflete e refrata uma outra. [...] ..., compreender um signo consiste em aproximar o signo apreendido de outros signos já conhecidos; em

> outros termos, a compreensão é uma resposta a um signo por meios de signos.(2010, p. 34)

O pensamento, tendo como a base a palavra, é o organizador dos signos e colocando o signo como parte de um sistema de comunicação é através da linguagem que o expressamos e conforme Bakhtin:

> [...] palavra é o fenômeno ideológico por excelência. A realidade toda da palavra é absorvida por sua função de signo. A palavra não comporta nada que não esteja ligado a essa função, nada que não tenha sido gerado por ela. A palavra é o modo mais puro e sensível da relação social.(Bakhtin, 2010, p. 36)

Essas mesmas palavras que serão partes de um diálogo, segundo Bakhtin, são neutras, pois possuem ambivalência própria que só pode ser distinguida pelo gênero discursivo.

A linguagem para Vergnaud é fator fundamental para o entendimento do processo de aprendizagem porque ela acompanha, planeja e controla a sequência de ações do sujeito. Esse aspecto aproximou Vergnaud da teoria de Vygotsky. Em linhas gerais, e discutindo mais especificamente os campos aditivo e multiplicativo na aprendizagem matemática, Vergnaud afirma que o conhecimento está organizado em campos conceituais e o domínio desse campo pelo aluno ocorre pela aprendizagem em um longo período da escolaridade. Segundo essa teoria, o que confere sentido aos conceitos a serem aprendidos pelo sujeito são as situações e os problemas a resolver, e ainda aponta a necessidade de expor o aluno a diferentes e variadas situações para que se faça emergir conceitos matemáticos. Um conjunto de situações requer o domínio de vários conceitos de naturezas diferentes, porém estes não devem ser ensinados isoladamente, mas em uma rede de conceitos e situações.

Será de grande importância as reflexões que podem ser desencadeadas a partir dos conceitos-chave da teoria dos campos conceituais, quais sejam: situação, esquema, invariantes operatórios – conceito-em-ação e teorema-em-ação.

No que se refere ao conceito de esquema, Vergnaud toma como fundamento a teoria de Piaget para quem o esquema da ação é definido como um conjunto de características que permitem refazer a ação e até mesmo aplicá-la a outras situações. Assim sua competência dependerá da natureza e dos esquemas de ação que ele possui e a capacidade de combinar e coordenar eles entre si.

> Concretamente, Piaget indica que, durante o seu desenvolvimento, o indivíduo construirá, na interação com os objetos, algumas "estruturas" ou totalidades organizadas de esquemas de ação que respeitam certas regras ou leis. As

> estruturas sucessivas que se vão construindo representam formas de relação e de compreensão da realidade cada vez mais potentes, e estados superiores de equilíbrio no intercâmbio com o mundo. (Salvador, 1999, p.88)

Ou seja, o esquema é a forma como o sujeito interage com o objeto, e na medida em que ocorre essa interação, os esquemas se modificam em uma crescente complexidade. E segundo Palangana (2001), um novo esquema resulta de uma aprendizagem ao mesmo tempo em que para que esta ocorra, parte-se de alguns conhecimentos prévios que o sujeito possui.

Interessa a esta pesquisa saber como esses conceitos são tratados na forma de uma escrita, o que pode possibilitar ao aluno conhecer esse processo de modificação participando ativamente no mesmo. Esse processo ou situação é apresentado por Vergnaud como duas classes:

1. um repertório de situações que o sujeito dispõe das competências necessárias para um tratamento imediato.
2. aquelas que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias o que demanda "um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso" (Vergnaud, 1991, p.156).

E a depender da classe de situações que o sujeito aprendiz é colocado, o funcionamento do esquema ocorre de maneiras distintas. No primeiro caso, as condutas são em grande medida automatizadas, realizadas por meio de um esquema único, enquanto no segundo caso pode ocorrer um desencadeamento de diversos esquemas, que para serem resolvidas precisam ser acomodados, descombinados e recombinados.

Vergnaud defende que a linguagem tem um importante papel no processo de aprendizagem. Nesse sentido, o professor é o mediador nesse processo de domínio do campo conceitual pelo aluno, pois será aquele que o ajudará a ampliar os esquemas e representações. Ao explicitar um conhecimento, este pode ser debatido, enquanto uma proposição implícita, não.

Como já mencionado acima, Bakhtin afirma que a compreensão de um signo se faz quando se aproxima um conceito de um outro signo já conhecido, ou seja, é o signo existente que promove a compreensão de um novo signo. Se considerarmos esse signo como um conceito Matemático, podemos relacioná-lo com Vergnaud que afirma que o aluno possui um conhecimento organizado que é chamado por ele de campos conceituais e que estes conceitos ao serem provocados por meios de atividades de interação com o objeto (problemas matemáticos a serem resolvidos, por exemplo) tendem a se modificar em um conceito mais complexo, ou seja, um signo ajudando na construção de outro signo. O que Vergnaud e Bakhtin defendem também pode ser relacionado com a Zona proximal de desenvolvimento de

Vygotsky. Nela, Vygotsky afirma que a criança, por meio da interação com outro mais competente naquela situação, irá passa de uma fase para outra de significação. Esse processo social é mediado pela linguagem. Colocamos assim a importância da influência das relações sociais defendida por Vygotsky e o conceito de poliglossia de Bakhtin.

A proposta de pesquisa

Autores como Machado (1998), Cruz (2012), Nacarato (2005), Smole (2001), entre outros referendam a importância da leitura/escrita nas aulas de Matemática. Com base nesses estudos, e alicerçando minha pesquisa em autores que tratam da linguagem e na construção de signo, proponho uma pesquisa para analisar como a linguagem, escrita ou oral pode influenciar na formação do pensamento matemático Tenho como objetivo principal analisar se e como o pensamento narrativo pode auxiliar na construção de signos matemáticos de alunos de (oitavo) 8º. ano do Ensino Fundamental.

A pesquisa será realizada com um grupo de alunos de uma escola municipal da cidade de Juiz de Fora (MG-Brasil) com alunos do 8º ano (antiga sétima série) do Ensino Fundamental. A escolha do referido ano (série) é decorrente do conteúdo específico para a série que tem uma ênfase em álgebra. A coleta de dados terá três etapas:

1ª etapa. Discussão, com todos os participantes, em forma de assembléia, sobre a resolução de uma tarefa em que não poderá ser utilizada a escrita.

2ª etapa. Resolução, em equipe de três alunos, de tarefa semelhante. Nessa etapa, poderá ser utilizada a escrita.

3ª etapa. Resolução individual também de tarefa semelhante.

As sessões serão filmadas e posteriormente analisadas. As características específicas de resolução de problemas empregadas pelos alunos nas três atividades com foco na linguagem algébrica serão utilizadas para verificar se houve, ou não, uma construção de significados matemáticos por parte dos alunos. Entre os teóricos utilizados, como mencionados acima, estarão Bakhtin que auxiliará nas questões da construção de signos; Lev Vygotsky na análise dos processos de linguagem na construção de conceitos científicos; Jerome Bruner , no entendimento das formas de pensamento e Gérard Vergnaud no entendimento das situações de aprendizagem vinculadas aos campos conceituais.

Referencias bibliográficas

Bakhtin, M.M. (2010). *Marxismo e filosofia da linguagem*. São Paulo: Hucitec.

Bruner, J. S. (2001). *A cultura da educação*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Bruner, J. S. (1997). *Realidade mental, mundos possíveis*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Cruz, M. de O. (2012). *Narrativas em matemática: significado e função*. Recuperado em 12 de março, 2012, de HTTP//WWW.educarede.org.br/educa/índex.cfm?pg= textoapoio.ds _home&id_comunidade=132

Machado, N. J. (1998). *Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua,* São Paulo: Cortez.

Nacarato, A. M., & Lopes, Celi A. E. (Orgs.). (2005). *Escritas e leituras na educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Palangana, I.C. (2001). *Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky*. São Paulo: Summus.

Salvador, C. C. (1999). *Psicologia da educação*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Smole, K. C. S. (1993). *Era uma vez na matemática: uma conexão com a literatura infantil*. São Paulo: CAEM - Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática e Estatística da USP.

Smole. K. C. S., & Diniz, M. I. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed Editora.

Vergnaud, G. (1991). A teoria dos campos conceituais. *Recherches em didactique dês mathematiques, 10* (23), 133-170.

Vygotsky, L. S.(2010). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L. S. (1979). *Pensamento e Linguagem*. Lisboa: Edições Antídoto.

DETERMINACIÓN DEL TIEMPO ÓPTIMO DE PROCESAMIENTO TÉRMICO EN UNA CONSERVA DE ALIMENTOS PARA LOGRAR EL EFECTO ESTERILIZANTE USANDO SUMAS DE RIEMANN

María del Carmen Bonilla
APINEMA: Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática Perú
mc_bonilla@hotmail.com

Resumen. La investigación corresponde a la educación interdisciplinaria, pues, todas sus etapas fueron trabajadas desde la Matemática, la Ingeniería en Industrias Alimentarias y la Educación Matemática. Se realizó en la Facultad de Ingeniería Pesquera y de Alimentos de la Universidad Nacional del Callao. El problema que los alumnos debían resolver consistía en determinar el tiempo óptimo del procesamiento térmico en una conserva de alimentos de forma tal que haya un efecto esterilizante en el producto. Para ello se recurrió al Método de Bigelow, propio de la Ingeniería de Alimentos, en el cual surge la noción de integral definida. El diseño didáctico parte de datos experimentales procesados con varios software, que al ser graficados se analizaron recurriendo a soluciones pasadas estudiadas en la Historia de la Matemática y a la visualización que optimiza la Geometría Dinámica.

Palabras clave: aplicaciones de la integral, modelización, educación interdisciplinaria

Abstract The research is located within interdisciplinary education, then, all stages were worked from the Mathematics, Food Engineering and Mathematics Education. It was held in the Faculty of Fisheries and Food Engineering, National University of Callao. The problem that students should solve was to determine the optimal time in a thermal processing canned food, such that it has a sterilizing effect on the product. Bigelow's Method was used, himself of Food Engineering, in which arises the notion of definite integral. The didactic design begins with experimental data processed with several software, which, when plotted, were analyzed using past solutions studied in the History of Mathematics and visualization that optimizes dynamic geometry.

Key words: integral applications, modeling, interdisciplinary education

Introducción

La enseñanza del Cálculo es un tema que ha producido numerosas investigaciones, por la complejidad de los contenidos, y por la dificultad que presentan los estudiantes universitarios del área de ciencias e Ingeniería. Tradicionalmente la integral es presentada desde una formalización temprana. La idea es abordar el tema desde un marco experimental, utilizando esta noción en la solución de problemas propios de la carrera, en este caso Ingeniería de Alimentos. Al partir de la realidad del alumno, se da funcionalidad y significado al conocimiento. El uso de software impregna interactividad y dinamismo al diseño didáctico, provocando motivación y placer al aprender. La investigación se realizó el ciclo 2010-B, en el curso de Matemáticas II. En el plan del curso correspondía la enseñanza y el aprendizaje de la noción de integral definida. En su planificación, diseño, ejecución y evaluación participaron la matemática Katia Vigo, el ingeniero en Industrias Alimentarias Rodolfo Bailón, ambos de la Universidad Nacional del Callao, y una educadora matemática. En la aplicación participaron 76 alumnos con una edad promedio de 18 años, repartidos en dos grupos horarios, en una sesión de clase de tres horas cada grupo.

Marco teórico

El presente trabajo se ha desarrollado buscando la integración de la historia de la matemática en la educación matemática, y para ello se ha tomado en cuenta las contribuciones del foro académico del Grupo de Historia y Pedagogía de las Matemáticas (Barbin, 2012a, 2012b, 2012c; Jankvist, 2009; D'Enfert, 2012), que considera la utilidad de la historia en la superación de los obstáculos epistemológicos propios del surgimiento de nuevos pensamientos, en este caso el pensamiento analítico. Dentro del grupo se ha señalado la necesidad de más investigaciones empíricas sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas relacionadas con la historia (Arcavi, citado por Jankvist, Op.cit.). Otra línea de investigación que ha nutrido el trabajo es la que se desarrolla en el 19th ICMI Study, Proof and proving in Mathematics Education, que considera los enfoques experimentales en el pensamiento teórico a través de la utilización del software de geometría dinámica. Es así como se utiliza el Cabri II plus para una mejor visualización de la noción de integral definida, que ayude a lograr una mayor comprensión de la noción. De esta manera se propugna el desarrollo de una matemática experimental, acorde con los últimos avances de las múltiples herramientas computacionales y simbólicas que han rejuvenecido las matemáticas y la educación matemática (Arzarello, Bartolini, Lun, Mariotti y Stevenson, 2012).

Objetivos de la investigación

1. Diseñar un proceso didáctico que sitúe al procesamiento térmico de conservas de alimentos como generadora del concepto de integral definida como un límite de sumas.

2. Utilizar la tercera proposición del tratado histórico "Sobre la medida del círculo" desarrollado por Arquímedes, que le permitió encontrar la aproximación a π al calcular el área de dos polígonos regulares de igual número de lados inscrito y circunscrito a un círculo, aumentando el número de lados en forma progresiva, como un antecesor de la noción de integral para que active la heurística.

3. Utilizar experimentalmente la geometría dinámica del Cabri II Plus para que los alumnos puedan visualizar y comprender el concepto de integral definida como un límite de sumas.

Cuestión problemática

Con la finalidad de activar el proceso de enseñanza y aprendizaje, y trabajar en función de que el estudiante se interese en el problema y lo haga suyo, se propuso a los estudiantes una cuestión problemática planteada de la siguiente manera:

¿Cómo determinar el tiempo óptimo del procesamiento térmico en una conserva de olluquito con charqui (plato típico peruano) de tal manera que tenga un efecto esterilizante en el producto? (Bailón, 2008).

Los Ingenieros de Alimentos, dentro de sus múltiples funciones en el proceso de producción de alimentos enlatados, cumplen con la tarea de esterilizarlos del *Clostridium botulinum*, bacteria que se encuentra por lo general en la tierra y es productora de la toxina botulínica, el agente causal del botulismo. Puede aparecer en cualquier alimento de origen animal o vegetal, siendo las conservas, especialmente las caseras, los lugares donde aparece mayormente. Sus esporas pueden sobrevivir en la mayoría de los ambientes y son difíciles de destruir incluso a la temperatura de ebullición del agua a nivel del mar, de modo que, frecuentemente los enlatados son sometidos a altas temperaturas para destruir las esporas.

La tarea en concreto se traduce en que el Ingeniero determine cuánto tiempo se debe emplear, y a qué temperatura se deben exponer las conservas de olluquito con charqui para que sean destruidas las esporas del *Clostridium botulinum* (Bailón, 1994).

Metodología

La investigación es experimental. De la aplicación del diseño didáctico se obtienen datos cuantitativos y cualitativos sobre el desempeño de los estudiantes en el logro de los objetivos, tomados a partir de la matriz de valoración del plan de sesión, y a partir de la encuesta de opinión sobre el diseño didáctico aplicada a los estudiantes. Los resultados de ambos instrumentos de análisis se pueden apreciar en las tablas 3 y 4.

Método de Bigelow

Existen varios métodos para la esterilización de las conservas, en este caso se escogió el Método Bigelow (Bigelow y Esty, 1920). Constituye el primer método de integración gráfica para el cálculo de procesamiento térmico. A pesar del tiempo que tiene de propuesto, este método es el procedimiento más exacto y es utilizado hasta la actualidad.

Pasos a seguir para la determinación del tiempo de procesamiento térmico:

1. Determinar la información experimental, por uso de termocuplas o de un termoregistro los valores del proceso en tiempo y variación de la temperatura T en el olluquito con charqui. Esta información es proporcionada a los alumnos.
2. Determinar el valor F o Tiempo de Destrucción Térmica (TDT) para cada valor T_i sabiendo que,

   $F = F_0 * 10^{(250-T_i)/Z}$

   F_0 es una constante que representa el valor de esterilización para el alimento, en este caso como el charqui es una carne $F_0 = 6$.

   z es la diferencia de temperatura cuando la curva de penetración térmica atraviesa un ciclo logarítmico, z = 18ºF
3. El coeficiente o efecto letal (CL) por unidad de tiempo viene a ser el valor recíproco de F a cada temperatura, es decir 1/F vs. Tiempo (min.) a cada minuto de evaluación y de variación significativa. Tabulando los datos obtenidos se grafican los valores del CL con respecto al tiempo, obteniéndose la curva de letalidad.
4. Se tiene que determinar el área bajo la curva que cifre la unidad (EE = 1) pues ésta define el tiempo en donde se procede a cerrar la alimentación de calor (vapor), es decir el tiempo del procesamiento térmico (θpt) en el intervalo de $\theta = 0$ a $\theta = \theta$pt.

Plan de Sesión

Para el desarrollo del proceso didáctico se aplicó el siguiente Plan de sesión:

Objetivo	Actividad	Procedimiento	Materiales	Tiempo
Motivar al estudiante y ubicarlo en el contexto de aprendizaje	Observar un video sobre el proceso de esterilización de alimentos.	En el salón de clase utilizando un proyector multimedia se visualiza el video con la explicación del profesor especialista.	Video y separata preparada por los profesores.	10 min
Comprender el tema e identificar los requisitos para desarrollarlo.	Leer y discutir la separata proporcionada en clase por los profesores.	Se forman grupos de dos alumnos, trabajando en forma colaborativa.	Separata sobre el Método Bigelow para la esterilización de alimentos.	20 min
Procesar los datos.	Trabajar en una tabla de Excel.	El grupo ingresa los datos al Excel y elabora los cálculos solicitados.	Base de datos, software Excel, computadora	20 min

Objetivo	Actividad	Procedimiento	Materiales	Tiem-po
Matematizar la situación planteada.	Ajustar los datos.	El grupo halla la gráfica a partir del ajuste de los datos para hallar la función "Efecto Letal" 1/F.	Graphmatica, computadora, base de datos en Excel	20 min
Aprender de soluciones pasadas para activar la heurística.	La historia de la matemática para introducir la no-ción de sumas de Riemann.	Los alumnos experimentan y analizan el modo como Arquímedes calculó el área del círculo.	Página web. http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=161	20 min
Matematizar la situación planteada.	Calcular el área bajo la curva mediante sumas de Riemann.	Ensayan diferentes formas de hallar el área de la región bajo una curva.	Papel, lapiceros, lápiz, borrador.	30 min
		Utilizan el Cabri para visualizar que en el límite la suma de las áreas de los rectángulos coincide con el área bajo la curva.	Software Cabri II plus	20 min
Matematizar la situación planteada.	Formalizar la noción de In-tegral definida mediante sumas de Riemann (Kong, 1985).	La profesora expone procurando incentivar las intervenciones de los alumnos en la formalización.	Pizarra y mota. Cuadernos.	40 min

Tabla 4: Plan de Sesión

Formalización de la curva efecto esterilizante

Con ayuda de Excel los alumnos procesaron los datos experimentales para hallar valor F o Tiempo de Destrucción Térmica (TDT) para cada valor T_i. Utilizando el software Graphmatica realizaron el ajuste de curvas tomando como base los datos hallados. La formalización se desarrolló en cuatro intervalos y se hallaron cuatro funciones, dos exponenciales y dos polinomiales que se aprecian en la Tabla 2.

Datos (minutos)	Funciones
0 a 30	$y = \exp(0.2316x - 11)$
30 a 48	$y = 0,000000011x^4 + 0,00000038x^3 + 0,0000065x^2 - 0,00012x - 0,0118$
50 a 60	$y = 0,000049x^2 + 0,0014x - 0,0767$
62 a 68	$y = \exp(-0,0553x + 1,55)$

Tabla 5: Funciones halladas por el ajuste de datos

Habiéndose observado a continuación la manera cómo Arquímedes determinó el área del círculo, se trabajó con los alumnos en forma grupal, incentivándolos a que utilicen diferentes caminos para hallar el área bajo la curva. Después de varias intervenciones, se resume las ideas, y con ayuda del Cabri II Plus, se visualiza la integral definida como el límite de la suma de productos entre el valor de la función en un punto x_i* y el ancho Δx del subintervalo conteniendo al punto, donde n es la cantidad de subintervalos,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\Delta x_i$$, que normalmente se denota así $$\int_a^b f(x)dx$$

Evaluación del diseño didáctico

Instrumentos de evaluación

Para evaluar a cada alumno se elaboró una matriz de valoración o rúbrica de las actividades propuestas en base a criterios definidos, a los cuáles se les colocó un valor máximo, tres, cuatro o cinco de acuerdo a la pregunta (Ver Tabla 3).

De igual manera se aplicó una encuesta a los alumnos con la finalidad de conocer sus apreciaciones sobre los elementos que constituyen la propuesta y su opinión en general. Las preguntas de la encuesta son resumidas en la columna pregunta de la Tabla 4.

Resultados

En la Tabla 3 se pueden observar los puntajes en promedio con respecto a cada actividad y lo que corresponde a la sesión. Se aprecia que la sesión se repitió en dos grupos, uno de Ingeniería de Alimentos con 40 alumnos, y el segundo, de Ingeniería Pesquera con 36 alumnos.

Actividad / Alumnos	Lee y discute la separata sobre el método Bigelow proporcionada en clase. (4 puntos)	Elabora una tabla en Excel en base a los datos. (3 puntos)	Ajusta los datos a una curva para hallar la función "Efecto Letal" 1/F (4 puntos)	Observa, experimenta y comprende como Arquímedes halló el área del círculo. (4 puntos)	Halla el área bajo una curva mediante sumas de Riemann. (5 puntos)	Sesión de clase (20 puntos)
Ingeniería Alimentos	2.7 ptos.	2.3 ptos.	3 ptos.	2.9 ptos.	2.45 ptos.	13.6 p.
	66.5 %	76.7 %	75 %	72 %	49 %	68%
Ingeniería Pesquera	2.4 ptos.	2.5 ptos.	2.9 ptos.	2.5 ptos.	2.75 ptos.	13.5 p.
	61 %	83.3 %	72.5 %	62.5 %	55 %	67.5 %
Promedio	2.5 ptos.	2.4 ptos.	2.95 ptos.	2.7 ptos.	2.6 ptos.	13.5 p.
	62.5%	80%	73.75%	67.5%	52%	67.5%

Tabla 6: Resultados de la matriz de la valoración

Los resultados de la encuesta se puede observar en la Tabla 4.

Pregunta	Frecuencia	Totalmente de acuerdo	De acuerdo	Indeciso	En desacuerdo	Totalmente en desacuerdo
Utilidad de la separata	Absoluta	8	56	12	-	-
	Relativa %	10.5	73.7	15.8	-	-
Utilidad de los contenidos	Absoluta	52	24	-	-	-
	Relativa %	68.4	31.6	-	-	-
Utilidad de los programas	Absoluta	24	46	6	-	-
	Relativa %	31.6	60.5	7.9	-	-
Utilidad del video	Absoluta	6	48	20	2	-
	Relativa %	7.9	63.1	26.3	2.6	-
Utilidad del trabajo de Arquímedes	Absoluta	42	34	-	-	-
	Relativa %	55.3	44.7	-	-	-
Asesoría de los profesores	Absoluta	36	40	-	-	-
	Relativa %	47.4	52.6	-	-	-
Disposición ante consultas	Absoluta	38	38	-	-	-
	Relativa %	50	50	-	-	-
Motivación en la sesión	Absoluta	40	36	-	-	-
	Relativa %	52.6	47.4	-	-	-

Tabla 7: Resultados de la Encuesta de opinión a los alumnos

Interpretación de los resultados y conclusiones

En lo que se refiere a los aprendizajes esperados evaluados con la matriz de valoración, de las cinco actividades planteadas, la que mayor éxito obtuvo, en un 80%, fue la elaboración de la tabla de Excel para hallar el valor de F, y la de menor éxito fue la última, la visualización de las sumas de Riemann con Cabri II. Se debió a que el centro de cómputo debía dedicarse a cuestiones administrativas y ello no permitió que se desarrollara con profundidad la visualización como estaba planificado. En la práctica las tres horas se redujeron a dos, por falta de apoyo de las autoridades universitarias, de allí el logro de la actividad en un 52%. Teniendo en cuenta la escala vigesimal del sistema de evaluación peruano, se obtuvo un promedio de 13.5 puntos en las cinco actividades propuestas, un 67.5% del logro esperado.

La opinión de los alumnos sobre el proceso didáctico se encuentra expresada en la Tabla 4. Ellos han estado totalmente de acuerdo o de acuerdo en la utilidad de los contenidos en un

100 %. El segundo lugar en utilidad lo ocupó la página web sobre Arquímedes. El interés y motivación que ellos mostraron al desarrollo de la sesión ocupa el tercer lugar.

Ante la pregunta: ¿Cuál fue la dedicación que usted mostró?, el 89.5 % respondió que dio una dedicación del 75 al 100% Era visible que estaban atentos al proceso planteado pues el tema era de su interés, y los medios informáticos son para ellos de uso diario.

La opinión de los alumnos sobre la sesión se expresa en lo siguiente: muy interesante (14), muy buen modo de aprender (11), se presta más atención, más motivados (11), más fácil la comprensión de los temas (10), muy didáctico (9) y es dinámico (8). Estas expresiones muestran el agrado de los alumnos por este tipo de metodologías de enseñanza y aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Arzarello, F., Bartolini, M., Lun, A., Mariotti, M. y Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education, The 19th ICMI Study* (97 – 143). New York, USA: Springer.

Bailón, R. (1994). *Evaluación de las condiciones de Proceso para el enlatado de Olluco (Ullucus tuberosus Loz.) con Charqui.* Tesis de Ingeniería en Industrias Alimentarias no publicada, Universidad Nacional Agraria de la Molina, Lima, Perú.

Bailón, R. (2008). *Procesamiento Térmico de Alimentos.* Callao: IIPIFA.

Barbin, E. (2012a). L'histoire des mathematiques dans la formation : une perspective historique (1975–2010). In J.-L.Dorier, S. Coutat (Eds) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone 2012*, (GT4, pp. 546-554). Recuperado de http://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT4/GT4-pdf/EMF2012GT4BARBIN.pdf

Barbin, E. (2012b). *What is epistemology (for)?* Powerpoint presentation. Colloque en hommage à Michèle Artigue. Paris.

Barbin, E. (2012c). *L'épistémologie historique et l'histoire épistémologique des sciences et des techniques.* En : Notes de cours 1 Recherches en histoire des sciences et des techniques : tendances et tensions. Master histoire des Sciences et des techniques. UEF1.

Bigelow, W. y Esty, J. (1920). The Thermal Death Point in Relation to Time of Typical Thermophilic Organisms. *The Journal of Infectious Diseases, 27*(6), 602-617. doi: 10.1093/infdis/27.6.602

D'Enfert, R., Djebbar, A. & Radford, L. (2012) Dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques – Compte-rendu du Groupe de Travail n° 4. In J.-L. Dorier, S. Coutat (Eds) *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 523-528). Recuperado de http://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT4/EMF2012GT4CR.pdf

Jankvist, U. (2009). *Using History as a 'Goal' in Mathematics Education.* [Ph.D. dissertation]. Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Roskilde, Denmark. Recuperado de http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/464.pdf

Kong, M. (1985). *Cálculo Integral.* Lima: Editorial Sagitario E.I.R.L.

EL DISEÑO DE OBJETOS DE APRENDIZAJE PARA GEOMETRÍA

Evelia Reséndiz, Sergio Correa, Ramón J. Llanos, Miguel Salazar, José F. Sánchez
Universidad Autónoma de Tamaulipas, México
erbalderas@uat.edu.mx; scorrea@uat.edu.mx

Resumen. La investigación en proceso tiene como objetivo el diseño, desarrollo y evaluación de Objetos de Aprendizaje para el aprendizaje de Geometría, área en la que se han detectado deficiencias en los alumnos de nuevo ingreso a la Universidad Autónoma de Tamaulipas. El trabajo probará una metodología institucional de producción de Objetos de Aprendizaje a la vez que valora la pertinencia de la herramienta. Su construcción parte del análisis de las necesidades formativas de los destinatarios, así como de los contenidos de aprendizaje, los recursos tecnológicos disponibles, etc., para su elaboración. Particularmente, se centra en el aprendizaje de los procesos de visualización y de razonamiento implicados en la resolución de problemas geométricos.

Palabras clave: objeto de aprendizaje, geometría

Abstract This ongoing research aims to design, develop and evaluate the learning objectives (LO) for learning Geometry, area where weaknesses have been detected from freshman students in the university. This study will prove an institutional methodology to produce learning objectives and assess at the same time the convenience of such. Its creation is based on the analysis of the educational needs of the recipients, as well as learning content, technology resources available, etc.., for its creation. In particular, it focuses on learning, visualization, and reasoning processes.

Key words: learning objects, geometry

Introducción

La Universidad Autónoma de Tamaulipas (UAT) se propone innovar los ambientes y métodos de enseñanza-aprendizaje basados en las TICs para incidir en la formación autónoma y permanente de los estudiantes (Plan de Desarrollo Institucional 2010–2014). Una forma de respaldar esa iniciativa es a través del desarrollo de Objetos de Aprendizaje que, siendo entidades de información reutilizables, pueden adaptarse a los nuevos y flexibles ambientes educativos que se propician en las instituciones educativas que apuestan por la utilización pedagógica de las TICs.

La investigación en proceso tiene como objetivo el diseño, desarrollo y evaluación de Objetos de Aprendizaje para el aprendizaje de Geometría, área en la que se han detectado deficiencias por parte de los alumnos del nuevo ingreso a la universidad. De los resultados de la evaluación interna de aspirantes de ingreso a la UAT en Matemáticas (que incluye las áreas de Aritmética, Álgebra y Geometría) se detectó que es en Geometría donde se presentaron las mayores deficiencias. De ahí el interés por diseñar objetos de aprendizaje para esta área.

El diseño permitirá probar una metodología institucional de diseño y producción de Objetos de Aprendizaje a la vez que se valora la pertinencia de la herramienta para mejorar los niveles de dominio de los contenidos de la asignatura de Matemáticas Básicas que se oferta en el Núcleo de Formación Básica de los programas académicos de la Institución. La producción de Objetos de Aprendizaje parte del análisis de las necesidades formativas de los destinatarios, así como de los contenidos, recursos tecnológicos, procesos de evaluación, entre otros, para su elaboración. Particularmente nos centraremos en la caracterización de la coordinación de los procesos de visualización y procesos de razonamiento que han sido propuestos por Duval (1998) para la solución de problemas geométricos.

Marco teórico

Cuando estudiamos los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de la Geometría debemos tener en cuenta la diferencia entre los conceptos de dibujo y figura, puesto que hay que distinguir el contenido de una representación y lo que representa (Duval, 1995). Si se habla de figura, entendemos la imagen mental de un objeto físico; en cambio, el dibujo es la representación gráfica de una figura en sentido amplio, ya sea sobre un papel, el ordenador o un modelo físico (Torregrosa y Quesada, 2007). La visualización es una actividad del razonamiento o proceso cognitivo basada en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, utilizados para resolver problemas o probar propiedades (García y López, 2008).

En el campo de la educación ha surgido la tendencia de crear entidades de información llamadas *Objetos de Aprendizaje* que, estructuradas de manera correcta, pueden ser reutilizables para desarrollar materiales educativos útiles en diversas áreas. Para Roig-Vila (2005), el planteamiento basado en Objetos de Aprendizaje es, actualmente, uno de los pilares del aprendizaje a través de Internet. Para Wiley (2001), los Objetos de Aprendizaje son cualquier recurso digital que pueda ser reutilizado como soporte del aprendizaje. Como menciona Chiappe (2009), cuando hacemos referencia a un Objeto de Aprendizaje no nos referimos a "algo" que se pretende aprender, sino al medio por el cual se busca producir un aprendizaje con la incorporación de las TIC´s en la educación, como un material educativo digital.

En todo proceso educativo intervienen dos aspectos, la enseñanza y el aprendizaje, y aunque pareciera que son inseparables, es posible que se dé el aprendizaje sin la enseñanza, "es menester mencionar que los objetos de aprendizaje se circunscriben dentro del marco de procesos educativos centrados en el estudiante, donde se privilegian los asuntos relacionados con el aprendizaje sobre los de la enseñanza" (Chiappe, 2009, p.45).

La reutilización es un aspecto que los diferencia de los Materiales Educativos y Computarizados (MEC) por lo cual puede considerarse como la razón de ser de los Objetos de Aprendizaje. Es necesario en este punto aclarar la diferencia entre reutilizar y reusar. Para Jouglard, Echeverría y Herrera (2003) reusar es el uso de algo en más de una ocasión sin variar su función o propósito. Mientras que, el diccionario de la Real Academia de la Lengua define la palabra reutilizar como utilizar algo, bien con la función que desempeñaba anteriormente o con otros fines (Chiappe, 2009). A esta segunda acepción nos referimos en este trabajo.

La integración de estos Objetos de Aprendizaje en la práctica didáctica, debe tomar en cuenta varios aspectos, algunos de ellos son las teorías del aprendizaje, necesarias para el desarrollo del material educativo, y el cambio de los métodos de enseñanza y aprendizaje por nuevos enfocados en un ambiente tecnológico.

Metodología

Los Objetos de Aprendizaje están presentes cada vez con mayor fuerza en el ámbito educativo en todos los niveles, en especial a nivel superior. Por lo cual la necesidad e interés por diseñar y desarrollar estas herramientas digitales es mayor. Sin embargo, la elaboración de los Objetos de Aprendizaje no es fácil ya que se deben considerar los aspectos característicos que deben cumplirse para que nuestro producto pueda considerarse como un verdadero Objeto de Aprendizaje.

La metodología con la que se trabaja institucionalmente se presenta como un flujo de procesos en forma lineal que representan las interrelaciones de las etapas de producción y evaluación de Objetos de Aprendizaje. Los resultados de la evaluación formativa de cada etapa pueden conducir al diseñador de regreso a cualquiera de las fases previas. El producto final de cada etapa es el producto de inicio de la siguiente.

La integración de estos Objetos de Aprendizaje en la práctica didáctica debe tomar en cuenta varios aspectos, algunos de ellos, son las teorías de aprendizaje —en nuestro caso, recuperamos principalmente las aportaciones de Duval (1995, 1998) para el aprendizaje de la Geometría—, necesarias para el desarrollo del material educativo y el cambio hacia los métodos de enseñanza y aprendizaje enfocados para un ambiente tecnológico.

El poder gráfico de las herramientas tecnológicas posibilita el acceso a modelos visuales que son poderosos, pero que muchos estudiantes no pueden, o no quieren, generar en forma independiente.

Para dar respuesta al reto de incorporación de las tecnologías emergentes en los procesos educativos, la UAT ha diseñado una metodología para el desarrollo de Objetos de Aprendizaje basada en una serie de etapas lógico-constructivas que permiten crear contenidos flexibles, dinámicos y altamente adaptables a los ambientes virtuales o presenciales. Esta metodología ha evolucionado y se ha perfeccionado a lo largo de cinco años a partir de la presentación y retroalimentación en eventos académicos nacionales e internacionales (Figura 1). En 2008-2009 recibió el respaldo de la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES), a través del Sistema Nacional de Educación a Distancia (SINED), para ser consolidada en los ámbitos regional, nacional e internacional. Esto se debió a: 1) el carácter amigable de la estrategia para dotar al docente de competencias para diseñar la interfaz, el diagrama conceptual, los contenidos y el guión académico-técnico; 2) la facilidad de plasmar lo aprendido en una presentación electrónica interactiva; y 3) la posibilidad de coordinar, supervisar el desarrollo, y evaluar la efectividad del producto generado.

Etapas para la construcción de objetos de aprendizaje

La metodología considera ocho etapas para la construcción de los Objetos de Aprendizaje de tipo profesional, y seis (excluyendo la 2 y la 6) para los que son diseñados y elaborados por el docente. Estas etapas son: 1. Selección del tema; 2. Selección de los académicos, considerando a los que desarrollarán el contenido, los asesores en diseño instruccional y los que certificarán la calidad del material; 3. Determinación del contenido; 4. Diseño instruccional y elaboración de guiones; 5. Desarrollo del Objetos de Aprendizaje (considerando interoperatividad, reusabilidad, escalabilidad, interactividad, accesibilidad, durabilidad, etc.); 6. Revisión del Objetos de Aprendizaje por los asesores en diseño instruccional y los académicos que certificarán su calidad; 7. Prueba y corrección del Objetos de Aprendizaje y 8. Liberación del Objeto de Aprendizaje (Ver Figura 1).

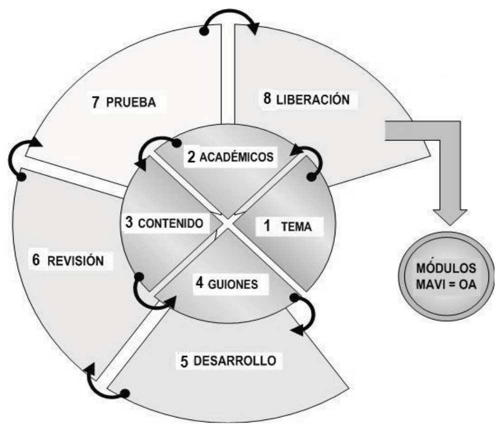


Figura 1. Etapas para la construcción del OA con la Metodología-UAT.
Tomado de Padilla y Hernández (2011)

El avance del proyecto que aquí se presenta cubre las primeras cinco etapas. Para el caso de la selección del tema, la documentación de las deficiencias en los aprendizajes de Matemáticas que se comentan arriba permitió la selección de esta disciplina para el desarrollo de un Objeto de Aprendizaje. No obstante, para una mayor delimitación del contenido específico a cubrir se procedió a analizar los resultados del examen del curso propedéutico de Matemáticas en la Unidad Académica Multidsiciplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades, UAT. Los resultados obtenidos en las tres áreas (Aritmética, Álgebra y Geometría) de evaluación por los aspirantes de ingreso a esta unidad académica. Ante esta evidencia, se procedió a diseñar y desarrollar un Objeto de Aprendizaje para facilitar el dominio de los contenidos de aprendizaje de Geometría, específicamente sobre el cálculo de perímetros y áreas de las principales figuras y cuerpos geométricos.

Para la selección de los académicos, segunda etapa, cabe mencionar que los colaboradores del proyecto desempeñarán los roles de desarrolladores de contenido y asesores en diseño instruccional. La tercera etapa de determinación del contenido implica recoplilar, seleccionar, investigar y organizar los contenidos de acuerdo con el tema y el objetivo establecido. En torno a la cuarta etapa de diseño instruccional, se procedió al llenado de cinco formatos de la propuesta metodológica de la UAT para proporcionar la información necesaria para la elaboración de Objetos de Aprendizaje al diseñador gráfico, al programador y a los expertos en audio y video. Estos formatos son el de descripción general; estrategia didáctica; texto, audio y animación (guión técnico); evaluación, e información complementaria. A continuación se presenta un apartado del guión técnico para la construcción de los triángulos.

SINED

DISEÑO DE OBJETOS DE APRENDIZAJE
METODOLOGÍA-UAT

dirección general de innovación tecnológica

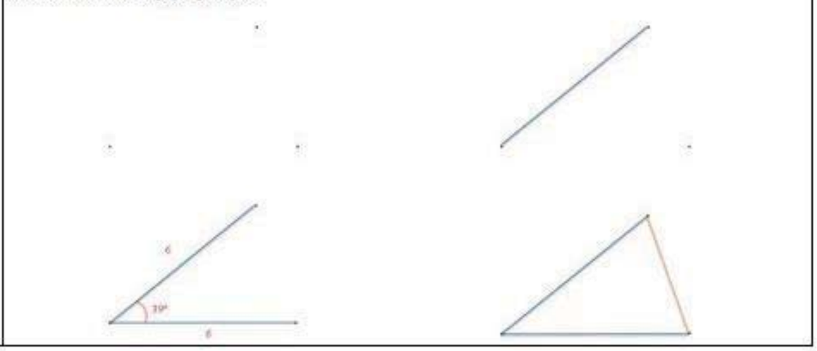
GUION TÉCNICO
(Formato F03)

☑ **TEXTO-AUDIO-ANIMACIÓN** ☑ **EXPLICACIÓN, DEFINICIÓN, REFERENCIA**

TEMA	Identificación de figuras geométricas en nuestro entorno y elaboración de representaciones gráficas para la solución de problemas geométricos.		
Elaboró	**Sergio Correa Gutiérrez, Evelia Reséndiz Balderas, José Francisco Sánchez Gutiérrez, Miguel Salazar Blanco**	Fecha	**29/09/2012**

No.	☑ Texto ☑ Audio ☐ Referencia	☐ Animación
3.1	**El triángulo.** Como recordarás, el triángulo es una figura plana limitada por tres lados. Geométricamente, se forma uniendo tres puntos en el plano donde al menos uno de ellos no pertenece a la recta que une a los otros dos puntos.(Texto1) Todos los dibujos anteriores, aunque distintos entre sí, ilustran la figura del triángulo pues cumplen la condición de estar limitados por tres lados. Asimismo, otra característica de los triángulos es que sus ángulos interiores suman 180° (grados).(Texto2) Debido a la variedad de formas, los triángulos se pueden clasificar según las dimensiones de sus lados o de sus ángulos. Da clic en el botón "Continuar" y repasemos la clasificación de los triángulos. (Texto3)	El título aparece centrado. Texto1 aparece con cualquier efecto. Se construyen 4 triángulos que ilustran la definición geométrica. Es decir, se resaltan tres puntos, se verifica que un tercer punto no está en la recta que une a los otros dos, y luego se unen los tres puntos. Texto 2 y Texto3 aparecen después del trazo de los triángulos.

No.	☐ Dibujos, contenido, explicación, ejemplos, ...
3.1	Construir los triángulos de la Diapositiva2. Marcar primero los puntos que delimitan las figuras, y posteriormente ir uniendo los puntos a través de segmentos de recta (omitir valores en fuente color rojo). Ejemplo:



Página 1 de 15 29/09/2012

Figura 2. Ejemplo del llenado del Formato F03. Guión Técnico.

Para las siguientes etapas del proceso de desarrollo y evaluación de Objetos de Aprendizaje aquí definido, el proyecto contempla en la etapa de elaboración del Objeto de Aaprendizaje la integración del texto, imágenes, animaciones, sonido, etc., en un material audiovisual interactivo que atiende las propiedades de interoperatividad, reusabilidad, escalabilidad, interactividad, accesibilidad, durabilidad, entre otras. Para ello, se procedió a elaborarse con apoyo de Master Collection CS5 de Adobe. La siguiente pantalla es un ejemplo de la construcción del Objeto de Aprendizaje.

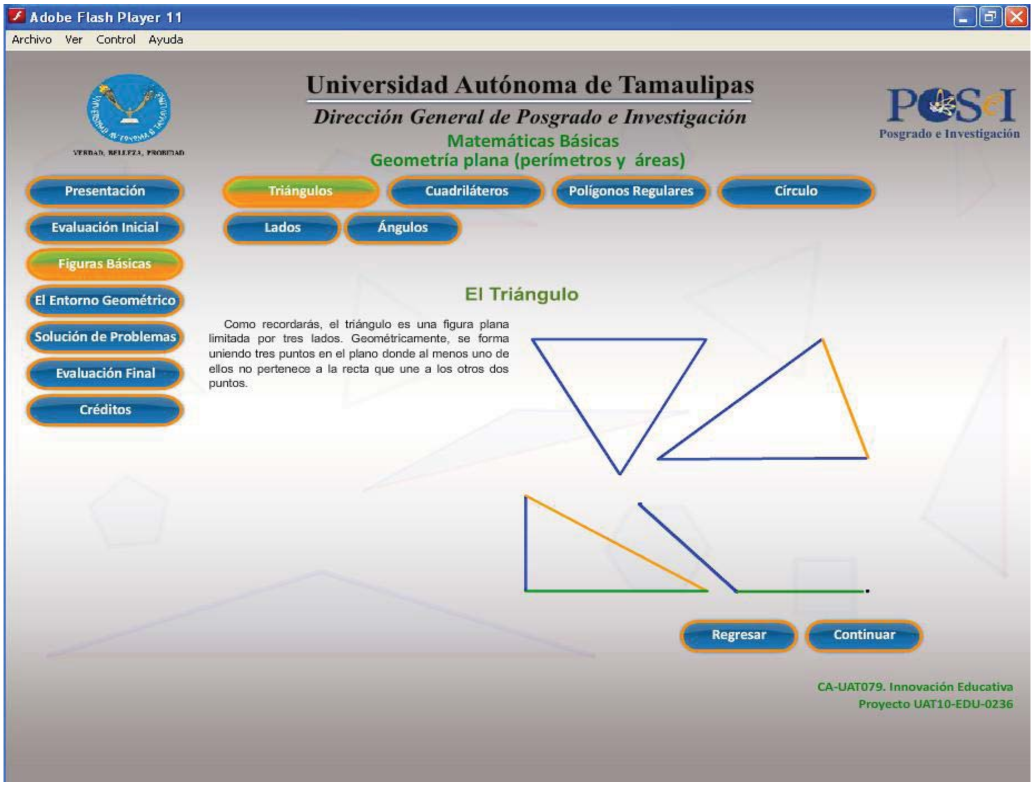


Figura 3. Captura de pantalla del Objeto de Aprendizaje de Geometría

Una vez terminada la etapa anterior, pasará a revisión tanto de los colaboradores del proyecto como de maestros de la Academia de Matemáticas de la UAT, quienes sugerirán los cambios o adecuaciones necesarias.

En la etapa 7, de prueba y corrección del material, se trabajará con los grupos de alumnos del curso propedéutico de ingreso a la UAMCEH para probar los aspectos pedagógicos y tecnológicos del Objetos de Aprendizaje. Si proceden, se realizarán las adecuaciones necesarias para hacerse procederá a realizarlas.

En la última etapa de liberación del material, no sólo se pondrá disponible el Objeto de Aprendizaje desarrollado en la plataforma del Campus Virtual de la UAT, si no que se elegirá un grupo control y otro expermental de la Licenciatura en Ciencias de la Educación, opción en Tecnología Educativa para en un diseño pretest y postest medir el impacto de la utilización de este Objeto de Aprendizaje en el aprendizaje de Geometría. Asimismo, se incluye, al final de este proceso, la valoración de los usuarios del material audiovisual interactivo puesto a su disposición.

Conclusiones

La integración de estos Objetos de Aprendizaje en los nuevos ambientes educativos generados por la incorporación de las TICs, debe tomar en cuenta varios aspectos, entre ellos, y de manera principal, las teorías de aprendizaje y las contribuciones de las didácticas específicas –en nuestro caso, recuperamos principalmente las aportaciones de la psicología constructivista y las contribuciones de Duval (1988) para el aprendizaje de la Geometría–, necesarias para el desarrollo del material educativo y el cambio hacia los métodos de enseñanza y aprendizaje enfocados para un ambiente tecnológico. Aunado a lo anterior, el poder gráfico de las herramientas tecnológicas posibilita el acceso a modelos visuales que son poderosos y que pueden contribuir al desarrollo de los procesos de visualización y razonamiento necesarios en la solución de problemas geométricos.

La tecnología ofrece a docentes opciones para adaptar la instrucción a necesidades específicas de los alumnos. Todas estas ventajas de la tecnología en el aula pueden ser recuperadas en los objetos de aprendizaje dado su condición de entidad digital, pero agregando además las ventajas de ser autocontenible y reutilizable.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals.* Berne, Suisse: Peter Lang (traducción española, *Semiosis y pensamiento humano* (1999). Cali, Colmbia: Universidad del Valle).

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana &V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

García S. y López O., (2008). *La enseñanza de la Geometría.* Colección: Materiales para apoyar la práctica Educativa. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Chiappe, A. (2009). Acerca de lo pedagógico en los objetos de aprendizaje-reflexiones conceptuales hacia la construcción de su estructura teórica. *Estudios Pedagógicos 35(1),* 261-272.

Jouglard, C., Echeverría, A. y Herrera, L. (2003). *Una metodología de desarrollo de un* Framework *para la simulación de sistemas multifísica.* Recuperado el 10 de marzo de 2008 en: http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/780/735

Padilla, G. y Hernández, M., (2011). Metodología-UAT: Una metodología para el diseño de objetos de aprendizaje en Avances en objetos de aprendizaje. En F.J. Álvarez y J. Muñoz

(Eds.), *Experiencias de redes de colaboración en México* (pp. 47-70). México: Departamento Editorial de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Roig-Vila, R. (2005). Diseño de materiales curriculares electrónicos a través de objetos de aprendizaje. *RED. Revista de Educación a Distancia*, *4*, 1-10.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativo 10*(2), 275-300.

Wiley, D. (2001). *The Instructional Use of Learning Objects*: Version Online 2000. Recuperado el 20 de mayo de 2011 de http://www.reusability.org/read/

A EDUCAÇÃO FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Amanda Fabri de Resende, Marco Aurélio Kistemann Junior
Universidade Federal de Juiz de Fora Brasil
amandafabri@hotmail.com; marco.kistemann@ufjf.edu.br

Resumo. Nosso trabalho intitulado "A Educação Financeira na Educação de Jovens e Adultos (EJA)" tem como escopo central realizar uma investigação qualitativa com os alunos e alunas da EJA de uma escola municipal de Juiz de Fora, sobre questões relacionadas à forma como tomam suas decisões financeiro-econômicas frente a situações de necessidade de consumo, guiado pela seguinte pergunta diretriz: "Como os alunos e alunas da Educação de Jovens e Adultos (EJA) de uma escola municipal de Juiz de Fora tomam suas decisões financeiro-econômicas quando vão consumir determinados produtos?" Nos embasamos teoricamente em Bauman, Fonseca, Souza e Fonseca e Lins.

Palavras chave: educação de adultos, educação financeira

Abstract. Our paper entitled "Financial Education in Youth and Adult Education " has as aim to perform a qualitative research with students of the EJA in elementary school in Juiz de For a, on issues related to how the financial-economic decisions take forward the consumption need situations, guided by the following policy question: "How do the students of youth and adult education of the elementary school in Juiz de Fora take their financial-economic decisions when they go to consume certain products? " We based on theoretically in Bauman, Fonseca, Souza and Fonseca and Layne.

Key words: adults education, financial education

Introdução

Este texto tem como objetivo inicial, apresentar o andamento da pesquisa A Educação financeira de Jovens e Adultos Kistemann Jr. realizada no Mestrado Profissional em Educação Matemática na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), sob a orientação do Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Jr. e inserida no Grupo de Pesquisa e Investigação Financeiro-Econômica (GRIFE), no referido mestrado.

Numa época pós-crise econômica mundial, com seus reflexos repercutindo até os dias atuais nas economias avançadas e emergentes, em que milhões de cidadãos se encontram em situação financeira desregulada, em muitos casos devido à pouca familiaridade com as facilidades das ofertas de crédito financeiro e com a matemática implícita nas transações financeiras (Kistemann Jr., 2011), o que em si já destaca a relevância de nossa investigação para a área da Educação Matemática.

Nossa pesquisa é de cunho qualitativo, pois, de acordo, com Borba (2004), essa pesquisa permite a transitoriedade de seus resultados, a impossibilidade de uma hipótese, a não neutralidade do pesquisador, a constituição de suas compreensões, podendo os meios de obtê-las serem (re) configurados e a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos prévios, estáticos e generalistas.

O presente trabalho tem como escopo central realizar uma investigação qualitativa com os alunos e alunas da Educação de Jovens e Adultos do Ciclo Básico (EJA) de uma escola municipal de Juiz de Fora, sobre questões relacionadas à forma como tomam suas decisões financeiro-econômicas frente a situações de necessidade de consumo, até o presente momento, guiado pela seguinte pergunta diretriz: "Como os alunos e alunas da Educação de Jovens e Adultos (EJA) de uma escola municipal de Juiz de Fora tomam suas decisões financeiro-econômicas quando vão consumir determinados produtos?".

Num estudo piloto realizado no 2º semestre de 2011, numa turma do 9° ano (Fase VIII) de uma escola municipal, no período noturno, para buscarmos responder, inicialmente, à nossa questão diretriz, elaboramos um material didático (baseado nos livros do nono ano do Ensino Fundamental com o qual exploramos os conceitos básicos da Matemática Financeira como: porcentagem, descontos e acréscimos, juros simples e compostos. Nesse estudo exploramos também algumas questões relacionadas ao cotidiano desses alunos e alunas, e o *modus operandi* de suas escolhas, por exemplo, as formas de pagamento de um dado produto e o motivo pelo qual escolhiam fazê-lo daquela forma. Buscamos investigar essas situações do cotidiano desses alunos e alunas através de situações-problema ou conversas realizadas com esses indivíduos-consumidores.

Trabalho de campo na EJA

No 1º semestre de 2012, analisamos os documentos oficiais que discutem o ensino de Matemática de Jovens e Adultos na Prefeitura Municipal de Juiz de Fora e a coleção dos livros didáticos adotada por essa escola, recomendada pelo Programa Nacional do Livro Didático. Nosso propósito era o de saber como esse material apresentava os tópicos relacionados à Educação Financeira. Além disso, aprofundamos nossos estudos nas propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) e também em artigos, dissertações e teses que estão abordando temas relacionados ao Consumo, à questão de Gênero, à EJA e à Educação Financeira.

No município de Juiz de Fora, ainda não há um currículo de Matemática específico para a EJA. O mesmo ainda está sendo elaborado por professores de Matemática da rede, com experiência nesta modalidade de ensino e por outros professores convidados pela Secretaria Municipal de Educação de Juiz de Fora. Segundo a secretária responsável pela EJA no município, há um quadro de Eixos Temáticos/EJA que direciona o trabalho dos professores, com o seguinte tema norteador: Cidadania, Comunicação e Tecnologia.

Na escola municipal em que realizamos nosso piloto, esse quadro de eixos temáticos era trabalhado apenas como complementação da carga horária dos professores através de atividades extraclasse, as chamadas atividades de alternância. A escola apresenta um currículo de Matemática elaborado sem objetivos gerais e específicos, elaborado a partir de recortes do currículo de Matemática da Educação Básica. Percebemos também que o mesmo não é modificado há um bom tempo e não atende às necessidades e especificidades do público da EJA.

A coleção de livros didáticos adotada por esta escola apresentava uma linguagem acessível aos alunos, com boas situações-problema. Entretanto, havia determinadas "falhas", como exemplo, os autores mencionavam num texto que não era comum no Brasil a prática de aplicações financeiras ou empréstimos a juros simples e, ao iniciar uma lista de exercícios, apresentaram uma situação-problema envolvendo uma aplicação financeira com rendimento de 0,5% de juro simples ao mês.

Como primeiros resultados de nossa pesquisa, nos baseando no Piloto realizado em 2011, podemos afirmar que para a maioria dos indivíduos-consumidores, a Matemática Financeira está presente no ato de uma compra, seja nas formas de pagamento à vista e a prazo ou no cálculo de descontos. Durante a entrevista, Lúcia (uma indivíduo-consumidora) relata uma compra que realizou: *"Hoje mesmo eu comprei um relógio* e *esse relógio, no preço de à vista* e *a prazo era o mesmo preço, por isso eu comprei... o que eu vi na matemática, a gente não deve pagar juro, porque o juro a gente sempre gasta mais né? Enquanto a gente puder pagar à vista, a gente tá ganhando, porque aí não tem aumento no produto"*. Entretanto, a compra realizada por ela foi: *"a prazo, mas com o preço de à vista, não teve acréscimo*" (grifos nossos). Em sua fala, percebemos o que Kisteman Jr. (2011) chama de *"ilusão monetária"*:

> Ao apresentar possibilidades de ilusão monetária, como a de preço parcelado igual a preço à vista, as empresas buscam dar um poder de compra (empoderamento do indivíduo-consumidor) que, muitas vezes, o próprio indivíduo-consumidor desconfia que não tem, mas que graças às estratégias convincentes de marketing podem começar a acreditar que tem mesmo um poder de consumir (Kistemann Jr., 2011, p. 201).

Quando esses indivíduos-consumidores decidem comprar algum produto, levam em consideração as seguintes questões: preço, prazo, qualidade, a marca, "o que dá vontade de comprar", o que é necessário comprar e o conforto. Entre os indivíduos-consumidores mais jovens, prevalece a preferência pela marca e pelo que o "*dá vontade de comprar*". Lúcia (50 anos), também faz sua escolha pela qualidade e pela marca do produto, e nos revela que " *eu estou precisando trocar minha geladeira, mas só compro se for uma Brastemp Frost Free. Se não for desse jeito eu não compro, eu fico na que estou"* (grifos nossos). Kistemann Jr. (2011) revela que a experiência é um fator que interfere nas decisões de consumo dos indivíduos-consumidores,em algumas enunciações, percebemos que, conforme o indivíduo-consumidor vai amadurecendo, suas decisões de consumo podem variar. A experiência adquirida em situações de consumo, que não foram bem sucedidas, propicia mudanças nas tomadas de decisão do indivíduo-consumidor. Muitas vezes, aprende-se no processo, diríamos, mais improvisado, ou seja, pela tentativa-erro

As propagandas, entre os indivíduos-consumidores com idades entre 50 e 70 anos, exercem pouca ou nenhuma influência em suas decisões de consumo. Newton revela que a propaganda não o influencia "*nenhuma vez, nem quando eu estiver precisando, não influencia não*" e Lúcia, fala que "*primeiro eu vou pesquisar muito se vale a pena*". Entre os mais jovens, a propaganda é que define o que o vão consumir. Vitor revela que "*a propaganda influencia muito né? É porque de acordo com a moda você... acho que as coisas que você tem que usar hoje em dia tem que estar de acordo com a moda, não é mais aquela coisa que você quer usar... acho que tem que estar de acordo com o que as pessoas falam pra você usar, porque ninguém quer ser diferente*". Bárbara nos diz que "*se de repente a gente vê um tênis, uma roupa que a gente goste, a gente sempre pensa em comprar*". De acordo com Kistemann Jr. (2011), não há o certo e o errado com relação às propagandas, entretanto, há que se alertar para que a utilização delas seja feita a favor da tomada de decisão do indivíduo-consumidor e quanto mais esse sujeito estiver com uma postura crítica com relação ao modus operandi das propagandas, melhor decisão tomará a seu favor de modo a não comprometer seu patrimônio (p. 195).

Os indivíduos-consumidores, com idades entre 50 e 70 anos, já realizaram ou estão efetuando o pagamento de um empréstimo. Newton nos revela que fez um empréstimo para adquirir um terreno e que já está quase terminando de quitar sua dívida e que quando terminar de pagá-la vai fazer um novo empréstimo para construir sua casa. "*Eu comprei um terreno então aí eu fui lá e tive que fazer um consignado pra pagar a prestação do terreno, já to quase terminando...*". E Lúcia já realizou um empréstimo com a finalidade de "*estudar minha filha*". Os mais jovens não realizaram ainda nenhum empréstimo, mesmo os que já exercem alguma atividade remunerada.

Os indivíduos-consumidores, em sua maioria, revelaram que observam as taxas de juros quando vão consumir. O Sr. Newton: "*quando eu vou fazer um empréstimo, eu faço direto na Caixa... o juro é mais barato né?*" e Diego: *Sim. Ainda mais quando você divide né? Talvez você vai dividir de seis vezes o juro é muito alto, aí fica até pior*". Entretanto, quando há a necessidade de se consumir determinado produto ou fazer um empréstimo para uma emergência, Lúcia nos revela que "*se aquele algo for caso de necessidade, às vezes eu não olho o juro...*". Já Bárbara nos disse que não se preocupa com os juros e revela "*eu nem vejo isso... Só depois... Só outro dia que* *eu reparei os juros pois comprei uma cama... comprando a cama que eu reparei.... nossa o juro tinha sido muito grande. Imagina, foram R$ 200,00 só de juros*".

Com relação a forma de pagamento que preferem, há uma divisão de opiniões. Alguns preferem o pagamento à vista, enquanto que outros veem a necessidade de parcelar suas compras. Bárbara revela que "*eu junto o dinheiro que recebo (mesada) e compro à vista*". Já Diego nos diz que depende do valor do produto que quer consumir: "*Das duas maneiras. Quando é um preço muito alto, eu costumo parcelar, mas não gosto muito não*". Vitória acredita que comprar à prestação é mais fácil: "*no carnê sai mais fácil*". Kistemann Jr. (2011) revela que, para o mercado, o consumidor bom é aquele que parcela suas compras, pois "*quem vende deseja ficar vinculado a quem compra*" (p. 200).

Fundamentação teórico-metodológica

A partir do segundo semestre de 2012, pretendemos analisar as situações-problemas e as conversas, realizadas no estudo Piloto, sob a ótica do Modelo dos Campos Semânticos desenvolvido por Lins (1994), bem como direcionar nossa pesquisa a dois indivíduos-consumidores, um do sexo feminino e outro do masculino, dentre os demais indivíduos-consumidores da Fase VIII da escola municipal em que ocorreu nosso piloto, para que possamos analisar também, como a questão de gênero se faz presente nesta modalidade de ensino. Embora esses indivíduos não sejam mais alunos desta escola municipal, visto que a mesma oferece a EJA apenas para o Ensino Fundamental, manteremos contato através de encontros marcados via e-mail ou telefone.

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS), desenvolvido por Lins (1993), nasceu da tentativa de buscar estabelecer uma caracterização epistemológica para Álgebra e Pensamento Algébrico. Embora seja constituído nesse contexto: Álgebra e Pensamento Algébrico, o MCS pode ser aplicado em outras áreas da Matemática e do conhecimento, desde que haja processo de produção de significados. Por acreditarmos nisso, o escolhemos como suporte teórico para analisarmos as situações-problema realizadas pelos indivíduos-consumidores da Fase VIII de uma escola municipal de Juiz de Fora.

O MCS é um modelo epistemológico que nos permite compreender alguns aspectos do processo de produção de significados em Matemática e, no nosso caso, em Matemática Financeira. Segundo Silva (2003), quando um professor tem um olhar voltado à produção de significados, com a intenção de criar um espaço comunicativo em sua sala de aula, certa postura lhe é exigida: Primeiramente que ouça mais e fale menos [...]. Além disso, tal produção (a de significados) se dá no interior de atividades, as quais devem ser planejadas e orientadas pelo professor com vistas a criar em sala de aula um espaço comunicativo.

Ao adotarmos o MCS, utilizamos suas ideias para lermos "*o que está acontecendo para que, eventualmente, possamos plausivelmente dizer do que é que está se falando [...] e quais são as legitimidades envolvidas*" (Lins, 2008, p. 537), pois acreditamos que "*a mais intensa oportunidade de aprendizagem acontece no momento em que o professor e aluno(s) compreendem que as legitimidades de cada um, naquele momento, são diferentes*" (Lins, 2008, p. 547).

Baseamo-nos também em Fonseca (2007), na questão da Educação de Jovens e Adultos, uma vez que consideramos importante, ao se trabalhar com a EJA, levar em consideração o que esses alunos e alunas trazem de conhecimento, bem como respeitar a individualidade e as especificidades de cada um, pois concordamos com Fonseca quando esta afirma que os educadores matemáticos que atuam na EJA devem procurar compreender seus alunos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem, para que desta forma se sintam mais seguros e integrados ao fazer escolar.

Bauman (2008) é o nosso principal informante teórico sobre o Consumo. Ele afirma que o consumo é: *"uma condição, e um aspecto, permanente e irremovível, sem limites temporais ou históricos; um elemento inseparável da sobrevivência biológica que nós humanos compartilhamos com todos os outros organismos vivos"* (Bauman, 2008, p.37). De acordo com Bauman, as atividades de consumo estão moldando as diversas formas de vida e os padrões de relações humanas na sociedade de consumidores, que tem, por um lado a mercadoria como núcleo das práticas diárias e por outro, uma orientação permanente para que o modelo a ser seguido esteja sempre vinculado ao ato de consumir. Taschner (2009) menciona o consumo como construção e expressão de identidades, onde o sujeito tem por objetivo ser reconhecido como membro legítimo na sociedade de consumidores. Para esta pesquisadora, "*o consumo então se torna um verdadeiro passaporte para a obtenção de cidadania*" (p. 18) e também Kistemann Jr. (2011) ao afirmar que "*o consumo pode propiciar a significância* e *a identidade que os seres humanos tanto desejam,* e *que é em grande parte através dessa atividade que os indivíduos podem descobrir quem são"* (p. 54).

Concordamos com Bauman quando este afirma que atualmente as relações sociais estão sendo mediadas pelo consumo, porém um consumo não só de produtos, mas também de hábitos, valores e aparências, onde as redes sociais estão se apresentando como os mais novos canais dessa mediação, fato que no passado, era de responsabilidade de outros meios de comunicação, como os jornais, o rádio e a TV.

Na questão do Gênero gostaríamos, assim como Souza e Fonseca (2010), de refletir sobre os discursos que permeiam as relações entre homens, mulheres e matemática, na Fase VIII dessa escola municipal, bem como as decisões que estes sujeitos tomam, numa sociedade marcada por inúmeras desigualdades, dentre elas, as marcadas pelas relações de gênero.

Segundo as autoras, ainda são tímidas as discussões entre as relações de gênero e matemática no campo da Educação Matemática. Fato que em si, destaca a relevância do nosso trabalho para enriquecer os estudos neste campo.

Acreditamos que, adotar a questão do gênero como categoria de análise na Educação Matemática requer nossa atenção para "*o fato de que o gênero é produzido em práticas sociais, que se convertem em práticas masculinizantes* e *feminilizantes*" (Souza e Fonseca, 2010, p. 29). Dessa forma, ao adotar como categoria de análise o gênero, "*supõe* e *possibilita romper com as essências* e *universalidades, que são sempre excludentes*", (Souza e Fonseca, 2010, p. 31), "*legitimando os já legitimados* e *colocando à margem aqueles [e aquelas] que não se enquadram em suas referências*" (Souza e Fonseca, 2010, p. 31); visto que na EJA, encontram-se indivíduos com experiências de vida, sonhos e realidades bem específicas e, a compreensão desta realidade é muito importante para a construção de uma educação mais justa e democrática.

Considerações finais

Compreendemos que educar financeiramente nossos alunos vai muito além de ensinarmos algumas técnicas e fórmulas de Matemática Financeira. Acreditamos que tal assunto é muito importante, porém não é o suficiente para a Educação Financeira. Muniz (2010) afirma que as seguintes questões são fundamentais para a educação dos alunos e alunas. Nesse sentido de acordo com Muniz (2010), aprender matemática para compreender as situações financeiras; entender o comportamento do dinheiro no tempo; organizar conscientemente suas finanças (futuras) pessoais; discutir matematicamente o uso consciente do crédito; entender temas de economia como PIB, inflação e seus diferentes índices, IOF, IR dentre outros; aprender, interligar e utilizar matemática financeira nas questões geoeconômicas já abordadas, porém não interligadas, nas aulas de geografia; compreender os principais sistemas de financiamentos (PRICE e SAC), utilizando inclusive os recursos tecnológicos amplamente disponíveis, como planilhas eletrônicas e calculadoras científicas; refletir e analisar matematicamente o aumento da expectativa de vida do brasileiro e seus impactos na economia nacional, incluindo sua própria aposentadoria, seguros em geral e previdência complementar; discutir e analisar quantitativa e qualitativamente os impactos de problemas geopolíticos e sociais nas economias de uma região, levando-se em consideração a viabilidade das ferramentas matemáticas estudadas, dentre outros.

Acreditamos numa Educação Financeira para o século XXI idêntica ao que Lins propôs para a Educação Aritmética e para a Aritmética que devem. Temos buscado como resultado desse trabalho a confecção de um produto educacional que será veiculado junto aos demais professores de Matemática, bem como a elaboração de um material didático para que os docentes da Educação de Jovens e Adultos possam utilizá-lo em sua sala de aula, na tentativa de auxiliar seus alunos a aprender, a conhecer e a compreender a produção de significados financeiro-econômicos no segmento da Educação Matemática de Jovens e Adultos (EJA).

Referências bibliográficas

Bauman, Z. (2008). *Vida para Consumo: a transformação das pessoas em mercadoria*. Rio de Janeiro: Zahar.

Borba, M. C. (2004). *A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Autêntica. Belo Horizonte.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: apresentação dos temas transversais (Consumo)*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Fonseca, M. C. (2007). *Educação Matemática de Jovens e Adultos*. Belo Horizonte: Autêntica.

Kistemann Jr., M.A. (2011). *Sobre a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores.* Unesp - Rio Claro-SP.

Lins, R. C. (1994). *O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico*. Revista Dynamis. Blumenau.

Lins, R. C. (2008). *A diferença como oportunidade de aprender*. XIV Endipe-Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino).

Muniz, I. Jr. (2010). Educação Financeira: Conceitos e Contextos para o Ensino Médio. . *X Encontro Nacional de Educação Matemática.* Salvador.

Silva, A. M. (2003). *Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática*. Unesp-Rio Claro-SP.

Souza M. C. e Fonseca, M. C. (2010). *Relações de Gênero, Educação Matemática e Discurso:enunciados sobre homens, mulheres e matemática*. Autêntica. Belo Horizonte.

Taschner, G. (2009). *Cultura, consumo e cidadania*. Bauru- SP.

RAZÓN, PROPORCIÓN, PROPORCIONALIDAD: CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA

Gilberto Obando Zapata; Carlos Eduardo Vasco; Luis Carlos Arboleda
Universidad de Antioquia Colombia
Universidad Distrital
Universidad del Valle
gobando1715@gmail.com; carlosevasco@gmail.com; luis.carlos.arboleda@gmail.com

Resumen. Razones, proporciones y proporcionalidad (RPP) son ejes conceptuales obligados en la educación básica en cualquier país del mundo (Mullis et al., 2008). Diversos autores han planteado que estas temáticas son presentadas en la escuela a partir de organizaciones matemáticas fuertemente aritmetizadas, con una gran estabilidad de una institución educativa a otra y de un país a otro, y con baja conexión con otras áreas del currículo que también involucran las RPP. Este artículo sintetiza una serie de principios que se pueden asumir como orientadores de unas organizaciones matemáticas integradores de lo aritmético, lo métrico y lo algebraico a lo largo del ciclo escolar, integración lograda en relación a las RPP.

Palabras clave: razón, proporción, proporcionalidad, razonamiento proporcional

Abstract. Ratios, proportions and proportionality (RPP) are conceptual axes required in basic education in any country of the world (Mullis et al., 2008). Several authors have argued that these issues are brought in school from strongly arithmetical mathematical organizations, with remarkable stability from one school to another and from one country to another and low connection to other areas of the curriculum that also involve the RPP. This article summarizes a set of principles that can be assumed as a guide to design mathematical organizations that integrate arithmetic, metric and algebraic topics around RPP throughout the school year.

Key words: ratio, proportion, proportionality, proportional reasoning

Introducción

Intentando recuperar para la escuela el conjunto de sentidos y significados que pueden tener las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad (en adelante RPP), en los últimos 40 años se han realizado múltiples trabajos que, como lo enuncia Lamon (2007), evidencian diferentes aproximaciones conceptuales, pero no aclaran suficientemente las diferencias, ni las similitudes entre ellas. Así por ejemplo, en algunos casos se presenta el concepto de razón englobando el de tasa o rata y el de proporción (Lesh, Post, & Behr, 1988), mientras que en otros, razón, tasa, rata y proporción son presentados como conceptos distintos (Vergnaud, 1988); mientras unos autores muestran razones como entidades distintas de las relaciones parte-todo y los operadores (Nesher, 1988), otros critican esta separación pues bajo ciertas condiciones una razón tiene que ser interpretada como una relación parte-todo o un operador (Lamon, 2007); hay propuestas que ponen la fuerza en una aproximación a las razones desde la perspectiva del tratamiento de las magnitudes y las cantidades llamadas intensivas y extensivas por Schwartz (1988), y hay otras que lo hacen apelando a la caracterización de diferentes formas de razonamiento (Kieren, 1988); algunos trabajos muestran que razones y proporciones tienen un vínculo estrecho con los procesos de variación –en una especie de relaciones funcionales

(Behr, Harel, & Post, 1992), mientras que otros se enfocan más en lo relativo a la solución de problemas –fundamentalmente, problemas de cuarta proporcional (Kaput & West, 1994).

En contraste con la diversidad de aproximaciones en las investigaciones en educación matemática sobre las RPP, desde el punto de vista de las matemáticas escolares, la forma cómo se organizan estos objetos de conocimiento a lo largo de los currículos de matemáticas, presentan no solo una gran estabilidad de un país a otro (Mullis et al., 2008; Ponte & Marques, 2005), sino unas formas de organización similares basadas en aproximaciones aritméticas, con poca conexión entre las diferentes temáticas en donde se estudian las RPP (Bosch, 1994; Guacaneme, 2002), y sin relación explícita con lo métrico o lo algebraico (García, 2005).

Así pues, desde marcos teóricos diferentes se han generado diversidad de sentidos sobre razones, proporciones, proporcionalidad, número racional, función lineal, que si bien no son contradictorios, si exigen esfuerzos teóricos adicionales que permitan generar marcos más apropiados para la educación matemática y para las propuestas escolares (Lamon, 2007). En lo que sigue se presentan un conjunto de ideas sobre razones, proporciones, proporcionalidad –RPP– como un intento de dar un orden a la multiplicidad de interpretaciones descritas anteriormente, derivadas de la tesis doctoral (sin publicar) del primer autor.

Nociones fundamentales sobre la razón

Sobre la noción de cantidad. Siguiendo la idea aristotélica de atributo, se puede decir que una atribución de cantidad es aquella que realizada sobre un fenómeno (objeto, evento, sucesión de eventos u objetos indexados de acuerdo a la ocurrencia de los mismos en función de condiciones espacio-temporales) permite organizar diferentes estados del mismo según que la atribución sea objeto de aumento o disminución, de comparación (por diferencia) o de igualación (al agregar o quitar). Si la atribución es de naturaleza continua, entonces refiere a una magnitud, la cual es susceptible de ser medida, pero si es de naturaleza discreta, refiere a una pluralidad y es susceptible de ser contada.

En toda atribución de cantidad es posible definir una relación de equivalencia (cuando dos instancias de la atribución son idénticas), una relación de orden (cuando una instancia es mayor o menor que la otra) y una operación aditiva (que permite agregar o juntar dos instancias de la atribución de cantidad para producir una tercera). La relación de equivalencia permite definir clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia se puede definir como una *cantidad* en la atribución dada (por ejemplo, cuando la atribución de cantidad refiere a una *longitud*, las clases de equivalencia formadas se pueden llamar *cantidades de longitud*). Así entonces, el conjunto de cantidades con la relación de equivalencia y la operación aditiva forman un *semigrupo aditivo conmutativo* y se tiene entonces lo que Stein (1990) ha denominado un *sistema de cantidades*.

La noción de *sistema de cantidades* permite tratar en una misma categoría sistemas que por su función deben ser reconocidos como formas de cantidad (por ejemplo, el valor de intercambio de bienes y servicios, y entre ellos, El dinero) pero que desde el punto de vista matemático o físico no se consideran magnitudes. Igualmente facilita hablar de razones sin tener que entrar a distinguir si la razón se define entre números, magnitudes (intensivas o extensivas, escalares o vectoriales, matemáticas o sociales) o incluso sin la necesidad del recurso al número.

Sobre la noción de razón. La condición necesaria y suficiente para que dadas dos *cantidades* de un *sistema de cantidades*, sobre ellas se pueda establecer una razón, es que cumplan con la propiedad arquimediana: dadas dos *cantidades* x, $y \in A$, con A un *sistema de cantidades*, entonces entre ellas se puede establecer una razón si existen números naturales m, n tales que $n{\cdot}x > y \wedge m \cdot y > x$ (en el contexto griego no necesariamente implicaban número naturales, sino magnitudes equimúltiplos). La idea general detrás de esta formulación es que sobre dos cantidades x e y, entre ellas se puede definir una razón si dichas cantidades son finitas. Dada la simetría de la propiedad arquimediana con respecto a las cantidades x e y, entonces sobre ellas siempre será posible definir dos razones: dados dos *sistemas de cantidad* A_1 y A_2 (no necesariamente distintos) y dos *cantidades* $x \in A_1$, $y \in A_2$, entre dichas cantidades se pueden definir dos razones, a saber, "la razón de x a y", y la "la razón de y a x" (en la notación clásica $x : y$ o $y : x$). Ser consciente de la existencia de este par de razones entre cantidades y de la distinción entre ellas es importante no solo porque la una es la recíproca de la otra, sino también porque en términos de las relaciones que cuantifican, una de ellas se puede usar como base para determinar unívocamente la otra: "si la razón de x a y es α" entonces "la razón de y a x es α^{-1}" (tal como se concebía en la aritmética griega).

Sobre la proporción. Siguiendo la noción clásica, se entiende la proporción como la equivalencia entre dos razones, es decir, la proporción se comprende como una forma proposicional binaria o diádica que permite poner en relación dos razones, o como un predicado cuaternario o tetrádico entre cuatro cantidades: si las *cantidades* x, y, x', y' son tales que $x = \delta \cdot x'$ implica $y = \delta \cdot y'$ (igual medida relativa de x a x' que y a y'), entonces $x : y :: x' : y'$. Esto implica que las nociones de medida relativa y equimultiplicidad son fundamentales en el proceso de comprensión tanto de la razón como de la proporción, y ambas permiten *objetivar* la razón a través de la clase de equivalencia de todas las parejas de cantidades que están en la misma razón (equivalencia significa designar la misma propiedad característica de las cantidades comparadas, y en particular, igual medida relativa).

Funciones de la razón sobre las cantidades

En su forma más general, una razón entre dos *cantidades* es una nueva cantidad que surge de la comparación por cociente entre ellas, y por lo tanto expresa la medida relativa de una de ellas tomando la otra como unidad. Esto permite diferenciar la relación entre las cantidades de la razón como cuantificación objetivada de dicha relación. Por ejemplo, entre dos *cantidades x* e *y* en donde *x es el doble de y*, 2 objetiva la razón entre dichas cantidades, y la expresión "*es el doble de*" la relación entre ellas.

La razón como relator/correlator: De acuerdo con la distinción anterior, la razón ya objetivada puede cumplir una función de cuantificar la relación por cociente en dos situaciones distintas, bien entre *dos cantidades específicas* (fijas), bien entre *dos familias de cantidades*. En el primer caso, la razón es un *relator* (Vasco, 1994), mientras que en el segundo, la razón es un *correlator* (Vasco. 1994). Si las cantidades fijas son homogéneas, la razón $x:y$ es cantidad intensiva adimensional que se objetiva como un número real y expresa cuántas veces está contenida la *cantidad x* en la *cantidad y*, o simplemente, la medida de la *cantidad x* cuando se considera la *cantidad y* como unidad de medida. Si las cantidades fijas son heterogéneas, la razón $x:y$ es una cantidad intensiva con dimensiones y expresa la relativización de la cantidad *x* por cada unidad de la cantidad *y* (normalización de *x* sobre *y*). Si la razón objetiva la relación entre dos familias de cantidades, es una *cantidad intensiva* (correlator intensivo) que permite establecer una correspondencia uno a uno entre elementos de ambas familias, y define una proporcionalidad directa entre ellas. La razón se objetiva entonces en la constante de proporcionalidad la cual será adimensional si el *correlator intensivo* se define entre familias de cantidades de la misma naturaleza o tendrá dimensiones en caso que las familias sean de diferente naturaleza.

La razón como operador/transformador. Además de la función de la razón en la doble situación relacional anterior, distinguimos otro tipo de función que se presenta cuando dadas una cantidad y la razón de esta cantidad con otra cantidad desconocida, entonces la razón se aplica como operador sobre la cantidad conocida para calcular la cantidad desconocida. Si la cantidad inicial y final son homogéneas, la razón α expresa un *operador escalar* (factor de ampliación-reducción) que, aplicado sobre una de las dos cantidades, produce la otra cantidad. Si cantidad inicial y final son heterogéneas, entonces la razón es un *transformador* que aplicado sobre una de las cantidades, la transforma en la otra con la que se correlaciona. La razón como transformador es de especial interés en el caso de la comparación entre familias de cantidades que se correlacionan linealmente, en donde la razón es un transformador lineal que aplicado sobre cualquier *cantidad* de una de las familias produce la *cantidad* correspondiente en la otra familia.

Géneros de situación

La tipología que se presenta a continuación toma como base tanto la naturaleza de las cantidades involucradas en la situación, como la naturaleza de las relaciones que se pueden establecer entre dichas cantidades y las acciones que se despliegan sobre ellas. De esta forma se fija la atención en los aspectos estructurales de las situaciones, y no en las acciones que se pueden realizar sobre las cantidades, las cuales quedan descritas por las funciones de la razón como relator, operador, correlator o transformador.

Situaciones de relación parte-todo. Son aquellas en las que dos *cantidades* de un mismo *sistema de cantidades* se comparan entre sí a través de su cociente para determinar la medida relativa de una con respecto a la otra (*la razón como relator*). La razón es entonces una *cantidad numérica* que expresa o bien la relación de multiplicidad de la mayor con respecto a la menor, o bien la relación de qué parte es la menor de la mayor. En general esta cantidad numérica se expresa a través de un número real. Si las cantidades son conmensurables, la razón es un número racional, y se puede encontrar a partir de uno de los dos procedimientos siguientes:

Caso 1: Si *y* mide a *x*, entonces existe n ∈ ℕ tal que $x = n \cdot y \Leftrightarrow y = \frac{1}{n} \cdot x$

Caso 2: Si *y* no mide a *x*, entonces existe otra cantidad *c*, tal que: $x = n \cdot c \wedge y = m \cdot c$, de donde se deduce que $y = \underbrace{\frac{1}{n} \cdot x + \frac{1}{n} \cdot x + \cdots + \frac{1}{n} \cdot x}_{m-veces} = \frac{m}{n} \cdot x$

Estos dos casos tienen un valor pedagógico especial pues cuando la razón es expresada a través de la notación fraccionaria, el primero define la fracción unitaria a partir de la relación *ser múltiplo de*…, mientras que el segundo permite ver la fracción no unitaria como una repetición de fracciones unitarias. De esta manera la fracción emerge de la acción de medir, y de la razón que expresa esta medición.

Situaciones de concentración. Se trata de situaciones en las que un cierto fenómeno es analizado de tal forma que con respecto a una determinada atribución de cantidad se comparan las cantidades que representan el todo y las partes, o las partes entre sí. Es decir, dado un fenómeno y un *sistema de cantidades A* que cuantifica un cierto atributo de este fenómeno, entonces existe una cierta *cantidad w* ∈ *A* que cuantifica el fenómeno como un todo, y otras *cantidades* $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ (todas ellas en el sistema *A*) las cuales cuantifican el mismo atributo en las partes que componen el todo, y estas cantidades son tales que

$w = w_1 \cup w_2 \cup w_3 \cup \ldots \cup w_n$, y por lo tanto, para cualquier cantidad w_i (con i = 1, 2, 3,…,n), $\frac{w_i}{w} = \alpha_i$ expresa la normalización de la cantidad de la parte con respecto al todo (de manera similar si lo que se comparan son dos partes entre sí). La comparación entre parejas de estas cantidades son también relaciones parte-todo (o en su defecto, relaciones parte-parte) y la razón α cumple una función como relator. Pero cuando se da la razón α y bien la cantidad w o la cantidad w_i para hallar la otra, la razón cumple su función como operador.

Si en una concentración determinada, el todo cambia, entonces las partes que lo componen cambian proporcionalmente al cambio en el todo de tal forma que la razón α entre cantidades w y w_i permanece constante. La conservación proporcional de la relación entre las partes y el todo permite definir una proporcionalidad directa entre la serie de cantidades que puede tomar el todo en su variación, y la serie de variaciones que puede tomar cualquiera de las partes a medida que el todo va tomando sus valores respectivos. Dicho de otra forma, si α es la concentración de una *cantidad* w_i sobre otra cantidad w, y si X (conjunto de valores del todo en el proceso de variación) e Y (conjunto de valores de la parte en el proceso de variación) son dos *familias de cantidades* entonces existe una función $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(x) = y = \alpha \cdot x$. La razón α es entonces un correlator intensivo adimensional en relación al proceso de variación descrito por la función f.

Situaciones de densidad de distribución. Para un fenómeno dado, se tienen dos sistemas de cantidades distintos (describiendo cada uno una atribución de cantidad sobre el fenómeno), para los cuales, las cantidades de uno de los sistemas se distribuyen uniformemente sobre cantidades del otro sistema. Esto es, dadas dos cantidades cualesquiera $x \in A$, $y \in B$ (con A y B dos sistemas de cantidades heterogéneos), una de las cuales se supone con una distribución homogénea sobre la otra, entonces existe un número $\alpha \in Q$ que es la razón de x a y que cuantifica la forma de tal distribución, es decir, normaliza la cantidad x por cada unidad de la cantidad y. Así, en primera instancia se tiene que la razón cumple una función como relator: dada la pareja (x, y) la razón $\frac{x}{y} = \alpha$ expresa la ley de distribución uniforme de la cantidad x sobre la cantidad y, y por lo tanto α expresa, cuántas unidades de x hay por cada unidad de y. La razón α relator intensivo dimensional. Por supuesto, cuando la situación indaga por una de las cantidades, conocidas la razón de distribución α y la otra cantidad, entonces la razón cumple una función como operador.

La razón puede también cumplir una función de correlator, pues bajo el supuesto de que la densidad de distribución α de cantidades *x* sobre las cantidades *y B* es uniforme, entonces la razón α permite definir dos subconjuntos *A'* y *B'* en *A* y *B* respectivamente, tales que para cada valor $x_i \in A'$ existe un valor $y_i \in B'$ con $\frac{x_i}{y_i} = \alpha$, esto es, existe una función $f: B' \to A'$ tal que para cada $y_i \in B'$ $\exists$ $x_i \in A'$ y $f(y_i) = x_i = \alpha \times y_i$. Bajo dicha función de distribución, se puede definir una proporcionalidad directa entre *A* y *B*, en donde la razón α es la constante de proporcionalidad. Dado el carácter ideal de la homogeneidad de la distribución que supone dicha constancia de la razón, ésta debe ser considerada como una cantidad intensiva sobre los sistemas *A* y *B*. La razón α es un transformador lineal.

Situaciones de tasa o rata. En este caso, las situaciones comparan dos cantidades $a \in A$ y $b \in B$ (por lo general dos sistemas de cantidades heterogéneos), en los cuales la razón $\alpha = \frac{a}{b}$ expresa una condición de eficiencia de un determinado proceso o fenómeno (por ejemplo, el rendimiento de un deportista, la eficacia de un trabajo, las indicadores estadísticos del comportamiento de un determinado fenómeno como la mortalidad infantil, etc.). Por tratarse de la determinación de la eficiencia de algo o alguien, implica que, sobre ese fenómeno estudiado, se establecen una serie de mediciones de estados posibles del evento, en circunstancias espacio-temporales específicas, y la razón establece una especie de comportamiento ideal que homogeniza el fenómeno como si se diera siempre de manera idéntica a través del tiempo y del espacio. Como en el caso anterior, la razón puede cumplir con las funciones ya descritas; como relator/operador, o correlator/transformador.

Situaciones de medida. Es el caso en el que dado un *sistema de cantidades M*, en el cual se elige una cantidad *u* como unidad de medida (todas las demás cantidades en *M* se comparan con respecto a la cantidad *u*), y un *sistema de cantidades Q* (por lo general los números reales), entonces se puede definir una función $\delta_u : u \times M \to Q$ con $\delta_u(u) = k \in Q$ y si $\forall\ m \in M$, $\exists\ \rho \in Q$, $\rho = \frac{m}{u}$, entonces $\delta_u(m) = \delta_u(\rho \cdot u) = \rho \cdot \delta_u(u) = \rho \cdot k = \alpha$. Esta función es llamada la función medida de *M* sobre *Q*, y $\alpha = \rho \cdot k$ es definida como la medida de la *cantidad m*.

La función medida define un isomorfismo entre los *sistema de cantidades M* y *Q*, o al menos sobre subconjuntos de éstos, lo cual permite una extensión de las propiedades de la aritmética al tratamiento de las *cantidades* no numéricas. En particular cuando el sistema *M* es una magnitud, este isomorfismo permite que en vez de comparar las cantidades de magnitud entre sí (como se hacía en la antigüedad griega), se comparan sus medidas, y cualquier relación entre las medidas, sea afirmada sobre las *cantidades de magnitud*.

Para terminar, si k = 1, entonces la función δ_u es la medida usual, o medida real. Si k = 100, la función δ_u define entonces lo que usualmente llamamos porcentajes.

Conclusiones

Tres principios están entonces en la base de lo descrito. El primer principio implica una mirada a la razón como una forma de cuantificación de la relación por cociente entre dos cantidades, y no como un cociente entre dos números, y a la proporcionalidad como una forma de poner en correspondencia biunívoca dos familias de cantidades a partir de identificar una propiedad invariante a todas la parejas de cantidades correspondientes: conservar la misma relación por cociente. La proporción se comprende entonces como una forma proposicional binaria o diádica que permite poner en relación dos razones. El segundo tiene que ver con el análisis de la función que cumple la razón en relación a las cantidades involucradas en la situación. Se identificaron cuatro funciones básicas: la razón como relator, como operador, como correlator, o como transformador, según si la situación compara dos cantidades o dos familias de cantidades. Estas funciones no son estáticas, sino que, en una situación dada, la función de la razón cambia continuamente de una función a otra según el tipo de problemas que se vayan presentando en la situación. El tercero, es la tipología de las situaciones RPP, separando los aspectos matemáticos relativos a tales objetos de conocimiento de los relativos a la estructura de la situación: tipos de cantidades y formas de relación entre tales cantidades. A estos tipos de situaciones RPP se le asocian las familias de actividad que caracterizan los procedimientos típicos a partir de los cuales los individuos enfrentan y solucionan los problemas relativos a las situaciones RPP.

Referencias bibliográficas

Behr, M., Harel, G., & Post, T. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan Publishing Company.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* (Tesis Doctoral), Univesitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis Doctoral), Universidad de Jaén, Jaén, España.

Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA, 7*(1), 3-42.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing-value poportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235-290). Albany, NY: State University of New York Press.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. B. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). New York: Information Age Publishing.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hierbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-117). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Mullis, I., Martin, M., Olson, J., Berger, D., Milne, D., & Stanco, G. (Eds.). (2008). *TIMSS 2007 encyclopedia: A guide to mathematics and science education around the world.* (Vols. 1 - 2). Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19-40). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Ponte, J. P., & Marques, S. (2005). *Proportion in school mathematics textbooks: a comparative study.* Paper presented at the Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Larnaca, Cyprus.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic. In J. Hierbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-53). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. *Synthese, 84*(2), 163-211. doi: 10.1007/BF00485377

Vasco, C. E. (1994). Relatores y Operadores. In A. C. Castiblanco (Ed.), *Un nuevo enfoque para la didactica de las matematicas. Volumen 2* (pp. 63-86). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

PRIMERAS IDEAS ARITMÉTICAS DE LA MULTIPLICACIÓN "RUSA Y EGIPCIA" EN EL SALÓN DE CLASES DE LA ESCUELA PRIMARIA

Lorena Trejo Guerrero, Marta Elena Valdemoros Álvarez
Cinvestav-IPN México
loreloren@hotmail.com, mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen. Este reporte parcial se integra a una extensa investigación. Aquí mostramos el resultado obtenido al utilizar situaciones de enseñanza que nos proporciona la historia de la aritmética con dos forma canónica de multiplicar similares entre sí, la "multiplicación rusa" y la "multiplicación egipcia", pero diferentes a la forma de multiplicar. Pretendemos conducir a los alumnos a utilizar eficazmente las características de las operaciones aritméticas básicas (suma, multiplicación y división), implicadas en procedimientos algorítmicos de la multiplicación y la división, ambas referidas a los números naturales; estos logros son posibles en el marco de amplias reflexiones con los maestros, orientadas a discutir ventajas y desventajas del tipo de estrategias que utilicen ellos para abordar el tema, considerando la relación entre las formas de representar, analizar y comprender ideas matemáticas. Ponemos especial atención en el uso del lenguaje y en cómo los alumnos construyen y expresan sus argumentos, al interactuar con el maestro y sus compañeros.

Palabras clave: lenguaje, didáctica, multiplicación, maestros, alumnos

Abstract. This partial report integrates extensive research. Here we report the results obtained using teaching situations gives us the story of two canonical arithmetic multiplication similar to each other, the "Russian multiplication" and "Egyptian multiplication", but different to the way of multiplying. We intend to lead students to effectively use the features of the basic arithmetic operations (addition, multiplication and division), algorithmic procedures involved in multiplication and division, both relating to the natural numbers, these achievements are possible within the framework of broad reflections with teachers, aimed to discuss advantages and disadvantages of using such strategies to address them, considering the relationship between ways of representing, analyzing and understanding mathematical ideas. We put special attention on the use of language and how students construct and express their arguments, to interact with the teacher and peers.

Key words: language, teaching, multiplication, teachers, students

Introducción

Para fortalecer la enseñanza de la aritmética es necesario recurrir a las aportaciones de su propia historia, lo cual permitirá a los profesores conducir a los estudiantes hacia experiencias reflexivas que respalden la construcción del aprendizaje de los estudiantes de manera autónoma. Mostramos entonces el resultado obtenido al contrastar dos formas de multiplicar (la egipcia y la rusa) similares entre sí pero diferentes a nuestra habitual forma de multiplicar en la escuela primaria, con el profesor Marco y sus estudiantes de 6° grado. Para lo anterior es importante observar detenidamente la participación del profesor, lo que nos permitirá acercarnos a sus necesidades docentes.

Este reporte está inmerso en una investigación muy amplia con respecto a la enseñanza del número natural en la escuela primaria, se espera que los alumnos adquieran conocimientos y habilidades en condiciones más fáciles; para lo cual, por medio de biparticiones y duplicaciones presentamos la multiplicación egipcia y la multiplicación rusa, procurando fortalecer el desarrollo de propuestas y materiales altamente innovadores y contribuir a la solución de problemas educativos en Matemáticas.

Planteamiento del problema

Propósito: atendiendo a la importancia que los estudiosos de la aritmética otorgan a las diversas maneras de multiplicar, tomamos los procedimientos de la multiplicación egipcia y rusa para facilitar la comprensión del algoritmo canónico usado en la escuela primaria; sometemos a análisis el lenguaje del aula, tanto entre maestro – alumnos como entre los alumnos. Nuestras preguntas de investigación quedan planteadas de la siguiente manera: 1) ¿Cómo orientar al profesor para utilizar diversas formas de multiplicar para ayudar a sus estudiantes a construir su conocimiento en el salón de clases? Y con respecto a los alumnos: 2) ¿Cómo al contrastar dos formas similares entre sí pero diferentes a nuestra forma de multiplicar, estructuran y expresan sus argumentos lógico-matemáticos?

Marco teórico

Si consideramos que el conocimiento es uno de los modos de apropiación del mundo por el hombre, el lenguaje pasa a ser el medio más importante que permite la transmisión de este conocimiento, por lo tanto, se entiende al análisis formal o discursivo, como una empresa perfectamente legítima e indispensable. Retomamos tres propuestas de análisis de Thompson (1993):

a) Análisis conversacional: el principio metodológico clave de este análisis es estudiar ejemplos de interacción lingüística en el ámbito real en que ocurren; poniendo una cuidadosa atención a las maneras en que dichas expresiones matemáticas se organizan y usan, con ajuste a las reglas y los dispositivos conversacionales.

b) Análisis sintáctico: se ocupa de la sintaxis operativa en el discurso cotidiano, es una manera informal utilizada por los maestros para acercar a los alumnos a la necesidad de usar un lenguaje convencional, al utilizar el lenguaje matemático con los significados que representa cada signo como tal.

c) *Análisis argumentativo:* nos permite reconstruir y hacer explícitos los patrones de inferencia que caracterizan al discurso, esto permite al analista separar el *(corpus)* discursivo en conjuntos de enunciados matemáticos organizados en torno a ciertos asuntos o temas, y trazar después las relaciones existentes entre estos enunciados y asuntos, en términos de ciertos operadores lógicos o cuasi lógicos (implicación, contradicción, presuposición, exclusión, etc.).

Cabe enfatizar que aprender matemáticas va más allá de aplicar algoritmos y fórmulas, de resolver muchos problemas dada determinada técnica; saber matemáticas necesariamente implica aprender a pensar, y desarrollar capacidades de razonamiento lógico. Por ello, aquí proponemos un ambiente de trabajo donde los docentes discutan y aporten sus puntos de vista de manera colectiva, haciendo conjeturas y experimentando el proceso de hacer matemáticas, para posteriormente enseñarlas de modo integral y propositivo.

En cuanto a la importancia del uso del lenguaje en el presente trabajo de investigación, una de las ideas de que conviene destacar es "*la diferencia entre tener un dominio receptivo lingüístico que permita comprender y utilizar este bagaje en forma activa*". Chomsky (2009, 10) Esto nos permite explicar las ambigüedades del lenguaje, porque tales ambigüedades están relacionadas con los significados (semántica), lo cual permitirá al usuario, *descubrir las regularidades profundas del lenguaje.* Por todo ello y dadas las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación, consideramos que algunas maneras diferentes de multiplicar son una buena vía de acercamiento al algoritmo canónico.

Para nuestra intervención en el aula, mediante la enseñanza de la multiplicación, adaptamos el estudio de clase japonés (Isoda, 2009) con la finalidad de aprender a mejorar la enseñanza en el salón de clases (Stigler, 1999), a partir del trabajo con los maestros participantes. Dicho estudio de clases se compone de tres momentos muy importantes: 1) Planificación de clases, 2) Presentación y 3) Discusión colectiva con los profesores; a los cuales, nosotras agregamos un cuarto momento que designamos como "Estudio de Casos". La planificación de la clase, requiere tener en cuenta el objetivo centrado en desarrollar *habilidades y formas de pensamiento creativo*, su interés en que las clases sean agradables y que los alumnos las perciban como accesibles y tomen la iniciativa de su propio aprendizaje.

En cuanto a las habilidades de los profesores, Vergnaud (1991,11) menciona que "[…] uno de los problemas más importantes de la didáctica, es el de conocer el orden en el cual las nociones pueden ser adquiridas por el niño, teniendo en cuenta que el orden de complejidad así determinado, no puede ser más que un orden parcial, que dará lugar eventualmente al aprendizaje simultáneo de nociones relativamente independientes". Por lo tanto, reflexionar en los resultados del contraste entre diferentes procedimientos para multiplicar, nos permite observar cómo el profesor y sus estudiantes dotan de sentido y dan significado a la multiplicación.

Otras habilidades didácticas del profesor que deben se exploradas son nuevas y efectivas maneras de utilizar el pizarrón, para mejorar el pensamiento y la comprensión del estudiante. Retomamos seis pasos propuestos por Makoto y Fernández (2004): *1) Llevar un registro de la lección:* Es muy útil para el profesor cuando quiere hacer referencia a algo que ocurrió en la clase. *2) Ayudar a los estudiantes a recordar lo que tienen que hacer y pensar:* pueden hacer referencia a lo que está en el pizarrón para poder aprender. *3) Auxiliar a los estudiantes a ver la conexión entre diferentes partes de la lección y la progresión de la misma:* el flujo coherente les permitirá ver las conexiones lógicas entre todas las partes de la lección. 4) *Contraste y discusión de las ideas presentadas por los estudiantes:* esto les permitirá desarrollar nuevas ideas y corregir sus errores, los autores lo llaman *"colectivo de reflexión"* porque toda la discusión en la clase se basa en las ideas presentadas en el pizarrón. *5) Contribuir a organizar el pensamiento de los estudiantes y descubrir nuevas ideas:* los profesores podrán centrarse en los descubrimientos de los alumnos y ayudarlos a orientarse durante la clase. *6) Fomentar la organización de la clase, presentando la información como un model;:* para que los estudiantes puedan tomar notas, lo que les permitirá optimizar su aprendizaje.

En cuanto a la multiplicación egipcia presentamos el procedimiento egipcio antiguo para multiplicar 14 X 27 (Ifrah, 2000). Se forman dos columnas, la primera de ellas comienza con el 14 y la otra con el 1. Los renglones siguientes se van formando con el doble de la cifra del renglón, hasta llegar en la segunda columna a un número tal que su doble ya sobrepasaría al otro factor, en este caso al 27.

14	1
28	2
56	4
112	8
224	16

La próxima pregunta es: ¿ Qué números de la derecha son necesarios para formar el 27, vemos que la respuesta es 27= 16 + 8 +2 + 1, de modo que para obtener el producto de 14 por 27 se toman (16 veces 14) + (8 veces 14) + (2 veces 14) + 14, pero estos números fueron obtenidos en la columna derecha, es decir se suman los números en la columna izquierda que están atrás de los números 16, 8, 2 y 1 de la columna derecha para obtener el resultado.

La multiplicación rusa fue usada desde hace varios siglos en dicha cultura y mantenida actualmente por diversos sectores de la sociedad rusa, Barradas (2004). Supongamos que se quiere multiplicar 14 y 27, para ello se forman las dos columnas como aparecen:

14 27

Los elementos de la primera columna se obtienen mediante duplicaciones del renglón anterior; en la segunda columna, el elemento siguiente se va obteniendo al efectuar una bipartición del numeral contenido en el renglón anterior y olvidando cualquier fracción. Las columnas se continúan con este procedimiento, hasta obtener un 1 en la columna derecha. En esta tabla, se tachan los renglones que tengan un número par en la columna de la derecha y se suman los elementos restantes en la columna izquierda.

14	27
28	13
56	6
112	3
224	1
378	

El resultado de la operación 14 por 27 es 378, cuya rectificación del resultado la realizaron los alumnos del profesor Marco con nuestra forma habitual de multiplicar.

Método de investigación

El estudio se llevó a cabo en una escuela primaria del sistema público, en el Estado de Hidalgo, en un grupo compuesto por 32 alumnos de sexto grado de primaria, con edades comprendidas entre 10 y 12 años y con 18 profesores en servicio como observadores, cuyas edades oscilan entre 28 y 50 años de edad, de los cuales se escogieron 3 para el Estudio de Casos, en ésta comunicación presentamos el caso del profesor Marco, quién presentó la clase referida a la multiplicación egipcia y rusa. El tipo de investigación que realizamos es de carácter cualitativo e interpretativo.

Los instrumentos metodológicos considerados fueron 1) Una sesión inicial de trabajo colegiado adaptada del Estudio de Clases, en donde se reflexionó acerca de las relaciones entre las operaciones aritméticas básicas utilizadas en otras maneras de multiplicar como son la multiplicación rusa y la egipcia como una vía de comparación que nos permita comprender las dificultades de la enseñanza de la multiplicación canónica. 2) Elaboramos un protocolo de observación para registrar los acontecimientos relevantes de la clase que desarrolló el profesor Marco en la cual comparó la multiplicación egipcia, la rusa y la nuestra. 3) Una sesión de discusión y evaluación colectiva, en la cual los maestros que observaron la clase del profesor Marco reflexionaron acerca de las dificultades que podrían enfrentar sus alumnos al resolver este tipo de problemas y la importancia del buen manejo de los recursos didácticos que tienen a su alcance, como el pizarrón; así como sobre las posibilidades que se abren al trabajar con formas diferentes de multiplicar y atender las dificultades que enfrenta el aprendizaje de las propiedades de la multiplicación y la importancia de procesos de generalización por parte de los profesores. 4) Realizamos dos entrevistas individuales con el profesor Marco, una antes de presentar su clase y otra posterior a la misma; en ambas cuales preguntamos acerca de sus expectativas, antes y después de la clase.

Validación de resultados

Para validar la investigación se realizaron los primeros “ensayos preliminares” de los instrumentos metodológicos, a fin de ratificar su funcionalidad. En la clase impartida por el profesor Marco, comprobamos que la historia de la aritmética nos proporciona elementos eficaces para indagar sobre las dificultades que se enfrentan en la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación y las propiedades de las operaciones aritméticas básicas, los consiguientes procesos de significación para construir la noción de número natural. Una vez concluida la investigación se hará triangulación de métodos y triangulación en el tiempo.

Análisis de resultados

A la presentación de la clase del profesor Marco asistieron 18 profesores en servicio y nosotros los investigadores, quienes observamos y tomamos nota bajo un protocolo previamente elaborado, en donde se puso especial interés en las habilidades didácticas que le permitan al maestro atender las necesidades reales de aprendizaje de los alumnos; esas habilidades son: la elaboración del plan de clase, la metodología utilizada, el uso efectivo del pizarrón, los recursos didácticos, la organización visual de la información, los tiempos y las participaciones de los alumnos; los observadores no interferimos en la clase, la cual fue video grabada.

La discusión y evaluación de la clase se realizó al terminar la presentación de la misma, apoyándonos en el video; durante el análisis los asistentes aportaron elementos interesantes y propuestas para mejorar la práctica docente del profesor Marco y ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión profunda socializando los procedimientos de solución al contrastar dos formas de multiplicar similares entre sí (la multiplicación egipcia y la rusa), ambas diferentes a la canónica. Agregamos la importancia para el profesor Marco de ser observado por sus colegas para analizar y fortalecer su propia práctica y así mismo, conocer otros procedimientos de cálculo de la multiplicación, confirmando lo anterior por el maestro Marco quien expresó: “Yo también aprendí algo nuevo”, refiriéndose a la alternancia didáctica y al contraste de distintos procedimientos de cálculo, este aprendizaje del maestro Marco, le facilitó la explicación de los procedimientos de la multiplicación egipcia y rusa a sus estudiantes.

Con respecto a los estudiantes identificamos cinco estrategias de solución diferentes en las cuales presentaron diversos niveles de comprensión y se generó una dinámica de colaboración entre ellos. Presentamos las cinco categorías de resultados diferenciados: 1) 8/32 alumnos compren-dieron el procedimiento y la diferencia entre una y otra y escribieron cómo lo realizaron. 2) 6/32 alumnos solicitaron la ayuda del maestro de manera individual. 3) 8/32 alumnos comprendieron el procedimiento y la diferencia entre los dos métodos ayudados por sus compañeros; 4) 4/32 alumnos reconocieron que se les hizo difícil y no comprendieron del todo el procedimiento y la diferencia entre los dos métodos y 5) 6/32 alumnos no comprendieron y tampoco solicitaron ayuda.

Lo anterior permitió hacer un análisis del discurso: a) análisis conversacional, b) sintáctico y c) argumentativo al observar la interacción entre compañeros y con su profesor. Los niños mostraron entusiasmo al realizar las actividades de la clase, aunque algunos presentaron mayores dificultades que otros para comprender las instrucciones (demandaron ayuda del profesor o sus compañeros), no todos lograron descubrir las propiedades de la multiplicación y las relaciones de las operaciones aritméticas implicadas en éstas situaciones de cálculo como son duplicaciones y biparticiones.

Los estudiantes expresaron que hay que saber multiplicar (ellos hacían referencia al procedimiento canónico de la multiplicación) antes de comparar con otras formas diferentes a la que conocemos, no es tan fácil identificarlas si no se ha comprendido y comparado hasta descubrir la diferencia. Los estudiantes manifiestan las expresiones y argumentaciones que señalamos a continuación. Entre los estudiantes Eduardo argumentó: "Yo encontré la diferencia entre las tres formas de multiplicar cuando escribí los pasos para resolver cada una; y la multiplicación egipcia y rusa son más fáciles que la nuestra porque nada más escribimos el doble de un lado y dividimos a la mitad del otro lado". Johan dijo: "Aprendí nuevas formas de multiplicar y se me hicieron más fácil estos procedimientos".

Con la sesión de observación sistemática de la clase del profesor Marco, confirmamos que entre maestros, es importante analizar sus estrategias y de esta manera poder identificar cuáles son los procesos de significación inmersos en los diálogos desarrollados para la elaboración de nociones por parte de los estudiantes. Podemos constatar de esta manera que los profesores y alumnos son beneficiados con el uso efectivo del pizarrón lo que permitió en este caso ayudar a los estudiantes a recordar lo que tienen que hacer y pensar, el profesor pegó en la pared algunas hojas de color en donde anotó los elementos que componen el algoritmo de la multiplicación canónica (multiplicando, multiplicador y resultado), dando sentido elemental así a este procedimiento de cálculo; al hacer una extensión del pizarrón a los muros del salón de clase, el profesor Marco evitó borrar algunos ejercicios que permitían observar la conexión entre diferentes partes de la clase y la progresión de la misma; el profesor pegó en los muros dos hojas más con los pasos para resolver la multiplicación rusa y la egipcia dejando de esta manera la pizarra libre para lo que fuese necesario escribir y así organizar las ideas y fomentar la discusión entre sus alumnos lo cual nos reiteró el profesor Marco en las entrevistas.

En la entrevista individual previa a la clase el profesor Marco dijo que fue muy valiosa la ayuda de sus compañeros de equipo porque en base a ellas, organizó las actividades del plan de clase y el tipo de materiales que utilizó en la presentación de la misma. En la entrevista individual posterior a la clase el profesor mencionó que se sintió satisfecho porque los alumnos se mostraron interesados durante el transcurso de todas las actividades planteadas, mencionó que la motivación de probar otras formas de multiplicar hace que la clase resulte enriquecedora con diversos recursos y además permite el trabajo en equipo, pues los estudiantes preguntan, trabajan y comparan sus resultados entre compañeros. Consideramos que el profesor Marco tiene una preparación afín a las actividades que desempeña pues cuenta con una Licenciatura en Pedagogía con especialidad en formación docente, con 4 años de servicio en la misma escuela y trabajando en esta ocasión por primera vez con 6° grado, notamos que estas características tienen la ventaja de permitir apertura para la incorporación de nuevas ideas al trabajo en el aula.

Conclusiones

En este reporte parcial de investigación doctoral, se muestra en el estudio de caso del profesor Marco cómo la historia de la aritmética nos proporciona al contrastar al menos dos formas de multiplicar similares entre sí y diferentes de la que generalmente se enseña en la escuela primaria, recursos sintácticos y semánticos, nos brinda procedimientos de cálculo más elementales, susceptibles de reconstrucción en el aula y favorecedoras de la transferencia de sentido hacia el algoritmo canónico de la multiplicación.

Tanto para el profesor Marco como para los maestros que participaron en la observación de la clase aquí descrita. Los beneficios del estudio de clase consistieron en el reconocimiento de ventajas logradas al contrastar diferentes procedimientos de multiplicación, como son los procedimientos egipcio y ruso, para otorgar sentido a los mismos en un nivel de cálculo elemental desde donde es posible transferir comprensión al algoritmo canónico de la multiplicación.

Referencias bibliográficas

Barradas, I. (2004). Las matemáticas del antiguo Egipto. En: SEP Ediciones *Una mirada a la ciencia.* (Pág. 79 a 81). Guanajuato, México: Editora Estrella Burgos.

Bruner, J, S. (2008). *Desarrollo cognitivo y educación*. México: Editorial Morata.

Chomsky, N. (2009). *Problemas actuales en teoría lingüística. Temas teóricos de gramática generativa.* México: Siglo XXI Editores.

Ifrah, G. (2000). *Historia universal de las cifras. La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Volumen I y II. México, México: Espasa Calpe, S. A.

Isoda, M., Arcavi, A., Mena Lorca, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas.* Valparaiso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaiso.

Isoda, M., Olfos R. (2009) *El estudio de clases y las demandas curriculares. La Enseñanza de la Multiplicación.* Valparaiso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Makoto, Y., Fernández, C. (2004). *A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. Nueva Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap. Best Ideas from the World's Teacher for Improving Education in the Classroom.* New York, USA: Free Press.

Thompson, J. B. (2002). *Ideología y cultura moderna. Teoría crítica social en la era de la comunicación de masas.* México, México: Universidad Autónoma Metropolitana.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México: Trillas.

SOBRE A PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS E A TOMADA DE DECISÃO DE INDIVÍDUOS-CONSUMIDORES

Marco Aurélio Kistemann Jr, Romulo Campos Lins
Universidade Federal de Juiz de Fora Brasil
Universidad Estatal Paulista - Rio Claro
marco.kistemann@ufjf.edu.br, mathk@ig.com.br

Resumo. Esta pesquisa qualitativa investigou os significados produzidos e as tomadas de decisão de indivíduos-consumidores por meio de entrevistas semi-estruturadas e situações-problema envolvendo temas e objetos financeiro-econômicos numa sociedade de consumo líquido-moderna. Nos embasamos em pressupostos teóricos da Educação Matemática Crítica de Ole Skovsmose, do Modelo dos Campos Semânticos (MCS) de Romulo Campos Lins e teorias sociológicas e econômicas sobre práticas de consumo. Após realização do estudo piloto e da segunda etapa de investigações com individuos-consumidores, conseguimos ler plausivelmente, a produção de significados dos individuos-consumidores. Os resultados apresentados nesse artigo podem auxiliar as práticas de ensino de conteúdos financeiros na disciplina de Matemática.

Palavras chave: produção de significados, matemacia, consumo

Abstract. This qualitative research investigated the meanings produced and the decision-making of individuals-consumers through semi-structured interviews and problem situations involving financial-economic objects and themes in a liquid-modern consumer society. In embasamos in theoretical Mathematics Education Ole Skovsmose, Criticism of the model of Semantic Fields (MCS) Romulo Campos sociological and economic theories and Lins on consumer practices. After completion of the pilot study and the second stage of investigation with individuals-consumers, we read plausibly, the production of meanings of individuals-consumers. The results presented in this article can help the financial content teaching practices in the discipline of mathematics.

Key words: production of meanings, mathematcy, consumption

Introdução

A importância de investigarmos a produção de significados é expresso por Lins, quando este afirma: "(...) para mim o aspecto central de toda a cognição humana é produção de significados" (1997, p.75).Em nossa pesquisa, a fala e as tomadas de decisão dos indivíduos-consumidores desvelam o conhecimento que cada sujeito possui quando vai consumir algo.

O conceito de *Leitura Plausível* é apresentado por Lins e Gimenez (1997, p.93), sendo um dos instrumentos do Modelo dos Campos Semânticos (MCS) para investigarmos as legitimidades das produções de *significados matemáticos* e *não-matemáticos* de individuos, em variados contextos, bem como, a dinâmica dos processos de tomada de decisão e, por meio disso, caracterizar os elementos que organizam as práticas e decisões de consumo dos indivíduos-consumidores ao lidarem com objetos financeiros, ou seja, contratação de empréstimos, uso de cartões de crédito, planejamento para consumo de médio e longo prazo, taxas de juros, etc.

Nesse artigo, apresentamos de forma sucinta os resultados da pesquisa qualitativa intitulada *Sobre a produção de significados e a tomada decisão de indivíduos-consumidores*, orientada pelo Prof. Dr. Romulo Campos Lins, realizada no doutorado em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro, no período de março de 2008 a março de 2011. Guiamos nossa investigação pela pergunta diretriz: "Em que medida, num cenário líquido-moderno, os indivíduos-consumidores tomam suas decisões de consumo e que significados produzem quando lidam com objetos financeiro-econômicos?".

De acordo com Bauman (1998), o Capitalismo requer um processo de contínua produção de bens e serviços que, portanto, devem ser rotineiramente comprados pelos indivíduos, daí resultando a sociedade de consumo. Diante disso, em nossa concepção, indagamos a seguinte questão: "O que significa consumir na sociedade do século XXI?".

O objetivo central da pesquisa foi investigar o que indivíduos-consumidores (especialistas e não-especialistas em Matemática) falam, significados que produzem e que decisões tomam quando inseridos numa sociedade líquido-moderna marcada pelo consumo e descarte instântaneo de produtos. A relevância de nossa investigação tem convergência com a fala de D'Ambrósio no artigo *Change in mathematics education in Brazil*, apresentado na revista ZDM- *The International Journal on Mathematics Education* (2010), quando este diz que "ainda é alto o grau de iliteracia e de grande dificuldade a sua erradicação".

Fundamentos teóricos e metodologia

A Educação Matemática, como prática, está estruturada de muitas formas diferentes pelo mundo, entretanto, Skovsmose reconhece que não há nenhuma unidade fundamental ou essência por trás da noção de Educação Matemática, uma vez que esta inclui uma grande variedade de formas de ensino e aprendizagem de conhecimentos matemáticos. Essa variedade tem muitas funções sociais, econômicas, culturais e políticas. Considerando tanto do viés da sociedade quanto do viés do indivíduo.

Skovsmose (2000) considera ainda que, a Educação Matemática pode desempenhar um papel importante no desenvolvimento da cidadania crítica, ressalvando sua preocupação com o papel que a Matemática poderia assumir na educação superior, fornecendo instrumentos e técnicas para a arena do empreendimento tecnológico. Nesse sentido, estabelece-se a necessidade de mudança no enfoque do ensino tradicional, a fim de que a reflexão se transforme em parte da tarefa educacional, revelando que, até o momento, muitas pesquisas em Educação Matemática vêm ignorando questões sobre funções sócio-políticas da própria Educação Matemática.

Nossa coerência entre os referenciais teóricos e metodológico revela-se medida em que, nesta pesquisa qualitativa de cunho exploratório, buscamos apoiarmo-nos nas ideias apresentadas dos teóricos da sociedade de consumo e nos pressupostos das teorias econômicas relativas ao comportamento e tomada de decisão do consumidor, investigando, por meio da *leitura plausível*, como os indivíduos-consumidores tomavam suas decisões de consumo e que significados produziam quando se deparavam com situações de consumo nesta sociedade, tais como:

"Um casal de indivíduos-consumidores poupa há alguns anos todo mês a quantia de R$100,00 na poupança a fim de garantir o futuro de seu único filho quando este atingir a maioridade. Num dado mês do ano (mês de férias da família) descobrem ao retirar um extrato bancário que gastaram R$1000, 00 a mais no cartão de crédito, isto é estão com um saldo negativo em sua conta de R$1000,00 não possuindo reservas pessoais para quitar esse valor.a) Possuindo cheque especial, cartão de crédito, crédito na praça, que decisão deve tomar o casal para quitar esse valor a mais que apareceu em seu extrato bancário?b) O casal de indivíduos-consumidores, em virtude de não possuírem reservas, decide utilizar o cheque especial para quitar esses R$1000, 00. O que você acha dessa decisão?

Para tal nos embasamos nos referenciais teórico-metodológicos de Lins (1997) e Skovsmose (2000) que nos auxiliaram metodologicamente nas análises das falas dos entrevistados e na composição de situações-problemas apresentadas aos entrevistados, Bauman (2008) e Baudrillard (2007) que nos apresentaram cenários das sociedades de consumo, bem como o *modus operandi* dos consumidores, numa ótica sociológica. Como observa Lins (1999), o ponto central é que produzimos significados para que pertençamos a uma prática social ou, em escala maior a uma cultura, tanto quanto produzimos enunciações pelo mesmo motivo.

Em termos Metodológicos, para cumprirmos nossos objetivos nesta investigação qualitativa elaboramos um conjunto de instrumentos que pudessem estivessem em conexão com nossos referenciais teóricos e que pudessem dar conta das atividades e ações envolvidas nas práticas e tomadas de decisão de consumo do indivíduo-consumidor, quais sejam: (i) uma ficha de identificação do indivíduo-consumidor; (ii) opções de perfis para que o indivíduo-consumidor montasse seu perfil, podendo sugerir modificações no mesmo; (iii) um roteiro de questões diretrizes para servir de guia nas entrevistas semi-estruturadas; (iv) um grupo de situações de consumo que podem revelar como os indivíduos-consumidores tomam suas decisões quando em suas ações de consumo.

Nesse sentido, entrevistamos individualmente cada indivíduo-consumidor (especialista ou não em matemática) utilizando os instrumentos definidos para a coleta de dados. Cada sujeito da pesquisa teve acesso às situações-problema e apresentou a sua produção de significados para os textos financeiro-econômicos, bem como para as simulações que acompanhavam esse texto e mostravam alternativas diferentes das argumentadas pelos indivíduos-consumidores em suas tomadas de decisão. Objetivamos com isso verificar se as tomadas de decisão sofriam influência e que tipo de influência quando o sujeito se deparava com um texto matemático com cenários diferentes.

Resultados da pesquisa

Nas análises das entrevistas realizadas no estudo piloto, com cinco indivíduos-consumidores, e no pós-piloto com outros seis individuos-consumidores, buscou-se caracterizar as práticas de consumo de indivíduos-consumidores, utilizamos a *Leitura Plausível* das falas dos participantes da investigação. Constatamos ao longo da investigação a incipiência dos indivíduos-consumidores em lidarem com uma matemática financeiro-econômica e com situações envolvendo essa matemática que ocorrem no cotidiano de consumo, e que ao ter mais contato com situações que envolvam os conceitos desta matemática, os indivíduos-consumidores poderão desenvolver o que denominamos m*atemacia financeiro-econômica*, ou seja, a habilidade em ler de forma crítica e interpretar textos que envolvam situações de cunho financeiro-econômico e tomar suas decisões. Tais resultados, em grande parte, corroboram o que nossos referenciais da educação matemática e da sociologia/economia explanam sobre a sociedade de consumo atual. O estudo piloto contou com a participação de cinco indivíduos-consumidores, auxiliando-nos significativamente a perceber as suas limitações e as necessidades de criarmos outros instrumentos de verificação e intervenção junto às práticas de consumo desses sujeitos. Tanto nas entrevistas realizadas, quanto nas falas do individuos-consumidores nas situações-problema, investigou-se as produções de significados e as tomadas de decisão dos individuos a partir da perguntas e situações que apresentamos. De posse dos dados produzidos e analisados, à luz do MCS e dos pressupostos teóricos sociológicos (consumo e comportamento do consumidor), buscamos apresentar reflexões que pudessem nos direcionar a conclusões parciais acerca das ações de consumo e do *modus operandi* desses indivíduos-consumidores.

As entrevistas pós-piloto contaram com sete participantes, com alguns ajustes durante as sessões de orientação, conforme realizado na investigação piloto, buscou investigar as crenças-afirmações, produção de significados e tomadas de decisão dos indivíduos-consumidores a partir das doze categorias de consumo pré-estipuladas:1) As propagandas e sua influência; 2) A racionalidade do indivíduo-consumidor; 3) A parcela caber no orçamento; 4) Situações onde o preço à vista é igual ao preço a prazo; 5) Ganhar mais e gastar mais; 6) Planejar para consumir;

7) Taxas de juros e empréstimos; 8) A quem cabe uma educação financeira; 9) O papel da família; 10) O papel da Escola; 11) A Matemática e sua influência nas ações de consumo; 12) A utilização de produtos ecológicos.

Nesta 2ª etapa, dividimos nossas ações investigativas em duas fases. Na 1ª fase entrevistamos sete participantes, enquanto que na 2ª fase, apresentamos cinco situações-problema de consumo para seis dos sete participantes. O objetivo da segunda fase foi o de investigar como os indivíduos-consumidores tomam suas decisões de consumo, bem como investigar quais os meios utilizados (matemáticos ou não) para tomar essas decisões e que *significados* são produzidos a partir das *enunciações* dos seis indivíduos-consumidores. Assim como na investigação piloto, realizamos a *leitura plausível* das *enunciações* dos indivíduos-consumidores buscando identificar suas *crenças* e *legitimidades* com relação a suas tomadas de decisão em suas ações de consumo.

Nas *situações-problema* de consumo, como um dos participantes não compareceu, ficaram seis indivíduos-consumidores, três com formação em Matemática e três indivíduos-consumidores com formação básica em Matemática, compondo três duplas para análise, em que um dos membros da dupla era sempre um especialista em Matemática. As situações com seus respectivos objetivos foram: 1) *"Força" dos juros compostos*; *2) Preço a prazo igual a preço à vista*; *3) Comparando preços e tomando decisões de consumo: 4) Gastando a mais;* 5) Comprar financiado ou alugar um imóvel?.

Concluimos que os indivíduos-consumidores carecem de ter acesso a discussões que envolvam as propagandas: ter/desenvolver a habilidade (*Matemacia Financeira-Econômica*) de ler uma propaganda e produzir *significados* para o texto (mensagem) que a mesma apresenta, afim de que possam usá-la para guiar suas decisões de consumo. As falas dos indivíduos-consumidores, na primeira etapa das entrevistas pareceram indicar que o *valor da parcela* constitui-se como principal fator para a tomada de decisão de consumo, em detrimento da análise das taxas de juros. Ao tratar do tema sobre *empréstimos*, descobrimos que os indivíduos-consumidores tem noção das consequências da contratação de um empréstimo, sem, entretanto, dirigirem suas falas detalhadamente para o valor das taxas de juros. As *justificações* referem-se ao caráter prejudicial de contratação de empréstimos que não tenham um objetivo emergencial.

Com relação à *família*, concluímos a partir das *justificações* que esta se constituiu como o primeiro e primordial meio para se efetuar uma educação financeira. Reiteramos que à escola também caberia uma parte dessa educação, ladeada pela família. De acordo com os indivíduos-consumidores, a base familiar, o exemplo na família, juntamente com a instrução escolar pode propiciar a gênese do pensamento financeiro-econômico no indivíduo-consumidor. As entrevistas revelaram ainda que, mesmo tendo passado, em média, 12 anos na escola básica, os indivíduos-consumidores, especialista, ou não em Matemática, fazem uso, para sua tomada de decisão financeiro-econômica, de *Matemática Básica*, em alguns relatos os indivíduos-consumidores justificam que se utilizam tão somente das *quatro operações* e *de intuição* com relação às porcentagens, afim de analisar os prós e os contras de uma ação de consumo, bem como, as taxas de juros envolvidas nestas ações. D'Ambrósio (2010) assevera que, deve caber à escola o papel de promover a criticidade dos alunos em variados cenários, desenvolvendo suas habilidades de materacia, literacia e tecnoracia, o que mudaria o quadro de se utilizar somente as quatro operações para tomadas de decisão.

O *cheque especial* constituiu-se em instrumento financeiro-econômico amplamente utilizado por alguns dos indivíduos-consumidores participantes da investigação, na maior parte das vezes de forma intuitiva, porém sem a devida orientação por parte de quem fornece e, sem o devido *conhecimento* (financeiro-econômico) de quem o utiliza. De acordo com nossa investigação, os indivíduos-consumidores constituíram o cheque especial como objeto, produzindo *significados* matemáticos (juros compostos/altas taxas) e não-matemáticos (empréstimos, dívida, juros abusivos) para este instrumento financeiro-econômico.

As *simulações* apresentadas após as enunciações iniciais dos indivíduos-consumidores, servindo como outra possibilidade de tomada de decisão não enunciada pelo entrevistado, inicialmente, apresentaram-se inéditas para os indivíduos-consumidores. Apesar dessas *simulações* constituírem-se como instrumento de tomada de decisão, reduzindo o que denominamos de *Privilégio de Acesso à Informação (PAI)*, alguns indivíduos-consumidores consideraram-nas como inviável para as práticas e ações de consumo, uma vez que muitos indivíduos-consumidores não são, em geral, educados financeiramente para serem leitores dessas simulações, conforme destacado por Bauman (2008), quando este diz que nos preocupamos em consumir, e pouco em como funcionam os mecanismos que nos propiciam o consumo e suas consequências dessa ação. Por outro lado, constatamos, em algumas entrevistas, que o conhecimento dessas simulações podem mesmo mudar a tomada de decisão ou dar mais uma opção ao indivíduo-consumidor provendo-o de mais informações e direcionamentos para tomar suas decisões. Concluímos, de acordo com Lins (1999), que a *produção de significados* para um dado texto financeiro-econômico influencia significativamente a análise, a constituição de objetos e a tomada de decisão financeira dos indivíduos-consumidores.

Nossa investigação revelou também que, a *taxa de juros* é um item subaproveitado para análise e tomada de decisão, pois apresenta um caráter abstrato de difícil compreensão a médio ou longo prazo (juros compostos), sendo preterida em favor da análise do *valor da parcela*. Assim, asseveramos que, o modelo matemático, presente nas simulações, constituiu-se em objeto de suma relevância para auxiliar o indivíduo-consumidor a analisar e tomar suas decisões, a partir dos significados produzidos por este indivíduo, entretanto, apresenta limitações, uma vez que há algumas variáveis (não-matemáticas) que devem ser levadas em consideração e que não estão explícitas nos modelos matemáticos, como por exemplo a *disciplina* financeira para poupar durante um prazo longo, o *sonho* e *a tradição* de adquirir uma casa própria.

Conclusões

Recordamos que o objetivo de nossa investigação foi investigar o que indivíduos-consumidores (especialistas e não-especialistas em Matemática) falam, que significados produzem e que decisões tomam em suas ações de consumo no cotidiano.

Nossos resultados revelam que não houve uma diferença significativa entre as tomadas de decisão de individuos-consumidores especialistas em matemática e não especialistas em matemática, revelando o uso das quatro operações básicas para tomadas de decisão em situações-problema apresentadas. O texto financeiro-econômico presente nas simulações apresentadas aos indivíduos-consumidores revelou a pouca familiaridade que muito têm com relação a contratos de compras, financiamentos de médio e longo prazo, de modo que a taxa de juros, em geral, em nossa pesquisa revelou-se item subaproveitado. Em contrapartida, o valor da parcela constituiu-se como item decisivo para a aquisição de um dado produto (cultura da parcela).

Entendemos que, os resultados de nossa investigação sinalizam para a problematização na sala de aula de matemática de temas de cunho financeiro-econômico como tema transversal. Essa problematização debe envolver as demais disciplinas de modo a propiciar a gênese de indivíduos-consumidores e cidadãos críticos atuantes nos cenários de consumo do cotidiano.

Embora nossa pesquisa não tenha tido, como local de investigação, a sala de aula de matemática, entendemos que os resultados apontados pela mesma possam auxiliar a prática do professor de matemática, a partir da inserção de *cenários de investigação* (Skovsmose, 2000) com conteúdos financeiros que podem ser abordados de forma crítica. Assim, as conclusões advindas de nossa pesquisa podem servir ao professor de Matemática, na organização e proposição em suas aulas de cenários de investigação (Skovsmose, 2000) que busquem o desenvolvimento da *matemacia financeira-econômica* dos alunos-consumidores. Convergem também para a gênese de diretrizes para uma Educação Matemática Financeira com viés crítico nas práticas em salas de aula de Matemática.

Cabe à Educação Matemática na figura de seus pesquisadores, buscar problematizar o papel da Matemática no contexto social, em geral, e nas escolas, como instituições indissociáveis a essa sociedade. Entendemos e cremos, ao longo de toda a nossa investigação, que alinhavado aos ideais da Educação Matemática Crítica, encontra-se não só desenvolver nos indivíduos- consumidores habilidades de cálculos matemáticos, estratégias formatadas de tomadas de decisão, mas, sobretudo, promover a participação crítica desses indivíduos nas mais variadas esferas de atuação social, refletindo sobre os panoramas financeiro-econômicos e produzindo significados que promovam o entendimento da Matemática, que permeia o *lócus* e as relações sociais e econômicas.

Referências bibliográficas

Baudrillard, J. (2007). *A sociedade de Consumo*. Lisboa: Edições 70.

Bauman, Z. (2008). *Vida para Consumo: a transformação das pessoas em mercadoria*. Rio de Janeiro: Zahar.

D'Ambrósio, U. e Borba, M.C. (2010). Dynamics of change of mathematics education in Brazil and a scenario of current research. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education 42*, 271-279.

Kistemann Jr. M. A. (2011). *Sobre a produção de significados* e *a tomada de decisão de indivíduos-consumidores.* Um published doctoral dissertation. Unesp University,Rio Claro-SP.

Lins, R. C. e Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética* e *álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus.

Skovsmose, O. (2000) Cenários para Investigação. *BOLEMA: Boletim* de *Educação Matemática 14*, 66-91.

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS EN CARRERAS DE GRADO DE INGENIERÍA

Ana María Craveri, María del Carmen Spengler
Universidad Tecnológica Nacional Argentina
craveri@arnet.com.a , mariaspengler@gmail.com

Resumen. El trabajo que se presenta se refiere a la problemática de construir el concepto de 'procesos estocásticos' a partir de conocimientos básicos de probabilidad en el contexto de una clase dirigida a estudiantes universitarios de segundo año de distintas carreras de grado de ingeniería que cursan la materia Probabilidad y Estadística. Se intenta dar una respuesta al problema planteado desde la perspectiva de la Educación Matemática como Ciencia de Diseño poniendo en juego las fases de la Ingeniería Didáctica. Se propone la idea de generar la distribución de Poisson no simplemente como una aproximación a la distribución Binomial, sino directamente a partir de un modelo simple de comportamiento estocástico que se refiere a sucesos distribuidos al azar en el tiempo (o en el espacio). Queda abierta en prospectiva la ampliación de este material didáctico y su evaluación en el marco del Proyecto de Investigación sobre diseño, elaboración y evaluación de materiales didácticos para la Matemática Básica Universitaria que genera este reporte.

Palabras clave: ingeniería didáctica, diseño, procesos estocásticos

Abstract The work presented refers to the problem of constructing the concept of 'stochastic processes' from basic knowledge of probability in the context of a class addressed to second-year university students from different Engineering degrees who attend the Probability and Statistics subject. We try to give an answer to the problem from the perspective of Mathematics Education as a Design Science putting at stake the phases of Didactic Engineering. The idea of creating the Poisson distribution is put forward not simply as an approximation to the Binomial distribution, but directly from a simple model of stochastic behavior which refers to events distributed randomly over time (or space). The extension of this teaching material and its evaluation in the framework of the research project on design, development and evaluation of teaching materials for the Basic University Mathematics that launches this report will be dealt with in the future.

Key words: didactic engineering, design, stochastic processes

Introducción

El estudio de los Procesos Estocásticos está ubicado tradicionalmente entre los últimos capítulos a desarrollar en un curso de Estadística Básica. Requiere que el alumno domine los conceptos de: probabilidad, variables aleatorias y modelos probabilísticos, entre otros, así como también las herramientas de análisis matemático multivariado.

El planteo que nos hacemos, a modo de problema, es: ¿cómo introducir un tema complejo de Estadística Matemática en un curso de Estadística Aplicada para estudiantes de segundo año de Ingeniería de distintas especialidades? ¿Cómo impacta esta forma de abordaje del tema como elemento motivador para la prosecución del estudio de procesos estocásticos complejos?

Al respecto, en las diferentes carreras de Ingeniería, como en una multitud de otros campos disciplinarios, tiene interés el estudio de fenómenos en los que una o más características aleatorias fluctúan a lo largo del tiempo.

El análisis de este tipo de fenómenos aleatorios requiere de modelos estocásticos específicos debido a la existencia de relaciones temporales que ligan los valores de una variable en el instante t con sus valores pasados, así como, en su caso, con los valores pasados o actuales de otras variables.

Nuestra propuesta de abordaje del tema intenta dar una respuesta al problema planteado desde la perspectiva de la Educación Matemática como Ciencia de Diseño. (Wittman, 1995), con la concepción metodológica de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995).

Marco teórico

La educación matemática como ciencia de diseño

Con relación a los materiales didácticos, Wittman propone que los materiales desarrollados por educadores matemáticos deben ser construidos tanto como el conocimiento y facilitar una aproximación interactiva al mismo. En particular los materiales desarrollados deben proveer a docentes y estudiantes, libertad para hacer elecciones por sí mismos. En la realidad, la calidad de esas construcciones depende de la fantasía constructiva de base, del ingenio de los diseñadores y de la evaluación sistemática, tópicos de la ciencia de diseño. (Wittman, 1995)

Este autor propone "experimentos clínicos de enseñanza" en los que los materiales didácticos no sólo son instrumentos, sino objetivo de estudio. Esto ha llevado a una indagación sobre las formas de elección y/o desarrollo, que los constituya en herramientas cognitivas, sobre todo en los cursos masivos donde tiene lugar la enseñanza básica y donde la formación en un aprendizaje autónomo es indispensable.

La necesidad de modelos de análisis del material curricular, que oriente la investigación, hay que entenderla en la triple dimensión de, elaboración, selección y uso de materiales curriculares (Wittman, 1995)

Objetivos

- Aportar una forma de ingresar al estudio de los Procesos Estocásticos aplicando los pasos de la Ingeniería Didáctica
- Diseñar un material curricular adecuado

Metodología

La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación

> La noción de Ingeniería Didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo" (Artigue, 1995, p.33).

En la concepción de la Ingeniería Didáctica, la Didáctica de la Matemática amplía su problemática incluyendo "el conocimiento matemático" entre sus objetivos de estudio y "el proceso de adquisición" de ese conocimiento, como objeto primario de la investigación.

Una característica importante es su consideración de los fenómenos de enseñanza - aprendizaje bajo el enfoque sistémico. Chevallard (1998) describe el "sistema didáctico" en sentido estricto, formado esencialmente por tres subsistemas: "profesor", "alumno" y "saber a enseñar". Artigue describe, esquemáticamente, tres aproximaciones principales a estos objetos de estudio, complementarias entre sí y parcialmente articuladas:

- ❖ Una aproximación "cognitiva" que se ha desarrollado alrededor de los trabajos de Vergnaud en el área de la teoría de los campos conceptuales.
- ❖ Una aproximación a través de los "saberes" que se han desarrollado alrededor de los trabajos de Chevallard (1998) en el área de la teoría de la transposición didáctica, en un principio, antes de extenderse a una aproximación antropológica más global del campo didáctico.
- ❖ Una aproximación a través de las "situaciones" que es finalmente la que ha tenido, sin duda, la influencia más determinante y cuyo padre fundador es G. Brousseau. (Artigue, 1995)

Artigue realiza la descripción de la metodología de la Ingeniería Didáctica por medio de una distinción temporal de su proceso experimental. Delimita este proceso en cuatro fases:

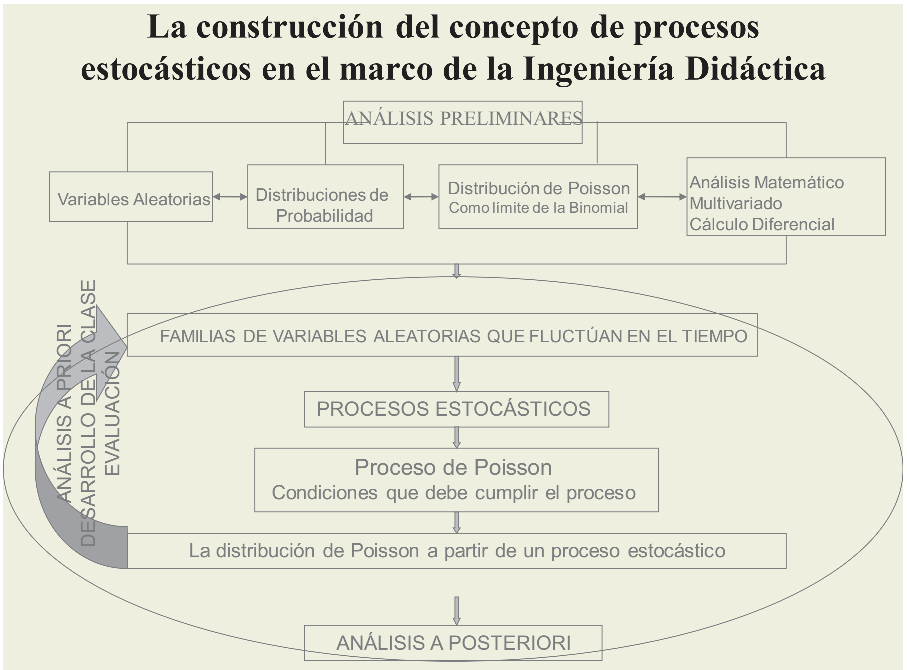
- ❖ La fase 1, referida a los análisis preliminares, está basada no sólo en un "cuadro teórico didáctico general" y en los "conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio" sino también en ciertos análisis que hacen al contexto y refieren a los objetivos específicos de la investigación. Entre los más frecuentes figuran: análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, la enseñanza tradicional y sus efectos, las concepciones, dificultades y obstáculos de los estudiantes en su evolución, el campo de restricciones donde se va a situar la "realización didáctica" efectiva.

- La fase 2 de "concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería" se trata de las decisiones del investigador de actuar sobre un cierto número de "variables de comando" que considera pertinentes con relación al problema en estudio. Refiere a las "selecciones principales" ligadas en su mayoría con el contenido, las "selecciones locales" ligadas a la descripción del proceso de enseñanza presentadas conforme a la teoría de las "situaciones didácticas" (Brousseau, 1981). El objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado.
- La fase 3 de "experimentación", refiere a la puesta en juego de la concepción y análisis a priori y a la obtención de datos provenientes de las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Frecuentemente estos datos se completan con "metodologías externas" como por ejemplo cuestionarios, entrevistas.
- La fase 4 de "análisis a posteriori y evaluación" se refiere a la validación de las hipótesis de investigación formuladas a través de la confrontación que se lleva a cabo entre el "análisis a priori" y el "análisis a posteriori" de los datos recabados en la fase de experimentación (Artigue, 1995).

Los análisis preliminares. La concepción y los análisis previos

Los objetivos de esta presentación hacen a la enseñanza de un contenido específico en un contexto determinado, sin perder de vista que si bien se ha restringido a un tema de Estadística Básica, subyace en ella la característica de la Matemática, como ciencia, de proporcionar formas de pensamiento que permiten extenderse y abordar otros temas. El éxito en la comprensión de un tema es el primer paso para la aprensión de otros conceptos. Es por esto que intentar aproximar respuestas a los interrogantes planteados al inicio de este trabajo, no es un mero problema de organizar contenidos con algún criterio, sino que se trata de "alcanzar una visión estructural del aprendizaje y analizar la significatividad del mismo desde una posición crítico-transformadora" (Sanjurjo, Aebli, Colussi, 1995). El análisis del desarrollo del trabajo áulico tiene su fundamento en el aporte de las llamadas "nuevas teorías" sobre la construcción del conocimiento en el marco de una Didáctica Operativa (Sanjurjo, Aebli, Colussi, 1995).

Si bien en este momento nos focalizamos en las dos primeras fases de la Ingeniería Didáctica la visualización completa de la metodología se sintetiza en el siguiente diagrama



La decisión es plantear el tema a partir del desarrollo del Proceso de Poisson vinculado al concepto de Proceso Estocástico a partir de problemas disparadores, por ejemplo:

> *Se está estudiando un muelle de carga y descarga de camiones (sistema) para determinar la dimensión óptima de una brigada. El muelle tiene espacio sólo para un camión. La llegada de los camiones es aleatoria y las salidas también. El tiempo de servicio es una variable aleatoria que corresponde al tiempo entre dos salidas sucesivas. En este caso el estado del sistema es 'ocupado' o 'no ocupado'*

La resolución de este problema comprende dos etapas distintas:

1) La búsqueda de una ley de probabilidad del sistema
2) La búsqueda o investigación del óptimo económico

Como vemos estos sistema pueden tomar varios 'estados' y las duraciones de estos estados es aleatoria. Para describir matemáticamente el sistema hay que determinar estas leyes de probabilidad.

El tema de la búsqueda del óptimo económico no nos ocupará en este momento.

Se hace necesario introducir la noción de "Proceso estocástico".

Proceso Estocástico

Hemos estudiado funciones de probabilidad de una variable aleatoria, funciones de probabilidad de dos variables aleatorias (Regresión y Correlación), generalizando podemos pensar en funciones de probabilidad de n variables aleatorias.

Pensemos ahora que una secuencia: X_1, X_2------- de variables aleatorias puede también ser tratada como una 'familia de variables aleatorias' X y sus realizaciones son las secuencias (x_1,x_2…). Cuando esta familia de variables aleatorias fluctúa en el tiempo (sus realizaciones son funciones de una variable real t) constituyen los llamados procesos estocásticos. Así por ejemplo:

- ❖ El número de llamadas telefónicas que llegan a un conmutador durante el intervalo de tiempo (0,t), para un t fijado es una variable aleatoria, pero el número de llamadas considerado como una función de t, esto es como una función de la variable t donde t toma valores en un intervalo, es una función aleatoria.

En general simbolizamos un proceso estocástico con: $\{X_t , t \in I\}$; $I \subset R$

Observación: Habitualmente el parámetro t es interpretado cono tiempo, pero puede ser también longitud, superficie, etc.

En este momento nos limitaremos al proceso de Poisson.

Proceso de Poisson.

Condiciones que debe cumplir el proceso.

Primera condición: debe ser un proceso estocástico a *incrementos independientes*, es decir que los sucesos están distribuidos individualmente al azar sobre el intervalo t. En el proceso poissoniano cada aparición es una señal o punto (proceso a señales) cada vez que aparece un valor de X_t es una señal o punto del eje t. Quiere decir que el número de señales en intervalos de tiempo disjuntos deben ser variables aleatorias independientes.

Segunda condición: que el proceso estocástico sea a *incrementos homogéneos* es decir que las señales o puntos están distribuidos *colectivamente* al azar. Con ello queremos expresar, que la probabilidad de que se presente un número determinado de señales va a ser la misma, para intervalos de tiempo de igual longitud.

Tercera condición: debe asegurarse que los suceso (señales) se presenten en forma repentina ó instantánea en intervalos cortos de tiempo pero siempre en forma individual o sea no formando pares o grupos. Esto lo expresamos con dos subcondiciones:

a) Vamos a exigir que la probabilidad de tener una señal en el intervalo pequeño de tiempo de longitud t sea directamente proporcional a la longitud del intervalo.

b) La probabilidad de tener más de una señal durante el intervalo de tiempo t es ε(t) (es decir tiende a cero cuando $t \to 0$)

Sea un proceso estocástico definido por $\{X_t ; 0 \le t \le \infty\}$. Si este proceso verifica las condiciones: primera, segunda y tercera (a y b) y además se cumple que $P(X_0 = 0) = 1$ (es decir la probabilidad de tener 0 punto en el intervalo 0 es 1) este proceso es un proceso homogéneo discreto de Poisson y responde a la siguiente función de probabilidad:

$$P(X_t = i) = P_i(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} \qquad \begin{matrix}(i = 0,1,2\ldots)\\ (\lambda > 0)\end{matrix}$$

Demostración: La probabilidad de tener i puntos en el intervalo de tiempo ampliado (t+Δt), se puede pensar, por ser un proceso a incrementos homogéneos e independientes (es decir cumpliéndose las condiciones primera y segunda) de la siguiente forma:

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t).P_0(\Delta t)$$
$$P_i(t+\Delta t) = P_i(t).P_0(\Delta t) + P_{i-1}(t).P_1(\Delta t) + P_{i-2}(t).P_2(\Delta t) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P_0(t).P_i(\Delta t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{i} P_{i-k}(t) P_k(\Delta t)$$

Escribiremos $P_0(\Delta t)$ y $P_1(\Delta t)$ en otra forma $P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + \varepsilon(\Delta t)$

$\Pr$ (tener más de una señal en Δt)$=1 - P_0(\Delta t) - P_1(\Delta t) \; = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\Delta t) = \varepsilon(\Delta t)$

Donde $\varepsilon(\Delta t)$ es un infinitésimo de orden superior a Δt

De donde: $P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) - \varepsilon(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t - \underbrace{[\varepsilon(\Delta t) + \varepsilon(\Delta t)]}_{\varepsilon\Delta t}$

Luego $P_0(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t - \varepsilon(\Delta t)$

La demostración la haremos primero para $i = 0$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t) = P_0(t)\,[1 - \lambda\Delta t - \varepsilon(\Delta t)]$$

$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda P_0(t)\Delta t - P_0(t)\varepsilon(\Delta t)$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) - P_0(t).\frac{\varepsilon(\Delta t)}{\Delta t}$$

Aplicando límite para $\Delta t \to 0$, tendremos: $P_0^{'}(t) = -\lambda P_0(t)$

Una ecuación diferencial lineal de primer orden, a partir de la cual, resolviéndola obtendremos nuestra incógnita $P_0(t)$:

$$\frac{P_0^{'}(t)}{P_0(t)} = -\lambda \Rightarrow \quad \int \frac{P_0^{'}(t)}{P_0(t)}dt = -\lambda \int dt \Rightarrow \ln P_0(t) = -\lambda t + C$$

Luego: $P_0(0) = e^{-\lambda_0 + C} = 1$ luego C=0 $\quad \Rightarrow \quad P_0(t) = e^{-\lambda t}$ Veremos qué pasa para $i = 1, 2 \ldots$

Volviendo a la primera identidad

$$P_i(t+\Delta t) = \sum_{k=0}^{i} P_{i-k}(t)P_k(\Delta t) = P_i(t)\left[1 - \lambda\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\right] + P_{i-1}(t)\left[\lambda\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\right] + \varepsilon^{'}(\Delta t)$$

En donde $\varepsilon^{'}(\Delta t)$ Es un infinitésimo de orden superior a los infinitésimos de los términos anteriores:

$$P_i(t+\Delta t) - P_i(t) = -\lambda P_i(t) + P_{i-1}(t)\lambda + \frac{\varepsilon(\Delta t)}{\Delta t}\sum_{k=0}^{i} P_k(t)$$

$$P_i^{'}(t) = -\lambda P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t) \qquad (i = 1, 2 \ldots)$$

Resulta así un sistema recurrente de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden a coeficientes constantes.

$$P_i^{'}(t) + \lambda P_i(t) - \lambda P_{i-1}(t) = 0$$

Para resolver esta ecuación diferencial hagamos: $P_i(t) = u(t).v(t)$ (1)

Donde $u(t)$ y $v(t)$ son dos funciones de t desconocidas, donde una de ellas se elegirá en alguna forma que cumpla una restricción:

$$u^{'}(t).v(t) + v^{'}(t).u(t) - \lambda u(t).v(t) - \lambda P_{i-1}(t) = 0$$

$$v\left[u^{'} + \lambda u\right] + v^{'}u - \lambda P_{i-1}(t) = 0 \qquad (2)$$

Elegiremos a u de tal forma que $u^{'} + \lambda u = 0$

$$\begin{aligned} u' &= -\lambda u \\ \frac{u'}{u}\,dt &= -\lambda dt \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{u'}{u}\,dt = -\lambda \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad u = e^{-\lambda t}$$

Reemplazando en (2)

$$\begin{aligned} v' e^{-\lambda t} - \lambda P_{i-1}(t) &= 0 \\ v' &= \lambda P_{i-1}(t).e^{\lambda t} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \int_0^t v'\,dt = \lambda \int_0^t P_{i-1}(t).e^{\lambda t}\,dt$$

Volviendo a (1)

$$P_i(t) = e^{-\lambda t}.\lambda \int_0^t P_{i-1}(t).e^{\lambda t}\,dt \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots$$

La solución es de recurrencia, luego trabajándola, tendremos:

$$P_1(t) = e^{-\lambda t}\lambda \int_0^t P_0(t).e^{\lambda t}\,dt = e^{-\lambda t}\lambda \int_0^t e^{-\lambda t}.e^{\lambda t}\,dt = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^1}{1!}$$

Generalizando, llegamos a que: $P_i(t) = \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}$ $\quad i = 0,1,2\ldots.$ Siendo λ el número medio de señales o puntos en el intervalo unidad, que podemos definir también como *intensidad del proceso.*

Conclusiones

Entendemos que a través de esta presentación se responde al primero de los interrogantes planteados, en lo que hace a la introducción en forma sencilla y asequible al alumno de un tema que, en general, en la bibliografía específica requiere de un mayor dominio de la Teoría de las Probabilidades.

Se impone la necesidad de ampliar el material didáctico sobre los Procesos Estocásticos e instrumentar la evaluación, tanto de los materiales didácticos como de los aprendizajes, con vista a mejorar la construcción de este concepto, actividades que están contempladas en los objetivos del Proyecto de Investigación del que somos parte todos los autores de esta presentación.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59), Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3) 37-127.

Chevallard, Y. (1998) *La Transposición Didáctica*: *del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: AIQUE.

Sanjurjo, L; Aebli, H. y Colussi, G (1995). *Fundamentos psicológicos de una didáctica operativa*. Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Wittman, E. (1995). Mathematics Education as a Design Science. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1) 355-374.

AÇÕES À BUSCA DE RECURSOS PARA A EDUCAÇÃO ESPECIAL DO DEFICIENTE VISUAL EM GEOMETRIA

Ana Maria M. R. Kaleff, Fernanda Malinosky C. da Rosa
Universidade Federal Fluminense, Mestranda em Educação Matemática – UNESP Brasil
anakaleff@vm.uff.br, malinosky20@hotmail.com

Resumo. Apresentam-se ações realizadas no projeto de extensão denominado Vendo com as Mãos, do Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense (UFF). Este projeto tem por objetivo criar recursos didáticos para a educação especial, na forma de materiais concretos e virtuais, e atividades adequadas ao ensino de geometria para alunos do ensino básico com deficiência visual. O projeto interage com a comunidade de alunos e professores, na medida em que na universidade se desenvolve o aparato didático, enquanto que em instituições especializadas este é testado com alunos deficientes, sob a supervisão de um especialista da respectiva instituição.

Palabras clave: geometria, recursos didáticos, deficiência visual

Abstract. I We present actions in an extension project of the Laboratory for Teaching Geometry called Seeing with the Hands, in Fluminense Federal University (UFF). This project aims to create didactic resources for special education, concrete and virtual materials and appropriate activities to the teaching of geometry for elementary school visually impaired students. The project interacts with students and teacher's community in that the University develops the didactic resources, whereas in specialized institutions is tested with visually impaired students, under the expert supervision of the respective institution.

Key words: : geometry, didactic resources, visually impaired students

Introducción

Apresentando o LEG e o projeto

Desde 2008, grande parte das ações realizadas no Laboratório de Ensino de Geometria (LEG), localizado no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense (UFF), estão voltadas para a preparação profissional do licenciando em Matemática com vistas a instrumentalizá-lo para o ensino de alunos com algum tipo de deficiência, pois se busca adequar o futuro profissional às necessidades da educação especial e inclusiva.

Nessa direção, iniciou-se um projeto de extensão, no âmbito do projeto *Desenvolvimento de Atividades para Ampliação do Acervo Didático do Laboratório de Ensino de Geometria*, vinculado à Pró-Reitoria de Extensão (PROEX/UFF), denominado *Vendo com as Mãos.* Esse projeto tem por objetivo desenvolver recursos didáticos especiais de baixo custo destinados a alunos com deficiência visual. Os recursos criados ou adaptados, a partir dos existentes no LEG, estão sendo testados em duas instituições localizadas no Rio de Janeiro. Durante os dois primeiros anos do projeto, foram testados com professores (cegos, de baixa visão e com visão normal) e alunos do ensino básico da escola especializada nesse tipo de deficiência do Instituto Benjamin

Constant (IBC). A partir de 2011, estão sendo alvo da testagem os alunos deficientes visuais do ensino médio de classes regulares do Colégio Pedro II – Unidade São Cristóvão (CPII).

A equipe do projeto é formada por professores e licenciandos da UFF e a interação na instituição especializada tem a importante e imprescindível participação voluntária de uma professora especialista pertencente ao quadro da respectiva instituição.

O objetivo central da equipe do LEG é a criação de materiais e métodos didáticos adequados ao desenvolvimento de habilidades geométricas de alunos da escola básica (incluindo os que possuem alguma deficiência, principalmente, deficientes visuais), licenciandos e docentes em formação continuada. No ambiente desse laboratório, visa-se à melhoria do ensino da Geometria, a uma melhor preparação do profissional e à inclusão de alunos deficientes em escolas regulares.

Com tal objetivo, tem sido criado um acervo de recursos didáticos, do qual fazem parte diversos tipos de artefatos manipulativos concretos e eletrônicos interativos, para os quais são desenvolvidas atividades didáticas especialmente direcionadas ao manuseio e à interatividade. O acervo didático adaptado para a educação inclusiva do aluno deficiente visual também inclui artefatos e atividades para serem apresentados em mostras do tipo Museu Interativo. Para tanto, os artefatos do atual acervo estão sendo adaptados por meio da utilização de materiais apropriados à percepção táctil, os quais envolvem diversas texturas. Além disso, como os projetos do LEG visam à democratização do conhecimento desenvolvido na UFF e levam em conta o baixo poder aquisitivo de grande parte dos professores da escola básica, os artefatos didáticos concretos são construídos a partir de materiais de sucata ou de baixo custo, comumente encontrados no comércio. Utilizam-se entre outros papeis, papelões e emborrachados planos de diversos tipos e espessuras; vários acetatos e aglomerados de madeira; canudos; linhas variadas. Também se desenvolvem atividades a partir de brinquedos e materiais didáticos encontrados no mercado ou descritos em livros-texto, tais como jogos de encaixe do tipo quebra-cabeça, blocos lógicos, material dourado, vários tipos de tangram etc.

Entre os artefatos manipuláveis estão diversos tipos especiais de quebra-cabeças geométricos planos e jogos artísticos baseados em gravuras do artista holandês Maurits Cornelis Escher. Além disso, tem-se um mosaico de encaixe, pranchas dinâmicas para a representação de polígonos equivalentes, aparelhos especiais de medição de comprimento e de área; modelos de poliedros articulados e de esqueletos de poliedros regulares, vários ábacos, entre outros. Foram também criados diversos tabuleiros planos de encaixe, com recursos em baixo relevo, tanto para a realização de quebra-cabeças que permitem descobrir a generalização da relação algébrica do Teorema de Pitágoras, como para os jogos artísticos citados anteriormente

(Kaleff, Dornas, Votto, & Rosa, 2010). Alguns dos materiais e atividades podem ser encontrados no site do projeto Conteúdos Digitais para o Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística (CDME/UFF) (Ministério da Educação - Ministério da Ciência e Tecnologia, 2010).

Com o desenvolvimento dos recursos didáticos especiais para serem utilizados por deficientes visuais, as atividades relacionadas a cada um deles foram transcritas para o sistema Braille e, para possibilitar o uso do computador nas atividades, também foi utilizado o programa computacional livre e gratuito que transforma a informação gráfica para sonora, através do uso de síntese de voz para reprodução dos textos: o programa DOSVOX desenvolvido na Universidade Federal do Rio de Janeiro por Antônio José Borges (Borges, 1986).

A fundamentação teórica dos recursos didáticos são os princípios educacionais apresentados nas Adaptações Curriculares (Ministério de Educação - Secretaria de Educação Especial, 1998) e nos próprios Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da Geometria para as séries do Ensino Fundamental e do médio (Ministério de Educação - Secretaria de Educação Média, 1999). Com vistas ao desenvolvimento da habilidade da visualização, recorre-se também à teoria conhecida como Modelo de van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico (Van Hiele, 1986). No entanto, salienta-se que as principais fontes de referência voltadas para o deficiente visual têm sido os artigos publicados na página da internet do IBC, bem como aqueles divulgados na Revista Benjamin Constant (Barbosa, 2003; Santin & Simmons, 1996; Kaleff & Rosa, 2012; Brandão, 2009; Cerqueira & Ferreira, 1996).

Alguns tópicos de ensino e o seu respectivo material adaptado

Os artefatos manipuláveis apresentados a seguir fazem parte de atividades aplicadas, de acordo com um cronograma, a alunos deficientes visuais do Ensino Fundamental, com idades entre nove e 16 anos do IBC, e do Ensino Médio, com idades entre 15 e 20 anos, do CPII. As sessões duram em torno de duas horas e são ministradas por bolsitas do LEG sob a supervisão de uma professora especialista da instituição. Para conhecer melhor as atividades aqui mencionadas e saber mais informações, veja o site www.uff.br/cdme.

Sob a temática Simetria e Interdisciplinaridade, relacionando a Matemática com as Artes, o LEG possui a atividade denominada Jogos Artísticos Geométricos, cujo material é composto por um tabuleiro formado por uma prancha de papelão do tipo Paraná, recoberta com plástico adesivo com detalhes em acetato e linha, o qual serve como base para um jogo de encaixe denominado Mosaico dos Lagartos. As peças do jogo, com forma de um lagarto, são confeccionadas com emborrachado de diferentes cores e texturas para que possam ser utilizadas por alunos que enxergam ou cegos.

Para trabalhar com Áreas e Semelhança, Polígonos Equivalentes e figuras geométricas planas, há a atividade dos Tangrans Geométricos Especiais que em seu conjunto de materiais manipuláveis para os deficientes consta uma prancha de apoio para cada jogo, a qual é recoberta por uma placa de emborrachado (com cerca de 1 cm de espessura), na qual se encontra uma forma vazada em baixo relevo.

Cabe ressaltar que cada prancha é acompanhada pelo conjunto de peças do mesmo material do respectivo jogo. A partir de 2011, buscando tornar o uso desses tangrans ainda mais acessível ao bolso do professor e do deficiente, foram confeccionadas pranchas sobre tecido plástico, do tipo empregado na confecção de banner, e, com o auxilio de um fio de barbante colorido ou de nylon se costuraram diferentes formas para também serem utilizadas como delimitadoras do espaço e da figura a ser montada com as peças do quebra-cabeça. Para a realização das atividades.

Ainda sob a mesma temática, o LEG possui o Artefato Modelador de Paralelogramos e de Triângulos Equivalentes, cujo material é confeccionado a partir da adaptação de uma chapa utilizada como piso plástico em áreas molhadas e com canudos rígidos, elásticos, acetato e chumbos utilizados em pescaria.

Para ensinar a relação algébrica do Teorema de Pitágoras e suas generalizações contamos com o material denominado Tangrans Pitagóricos que é composto por quatro tabuleiros, sendo o Tangram Pitagórico com Quadrados; o Tangram Pitagórico com Triângulos, o com Paralelogramos e o com Retângulos, estes três permitem se chegar a generalização do teorema para outras formas além da do quadrado. As peças dos jogos são confeccionadas com material emborrachado com texturas diversas para diferenciar as cores. Os tabuleiros são confeccionados com o mesmo tipo de emborrachado, nos quais são vazadas, em baixo relevo, as formas das peças a serem posicionadas.

O ticômetro e a trena táctil são instrumentos criados com materiais de baixo custo para facilitar pessoas que enxergam ou cegos em atividades que envolvem medidas do comprimento. O primeiro instrumento é confeccionado com partes de sucata de uma roda de bicicleta, na qual foi adaptada uma placa de metal, que permite produzir o som de um "tic" a cada giro da roda e objetiva medir distâncias por meio do uso do som. Já o segundo foi criado a partir de uma trena plástica flexível obtida pela adaptação de furos e pontos em relevo às demarcações usuais (de centímetros e metros) da trena (Kaleff & Rosa, 2011).

Para favorecer o aprendizado sobre Volume de Poliedros, há a atividade denominada Poliedros de Platão e seus duais na qual foram criados diversos modelos de planificações dos sólidos com madeira, papelões e emborrachados com texturas variadas, os quais permitem obter modelos que representam a superfície dos poliedros. Foram confeccionados, também, por meio de canudos e fios, modelos que representam as arestas do , cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro regulares, bem como de alguns de seus poliedros inscritos e duais. As diferentes cores dos canudos sofreram adaptações para serem percebidas pelo deficiente visual, por meio de diferentes texturas.

Considerações finais

Cabe ressaltar que, a troca de experiências com profissionais especializados e com professores deficientes visuais tem sido muito importante para a equipe do projeto, pois durante as testagens dos materiais são sugeridas várias modificações do material elaborado e das atividades para o aluno, as quais são incorporadas aos experimentos.

As aplicações e testagens dos experimentos apresentados têm mostrado que eles efetivamente auxiliam o educando vidente e o deficiente visual na construção de seu conhecimento e no desenvolvimento da habilidade da visualização de determinados conceitos geométricos. As aplicações das atividades, de uma maneira geral, são enriquecedoras, tanto para a equipe do LEG quanto para os alunos e professores das duas escolas envolvidas no projeto. Pois, durante e após as sessões experimentais, sempre surgem manifestações de reconhecimento da potencialidade didática das atividades e sobre a importância de envolverem artefatos confeccionados com materiais de baixo custo, o que, ao ver dos professores, viabiliza a sua implementação na escola.

Referências bibliográficas

Barbosa, P.(2003). O estudo da Geometria. *Revista Benjamin Constant*, 08-15.

Borges, J. (1986). DOSVOX - Um novo acesso dos cegos a cultura e ao trabalho. *Revista Benjamin Constant*, 24-29.

Brandão, J. (2009). A matemática por trás da orientação e mobilidade. *Revista Benjamin Constant*, 03-08.

Ministério de Educação - Secretaria de Educação Especial. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais. Adaptações Curriculares.* Ministerio de Educação, Secretaria de Educação Especial, Brasilia.

Ministério de Educação - Secretaria de Educação Média e Tecnologia. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio v. 02.* Ministerio de Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnologia, Brasilia.

Ministério de Educação - Secretaria de Educação Média. (1999). *Parâmetros Curriculares nacionais - Ensino Médio.* Ministerio de Educação, Secretaria de Educação Média, Brasília.

Ministério da Educação. Ministério da Ciência e Tecnologia. (2010). *Conteúdos Digitais para o Ensino* e *Aprendizagem de Matemática* e *Estatística*. Brasília: MEC. Acesso em 12 de set de 2012, disponível em Conteúdos Digitais para o Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística: www.uff.br/cdme

Cerqueira, J., & Ferreira, E. (1996). Os recursos didáticos na educação especial. *Revista Benjamin Constant*, 11-16.

Kaleff, A., & Rosa, F. (2011). Produtos educacionais para o ensino de deficientes visuais: instrumentos para medição de comprimento e de área. *III Colóquio de Educação Matemática*, (pp. 1-10). Juiz de Fora-MG.

Kaleff, A., & Rosa, F. (2012). Buscando a Educação Inclusiva em Geometria. *Revista Benjamin Constant*, 22-33.

Kaleff, A., Dornas, R., Votto, B., & Rosa, F. (2010). O museu interativo de matemática como uma ferramenta para a democratização da matemática com vistas à educação inclusiva. *Educação Matemática em Revista, 11* (2), 83-91.

Santin, S., & Simmons, J. (1996). Problemas das crianças portadoras de deficiência visual congênita na construção da realidade. *Revista Benjamin Constant*, 07-11.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: a Theory of Mathematics Education.* Orlando: Academic Press.

RESOLUÇÃO DE ATIVIDADE DE INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA POR ALUNA CONSIDERADA COM NECESSIDADES EDUCACIONAIS ESPECIAIS EM SALA DE 7ª SÉRIE DO ENSINO REGULAR

Ronaldo Sovenil de Oliveira; Maria Helena Palma de Oliveira
Universidade Bandeirante de São Paulo, Brasil
rsovenil@hotmail.com; mhelenapalma@gmail.com

Resumo. Este trabalho propõe-se a descrever e discutir o desempenho de uma aluna de 7ª série do ensino regular de escola pública estadual na resolução de duas atividades de introdução à álgebra. Essa aluna consta no sistema da Secretaria e Educação de São Paulo como deficiente intelectual leve e por isso considerada com necessidades educacionais especiais. As atividades foram realizadas em contexto de sala de aula e envolveram todos os alunos que também foram avaliados em relação ao desempenho nas mesmas atividades. A aluna apresentou respostas pertinentes ao campo matemático e um raciocínio compatível com a solicitação feita, expressando conceitos e teoremas, mais ou menos explícitos, que evidenciam que seu desempenho está dentro do padrão de toda a sala. É possível considerar que a aluna tem significativo potencial de aprendizagem e de desenvolvimento em matemática e que o processo de inclusão no ensino regular é positivo.

Palavras chave: matemática, incluso, introdução à álgebra, ensino fundamental

Abstract. This study aims to describe and discuss the performance of a student with standard 7th grade public school education in the solution of two introductory level algebraic activities. This student appears to be intellectually deficient in São Paulo's Department of Education, therefore this student meets special educational needs. The activities were performed in the context of the classroom and all the students involved were also assessed relative to performance in the same activities. The student presents relevant responses to the mathematical field and reasoning compatible with the request made, expressing concepts and theorems, more or less explicit, which show that her performance is within the standard of the whole room. One may consider that the student has significant potential for learning and development in mathematics and that the process of inclusion in regular education is positive.

Key words: mathematics, inclusion, introduction to algebra, elementary school

Introdução

O movimento pelos direitos de tratamento em igualdade remonta à Declaração dos Direitos Humanos de 1948, promulgada pela ONU (Organização das Nações Unidas). A própria ONU estabelece os direitos das crianças em 1950 e, em 1975, os direitos das pessoas com necessidades especiais. No Brasil, a inclusão escolar de alunos com necessidades educacionais especiais toma força no final da década de 1980 e inicio dos anos de 1990. Levado por uma tendência mundial, inicia-se um movimento pelo acolhimento de todos no ensino regular. Esse movimento, iniciado já em outros países, gera uma série de documentos que buscam garantir o direito à educação de todos, preferencialmente, nas redes de ensino, em salas de aula regulares.

A chegada de alunos com necessidades educacionais especiais na rede regular de ensino levantou diversos questionamentos por parte principalmente dos professores que devem receber diretamente esses alunos, tais como: Esses alunos conseguem aprender aqui? Como podemos ensiná-los? Preciso ser especialista na deficiência do aluno? É possível atender individualmente esse aluno numa sala comum com mais de 40 alunos?

Sem dúvida, os limites deste estudo não permitem dar respostas para questões tão fundamentais. Restringimo-nos a mostrar as possibilidades que o processo de inclusão em sala de aula regular pode trazer quando se toma em consideração o planejamento da atividade e o potencial de interação nas atividades de ensino e aprendizagem nesse espaço. Acerca da inclusão escolar, Rosseto (2005, p.42) destaca:

> A inclusão é um programa a ser instalado no estabelecimento de ensino a longo prazo. Não corresponde a simples transferência de alunos de uma escola especial para uma escola regular, de um professor especializado para um professor de ensino regular. O programa de inclusão vai impulsionar a escola para uma reorganização. A escola necessitará ser diversificada o suficiente para que possa maximizar as oportunidades de aprendizagem dos alunos com necessidades educacionais educativas especiais.

Os conceitos de inclusão, inserção e integração social (ou escolar) têm sido muitas vezes usados como sinônimos, mas Rossit (2003) propõe a discussão desses termos que trazem diferenças em seus significados e nas práticas que denominam. Para ela inserção significa colocar alunos com necessidades educacionais especiais em um ambiente sem garantia de aceitabilidade ou de adaptação. Inclusão significa envolver. O ambiente e as pessoas é que devem ser preparadas e conscientizadas para receber esses alunos e a mudança deve ser gradativa, planejada e implementada com cautela. Integração significa fazer parte e expressa a condição de se ter espaço garantido na sociedade pela receptividade e aceitabilidade sem discriminação e preconceito.

Referencial teórico

Um dos maiores defensores da educação dos "deficientes" em escolas regulares foi Lev Vygotski (1997) propôs a derrubada dos muros das escolas especiais. Ele justifica com a premissa central de seus estudos científicos sobre defectologia, de que a mesma lei que rege o desenvolvimento das crianças normais também rege o desenvolvimento das crianças com deficiência mental.

No período dos estudos de Vigotski "o termo 'defectologia' era tradicionalmente usado para a ciência que estudava as crianças com vários tipos de problemas ("defeitos") mentais e físicos" (Valsiner, & Veer, 1996, p. 73).

A tese central desses estudos de Vigotski era a de que qualquer tratamento psicológico ou pedagógico em uma criança com "defeito" deveria dar ênfase às potencialidades da normalidade e não nas deficiências, pois estas não retiram do indivíduo a capacidade de aprender (Vygotski, 1997). Vigotski utiliza o termo compensação para o esforço feito por pessoas com "defeito" no sentido de compensar suas dificuldades. Essa compensação não tem um caráter físico ou biológico, mas psicológico e social. Essa visão opõe-se ao modelo "clinico" de educação dos anos 1960, que propunha "curar" o aluno com necessidades especiais no lugar de ajudá-lo a superar suas dificuldades por meio da compensação.

Os educadores devem dar ênfase às potencialidades dos educandos e não procurar corrigir seus "defeitos". Vigotsky (2007) nos traz o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) como uma região situada entre o que a criança sabe fazer sozinha e o que ela pode aprender com a ajuda de alguém mais experiente. Essa é uma proposta de abordagem pedagógica em que o foco da aprendizagem aponta para "frente" para o que o aluno pode aprender, ou seja, para suas potencialidades e não no que o aluno já aprendeu e sabe fazer sozinho. Deixa-se de lado as dificuldades, as limitações e trabalha-se com as possibilidades a serem exploradas, pois, para Vigotski, todo defeito gera estímulos para outras aprendizagens: a compensação. Todo aluno sempre aprende mais quando é desafiado e munido de ferramentas e quando pode contar com o processo mediação do conhecimento com pessoas que sabem mais. Um aluno com deficiência não consegue compensar sozinho sua deficiência, então é preciso criar um ambiente social favorável em que ele possa receber estímulos adequados ao seu aprendizado e desenvolvimento. Ação sobre as potencialidades, cria novas zonas de desenvolvimento, o aluno aprende, avança e "compensa" as dificuldades encontradas.

Para a análise mais específica das atividades matemáticas propostas, buscamos como referencial a Teoria dos Campos Conceituas do francês Gerard Vergnaud que define: "A teoria dos campos conceptuais é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios da base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, nomeadamente daquelas que revelam das ciências e das técnicas" (Vergnaud, 1996, p. 155). Para Vergnaud, essa teoria interessa à didática porque proporciona subsídios a análise da aprendizagem, mas que não é por si só uma teoria didática. Nesse sentido, a teoria busca apresentar as ideias de filiação e rupturas entre os conhecimentos em crianças e adolescentes.

A teoria dos campos conceituais não é exclusiva do campo matemático, embora tenha surgido para explicar os processos de conceituação das estruturas aditivas e multiplicativas, das relações números-espaço, da álgebra. (Vergnaud, 1996)

É fundamental que a aprendizagem aconteça por meio de uma situação de atividade e ela passa necessariamente pela análise dos erros e de todo o processo de desenvolvimento de cada uma das etapas da atividade proposta. Esse processo culmina em uma nova forma de organização da atividade.

Para Vergnaud (2009b, p.21) "o esquema é uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dadas". O conceito de esquema pode ser abrangente, mas ao mesmo tempo limitado. Em um esquema, a organização é invariável, mas a conduta observável pode ser variável em função das variações das diferentes situações. As regras dentro de um esquema é que o tornam invariável frente a qualquer situação em que seja aplicável. O esquema tem um objetivo próprio dentro de uma situação e subobjetivos que são sequenciados em cadeia de acordo com sua importância, de modo a atingir um único objetivo final.

Método

Faremos uma análise qualitativa descritiva de duas atividades de introdução à álgebra, de um total de 8, que foram aplicadas entre maio e outubro de 2011 e que constam do material didático oficial da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo e fazem parte dos instrumentos de coleta de dados de pesquisa mais ampla (Oliveira, 2012). As atividades foram aplicadas em uma sala de 7ª série do Ensino Fundamental a todos os alunos e teve como foco de observação o desempenho de dois alunos com necessidades educacionais especiais. As respostas aqui analisadas são da aluna Marta (pseudônimo) que tem laudo médico que a classifica como deficiente mental leve. Ela já frequentou sala especial nas séries iniciais.

Considerando o pressuposto teórico de Vigotski no entendimento das relações entre os processos de aprendizagem e desenvolvimento e os conceitos de *Zona de Desenvolvimento Proximal* e de *Compensação,* (Vygotski, 1997), buscamos trabalhar uma sequência de atividades com nível de dificuldades crescente. As atividades foram aplicadas alternando sempre individual e em duplas buscando também interação entre alunos que sabiam mais com os que sabiam menos. Ao final de cada atividade proposta, existia sempre discussão na qual o professor colocava no quadro e discutia com todos alunos as principais dificuldades apresentadas da atividade em questão. Consideramos a mediação professor/aluno e alunos/alunos fundamental na aprendizagem e desenvolvimento.

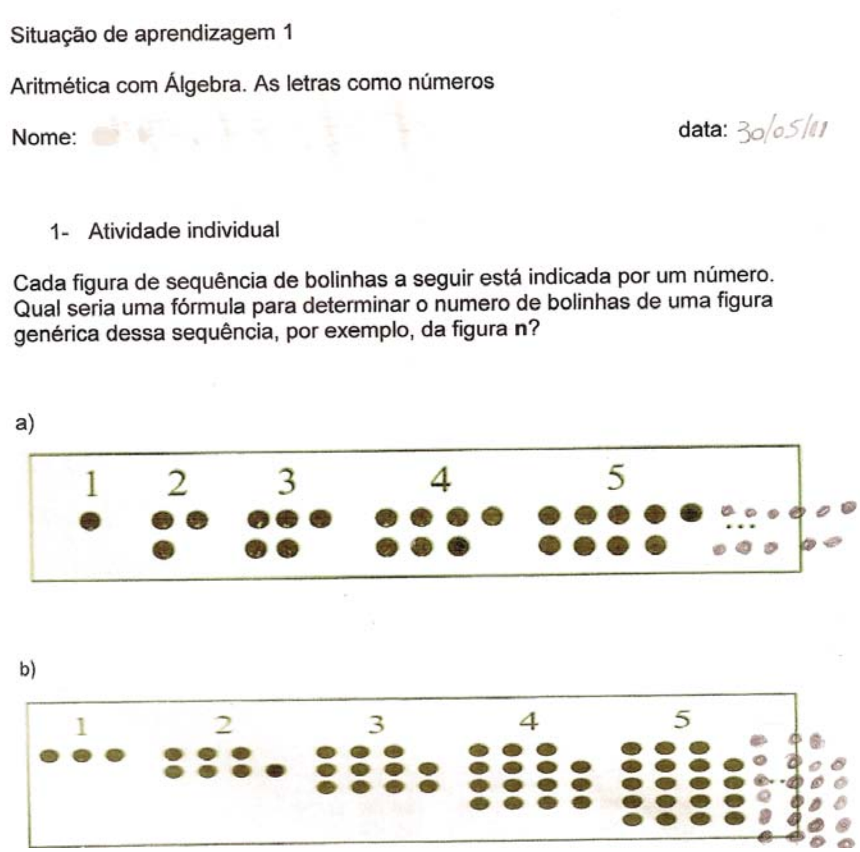
Nas análises das respostas às atividades, partimos da consideração de Vergnaud (1996) para esquema, conceitos e teoremas em ação, a fim de situarmos o nível de desenvolvimento da aluna, bem como mostrar suas potencialidades na aprendizagem de matemática.

Análise das respostas nas atividades

Apresentamos a seguir as respostas apresentadas por Marta para duas atividades (1 e 7) que são foco deste estudo. Essas respostas permitem observar as tentativas da aluna na resolução das atividades.

Atividade 1

Nessa atividade individual, cada aluno deveria encontrar uma fórmula matemática que permitisse calcular, para cada uma das três sequências de figuras formadas por bolinhas, o total de bolinhas formado por uma figura em uma posição *n*.



Situação de aprendizagem 1

Aritmética com Álgebra. As letras como números

Nome: data: 30/05/11

1- Atividade individual

Cada figura de sequência de bolinhas a seguir está indicada por um número. Qual seria uma fórmula para determinar o numero de bolinhas de uma figura genérica dessa sequência, por exemplo, da figura **n**?

a)

b)

Figura 1. Respostas de Marta para Atividade 1 (Oliveira, 2012, p. 100)

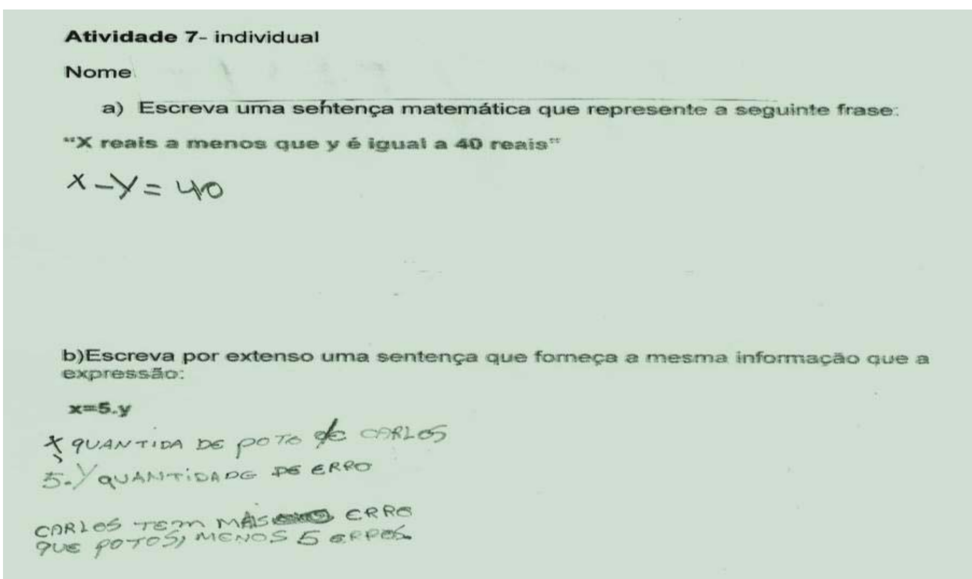
A figura 1 permite observar que Marta representou corretamente a próxima figura nas duas sequências por meio de desenhos de bolinhas, mostrando um entendimento claro da própria evolução dessas sequências. Embora a aluna não tenha encontrado uma fórmula matemática, fica evidente um conceito-em–ação. Ela apresentou um "conhecimento racional operatório" em uma situação na qual não dispunha, no momento de todas as competências necessárias. (Vergnaud, 1996, p. 156).

Pelos padrões escolares, o esquema mobilizado por Marta não seria considerado e sua resposta nessa atividade, assim, seria considerada um erro. A vivência escolar nos diz que essa resposta de Marta, sequer seria considerada como acerto parcial. "Em geral, o erro é execrado, e o aluno teme a reação do professor se não consegue dar a resposta certa" (Cury, 2008, p. 91). Não devemos execrar os erros, muito menos uma representação pertinente como à demonstrada por Marta.

Na análise das atividades dos alunos, não devemos considerar somente o produto final, pois "a performance é radicalmente insuficiente para compreender e definir competência" (Vergnaud 2009b, p. 17). No caso, embora não tenha explicitado algebricamente por meio de uma fórmula matemática, Marta representou o próximo termo da sequência por meio de uma expressão. Esse procedimento revela o domínio de um esquema, pois podemos perceber uma organização invariante da atividade, evidenciando um processo de conceito em ação (Vergnaud, 1996).

Atividade 7

Nessa atividade, como mostram as duas questões da figura 2, trouxeram como desafio alguns aspectos relacionados com a leitura, interpretação e transcrição do problema para uma linguagem algébrica.


Atividade 7- individual

Nome

a) Escreva uma sentença matemática que represente a seguinte frase:

"X reais a menos que y é igual a 40 reais"

X – Y = 40

b)Escreva por extenso uma sentença que forneça a mesma informação que a expressão:

x=5.y

X QUANTIDA DE POTO ~~de~~ CARLOS
5.Y QUANTIDADE DE ERRO

CARLOS TEM MÁIS ERRO QUE POTOS; MENOS 5 ERROS

Figura 2. Respostas de Marta para Atividade 7 (Oliveira, 2012, p.107)

No item *a* dessa atividade, a aluna apresentou uma resposta que é comum até para alunos universitários conforme a análise *a priori* da mesma atividade feita pela Secretaria da Educação de São Paulo (São Paulo, 2009), para o fato de o aluno escrever (x-y=40) quando o correto seria (y-x=40).

No item *b*, Marta chamou a incógnita "X de quantidade de pontos ('poto') de Carlos" e escreveu que ele tem "5.Y a quantidade de erro", o que está correto. Y é definido por ela como erros. Logo abaixo, ela escreve que "Carlos tem mais erros que pontos ('potos')", menos 5 erros". Parece-nos que ela tentou demonstrar que se X fosse considerado como pontos e Y, erros, então, segundo a fórmula X=5Y, Carlos teria mais erros que pontos. Muitos alunos, quando se deparam com certas equações, isolam parte de dela, aqui no caso 5Y, afirmam que este Y é maior que o X do outro lado do membro. Esse tipo de erro foi mostrado na análise a priori dessa atividade feita pela Secretaria da Educação de São Paulo (São Paulo, 2009). Embora Marta tenha invertido a relação entre os membros no primeiro item dessa atividade, ela revelou que tem conhecimento da existência direta dessa relação. Esse conhecimento permite avaliar suas potencialidades para avançar na aprendizagem (Vigotsky, 2007). Cabe ainda destacar a evolução dessa aluna na atividade, pois no item "a" expressa uma linguagem algébrica por meio de fórmula matemática e no item "b" utiliza-se da língua materna para expressar sua resposta. Além de Marta, mais 14 alunos deram respostas semelhantes.

Ocorreu na resolução o domínio de um esquema, que embora não tenha dado conta de uma resposta esperada, demonstrou um processo de raciocínio matemático pertinente à própria matemática. Vergnaud (1996, p.160) afirma: "a observação dos alunos em situação de resolução de problemas, a análise de suas hesitações e dos seus erros, mostra que as condutas em situações abertas são igualmente estruturadas por esquemas" e conclui: "Este provém de um vasto repertório de esquemas disponíveis". A possibilidade de se considerar o desenvolvimento em processo (o espaço entre o desenvolvimento retrospectivo e o prospectivo) torna possível a aprendizagem (Vigotsky, 2007).

Acerca dos erros cometidos durante as tentativas de resolução, inerentes a todo processo de aprendizagem, concordamos com Tymockzo (1986), citada por Cury (1994, p. 235), quando defende uma filosofia pública da matemática em que "os erros, então, não seriam considerados um 'abandono da verdade', mas uma possibilidade de se superarem as dificuldades". Toda representação que mostre aspectos reais do campo matemático deve ser considerada pelo professor de matemática. Vergnaud (2009a, p.304) escreve "dissemos antes que a representação não podia ser funcional a não ser que ela refletisse certos aspectos da realidade e se ela permitisse ao pensamento operar sobre os significados e significantes". Cury (2008, p. 13) nos alerta que os erros podem demonstrar muito sobre o que o aluno já sabe. "Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam o que ele não sabe?”. Essa mesma autora ainda nos propõe a possibilidade de se trabalhar a partir dos erros dos alunos como forma de superar as dificuldades dos alunos em matemática.

No que se refere ao desempenho da aluna em relação aos alunos de sua sala de aula, na Atividade 1 (17 alunos participaram dessa atividade), apenas Marta e mais um aluno obtiveram acerto parcial, os demais entregaram a atividade em branco ou erraram. Na Atividade 7 (participaram 18 alunos), Marta e mais 14 alunos obtiveram acerto parcial, um aluno acertou e 2 alunos erraram a resolução do problema proposto (Oliveira, 2012).

Os resultados obtidos por Marta permitem afirmar que a aluna apresentou um desempenho satisfatório e dentro dos padrões da sala em que está inserida. A análise comparativa do desempenho mostra o mesmo para as demais atividades aplicadas (total de 8) durante a pesquisa. A exposição desses dados foge ao escopo deste trabalho.

Considerações finais

Como Comênio (1592-1670) que já afirmava no século XVI que todo sujeito, não importando seu grau de deficiência, poderia se beneficiar da cultura e da educação, acreditamos que alunos com necessidades educacionais especiais podem ser incluídos em salas de aulas regulares para poderem se apropriar dos saberes escolares oferecidos a outros considerados “normais”. Quando falamos de inclusão escolar, não falamos como a obrigação de cumprir leis que garantam o ingresso desses alunos na rede regular de ensino para apenas se socializarem com o ambiente ou com os demais alunos e sim como alunos que podem e devem receber, pelo menos, a mesma atenção para que possam aprender. Com Vigotski, acreditamos que o melhor método para a aprendizagem e desenvolvimento é aquele que tem por princípios a troca e a interação entre pessoas com diferentes níveis de desenvolvimento, tendo o professor como mediador e a consideração das potencialidades de quem aprende.

Cabe considerar que a aluna Marta atingiu o desempenho relatado com os mesmos recursos didáticos, materiais e metodológicos utilizados para os demais alunos da classe. Houve o cuidado de não utilizar materiais e processos diferenciados, bem como trabalho com conteúdo de séries menores que poderiam revelar tanto discriminação quanto uma nova forma de segregação dentro da sala. Deve-se caminhar para além da inclusão, na busca da integração que se faz envolvendo o aluno com necessidades especiais nas mesmas atividades dos demais alunos.

Foi possível evidenciar que a aluna Marta, considerada com necessidades educacionais especiais pela escola, apresentou respostas que expressam conceitos e teoremas, mais ou menos explícitos, que revelam desempenho nas atividades propostas dentro do padrão de toda a sala. A aluna demonstrou um grande potencial de aprendizagem, confirmando que o processo de inclusão pode ser positivo. Concordamos com Moreira (2002) ao afirmar que se existem teoremas e conceito-em-ação, que ainda estão implícitos, então o professor mediador pode ajudar seus alunos a desenvolverem repertório de esquemas e representações. O desenvolvimento evidenciou-se nas respostas da aluna e demonstrou a importância de um trabalho baseado em sequência de atividades que desafiem o potencial de aprendizagem do aluno.

Referências bibliográficas

Cury, H. N. (2008). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* Belo Horizonte: Autentica.

Cury, H. N. (1994). *As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos*. Tese de Doutorado não publicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre-RS, Brasil.

Moreira, M. A. (2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud. In: *Investigações em Ensino de Ciências, 7(1*), 7-29.

Oliveira, R. S. (2012). *Introdução à álgebra para alunos de sétima série com necessidades educacionais especiais em sala de aula regular*. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

Rossit, R. S. (2003). Educação especial e o direito à cidadania. In: J. P., Martins e E. G., Castellano (Org.), *Educação para a cidadania*, São Carlos, SP: EdufSCar/EDUNICEP.

Rosseto, M. C. (2005). Falar de inclusão. Falar de que sujeitos? In: Lebedeff, T. B. Pereira, I. L. e S. *Educação especial - olhares interdisciplinares*. Passo Fundo: UPF Editora, p. 41-55.

São Paulo, Secretaria Estadual de Educação. (2009). *Caderno do professor*. Matemática, ensino fundamental- 7ª série. São Paulo: SEE.

Valsiner, J., & Veer, R. V. D. (1996). *Vygotsky uma síntese.* São Paulo: Edições Loyola.

Vergnaud, G. (1996). *A* Teoria dos Campos Conceituais. In: J. Brun (Ed.), *Didáctica das Matemáticas, (*pp.155-191). Lisboa: Instituto Piaget.

Vergnaud, G. (2009a). *A criança, a matemática* e *a realidade:* problemas do ensino da matemática na escola. Curitiba: Ed. da UFPR.

Vergnaud, G. (2009b). O que é aprender? In: Bittar, M. e Muniz, C. A. (Orgs.), *A Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.* (pp.13-36), Curitiba: Editora CRV.

Vigotsky, L.S. (2007) *A formação social da mente*. 7ª ed. São Paulo: Martins Fontes.

Vygotski, L. S. (1997). *Obras escogidas V- Fundamentos de defectologia*. Madrid: Visor.

ATITUDE DE ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE ESCOLAS ESTADUAIS EM UBERABA EM RELAÇÃO AO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Ailton Paulo de Oliveira Júnior, Gustavo Alves Caetano Neto, Maurício Gomes Bahia, Sandro de Macedo Gonçalves Ferreira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro Brasil
drapoj@uol.com.br,gustavo20mg@netsite.com.br,mauriciogomesb@yahoo.com.br,sandmacgon@hotmail.com

Resumen. Através da aplicação de um questionário e uma escala de atitudes a 146 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de duas escolas estaduais de Uberaba, Minas Gerais foram estabelecidas um perfil deste grupo e identificadas as suas atitudes em relação à Matemática. Em relação ao perfil desse grupo, os alunos estão na faixa de idade esperada para o 6º ano, ou seja, com 11 anos. Há uma indicação de que as famílias dos alunos da Escola II são maiores e têm uma renda bruta menor que as da Escola I. Os alunos gostam de Matemática e acham interessantes as aulas de Matemática; não sentem medo em cursá-la, mesmo que este não seja o conteúdo que se sentem mais felizes. Quanto às atitudes dos alunos, as frequências observadas para todas as proposições da escala tendem mais para resultados positivos do que negativos. Isto é confirmado com o valor do α de Cronbach da escala que é igual a 0,91978, indicando que há uma relação positiva dos alunos do 6º ano das Escolas I e II em relação à Matemática

Palavras chave: atitude, alunos, matemática, ensino fundamental

Abstract.

Through the application of a questionnaire and a scale of attitudes to 146 students of the 6th year of the Elementary School in two public schools in Uberaba, Minas Gerais was established a profile of this group and identified their attitudes toward Mathematics. In relation to the profile of this group, the students are in the range of expected age for the 6th year, i.e. with 11 years. There is an indication that the families of the students of the School II are larger and have a gross income less than the School I. Students enjoy Mathematics and find interesting classes of Mathematics; do not feel fear in attends it, even if this is not the content that they feel happier. As for the attitudes of the students, the frequencies observed for all the propositions of the scale tend more to positive results than negative. This is confirmed with the value of the Cronbach's Alpha of the scale that is equal to 0.91978, indicating that there is a positive relationship of the students of the 6th year of the Schools I and II toward mathematics.

Key words: attitude, students, mathematics, elementary school

Introdução

Em geral, os alunos ao atingirem as séries finais do Ensino Fundamental no Brasil (6° ao 9° anos) e a partir dele, apresentam atitudes negativas com relação à Matemática em maior grau do que nas séries iniciais do mesmo Ensino Fundamental (1° ao 5° anos) (Brito, 1996).

Essas atitudes negativas parecem estar associadas a um menor rendimento na disciplina de Matemática à medida que a escolaridade avança, podendo estar associada à mudança da formação dos professores, dos métodos de ensino utilizados e da relação professor e aluno.

Nesse estudo, nossa preocupação foi a de explorar em que medida esse fato pode estar relacionado a alguns elementos do processo ensino e aprendizagem: o conteúdo ministrado, o aluno ou o professor.

A seguinte conclusão de Brito (1996) serviu de base para a realização deste estudo:

> Não é a Matemática que produz atitudes negativas. Aparentemente, elas se desenvolvem ao longo dos anos escolares, muito relacionadas a aspectos pontuais: o professor, o ambiente na sala de aula, o método utilizado, a expectativa da escola, dos professores e dos pais, a autopercepção do desempenho, etc. (p. 298).

Tomando essas reflexões como ponto de partida, realizou-se esta pesquisa para analisar quais são os aspectos que contribuem para essa mudança de atitude dos alunos na passagem do Ensino Fundamental I para o Fundamental II, ou seja, o sexto ano do Ensino Fundamental. Os estudos sobre as atitudes e a mudança de atitudes com relação à Matemática vêm sendo objeto de interesse dos pesquisadores da Educação, da Psicologia, da Matemática, principalmente a partir da metade do século passado. Os pesquisadores das diferentes áreas realizam seu trabalho tentando conhecer as atitudes, para modificá-las e contribuir, desta forma, para o ensino e o aprendizado da Matemática.O acesso às atitudes relativas à Matemática é uma pequena parcela de uma grande tarefa que é a de ensinar e propiciar modificações nas atitudes dos alunos, buscando melhorar o autoconceito e o desempenho dos mesmos (Utsumi, 2000).

Algumas definições de atitudes, elaboradas por diferentes autores apresentam pontos comuns, como: predisposição, aceitação ou rejeição, favorável ou desfavorável, positiva ou negativa, aproximativa ou evasiva (Gonçalez, 1995). Assim, a atitude constitui-se numa condição psicológica necessária para que o indivíduo realize uma tarefa com sucesso. Em particular, interessam-nos as tarefas matemáticas realizadas na escola e como podem ser desenvolvidas as atitudes dos alunos quando as executam. Neste sentido, se as atitudes se formam a partir das experiências, o trabalho do professor necessita ser voltado para o desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à escola e às disciplinas, aumentando a probabilidade de que seus alunos desenvolvam atitudes mais positivas em relação às mesmas (Gonçalez, 2000).

Segundo Gomez Chacón (2003), atitude é uma predisposição avaliativa (positiva ou negativa) que determina as intenções pessoais e influi no comportamento. Esse descritor básico do domínio afetivo possui três aspectos: um cognitivo (as crenças), um afetivo e outro que se manifesta no comportamento (predisposição a ação). Refosco, Mendes e Rogovski (2004) complementam dizendo que as atitudes variam de intensidade e direção, podem ser direcionadas a objetos, eventos e pessoas, e são influenciadas pelo meio e pela cultura e acrescenta de que por não serem inatas e sim adquiridas, elas são instáveis.

Faria (2006) analisou os trabalhos já realizados no Brasil, e em outros países, no que se refere às atitudes em relação à Matemática e concluiu que as atitudes negativas surgem por influência de diversos fatores como, por exemplo: ensino deficiente; uso inadequado de metodologias; rejeição à Matemática por parte de mestres, alunos, pais, dentre outros.

Metodologia

O estudo aqui apresentado pode ser classificado como descritivo-transversal (as variáveis do estudo são coletadas num determinado momento) com abordagem quantitativa, uma vez que o objetivo fixado foi o de estabelecer o perfil demográfico-acadêmico dos alunos e verificar as atitudes dos mesmos em relação ao ensino e aprendizagem de Matemática, em duas escolas estaduais em Uberaba, Minas Gerais.

Os dados foram coletados junto a alunos do sexto ano do Ensino Fundamental de duas escolas públicas que participam do subprojeto Matemática do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID da Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM, sendo: 115 alunos (96,6% do total) da Escola I e 31 alunos (39,2% do total) da Escola II, no primeiro semestre letivo de 2011. O PIBID, segundo o Decreto Nº 7.219, de 24 de Junho de 2010 tem por finalidade fomentar a iniciação à docência, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação de docentes em nível superior e para a melhoria da qualidade da educação básica pública brasileira.

Para a obtenção das informações, utilizou-se um questionário com variáveis (sexo, idade, local de residência, tipo de residência, com que reside, composição da família, forma que se locomovem para a escola e renda bruta familiar) que estabelecessem breve perfil dos alunos e também uma escala de atitudes para verificar como este grupo de alunos se relaciona com a Matemática, ou seja, buscando identificar se existe uma relação positiva ou negativa deste grupo em relação à Matemática.

A Escala de Atitudes em Relação à Matemática, utilizada neste estudo, foi adaptada e validada por Brito (1996). Por meio deste instrumento, o participante deve emitir uma resposta a cada um dos itens que compõe a escala *Likert*. As respostas variam de uma plena concordância até uma total discordância. A escala possui 21 itens (10 positivos e 11 negativos).

Em relação à avaliação da escala de atitudes em relação á Matemática, cada uma das proposições positivas da escala de atitudes recebeu pontuação distribuída da seguinte forma: *concordo totalmente = 5 pontos; concordo parcialmente = 4 pontos; indiferente = 3 pontos; discordo parcialmente = 2 pontos e; discordo totalmente = 1 ponto.* Os itens com característica "positiva" da escala de atitudes são: *(2) A Matemática é algo que eu aprecio grandemente; (3) A Matemática é fascinante e, ao mesmo tempo, divertida; (4) A Matemática é uma das matérias que eu realmente gosto de estudar; (7) A Matemática me faz sentir seguro (a) e é estimulante; (8) Eu acho Matemática* *muito interessante e gosto das aulas; (10) Eu fico mais feliz na aula de Matemática do que na aula de qualquer outra matéria; (11) Eu gosto realmente de Matemática; (12) Eu me sinto tranquilo (a) em Matemática e gosto muito dessa matéria; (16) Eu tenho uma reação definitivamente positiva em relação à Matemática: Eu gosto e aprecio essa matéria;* e *(18) O sentimento em relação à Matemática é bom*

.Para as negativas a pontuação foi: *discordo totalmente = 5 pontos; discordo parcialmente = 4 pontos; indiferente = 3 pontos; concordo parcialmente = 2 pontos; concordo totalmente = 1 ponto.* Os itens com característica "negativa" são: *(1) "Dá um branco na minha cabeça"* e *não consigo pensar claramente quando estudo Matemática; (5) A Matemática me deixa inquieto (a), descontente e impaciente; (6) A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido (a) em uma selva de números e sem encontrar saída; (9) Eu ficava sempre sob uma terrível tensão nas aulas de Matemática; (13) Eu não gosto de Matemática* e *me assusta ter que fazê-la; (14) Eu nunca gostei de Matemática* e *é a matéria que me deu mais medo; (15) Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática; (17) Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz de utilizá-la; (19) Pensar sobre a obrigação de resolver um problema matemático me deixa nervoso (a); (20) Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão;* e *(21) Não tenho um bom desempenho em Matemática.*

A soma das pontuações nas 21 proposições da escala de atitudes pode variar de 21 (vinte e um) a 105 (cento e cinco), indo de atitudes extremamente negativas a atitudes extremamente positivas em relação à Matemática. Nesse tipo de instrumento, nenhuma proposição é considerada certa ou errada, pois apenas refletem as expressões dos sujeitos quanto ao sentimento que experimentam frente a cada um dos enunciados. Foram utilizados na elaboração do relatório técnico os softwares: *MSOffice Excel* para o gerenciamento do banco de dados; *WinSTAT* para serem efetuados os cálculos estatísticos; e *MSOffice Word* para a elaboração e edição de tabelas e a redação.

Resultados

Nas duas escolas os alunos do sexo masculino do 6° do Ensino Fundamental apresentam um percentual ligeiramente superior: Escola I (53,04%) e Escola II (58,06%). No que se refere à idade, observa-se que, em média, os alunos da Escola I (11,01 anos) são mais novos que os alunos da Escola II (11,74 anos). Tomando-se como base o sistema educacional brasileiro, que considera a idade de 7 (sete) anos como adequada para o início dos estudos no Ensino Fundamental e a de 14 anos, para sua finalização, um aluno que esteja terminando o 6º ano deveria ter em torno de 11 anos. Desta forma, observa-se que em média os alunos encontram-se no intervalo da idade, em anos, que se esperaria que estivessem.

Nas duas escolas a maioria dos alunos reside com os pais ou com os pais e irmãos, bem como moram em casas, sendo as mesmas em sua maioria próprias. Além disso, os bairros onde as escolas estão localizadas são essencialmente residenciais indicando que a cidade de Uberaba privilegia as casas como moradia.

Quanto o tamanho da família destes alunos há uma indicação de que na Escola II estas são maiores do que na Escola I, pois é apresentada uma média de quase 5 pessoas por família e se considerarmos que a maioria dos alunos declararam que aqueles com que moram são seus pais ou pais e irmãos, isto indica que estas famílias são compostas pelo casal de pais e mais 3 (três) filhos. Utilizando o mesmo raciocínio, as famílias dos alunos da Escola I são compostas pelos pais e mais 2 (dois) filhos.

Como a maioria dos alunos da Escola II são moradores de bairros bem próximos à escola e em número reduzido de bairros, justifica-se o fato de 67,74% dos alunos irem para a escola a pé. Já na Escola I, por receber não apenas alunos dos bairros próximos à escola, mas de outros bairros, justifica-se os 60,52% que utilizam carro da família, van ou ônibus escolar e transporte público.

Tem-se também que 60,0% dos alunos da Escola I declararam que a renda bruta da família fica entre R$ 541,00 e R$3.000,00. Nesta escola, os alunos vêm de famílias que por começarem a ter problemas financeiros e gostarem da proposta de ensino da escola tiraram seus filhos das escolas particulares e colocaram nesta escola estadual, pois esta tem a tradição de prezar por uma educação de qualidade. Na Escola II destaca-se que 62,1% dos alunos declararam que a renda bruta da família é de até R$1.000,00. Nesta escola a situação socioeconômica e cultural é baixa, e apresenta índice significativo de violência, havendo grande movimentação migratória das famílias, com grande desigualdade social e desestrutura familiar.

A seguir apresenta-se estudo sobre as atitudes dos alunos das escolas I e II em relação com a Matemática, onde poderemos classificar como positivas ou negativas. Na Tabela 1 observa-se que dentre as proposições que apresentaram resultados menos positivos da Escola I, destaca-se a de número 10: *Eu fico mais feliz na aula de Matemática do que na aula de qualquer outra matéria.* Sendo assim, como a aula de Matemática não é considerada, pela maioria, aquela em que eles se sentem mais felizes, é um indicativo para que os professores desta disciplina façam encaminhamentos para torná-la mais prazerosa.

Nº da Proposição	Proposições	Natureza da Proposição*	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
10.	Eu fico mais feliz na aula de Matemática do que na aula de qualquer outra matéria.	P	31 26,96 %	13 11,30 %	18 15,65 %	11 9,57 %	42 36,52%

Tabela 1. Distribuição dos itens da Escala de Atitudes menos positivos em relação à Matemática dos alunos do 6º ano da Escola I.

Já na Escola II, Tabela 2, uma das questões que apresentou resultado menos positivo foi a de número 17: *"Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz de utilizá-la"*. Parte considerável dos alunos concorda com tal afirmação, o que pode ser reflexo de uma postura tradicional do professor, aulas descontextualizadas, sem um trabalho interdisciplinar.

Nº da Proposição	Proposições	Natureza da Proposição*	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
17.	Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz de utilizá-la.	N	9 29,03 %	4 12,90 %	6 19,35 %	5 16,13%	7 22,58%

Tabela 2. Distribuição dos itens da Escala de Atitudes menos positivos em relação à Matemática dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental da Escola II.

Por outro lado, na Tabela 3, apresentam-se as proposições que apresentaram resultados mais positivos na Escola I: número 14: Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que me deu mais medo, de número 15: Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática e número 20: Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão. Isso significa que esses alunos do 6° ano desta escola gostam da disciplina e não sentem medo nem aversão pela Matemática. Somado a isso, os alunos sentem-se seguros quanto aos seus esforços na disciplina.

Nº da Proposição	Proposições	Natureza da Proposição*	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
14.	Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que me deu mais medo.	N	23 20,00 %	6 5,22 %	11 9,57 %	8 6,96%	67 58,2 6%
15.	Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.	N	25 21,74 %	6 5,22 %	9 7,83 %	15 13,04 %	60 52,1 7%
20.	Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.	N	34 29,57 %	11 9,57 %	20 17,3 9%	9 7,83 %	41 35,6 5%

Tabela 3. Distribuição dos itens da Escala de Atitudes mais positivos em relação à Matemática dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental da Escola I.

Na Tabela 4, observam-se as proposições que apresentaram resultados mais positivos na Escola II: número 2: A Matemática é algo que eu aprecio grandemente, número 13: Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazê-la e número 18: O sentimento em relação à Matemática é bom. Isso significa que esses alunos têm um sentimento bom e apreciam a disciplina matemática, não tendo medo de cursá-la.

Nº da Proposição	Proposições	Natureza da Proposição*	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
2.	A Matemática é algo que eu aprecio grandemente.	P	19 61,29 %	5 16,13 %	3 9,68 %	3 9,68 %	1 3,23 %
13.	Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazê-la.	N	2 6,45%	1 3,23%	8 25,81 %	2 6,45 %	18 58,06 %
18.	O sentimento em relação à Matemática é bom.	P	18 58,06 %	5 16,13 %	5 16,13 %	- 0,00 %	3 9,68 %

Tabela 4. Distribuição dos itens da Escala de Atitudes mais positivos em relação à Matemática dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental da Escola II.

Analisando as duas escolas conjuntamente, obteve-se o valor do α de Cronbach igual a 0,91978, o que mostra uma atitude positiva e excelente em relação à Matemática. Quando é calculado o mesmo coeficiente, separadamente para cada uma das escolas em estudo, tem-se que na Escola I, o valor do α de Cronbach é igual a 0,92793, enquanto que na Escola II, este valor foi igual a 0,86600, ou seja, ambos os grupos de alunos mostrando atitudes positivas.

Os resultados do α de Cronbach foram classificados de acordo com os critérios sugeridos por Hill e Hill (2000), sendo que acima de 0,9 é considerado excelente; entre 0,8 e 0,9 é considerado bom; entre 0,7 e 0,8 é considerado razoável; entre 0,6 e 0,7 é considerado fraco; e abaixo de 0,6 é considerado inaceitável.

Para verificarmos se as atitudes em relação à matemática diferem significativamente entre as duas escolas, utilizamos um teste de comparação entre estes grupos. Para tanto utilizamos inicialmente o teste de Kolmogorov-Smirnov, para verificar se há evidências para rejeitar a hipótese de normalidade dos dados (os dados se aproximam de uma distribuição Normal). Desta forma, para as atitudes da Escola I ($D = 0{,}083 < 0{,}125$; $p = 0{,}407$) e para as atitudes da Escola II ($D = 0{,}115 < 0{,}125$; $p = 0{,}804$) que indicam que a distribuição do total de pontos da escala para as duas escolas não se aproximam da Normal e, portanto, utilizamos o teste de Mann-Whitney, que é um método não paramétrico, constituindo-se numa alternativa extremamente útil da prova paramétrica t, pois independe da distribuição da população. E, portanto, obteve-se o valor de $p = 0{,}215 > 0{,}05$, indicando que os dois grupos não diferem significativamente, ou seja, apesar dos valores do Alfa de Cronbach serem diferentes não existe uma diferença que possa ser dita significativa.

Conclusão

A Escola II apresentou índices sociais e econômicos mais baixos que a Escola I. Isso se comprova nas respostas dos questionários, onde na Escola II há menor renda familiar, mais pessoas por residência e a maioria dos alunos vai a pé para a escola. Mesmo assim e apesar da Escola II ter obtido valores do IDEB, nos anos de 2007 e 2009, menores que o da Escola I, os alunos da Escola II tiveram uma atitude mais positiva em relação à Matemática que os da outra escola, apesar desta diferença não ser estatisticamente significativa.

Quando consideradas cada uma das proposições da escala de atitudes, percebe-se que todas elas tendem mais para valores positivos do que valores negativos. Na Escola I apesar dos alunos gostarem de Matemática e não sentirem medo nem aversão pela disciplina, ainda não se sentem plenamente felizes nessas aulas. Isto pode indicar que os professores podem e devem melhorar as suas aulas, buscando aumentar o interesse e a satisfação dos alunos. Na Escola II, mesmo que os alunos também gostem, não tenham medo da disciplina, estes se sentem indecisos ao pensar se serão capazes de utilizar a Matemática em seu cotidiano. Cabe então aos professores buscar uma maior contextualização nos conteúdos ministrados, tornando os alunos mais confiantes sobre a aplicabilidade dos conteúdos no dia-a-dia.

Já em relação às ações propostas, a Escola II precisa dar atenção no que se refere aos aspectos sociais e econômicos de cada aluno, oferecendo também, dentro do possível, apoio psicológico, já que muitos vêm de lares desestruturados. Já na Escola I, as ações devem ser voltadas para os métodos didático-pedagógicos utilizados na escola. É conveniente propor aulas de reforço e monitoria semanalmente aos alunos, bem como buscar alternativas atraentes de ensinar o conteúdo, de modo a prender a atenção dos alunos e buscando uma aprendizagem efetiva. A inclusão na sala de aula de atividades lúdicas, história da matemática, resolução de problemas e modelagem matemática, podem ser interessantes alternativas.

Referências bibliográficas

Brasil. *Decreto n.º 7.729, de 24 de junho de 2010*. (2010). Dispõe sobre o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID e dá outras providências. Presidência da República, Brasília, publicado no DOU de 25 jun. 2010.

Brito, M. R. F. (1996). *Um estudo sobre as Atitudes em Relação à Matemática em Estudantes de 1º e 2º graus.* Tese de Livre Docência não Publicada, UNICAMP, Campinas.

Faria, P. C. (2006). *Atitudes em relação à matemática de professores e futuros professores*. 2006. Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Gomez Chacón, I. M. (2003). Afetividade e Matemática. In**:** *Matemática Emocional*. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed.

Gonçalez, M. H. C. C. (1995). *Atitudes (des)favoráveis com relação à matemática*. Dissertação de Mestrado em Educação. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Hill, M. M., Hill, A. (2000). *Investigação por questionário*. Lisboa: Síbalo.

Refosco, M. I., Mendes, C. R., & Rogovski, I. (2004). As atitudes em relação à Matemática e o desempenho matemático e algébrico na educação de jovens e adultos. *27ª Reunião ANPED*, Caxambu, Nov. 2004.

Utsumi, M. C. (2000). *Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos*: um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática. Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

EXPLOTANDO LOS CONOCIMIENTOS GEOMETRICOS DE LOS ALUMNOS DE ENSEÑANZA MEDIO SUPERIOR

Maurício de Moraes Fontes, Dineusa Jesus dos Santos Fontes
Escola Técnica Magalhães Barata – ETEMB-PA Brasil
mauriciofontes@gmail.com,dineusa@gmail.com

Resumen. La enseñanza de la Geometría es una ramificación de las Matemáticas que tiene una importancia fundamental en el razonamiento de los chicos y chicas de cualquiera nivel de la Educación Básica. El presente artículo tiene como objetivo presentar los resultados obtenidos de la evaluación diagnostica de Geometría Euclidiana Plana en los alumnos de Enseñanza Medio Superior. La metodología utilizada ha sido la Cuantitativa con Estudio Descriptivo. La muestra ha sido compuesta de 534 alumnos de cuatro escuelas particulares de Enseñanza Mediana de Belém – Pará – Brasil. Ha sido aplicado un cuestionario con cinco cuestiones básicas de Geometría. Los resultados muestran que los discentes están llegando en la enseñanza medio superior con poco o casi ningún conocimiento de Geometría.

Palabras clave: diagnóstico, geometría, alumnos, enseñanza medio superior

Abstract. Teaching Geometry is a branch of Mathematics that has an essential importance in the students' minds of any level of the Teaching Basic Education. This article aims to present the results of a diagnosis evaluation of Plane Euclidean Geometry in senior high school students. The methodology used was the Quantitative Descriptive Study. The sample consisted of 534 students from four private High Schools of Belem - Para – Brazil. It was applied a questionnaire with five basic questions of Geometry. The results show that students are coming to school with little or no knowledge of Geometry.

Key words: diagnosis, geometry, students, high school

Introducción

En pleno siglo XXI, muchos docentes aún no dominan los conocimientos geométricos básicos para actuaren en la Educación Básica. Esa falta de preparación es perjudicial para las futuras generaciones, que sin los conocimientos geométricos, cómo trabajaran la percepción espacial, la visualización, la capacidad de abstracción. Hace falta en la Universidad preparar mejor los futuros docentes (con situaciones de Investigación, exploración, resolución de problemas, incorporación de las Tecnologías de Información y Comunicación, para trabajar en clases de matemáticas más eficaz. Los alumnos necesitan de la incorporación de diversas propuestas metodológicas en sus clases de matemáticas para obtener una formación más amplia, para abarcaren un aprendizaje más significativo.

La escoja por el tema de Geometría en el presente trabajo se da por su aplicabilidad en las Matemáticas (lo que sería la Geometría Espacial, la Geometría Analítica, el Cálculo, la Interpretación de gráficos en la Estadística), así como en otras ciencias como la Física (la Mecánica, el trabajo de un gas en la Termodinámica, el consumo de energía eléctrica en la Electrodinámica), la Química (el estudio de la Geometría Molecular) , las Artes (el número de oro) , la Ingeniería (dibujo mecánico, elementos de máquina). Por el expuesto y por su relevancia en el contexto actual, ese trabajo tiene como objetivo presentar los resultados obtenidos de la evaluación diagnostica de Geometría Euclidiana Plana en los alumnos de Enseñanza Medio Superior.

Marco teórico

El presente trabajo está enmarcado en los trabajos de Lorenzato (1995), Pavanello (2004), Itzcovich (2005), Souza y Bulos (2011) y Fontes y Fontes (2011) que argumentan que los alumnos no tienen una buena formación en la enseñanza de la geometría, por diversos factores entre los cuales destacamos:

- La posición de la geometría en los libros didácticos;
- La mala formación de los profesores que actúan en la Enseñanza Básica (Enseñanza Fundamental y Media);
- Las pésimas condiciones de trabajo (escuelas sin material adecuado para que los profesores consigan trabajar);
- Las constantes huelgas de los docentes luchando por condiciones dignas de trabajo;
- La falta de inversión del Gobierno Federal que proporcione a los docentes una Formación Continua.

Estos argumentos de los autores arriba mencionados tienen afectado directamente el aula en todo Brasil, no solo en las escuelas públicas, sino también en algunas escuelas particulares.

Metodología

La metodología aplicada en el presente estudio ha sido la Cuantitativa con Estudio Descriptivo, pues de acuerdo con McMillan y Schumacher (2005) "la investigación que emplea una modalidad de investigación descriptiva refiere simplemente un fenómeno existente utilizando números para caracterizar individuos o un grupo. Evalúa la naturaleza de las condiciones existentes".

La presente investigación ha sido desarrollada en cuatro escuelas particulares de Belém – Pará – Brasil con un total de 534 estudiantes de Enseñanza Medio Superior. Denominaremos acá esas escuelas por esc X con dos clases en un total de ochenta y nueve alumnos, esc Y con cinco clases en un total de doscientos seis alumnos, esc Z con tres clases en un total de ciento cincuenta y dos alumnos y la esc W con dos clases en un total de ochenta y siete alumnos. Los discentes de esta investigación están concluyendo la Enseñanza Medio Superior.

La aplicación del cuestionario para la recorrida y los análisis de los datos ocurrieron en el inicio del mes de febrero de 2012.

La Investigación ha sido realizada por medio de las siguientes etapas:

- La primera etapa ha sido compuesta por un levantamiento bibliográfico con el propósito de conocer estudios anteriores acerca de la enseñanza de la Geometría. En ese levantamiento hemos hallado estudios como los de Lorenzato (1995), Pavanello (2004), Itzcovich (2005), Souza y Bulos (2011) y Fontes y Fontes (2011).
- La segunda etapa se constituyó en la selección de las cuestiones para aplicarlas a los alumnos. Las cuestiones que hicieron parte del cuestionario han sido sacadas del libro de los profesores Giovanni Júnior y Castrucci (2009). La opción de sacar las cuestiones del libro de los autores arriba ha ocurrido porque es uno de los libros recomendados por el Ministerio de la Educación y Cultura – MEC, de acuerdo con el Programa Nacional del Libro Didáctico - PNLD 2010 – 2012, para las escuelas Pública de Brasil.
- La tercera etapa ha sido la aplicación del cuestionario a los alumnos.
- Y la cuarta etapa ha sido la recopilación y análisis de los resultados que han sido dispuestos en gráficos que serán presentados en tópicos posteriores.

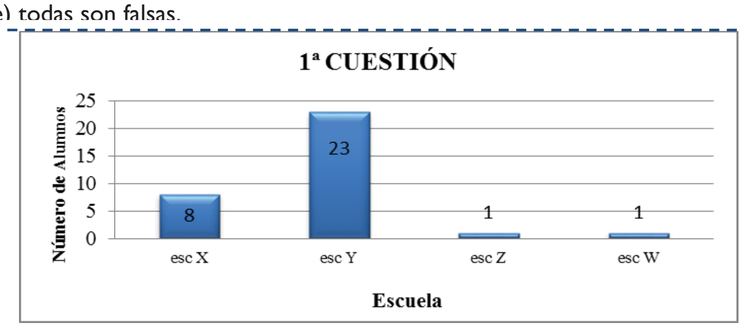
Resultados

De los alumnos que han participados de nuestra investigación hubo predominancia de discentes del sexo masculino con 85,7% aproximadamente y el restante aproximadamente 14,3% de las chicas.

La primera cuestión presentada a los alumnos ha sido la siguiente:

01. (VUNESP-SP) Considere las siguientes proposiciones:
Todo cuadrado es un rombo.
Todo cuadrado es un rectángulo.
Todo rectángulo es un paralelogramo.
Todo triángulo equilátero es isósceles.

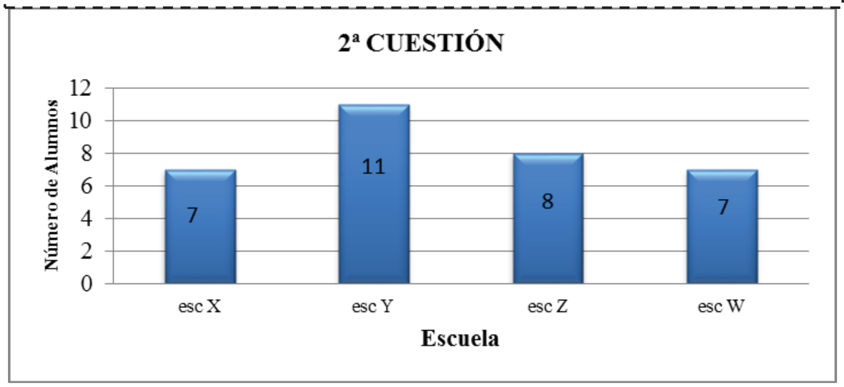
Se puede afirmar que:
a) sola una es verdadera.
b) todas son verdaderas.
c) solo una es falsa.
d) dos son verdaderas y dos son falsas.
e) todas son falsas.



Fuente: Pesquisa de campo

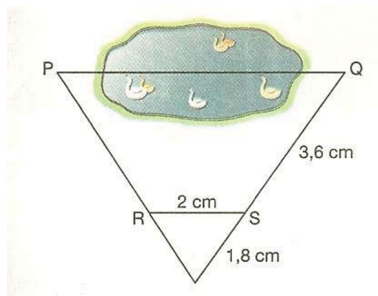
02. (PUC-SP) Cada ángulo interno de un decágono regular mide:

a) 36° b) 60° c) 72° d) 120° e) 144°



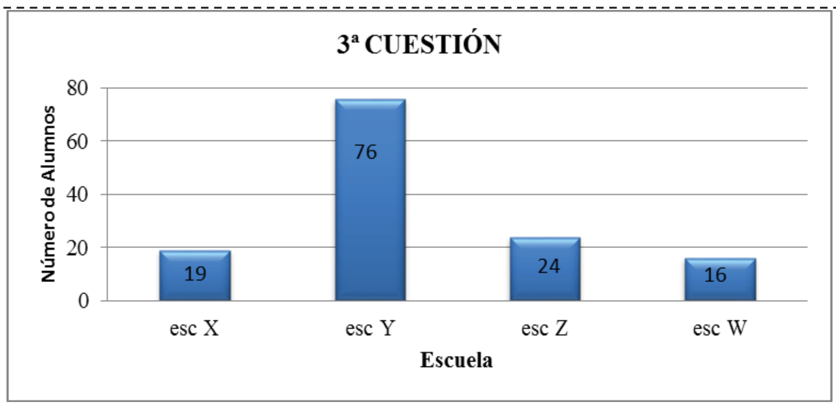
Fuente: Pesquisa de campo

03. (UCS-RS) Debido a la existencia de un lago entre dos puntos P y Q, un topógrafo, para evaluar la distancia entre ellos, utilizó una estrategia cuya representación gráfica (en la cual fue usada escala de 1: 10 000, y el segmento PQ es paralelo al segmento RS) está abajo.



Con base en esas informaciones, ¿Cual es la distancia real entre los puntos P y Q?

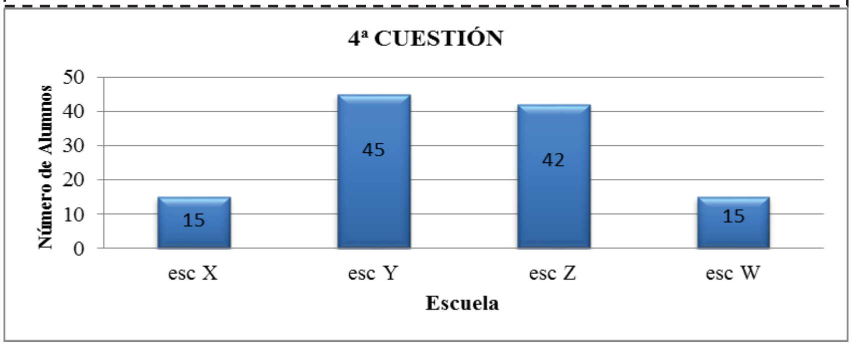
a) 600 m b) 540 m c) 400 m d) 720 m e) 1 080 m



Fuente: Pesquisa de Campo

04. (PUC-MG) Duplicando el radio de un círculo:

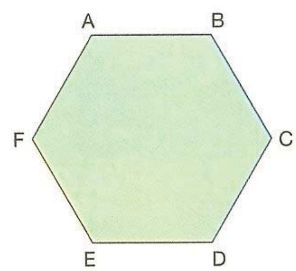
a) el área es multiplicada por 3.
b) el área es multiplicada por 2.
c) el área es multiplicada por 4.
d) el área es multiplicada por 2π.
e) el área es multiplicada por 4π.

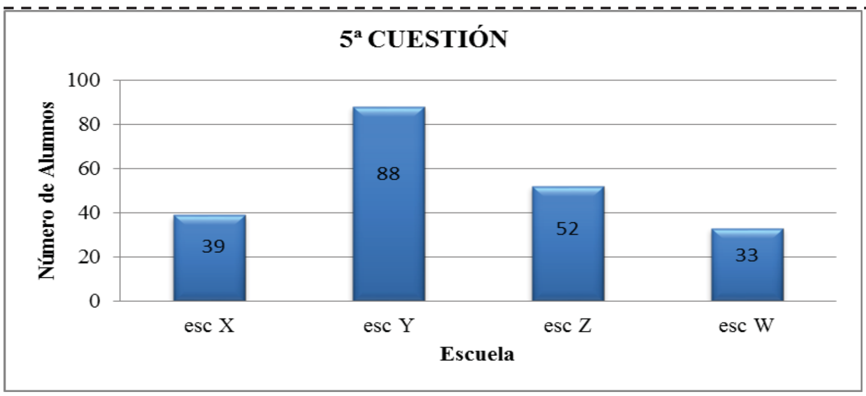


Fuente: Pesquisa de Campo

05. (SAREP-SP) Seis ciudades están interconectadas en los vértices de un hexágono regular, como muestra la figura. Existe un proyecto para interconéctalas, dos a dos, por medio de carreteras. Algunas de esas estradas corresponden a los lados del polígono, y las demás corresponden a las diagonales. De ese modo, el número de carreteras que se construirán es:

a) 9 b) 15 c) 21 d) 24 e) 27





Fuente: Pesquisa de Campo

Análisis de los Resultados

Las cuestiones sacadas y propuestas a los alumnos son del libro de los Profesores Giovanni Júnior y Castrucci (2009), son cuestiones básicas de geometría euclidiana plana. En función del texto ser escrito en la lengua española, todas las cuestiones han sido traducidas por los autores de este informe para el castellano.

Los resultados obtenidos vienen a confirmar que:

> […] algunos profesores evitan enseñar los conceptos de geometría, pues no tienen dominio sobre el asunto, no han tenido acceso en su formación inicial o, si tuvieron, no ha sido suficiente, entonces terminan alegando que los alumnos no tienen conocimiento, concluyendo más un año lectivo sin trabajar los contenidos de geometría. (Souza y Bulos, 2011, p. 4)

Esa constatación, influye directamente en las clases de geometría, pues de acuerdo con Pavanello (2004) "es notorio que la exclusión de la geometría de los currículos escolares o su tratamiento inadecuado pueden causar serios perjuicios a la formación de los estudiantes".

Esos perjuicios han sido diagnosticados en esa investigación, pues de los 534 alumnos que han hecho las cuestiones propuestas en el cuestionario, aproximadamente 6,2% de los alumnos han acertado la cuestión 1, o sea, ocho alumnos de la esc X, veintitrés alumnos de la esc Y, un alumno de la esc Z y un alumno de la esc W. Esta pregunta Tal cuestión si refiere a la clasificación de los cuadriláteros.

En la cuestión 2, aproximadamente 6,2% de los discentes han acertado la referida cuestión, o sea, siete alumnos de la esc X, once de la esc Y, ocho de la esc Z y siete de la esc W. En esa cuestión algo que nos llamó la atención ha sido el gran número de discentes que señalaron la alternativa A. Cincuenta y tres alumnos de la esc X, ciento cincuenta y ocho de la esc Y, ciento treinta y cinco de la esc Z y sesenta y tres de la esc W, o sea, aproximadamente 77% de los alumnos que participaron de la investigación. La idea que pasa es que ellos tomaron como la suma de los ángulos internos de un decágono como 360° y dividieron por diez.

En la cuestión 3, aproximadamente 25,3% de los alumnos han acertado la referida cuestión, o sea, diecinueve alumnos de la esc X, setenta y seis de la esc Y, veinticuatro de la esc Z y dieciséis de la esc W. Este débil rendimiento en problemas de semejanza es confirmado por Fontes y Fontes (2011) que afirman "Los resultados obtenidos en esta pesquisa exponen que los alumnos están ingresando en la Enseñanza Medio Superior con poco o casi ningún conocimiento acerca de geometría, en este caso en particular sobre Semejanza de Figuras Planas".

En la cuestión 4, aproximadamente 22% de los alumnos han acertado la referida cuestión, o sea, quince alumnos de la esc X, cuarenta y cinco de la esc Y, cuarenta y dos de la esc Z y quince de la esc W.

En la cuestión 5, aproximadamente 40% de los alumnos han acertado la referida cuestión, o sea, treinta y nueve alumnos de la esc X, ochenta y ocho de la esc Y, cincuenta y dos de la esc Z y treinta y tres de la esc W. En esa cuestión aproximadamente 30% de los discentes señalaron la alternativa A. Veinticinco alumnos de la esc X, sesenta y siete de la esc Y, treinta y siete de la esc Z y veintiocho de la esc W. Preguntado sobre la razón de que muchos alumnos señalaron la letra A, ellos certificaron que no atentaron para el anunciado del problema de que los lados también son carreteras y otros usaron el Análisis Combinatoria para descubrir el número de diagonales del hexágono, o sea, $C_6^2 - 6$.

Los resultados de esa investigación son preocupantes, pues no es solo en la escuela pública que los discentes están llegando en la enseñanza medio superior con una deficiencia muy grande en el aprendizaje de geometría. Relato ese compartido con Itzcovich (2005, p. 9) que afirma que es "conocido por quienes tienen un vínculo con la enseñanza de las matemáticas el hecho de que el trabajo geométrico ha perdido espacio y sentido, tanto en los colegios como en la formación docente".

La enseñanza de la geometría tiene un papel fundamental en la educación básica pues, Lorenzato argumenta:

> […] que sin estudiar la geometría las personas no desarrollan el pensar geométrico o el raciocinio visual y, sin esa habilidad, ellas difícilmente conseguirán resolver las situaciones de la vida que fueren geometrizadas; también no podrán utilizarse de la geometría como factor altamente facilitador para la comprensión y resolución de cuestiones de otras áreas del conocimiento humano. Sin conocer geometría la lectura interpretativa del mundo se torna incompleta, la comunicación de las ideas quedan reducidas y la visión de la matemáticas se torna deformada (Lorenzato, 1995, p.5)

Conclusiones

De acuerdo con los resultados recolectados y analizados arriba, verificamos de modo general, que el conocimiento de conceptos básicos de Geometría Euclidiana Plana en los alumnos de las cuatro escuelas investigadas es deficitario. Es inaceptable que en cuestiones básicas de Geometría la mayoría de los alumnos no sepan calcular la suma de los ángulos internos de un decágono. El alumno no necesita de fórmula para resolver la cuestión, es suficiente descomponer el decágono en figuras geométricas básicas como los triángulos y/o cuadriláteros para descubrir que la suma de los ángulos interno es 1 440°. De esa forma, como el decágono es regular será suficiente dividir el resultado por 10.

Por su importancia en el contexto actual y en el razonamiento geométrico de los chicos y chicas esperábamos que los resultados de esa investigación fueran mejores, llevando en consideración que esos alumnos están en la última etapa de la educación básica, por tanto ellos ya habían estudiado tal asignatura en años anteriores. Esperamos que ese recorte pueda contribuir con los compañeros para una reflexión sobre la importancia de los conocimientos Geométricos en la formación de los chicos y chicas.

Referencias bibliográficas

Fontes, M. M. y Fontes, D. J. S. (2011). Estudo Diagnóstico de Semelhança de Figuras Planas. En T.M. M. Campos, U. D'Ambrosio, V. Y. Kataoka, M. Karrer, R. N. Lima y S. H. A. A. Fernandes (Eds.). *Seminário Internacional de Educação Matemática, 3*, 278-287. São Paulo, Brasil.

Giovanni Júnior, J. R. y Castrucci, B. (2009). A Conquista da Matemática. Edição Renovada. São Paulo: FTD.

Itzcovich, H. (2005).*Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: de las construcciones a las demostraciones.* Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista 4,* 3–13.

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa*. Madrid: Person.

Pavanello, R. M. (2004). Por que ensinar /aprender geometria? En *Memoria Encontro Paulista de Educação Matemática, 8*,1–6. Brasil. Recuperado el 23 de mayo de 2012 de http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mr.html

Souza, E. S. y Bulos, A. M. M. (2011). A ausência da Geometria na Formação dos professores de matemática: causas e conseqüências. En *Conferencia Interamericana de Educação Matemática, 13,*1–8. Recife, Brasil.

UTILIZAÇÃO DE FERRAMENTAS DE DESENHO GEOMÉTRICO PARA O ENSINO DE CÔNICAS

Juracélio Ferreira Lopes
Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG/Campus Ouro Preto Brasil
juracelio@yahoo.com.br.

Resumo. Nesta oficina apresenta-se um método para construção do esboço das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) partindo-se da definição geométrica destas curvas. Neste método de construção serão utilizadas réguas especiais baseadas no método de Kepler também conhecido como método do fio esticado. Com esta construção por meio deste método torna-se possível visualizar e explorar diversas propriedades destas curvas facilitando a compreensão das definições e demonstrações que aparecem no tratamento algébrico.

Palavras chave: cônicas, geometria analítica, visualização

Abstract. This workshop presents a method for constructing the sketch of conics (ellipse, parabola and hyperbola) starting from the geometric definition of these curves. In this method of construction are used rules based on the Kepler's method also known as stretched wire method. This construction using this method becomes possible to visualize and explore several properties of these curves facilitating the understanding of the definitions and demonstration that appear in the algebraic treatment.

Key words: conics, analytic geometry, visualization

Introdução

O estudo das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) abordado na disciplina de Geometria Analítica a nível universitário possui aplicações tecnológicas em diferentes áreas do conhecimento. No entanto, esta disciplina geralmente é oferecida no primeiro ano de graduação quando boa parte dos alunos ainda não está acostumada com o formalismo das demonstrações. Além disto, após análise de livros de Geometria Analítica a nível universitário de diversos autores, tais como Boulos (2007), Lima (2006), Iezzi (1993) Murdoch (1969), constatou-se que o conteúdo sobre as cônicas é, na sua maioria, apresentado apenas sob o ponto de vista de equações algébricas. Segundo Durval (2003) o fato do aluno reconhecer um objeto matemático por meio de múltiplas representações é fundamental para que ele possa transferir ou modificar formulações ou representações na resolução de um problema. Desta forma, este trabalho propõe o estudo das cônicas a partir de construções geométricas por meio da utilização de ferramentas didáticas. Com esta abordagem o aluno terá suporte para o estudo algébrico destas curvas, pois segundo Chalouh; Herscovics (1994) a utilização de conceitos geométricos auxilia a construção de significado para as expressões algébricas, servindo de sustentação para a construção de uma base cognitiva.

Metodologia

Nesta oficina utilizamos três tipos de ferramentas sendo que cada uma delas permite desenhar um tipo específico de cônica partindo sempre da definição geométrica da curva. A figura1 mostra as ferramentas elipsógrafo, hiperbológrafo e parabológrafo que foram utilizadas, respectivamente, para desenhar as curvas elipse, hipérbole e parábola.

No estudo de cada uma das cônicas foi apresentada a definição geométrica e os passos da construção da curva tendo como base essa definição. A partir dessa construção foi feito um estudo das curvas por meio de dois tratamentos, o geométrico e o algébrico. Com o primeiro deles é possível determinar os elementos e propriedades das curvas executando o roteiro apresentado neste texto. No tratamento algébrico constrói-se uma definição algébrica para a cônica utilizando os parâmetros obtidos na construção geométrica. A partir desta nova definição pode-se determinar uma expressão para representar a curva que poderá, agora, ser explorada algebricamente.

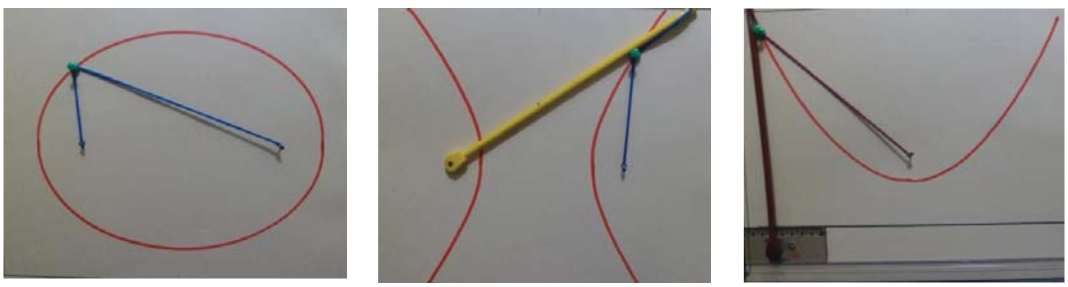


Figura 1: Elipsógrafo, hiperbológrafo e parabológrafo

Elipse

Definição 1. *Elipse é o lugar geométrico dos pontos para os quais a soma das distâncias a dois pontos distintos fixados é igual a uma constante, maior que a distância entre esses pontos.*

Com base na definição1, para construir o esboço da elipse serão necessários fixar dois pontos distintos no plano e tomar uma distância *d* maior que a distância entre dois pontos fixados. A distância *d* será igual ao comprimento do fio do elipsógrafo. Sendo assim, pode-se obter esboço da elipse da seguinte forma:

1. Coloque a folha sobre E.V.A(emborrachado) e fixe dois pregos de forma que a distância entre eles seja menor do que o comprimento do fio;
2. Com a ponta do pincel estenda o fio no plano mantendo-o sempre estendido ao máximo conforme a figura 2 abaixo.

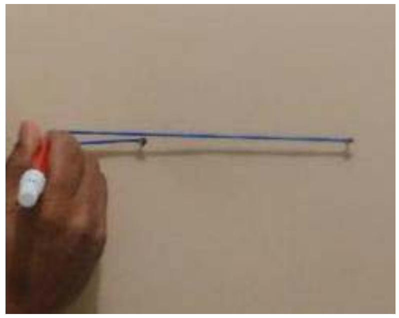


Figura 2: Utilizando o elipsógrafo

3. Movimente pincel de um lado para outro e obterá uma curva fechada no plano conforme a figura 3.

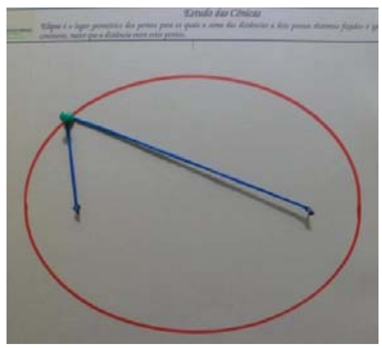


Figura 3: Esboço da elipse

Observa-se que todo ponto P dessa curva satisfaz a definição 1 da elipse, pois a soma das distâncias de P aos dois pontos inicialmente fixados é igual ao comprimento do fio, que é um valor constante e maior que a distância entre esses dois pontos. Os dois pontos inicialmente fixados serão denominados *focos* da elipse e o segmento por eles determinado de *segmento focal.*

Tratamento geométrico

1) Trace a reta suporte do segmento focal da elipse e a mediatriz deste segmento. A interseção destas duas retas é o centro da elipse. Nomeie o centro de *O*.

2) Identifique no esboço da elipse os seguintes elementos:

   $A_1 A_2$ = eixo maior – medindo 2*a*;

   $B_1 B_2$ = eixo menor – medindo 2*b;*

   $F_1 F_2$ = segmento focal – medindo 2c*;*

3) Usando a definição 1 mostre que o segmento $B_1F_1 = B_1F_2$ tem medida igual a *2a.*

4) Encontre a relação matemática entre as medidas *a*, *b* , e *c* da elipse.

Tratamento algébrico

1) Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos num plano cartesiano e $2c > 0$ a distância entre eles. Considere a um número real tal que $a>c$ e d a distância euclidiana. Sendo assim, com base na definição 1 escreva a definição analítica para elipse.

2) Tendo em vista a definição elaborada no item 5 suponha que a elipse esteja posicionada no plano cartesiano de forma que seu centro coincida com a origem do sistema e que os focos F_1 e F_2 esteja sobre o eixo x. Em seguida encontre a equação reduzida da elipse.

Material utilizado: 2 pregos tamanho 10x10, E.V.A com 30cm x 50cm x 2cm, cartolina 30cm x 50cm e barbante inextensível de 20cm.

Hipérbole

Definição 2. Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos para os quais a diferença das distâncias a dois pontos distintos fixados é em valor absoluto igual a uma constante, menor que a distância entre estes pontos fixados.

Com base na definição 2 e utilizando o hiperbológrafo pode esboçar trechos dos ramos de uma hipérbole da seguinte forma:

1. Marque dois pontos distintos num plano a uma distância maior que diferença entre os comprimentos da haste e do fio do hiperbológrafo;

2. Fixe a extremidade da haste e a extremidade do fio uma em cada ponto marcado conforme ilustra a figura 4;

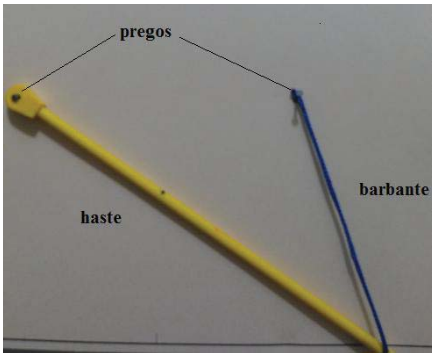


Figura 4: Hiperbológrafo

3. Com a ponta do pincel puxe o fio junto da haste. Mantendo o pincel nestas condições movimente-o de forma que haste rotacione no sentido anti- horário em torno do ponto onde foi fixada.

4. Rotacione a haste no plano no sentido contrário ao escolhido no item anterior mantendo a ponta do pincel junto da haste. Observe a figura 5.

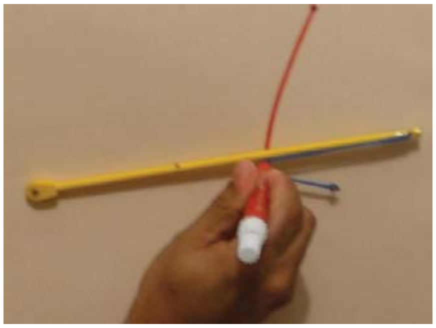


Figura 5:Construção do ramo direito da hipérbole

5. Inverta a posição da haste e do fio em relação aos pontos fixados e execute novamente o processo a partir do item 3 conforme a figura 6.

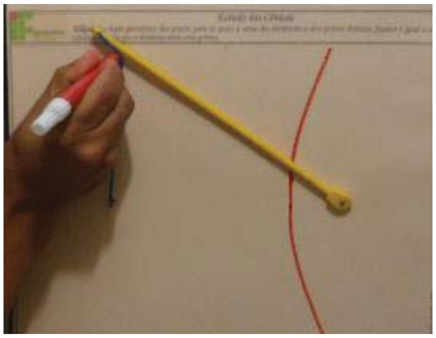


Figura 6: Construindo o ramo esquerdo da hipérbole

Assim, determinam-se trechos de uma curva com dois ramos nos quais se observam que todo ponto *P* desses ramos satisfazem a definição 2 da hipérbole. De fato, a diferença entre as distâncias de *P* aos dois pontos inicialmente fixados é igual ao comprimento da haste menos o comprimento do fio. Veja a figura 7.

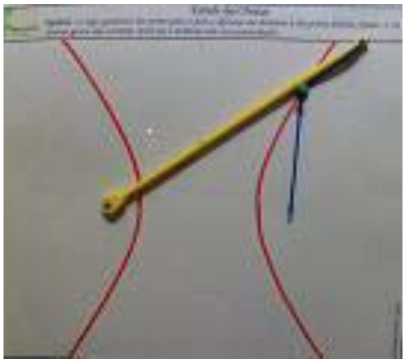


Figura 7: Esboço da hipérbole

Considere F_1 e F_2 os dois pontos inicialmente fixados, *h* o comprimento da haste e *f* o comprimento do fio que vai de F_1 até A. Desta forma, para um ponto P sobre a hipérbole observa-se que :

$$PF_2 - PF_1 = (h - AP) - (f - AP) = h - f = \text{constante.}$$

Os pontos fixados F_1 e F_2 serão denominados de *focos* da hipérbole e o segmento determinado por eles de *segmento focal.*

Tratamento geométrico

1) Trace a reta suporte do segmento focal da hipérbole e a mediatriz deste segmento. A interseção destas duas retas é o centro da hipérbole. Nomeie o centro de *O*.

2) Identifique no esboço da hipérbole os seguintes elementos:

   $A_1 A_2$ = eixo transverso – medindo 2*a*;

   $B_1 B_2$ = eixo conjugado – medindo 2*b;*

   $F_1 F_2$ = segmento focal – medindo 2c*;*

3) 3) Encontre a relação matemática entre as medidas *a*, *b* , e *c* da hipérbole.

Tratamento algébrico

1) Defina analiticamente a curva hipérbole e obtenha a equação reduzida para a mesma.

Material utilizado: 2 pregos tamanho 10x10, E.V.A com 30cm x 50cm x 2cm, cartolina 30cm x 50cm, 1 Agulha para tricô nº 6 de 24cm e barbante inextensível de 15cm.

Parábola

Definição 3. Fixados uma reta e um ponto não pertencente a ela denomina-se parábola o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes da reta e do ponto fixados.

Pode-se esboçar um trecho de uma parábola da seguinte forma:

1. Trace uma reta no plano não pertencente a esta reta.
2. Prenda a extremidade o fio no ponto marcado e com a ponta do pincel mantenha o fio sempre esticado e apoiado na lateral da régua T. Veja a figura 8

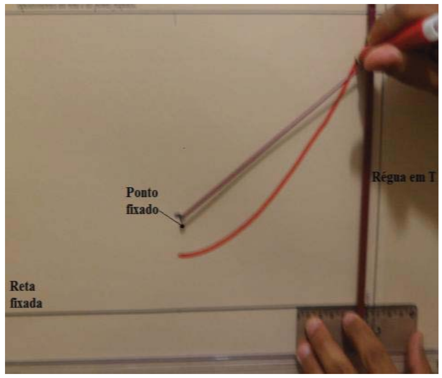


Figura 8: Utilizando o parabológrafo

3. Movimente a régua puxando-a para direita mantendo o fio sempre esticado e junto apoiado na lateral da mesma.

4. Movimente a régua para a esquerda conforme a figura 9.

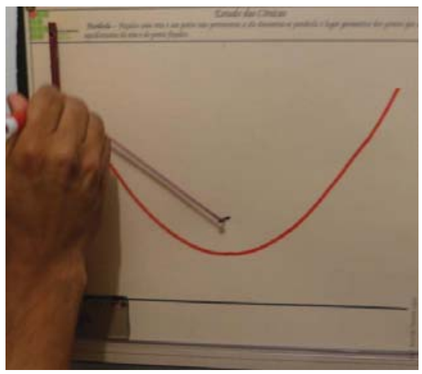


Figura 9: Esboçando a parábola

Os pontos da curva obtida por pertencem a uma parábola, pois todo ponto P sobre a curva é equidistante do ponto F e da reta r, uma vez que o fio tem comprimento igual a distância que vai de A até a extremidade da régua T.

A reta fixada será chamada de *diretriz* da parábola e o ponto fixado será chamado de *foco*.

Tratamento geométrico

1) Construa o eixo de simetria da parábola e estabeleça o seu parâmetro.

Tratamento algébrico

1. Defina analiticamente a parábola e obtenha sua equação reduzida desta curva.

Material utilizado: 3 pregos tamanho 10x10, E.V.A com 30cm x 50cm x 2cm, cartolina 30cm x 50cm, 1 régua de 10 cm, 1régua de 40cm, 1 agulha para tricô nº 6 de 24cm e barbante inextensível 20 cm.

Conclusão

Por meio dessas ferramentas de desenho pode-se visualizar facilmente que se tomarmos um ponto qualquer sobre a curva esboçada tal ponto irá satisfazer a definição da mesma. Com isso, podem-se determinar os parâmetros geométricos das cônicas e em seguida utilizá-los para obter as expressões algébricas dessas curvas. Desta forma, o aluno pode perceber a importância das definições na matemática e compreender melhor o tratamento algébrico das curvas.

Referências bibliográficas

Boulos, P. e Camargos, I. (2005). *Geometria analítica* (3ªed.) São Paulo: Prentice Hall.

Chalouh, L. e Herscovics, N. (1994). Ensinando expressões algébricas de maneira significativa. In: A. F. Coxford; A. P. Shulte. *As ideias da álgebra* (pp. 37-48), São Paulo: Atual editora.

Duval, R. (2003). *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. In: S. D. A. Machado. Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica (pp. 11-33), Campinas SP: Editora Papirus

Iezzi, G. (1993). Geometria Analítica (4ª ed). São Paulo SP: Atual editora

Murdoch, D. (1969). *Geometria Analítica.* Rio de Janeiro: Editora LTDA.

Lima, E. (2006). *Geometria Analítica* e *Álgebra Linear* (2ª ed). Rio de Janeiro: IMPA.

GENERALIZACIÓN EN EL ESTUDIO DE FUNCIONES LINEALES

Ángel Homero Flores Samaniego, Guadalupe Xochitl Chávez Pérez
Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM México
ahfs@unam.mx, matematica60_xch@hotmail.com

Resumen. En este artículo se presentan los avances de una investigación educativa que busca indagar los procesos de generalización de patrones en estudiantes de Bachillerato en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM (edades entre 15 y 17 años) y el papel que tales procesos juegan en el estudio de funciones lineales. Se buscó respuesta a la pregunta: *¿Cuál es el grado de entendimiento del concepto de función lineal en estudiantes de primer semestre de Bachillerato cuando su estudio parte de actividades de reconocimiento de patrones y generalización?,* mediante un experimento de enseñanza exploratoria. Entre los resultados obtenidos se tiene que los estudiantes definen función lineal en el contexto del problema que se está resolviendo, lo cual implica que deben encontrarse mecanismos para trascender este contexto.

Palabras clave: reconocimiento de patrones, generalización, funciones lineales

Abstract. In this paper the advances of an educational research are shown. The aim is to inquire about the pattern generalization processes in Bachillerato students (ages between 15 and 17) at the Colegio de Ciencias y Humanidades, and the role of such processes in the study of linear functions. The answer to the research question: "What is the degree of understanding of the concept of linear function in students from first semester of Bachillerato when their study initiates with activities of pattern recognition and generalization?", through an exploratory teaching experiment. Among the results obtained it was found that students define linear function in the context of the problem that is solving. This implies that it is necessary to find mechanisms to go beyond that context.

Key words: pattern recognition, generalization, linear functions

Introducción

El presente trabajo es parte de las actividades del Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática (SEAM) del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México, y tiene como objetivo presentar los avances de una investigación que busca, entre otras cosas, indagar los procesos de generalización de estudiantes de Bachillerato (15-17 años) y el papel que tales procesos juegan en el estudio de funciones lineales.

Una de las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando inician el estudio del álgebra es el paso del pensamiento aritmético al algebraico principalmente en dos aspectos:

- El uso de literales para representar números (Bills, 1997; Küchemann, 1981) y
- La comprensión del concepto de función; en particular como una relación de dependencia entre dos variables (Sierpinska, 1989).

A esto podemos añadir el obstáculo que las pruebas estandarizadas han significado en el entendimiento de los conceptos. Al respecto baste citar el estudio de Hodgen, Küchemann, Brown y Coe (2009) quienes encontraron que en Gran Bretaña, después de 30 años de reformas, los estudiantes han tenido una mejora en los resultados de las pruebas estandarizadas, pero hay evidencias de que esto se debe más a que los estudiantes han sido entrenados para resolver este tipo de pruebas que a un verdadero entendimiento del concepto:

> Además, vale la pena observar de nuevo que la muestra de estudiantes probada en 2008 corresponde a un grupo de resultados relativamente altos. Por tanto, los datos presentados aquí sugieren que el incremento en el desempeño en los exámenes no viene emparejado con un aumento en el entendimiento conceptual... (p. 545).

La investigación cuyos avances se presentan parte de la siguiente hipótesis: Si un estudiante es capaz de generalizar ciertos resultados a partir de la consideración de patrones en actividades de resolución de problemas, tendrá menos dificultades en la comprensión del concepto de función.

En particular, para el presente trabajo, se buscó respuesta a la pregunta:¿Cuál es el grado de entendimiento del concepto de función lineal en estudiantes de primer semestre de Bachillerato cuando su estudio parte de actividades de reconocimiento de patrones y generalización?

Marco teórico

En el desarrollo del trabajo se consideró el estudio de Küchemann (1981) sobre el uso de literales. Este autor encontró que los estudiantes utilizan las literales en expresiones algebraicas de seis formas: letra evaluada; letra no usada; como objeto; como una incógnita específica; como número generalizado; y como variable. Para efectos de este estudio nos interesa retomar los tres últimos usos de la literal. En la tabla siguiente se detallan estos usos.

Uso de la literal	Interpretación	Ejemplos
Incógnita específica	Se le considera como un número específico, pero desconocido. Es posible operar en éste directamente	$h + 3 = 5$; $h = 2$ Si $x + y = 5$, halla una expresión para $x + y + z$.
Número generalizado	Puede tomar varios valores, no sólo uno.	Los valores que pueden tomar las literales en expresiones como $d = vt$.
Variable	Puede tomar una gama de valores no especificados. Existen relaciones que conectan a dos de tales conjuntos.	Los valores que pueden tomar cuando representan el dominio o el contradominio de una función.

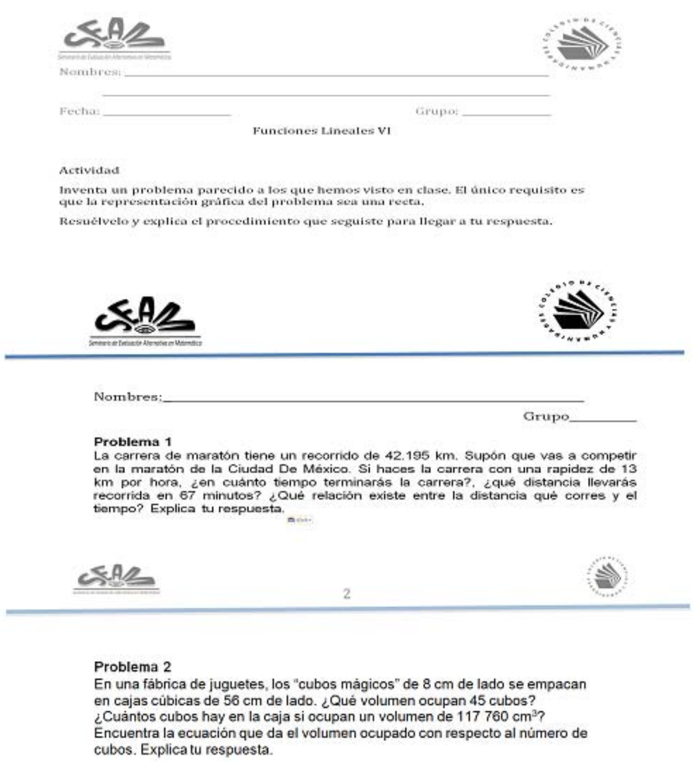
Se define función como la relación de dependencia entre dos variables en la que a cada valor de la variable independiente corresponde un solo valor de la dependiente.

Metodología

Las actividades se llevaron a cabo en un experimento de enseñanza basado en el Modelo de Enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2007, 2010) que se centra en el estudiante y sus aprendizajes, y se basa en consideraciones teóricas generales tomadas de las tesis de Dewey (1989), Vigostsky (1963, 1978), y, en un nivel intermedio, consideraciones propias de la didáctica de la matemática basadas en la teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1997) y de los registros de representación de Duval (1993, 1995), entre otros.

El experimento de enseñanza consistió en el diseño y la aplicación de problemas sobre función lineal. En el desarrollo de la secuencia se privilegió la resolución de problemas y el trabajo en equipo. Los resultados de las actividades se consignaron en hojas de trabajo y la información se organizó mediante una lista de cotejo.

Las actividades de enseñanza tuvieron como objetivo que el estudiante tomara la literal como un número desconocido y después la viera como número generalizado y como variable, en el entendido de que esto facilitaría su comprensión del concepto de función. En la Figura 1 se muestran algunas de las actividades de enseñanza.



Nombres: __________

Fecha: __________ Grupo: __________

Funciones Lineales VI

Actividad

Inventa un problema parecido a los que hemos visto en clase. El único requisito es que la representación gráfica del problema sea una recta.

Resuélvelo y explica el procedimiento que seguiste para llegar a tu respuesta.

Nombres: __________

Grupo __________

Problema 1

La carrera de maratón tiene un recorrido de 42.195 km. Supón que vas a competir en la maratón de la Ciudad De México. Si haces la carrera con una rapidez de 13 km por hora, ¿en cuánto tiempo terminarás la carrera?, ¿qué distancia llevarás recorrida en 67 minutos? ¿Qué relación existe entre la distancia qué corres y el tiempo? Explica tu respuesta.

2

Problema 2

En una fábrica de juguetes, los "cubos mágicos" de 8 cm de lado se empacan en cajas cúbicas de 56 cm de lado. ¿Qué volumen ocupan 45 cubos? ¿Cuántos cubos hay en la caja si ocupan un volumen de 117 760 cm^3? Encuentra la ecuación que da el volumen ocupado con respecto al número de cubos. Explica tu respuesta.

Figura 1. Ejemplos de Hojas de trabajo.

Desarrollo experimental

El estudio se hizo en tres grupos con alrededor de 75 estudiantes de entre 15 y 17 años de edad de primer semestre de bachillerato de la Universidad Nacional Autónoma de México, en el Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Sur turno vespertino.

El experimento de enseñanza tuvo una duración de 20 horas distribuidas en cuatro semanas. Se contempla un "ciclo de investigación" en tres fases:

1.- Diseño y planificación de la enseñanza.

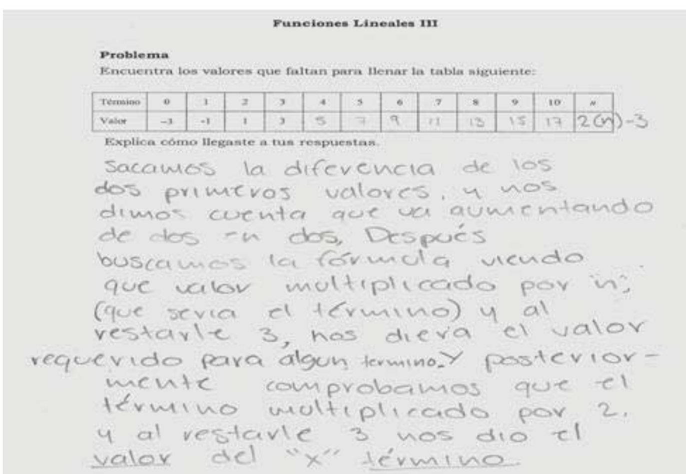
2.- Experimentación en el aula.

3.- Análisis retrospectivo mediante listas de cotejo y rúbricas.

La experimentación en el aula se llevó a cabo siguiendo los lineamientos metodológicos determinados por el propio Modelo de Enseñanza, una de cuyas características principales es permitir la libre comunicación entre los equipos y entre los estudiantes y el profesor. Éste funge como guía y monitor de las acciones.

Resultados

Las figuras 2, y 3 son muestras de hojas de trabajo del tipo de actividades y problemas que se vieron en el experimento. Por falta de espacio no será posible presentar más actividades que sustenten nuestras afirmaciones. En la siguiente sección haremos una pequeña descripción de la información que se puede obtener de estas dos hojas de trabajo, a modo de ilustración de la forma en que se procedió para el procesamiento de las respuestas.



Funciones Lineales III

Problema
Encuentra los valores que faltan para llenar la tabla siguiente:

Término	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
Valor	−3	−1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	2(n)−3

Explica cómo llegaste a tus respuestas.

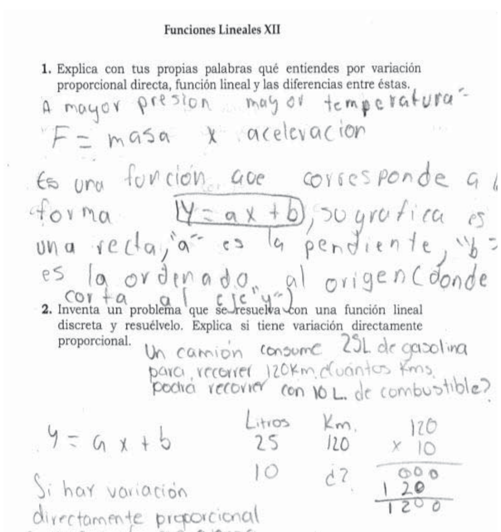
Sacamos la diferencia de los dos primeros valores, y nos dimos cuenta que va aumentando de dos en dos, Después buscamos la fórmula viendo que valor multiplicado por "n" (que sería el término) y al restarle 3, nos diera el valor requerido para algun termino. Y posteriormente comprobamos que el término multiplicado por 2, y al restarle 3 nos dio el valor del "x" término.

Figura 2. Ejemplo 1

En esta actividad los integrantes del equipo consideran a la literal *n* como un número generalizado que puede tomar, al menos, los valores presentados en la tabla. El razonamiento que siguen les permitió encontrar un patrón “nos dimos cuenta que va aumentando de dos en dos”, y a partir de éste buscan una generalización que les relacione las dos columnas, tomando en cuenta que la diferencia entre los valores es de 3: “Después buscamos la fórmula viendo que valor multiplicado por ‘n’...y al restarle 3, nos diera el valor requerido’. Es decir, a partir del reconocimiento de un patrón, fueron capaces de generalizar el procedimiento y relacionar las dos columnas mediante una fórmula matemática tomando la literal *n* como un número generalizado. En la tabla siguiente tenemos la lista de cotejo para esta actividad con los resultados de los 6 equipos participantes de un grupo.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
1. Completaron el renglón correspondiente al valor excepto la última entrada.	✓	✓	✓	✓	✓	✗
2. Tomaron los elementos de una columna y a partir del término obtuvieron el valor.	✗	✗	✗	✗	✗	✓
3. Prueban la regla obtenida con otro par de elementos.	✗	✗	✗	✗	✗	✓
4. Si la regla funciona con el par de elementos la prueban con el resto de parejas.	✗	✗	✗	✗	✗	✓
5. Encuentran la relación entre el término y el valor en forma general.	✗	✗	✗	✓	✗	✓
6.El renglón “valor” es una sucesión	✓	✓	✗	✗	✓	✓

Como se observa, sólo dos equipos lograron encontrar la relación entre el valor y el término. Ésta es una de las primeras actividades de este tipo, y el resultado implica que se debe poner, en actividades posteriores, énfasis en la forma de relacionar las dos columnas. Esto y la respuesta del equipo mostrado (Figura 2) dieron la pauta para introducir el criterio de las diferencias finitas para determinar el cociente de *n* en la relación entre las dos columnas.


Funciones Lineales XII

1. Explica con tus propias palabras qué entiendes por variación proporcional directa, función lineal y las diferencias entre éstas.

A mayor presion mayor temperatura

F = masa x acelevacion

Es una función que corresponde a la forma $\boxed{y = ax + b}$, su grafica es una recta, “a” es la pendiente, “b” es la ordenada al origen (donde corta al eje “y”)

2. Inventa un problema que se resuelva con una función lineal discreta y resuélvelo. Explica si tiene variación directamente proporcional.

Un camión consume 25L de gasolina para recorrer 120Km ¿cuántos kms podrá recorrer con 10 L. de combustible?

y = ax + b

Litros	Km.
25	120
10	¿?

120 × 10 = 1200

Si hay variación directamente proporcional

Figura 3. Ejemplo 2

En la Figura 3 se presenta otra de las actividades, ésta corresponde a una de las últimas de la secuencia y en la siguiente tabla su lista de cotejo.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
Explicaron lo que es variación proporcional directa, con base en la definición (actividad IX)				✓	✓	
Explicaron lo que es variación proporcional directa en forma intuitiva	✓	✓	✓			✓
Definen variables, dependiente e independiente			✓	✓	✓	✓
Explicaron lo que es función lineal	✓	✓			✓	✓
Indicaron la diferencia entre variación proporcional directa y función lineal	✓	✓	✓			
Inventaron el problema solicitado	✓	✓	✓	✓	✓	✓
El problema es una copia de los vistos en clase						
El problema cumple con el requisito de que se resuelva con una función lineal	✓	✓	✓	✓	✓	✓
El problema cumple con el requisito de que se resuelva con una función discreta	✓		✓	✓		✓
Resolvieron el problema	✓		✓	✓	✓	✓
Explicaron si corresponde a variación directamente proporcional						
Hicieron Gráfica	✓	✓	✓		✓	✓

La lista de cotejo y el reporte de la hoja de trabajo dejan ver que no se logró tener el concepto de variación directamente proporcional como se esperaba, sino de manera intuitiva, lo cual se ilustra con los ejemplos de la respuesta de la Figura 3: "A mayor presión mayor temperatura" y "F = masa X aceleración". Pero, según nuestro criterio, el uso de estos ejemplos nos hablan de que se está considerando la literal (por ejemplo la F) como un número generalizado. Mientras que con el problema que inventaron se evidencia que también reconocen las literales como variables.

Entre los resultados más relevantes tenemos los siguientes:

- ❖ Los estudiantes pueden diferenciar entre cantidades constantes y variables.
- ❖ En su mayoría, definen función lineal como una relación de dependencia entre dos variables cuya gráfica es una recta.

- La definición de función se da en el contexto del problema.

Conclusiones

Como respuesta a la pregunta: ¿Cuál es el grado de entendimiento del concepto de función lineal en estudiantes de primer semestre de Bachillerato cuando su estudio parte de actividades de reconocimiento de patrones y generalización? Los resultados apoyan el hecho de que el uso de un razonamiento inductivo (partiendo de la identificación de patrones y su generalización) es de utilidad en la comprensión del concepto de literal como un número generalizado y como variable, facilitando con ello la transición de la aritmética al álgebra, y la comprensión del concepto de función lineal como relación de dependencia entre dos variables.

Lo obtenido no es concluyente, es necesario hacer una revisión más crítica del diseño experimental, sobre todo buscando que las actividades propicien que el estudiante trascienda el contexto del problema en su definición de función lineal.

También se hace necesario contrastar y comparar la información obtenida utilizando más de un instrumento de evaluación. Por ejemplo se podría diseñar una rúbrica específicamente para el concepto de función lineal y llenarla con la información obtenida con una lista de cotejo y una V de Gowin para cada actividad.

*Nota***.** La presente investigación cuenta con el apoyo de la Iniciativa para el Fortalecimiento de la Carrera Académica en el Bachillerato (Infocab) de la UNAM. Proyecto PB100111.

Referencias bibliográficas

Bills, E. (1997). Stereotypes of Literal Symbol Use in Senior School Algebra. *Twenty first Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti, Finland*, Program Committee of PME 21. 2: 73-80.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

Dewey, J., (1989). *Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*, Barcelona: Paidós.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Flores, H. (2007). Aprender Matemática, Haciendo Matemática, *Acta Scientiae,* 9 (1), 28-40.

Flores, H. (2010). Learning Mathematics, Doing Mathematics: a learner centered teaching model, *Educaçao Matemática* e *Pesquisa*. 12 (1), 75-87.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

Hodgen, J., Küchemann, D., Brown, M. y Coe, R. (2009). Children's understandings of Algebra 30 Years on: What has Changed? *Proceedings of CERME 6*, Lyon: Francia (539-548).

Sierpinska A. (1989). On the understanding of the Notion of Function, en Harel G. & Dubinsky E. (Eds) *The concept of function,* Concordia University.

Vigotsky L. (1962). *Thought and Language*. Cambridge: MIT Press.

Vigotsky, L. S., (1978). *Mind in Society*, *The development of Higher Psychological Processes.* Boston: Harvard University Press.

UN ESTUDIO BASADO EN LA COMPETENCIA METAREPRESENTACIONAL

Rebeca Flores García, Mario Sánchez Aguilar
CICATA – IPN México
rebefg@gmail.com, marios@ruc.dk

Resumen. A través del presente escrito nos proponemos mostrar la manera de percibir el estado actual de nuestra investigación que tiene tres rubros sobre los cuales gira: representación, competencia metarepresentacional (MRC) y función. La primera permite proyectar su relevancia y aportaciones dentro del área de la Matemática Educativa. La MRC ayuda a comprender cómo es que los estudiantes generan representaciones y la tercera es valiosa por ser vista como un hilo conductor que atraviesa todos los niveles educativos y por hacer emerger una variedad de estudios en los últimos años. A partir ellos pretendemos realizar un aporte novedoso para el estudio del concepto de función en los niveles básicos. Esta investigación busca distinguirse de las otras por enfocarse en estudiar el entendimiento temprano del concepto de función, sustentada de modo teórico en la competencia meta-representacional.

Palabras clave: función, representación, competencia meta-representacional

Abstract: In this article we show how we perceive the current state of our research that has three items on which it tours: representation, competence meta-representacional (MRC) and function. The first one projects its relevance and contributions in the area of mathematics education. The MRC helps understanding how students generate representations and the third one is valuable because it is seen as a common thread which runs through all levels of education and it brings out a variety of studies in recent years. From those works we intend to make a novel contribution to the study of the concept of function at educative basic levels. This research seeks to distinguish itself from others by focusing on studying the early understanding of the concept of function, using the competence meta-representacional as a theoretical support.

Key words: function, representation, meta-representational competence

Problemática de la investigación

Comenzaré la descripción de nuestro anteproyecto tratando de clarificar al lector de qué no se va a tratar mi investigación: Duval (1999a) habla de la semiosis en términos de representaciones semióticas, aquellas realizaciones constituidas por el empleo de signos, que serían el medio a través del cual un individuo exterioriza sus representaciones mentales, las hace visibles. Por lo tanto, las representaciones semióticas están referidas a las representaciones mentales cubriendo un conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre el objeto, la situación y sobre lo que está asociado (Duval, 1999b). Aunque nuestra investigación abordará el estudio de representaciones, el mismo no tendrá un enfoque como el propuesto por Duval.

La mayor parte de la literatura acerca de la representación en el aprendizaje de la ciencia y de las matemáticas se ha concentrado en un pequeño subconjunto de la competencia referida a las representaciones. La mayoría de los estudios han sido acerca de cómo los estudiantes producen e interpretan representaciones científicas enseñadas tales como gráficas y tablas.

Además, el énfasis se ha puesto en los errores que los estudiantes cometen, más que en las capacidades que los estudiantes poseen. Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) presentan un panorama al respecto, relacionado con funciones y gráficas.

El anteproyecto doctoral que proponemos desarrollar se enmarca en los estudios existentes basados en la competencia meta-representacional (MRC), entre cuyos objetivos está comprender cómo es que los estudiantes aprenden a usar representaciones científicas y matemáticas. La "competencia meta-representacional" habrá de ser entendida como la idea que permite describir un rango completo de capacidades que los estudiantes tienen en relación con la construcción y el uso de representaciones externas. La MRC incluye la habilidad de seleccionar, producir y utilizar representaciones, pero además las habilidades para criticar y modificar representaciones e incluso diseñar nuevas representaciones (diSessa y Sherin, 2000, p.386). Preguntas como: ¿cuánto sobre la representación los estudiantes conocen? ¿Cuánto de esto parece existir antes y de manera independiente de la enseñanza? ¿Cuál es el conocimiento intuitivo que los estudiantes tienen acerca de la representación?, son las que Andrea diSessa y otros se han ido replanteando en distintos ámbitos por varios años, siendo necesario generar una especie de taxonomía para los diferentes aspectos forjados alrededor de la MRC: la invención, la crítica, la funcionalidad y el aprendizaje. Dos son los trabajos que realizan importantes aportaciones respecto a la invención y a los recursos constructivos: los de Bruce Sherin y Flávio Azevedo. En el caso de Sherin (2000), se ve el uso de representaciones específicas que abordan el movimiento a través de segmentos lineales que incluyen longitud y orientación; mientras que en el de Azevedo (2000), trata la representación de datos especialmente distribuidos, por ejemplo, altitud a lo largo de un terreno o el brillo sobre una imagen en un telescopio.

De aquí nuestro interés por apoyarnos en la MRC para responder el siguiente planteamiento: ¿Cuáles son las capacidades que los estudiantes poseen para crear representaciones acerca de la noción de función antes de recibir instrucción formal?

La razón de haber seleccionado la noción de función para desarrollar nuestra investigación se debe a dos razones: la primera tiene que ver con lo que esta noción representa, tanto para la matemática como para la matemática educativa; y la segunda se relaciona con el papel de la noción de función como hilo conductor que atraviesa todos los niveles de enseñanza en la normativa curricular advertida por Díaz (2008).

Jones (2006) sugiere que nuevas formas de representar a la noción de función han surgido a lo largo de su desarrollo y evolución, donde cada una de estas representaciones son importantes para entender un aspecto específico de la idea y donde cada una está ligada fuertemente con las otras, lo cual puede abrumar y confundir a los estudiantes. De ahí ~~mi~~ nuestro interés en apoyarnos en la noción de función para generar una actividad basada en la competencia meta-representacional.

Marco teórico y metodológico

Como hemos referido en la primera parte, las herramientas teóricas y metodológicas a considerar para desarrollar la investigación son las correspondientes a la MRC. Entre las herramientas teóricas a considerar se encuentran:

Competencia meta-representacional: entendida como el rango completo de capacidades que las personas (y en particular los estudiantes) tienen en relación con la construcción y el uso de representaciones externas. Incluye la habilidad de seleccionar, producir y utilizar productivamente representaciones, pero también las habilidades para criticar y modificar representaciones e incluso diseñar completamente nuevas representaciones (diSessa y Sherin, p. 386). La MRC es un conocimiento que trasciende la comprensión de la función y operación de una representación científica específica o de un sistema representacional (diSessa, Hammer, Sherin, y Kolpakowsky, 1991; diSessa y Sherin, 2000).

Recursos constructivos: Sherin (2000) y Azevedo (2000) advierten que funcionan como un conjunto de ideas que los estudiantes utilizan cuando representan aspectos del mundo en papel; es decir, todo el conocimiento previo que poseen y que habrá de permitirles inventar representaciones. En su trabajo, Sherin detecta tres grandes recursos constructivos: el dibujo, las secuencias temporales y las características de un segmento lineal; mientras que Azevedo presenta dos amplias clases de recursos constructivos: el dibujo y el uso de colores.

Secuencias temporales: Sherin (2000) las define como arreglos lineales de elementos individuales que “cuentan una historia” en el orden de los eventos en el mundo real.

Continuidad: De acuerdo con Sherin (2000), está referido a cómo la existencia de cada recurso constructivo se relaciona con el aprendizaje de formas científicas estándares; es decir, que mucho del conocimiento cotidiano acerca de las representaciones que los estudiantes desarrollan es funcional y se gesta debido a su utilidad en algún contexto (Smith, diSessa y Roschelle, 1993). Mientras que Azevedo (2000), se refiere a la continuidad como posibles trayectorias que los estudiantes podrían seguir para construir conocimiento similares a las seguidas en prácticas representacionales científicas.

Respecto a las herramientas metodológicas se ha hecho una revisión de varios de los artículos en los que se alude a la competencia meta-representacional, donde se aprecia que no existe homogeneidad al respecto, sin embargo se ha podido sustraer una ruta a seguir que permita desarrollar la investigación:

Fase inicial (corresponde al diseño y la exploración de la actividad generada con elementos de la MRC):

- Diseñar 2 o 3 actividades considerando lo propuesto en los experimentos didácticos desarrollados dentro de la investigación sobre MRC.
- Poner a prueba las actividades con estudiantes (posiblemente de secundaria), a modo de estudio exploratorio.
- Analizar la evidencia empírica generada a través de la aplicación de las actividades.
- Decidir con base en la evidencia obtenida, la actividad que será usada en la investigación.
- Reajustar la actividad seleccionada considerando los resultados.

Fase *intermedia* (corresponde a la aplicación de la actividad diseñada en la fase inicial, se trabajará de cerca con un profesor para que pueda aplicar la actividad y se pueda conocer su opinión al respecto):

- Preparar al profesor que aplicará la actividad con los estudiantes (o decidir si lo hará el investigador– considerando lo que esto implicaría)
- Seleccionar la muestra para el estudio (se realizarían estudios de caso, para poder dar seguimiento y profundizar en las evidencias generadas por los estudiantes).
- Implementación de la actividad en el aula.
  - Determinar la cantidad de sesiones a utilizar
  - Las sesiones serán videograbadas
  - Los estudiantes y el profesor participante serán entrevistados//,// con la finalidad de conocer detalles de las respuestas de los estudiantes y el punto de vista del profesor al estar aplicando la actividad, las dudas que tuvieron los alumnos y cómo resolvió las dudas el profesor.
- Se elaborará una guía de entrevista para el profesor y para los estudiantes.
- En función de los resultados obtenidos de la actividad resuelta se preparará un guión con preguntas más detalladas, si algún caso lo requiriere, todo ello dependerá de lo que se genere y vislumbre.

Fase de *cierre* (Donde se seleccionará el material pertinente para ser analizado en función de lo experimentado en la fase intermedia, ya que se prevé que no todo lo que se obtenga puede ser necesariamente útil, por ello es importante tener un posible método de análisis de la información), por ello:

- Se generará una estrategia para realizar el análisis de los datos.
- Se realizará la presentación de los resultados y las posibles aportaciones.

Dado que el estudio que pretendemos desarrollar se inserta en la MRC, se hace relevante no perder de vista nuestro objeto de estudio. La naturaleza de la investigación es de corte tanto didáctico como cognitivo. Didáctico, porque se intenta generar una actividad que pueda aportar elementos que den cuenta de lo que los estudiantes están pensando y cognitivo, porque en función de lo que representen a través de dibujos podremos acercarnos a su pensamiento, de allí que el uso de entrevistas dirigidas permitirán saber si lo encontrado en el análisis se asemeja al pensamiento del alumno o no.

Una parte importante para saber si esta metodología es la apropiada o no, es tener un panorama muy amplio del tema desde dos dimensiones que aún falta profundizar: las áreas donde se inserta y la forma en que se hace uso de la metodología.

A manera de conclusión

El trabajo será interesante si logramos generar una actividad que nos deje ver rastros de representaciones que se liguen con contenidos formales y que desde la teoría permitan argumentar al respecto. Esta parte sería el corazón de la investigación, tener muy claro lo que la MRC implica, los elementos que utiliza para poder construir una actividad útil.

En lo particular nos interesa poder hacer una lectura de las evidencias de los estudiantes ~~y~~ que aporten a la MRC. Esa “lectura” se logra solamente involucrándose de lleno con la teoría y sus herramientas teóricas y metodológicas, analizando las actividades propuestas y los resultados encontrados.

Esperaríamos poder desprender desde lo encontrado, otros estudios a desarrollar, ya sea desde la actividad misma, desde lo que se encuentre con los niños, o desde la teoría.

Referencias bibliográficas

Azevedo, F. S. (2000). Designing representations of terrain: A study in meta representational competence. *The Journal of Mathematical Behavior, 19*(4), 423–480.

Díaz, J.L. (2008). El concepto de función: investigaciones y enseñanza. En Rodríguez, E., Sosa, S., Luque, F., Robles, C. y Urrea M. (Eds.), *Memorias de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas* (pp. 35–40). Sonora: Mosaicos matemáticos.

Duval, R. (1999a). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En Hitt, F. y Santos, M (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. pp. 3-26. Columbus.

Duval, R. (1999b). *Argumentar, Demostrar, Explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* México D.F.: Iberoamérica.

diSessa, A., Hammer, D., Sherin, B. y Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. *The Journal of Mathematical Behavior*, *10*(2), 117–160.

diSessa, A. y Sherin, B. (2000). Meta – representation: an introduction. *The Journal of Mathematical Behavior*, *19*(4), 385–398

Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Undergraduate Math Journal, 7*(2), 1-20.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1–64

Sherin, B. (2000). How students invent representations of motion. A genetic account. *The Journal of Mathematical Behavior*, *19*(4), 399 – 441.

Smith, J. P., diSessa, A. A., y Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: a constructivist analysis of knowledge in transition. *Journal of the Learning Sciences*, 3 (2), 115–163.

MAPAS MENTALES COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE PARA LA GRAFICACIÓN DE FUNCIONES EN EL ESPACIO

Elia Leyva Sánchez1, Ruth Elba Rivera Castellon2, Octavio Lázaro Mancilla3
Facultad de Ingeniería e Instituto de Ingeniería - Universidad Autónoma de Bala California México
(Unidad Mexicali)
elia.leyva.s@gmail.com, riveracastellon@gmail.com, olazaro2000@yahoo.com

Resumen. Se realizó un experimento en Cálculo Multivariable con estudiantes de la Facultad de Ingeniería, utilizando mapas mentales como herramienta dinámica y evolutiva que permite unir las distintas expresiones de una función en el plano real y su extensión en el espacio. Se trazaron mapas mentales en cuaderno de hojas blancas, usando lápiz y colores. Los resultados obtenidos muestran la habilidad y sello personal del estudiante para organizar y representar las distintas expresiones de una función. Cabe resaltar que estos son una excelente herramienta impulsora para la creatividad, la capacidad de asociación y percepción.

Palabras clave: graficación de funciones, mapa mental

Abstract. An experiment was conducted in Multivariable Calculus with students of the Faculty of Engineering, using mental maps as dynamic and evolving tool that can join the different expressions of a function in the real plane and its extension in space. Mental maps were drawn in white sheet notebook, pencil and colors. The results show the ability and student personal stamp to organize and represent different expressions of a function. Significantly, these are excellent tool to foster creativity, the ability to associate and perception.

Key words: graphing functions, mental map.

Introducción

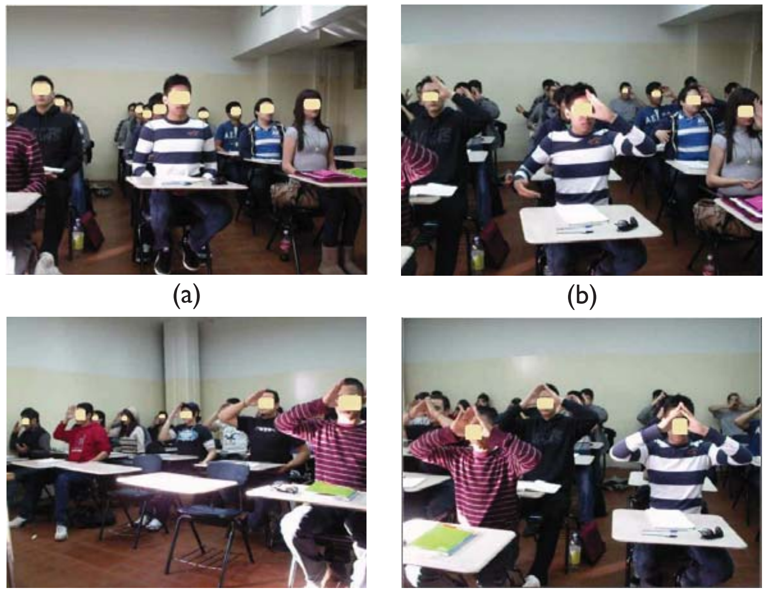
Las matemáticas son el campo de estudio que provee más que otros un foro para el descubrimiento. Sin embargo una de las dificultades en el aprendizaje de cada tópico, es que en matemáticas cada lección contiene nuevas definiciones, propiedades, reglas, aplicaciones, etc. (Pravica y Spurr, 2011) que se van acumulando conforme avanza en complejidad dicho tópico. Este es el caso del concepto de función de variable real, que proviene de la relación numérica entre dos conjuntos. En la experiencia que se tiene al frente del aula en la materia de Cálculo Multivariable, al cuestionar verbalmente en la primera clase a los estudiantes sobre el concepto de función, el resultado era abrumador, inicialmente se creaba un gran silencio, segundos después algunos balbuceaban a manera de rezo algunas de sus características, pero en sí, los estudiantes no tenían claro cómo definir una función. Lo mismo pasó al cuestionarlos sobre los tipos de familias de funciones, o sobre las características que describen al plano real y al espacio real. En la búsqueda de una técnica o herramienta que permitiera obtener una visión en conjunto de cualquier aspecto de un tópico en Cálculo Multivariable, como lo son, los conceptos de punto, línea, plano real, función de variable real, espacio real, función de varias variables reales, etc. y que a su vez las reuniera de forma simplificada, nos encontramos con los mapas mentales, creados por Tony Buzan, estudiante universitario inglés quien se enfrentó en su carrera universitaria con una gran cantidad de apuntes los cuales le requerían mucho tiempo de estudio, y que a su vez, no le permitían obtener buenos resultados de apropiación del conocimiento, el cual disminuía con el tiempo. Tony Buzan se dio a la tarea de resolver dicho problema creando el concepto revolucionario de mapa mental, el cual se apoya en la psicología, la neurofisiología, la semántica, la teoría de la información, la percepción, el pensamiento creativo, la mnemotecnia y la neurolingüística (Cervantes, 2011). Los mapas mentales son una herramienta poderosa que posee cuatro características esenciales: a) el tópico motivo se cristaliza en una imagen; b) los principales temas del tópico irradian de la imagen central de forma ramificada; c) las ramas comprenden una imagen, símbolo o palabra clave sobre la línea asociada. También se asocian a estas otros tópicos de la misma forma; d) las ramas forma una estructura nodal conectada. En esta dirección nos dimos a la tarea de realizar un caso de estudio donde se presentaron los conceptos matemáticos antes mencionados usando los mapas mentales y pidiendo a los estudiantes usarlos ellos también en el transcurso de la materia de Cálculo Multivariable. Enseguida describimos cómo realizamos dicho estudio y algunos de los interesantes resultados que obtuvimos.

Metodología

Se realizó un experimento en la materia de Cálculo Multivariable que se impartió a los estudiantes de tronco común en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California en la ciudad de Mexicali, Baja California México en el ciclo escolar 2011-2. El tamaño del grupo fue de veintisiete estudiantes.

Como ya se mencionó anteriormente dicho experimento surge de la necesidad de englobar las distintas expresiones de una función y lograr la extensión de dos dimensiones a tres dimensiones. Para tal efecto se utilizó una herramienta muy poderosa de percepción, los mapas mentales, con el objetivo de estimular la compresión e interpretación del ambiente que rodea al concepto de función.

Por otra parte, tomando en consideración que cada estudiante es un ser integral, con emociones y procesos mentales individuales, que al llegar a clase lleva una carga emocional distinta y en consecuencia distintos niveles de estrés o ansiedad, que afectan directamente su capacidad de atención y percepción, se aplicó antes de comenzar la clase una técnica de respiración llamada pãnãyãma. Esta técnica permite mediante el ritmo respiratorio relajar los procesos mentales (Marcelli y García, 2008), en la Figura 1 se muestra los pasos que se siguen en esta técnica. Los resultados fueron muy favorables, ya que los comentarios y la actitud de los estudiantes fue de relajación, mejorando su capacidad de atención y actitud para desarrollar su trabajo. (a) Se inició la técnica con espalda erguida haciendo tres inhalaciones profundas y suaves para ir relajando el cuerpo, (b) se abren los brazos y se exhala todo el aire se tapan ambas fosas nasales con ambos pulgares, (c) se inicia la serie de cinco pãnãyãma inhalando por izquierda, (d) y luego por derecha. Se cierra la técnica con inhalación profunda y suave por ambos poros.



(a) (b) (c) (d)

Figura 1

Cabe indicar que al iniciar cada clase se practicaban los ejercicios relajamiento, para posteriormente iniciar la presentación de los contenidos del programa. En la primera clase se explico cómo hacer un buen diseño de mapa mental, el cual debe contener una palabra clave, objeto o tópico principal que se une mediante ramificaciones, como en las neuronas, a otras palabras claves, objetos o tópicos que describen o están íntimamente relacionadas con las características del objeto principal. Es importante resaltar que un mapa mental no es estático, este va evolucionando conforme el objeto o tópico principal es relacionado con otros objetos conceptuales. Cabe indicar que están ampliamente documentados los beneficios que proporcionan los mapas mentales a nivel de percepción de los objetos y como se fijan en memoria de largo plazo (Cervantes, 2011) (Buzan, 2002) (Friz, Sánchez y Cabrera, 2009). Después de la explicación se inició con los ejercicios donde se trazaron mapas mentales en un cuaderno de hojas blancas exclusivo para la clase, usando lápiz, plumas y colores.

Resultados

Para discutir los hallazgos de algunos de los mapas mentales que elaboraron los estudiantes, presentamos las imágenes escaneadas de sus cuadernos las cuales están reducidas por el tamaño del documento, pero corresponden a cuadernos de dibujo tamaño carta. Al revisar dichos cuadernos nos encontramos con mapas mentales muy diversos, desde muy sintéticos hasta los más elaborados. Por ejemplo, el primer mapa mental construido, que trató sobre el concepto de función y las características que la describen, así como sus distintas representaciones, se observa un mapa sintético solo con palabras sin símbolos, ver figura 2. Cuando se extendió el concepto de función a familias de funciones el mapa mental ya muestra además de palabras formas simbólicas y gráficas como se muestra en la Figura 3.

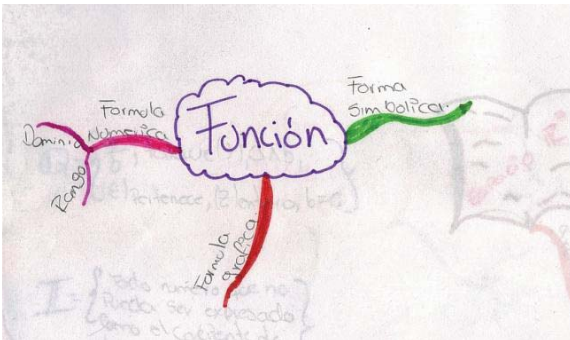


Figura 2. Mapa mental del concepto de función por una estudiante.

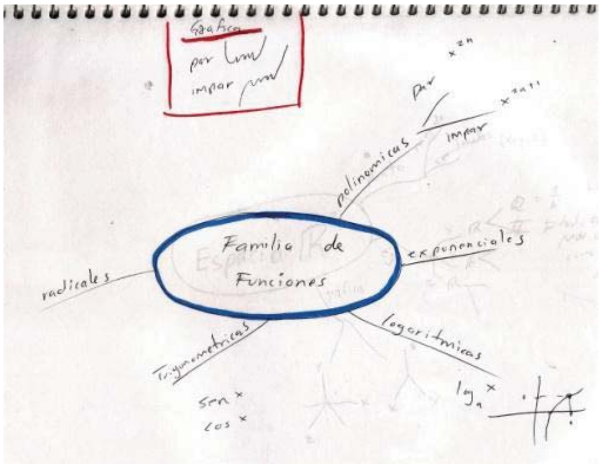
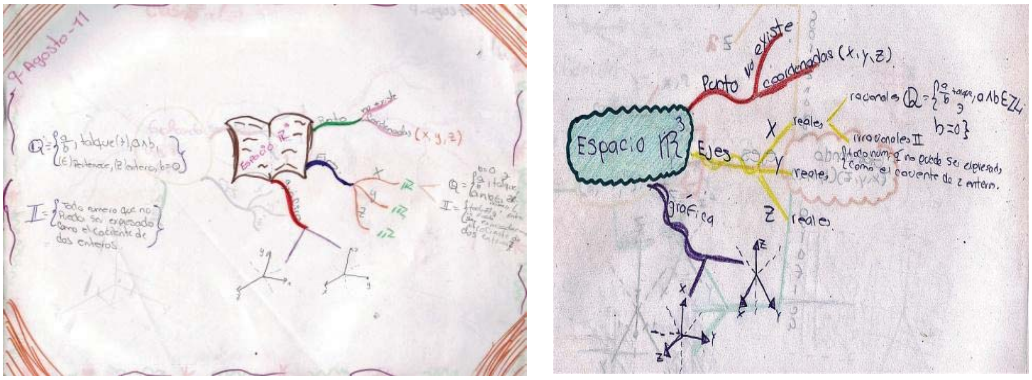


Figura 3. Mapa mental para las familias de funciones realizado por un estudiante.

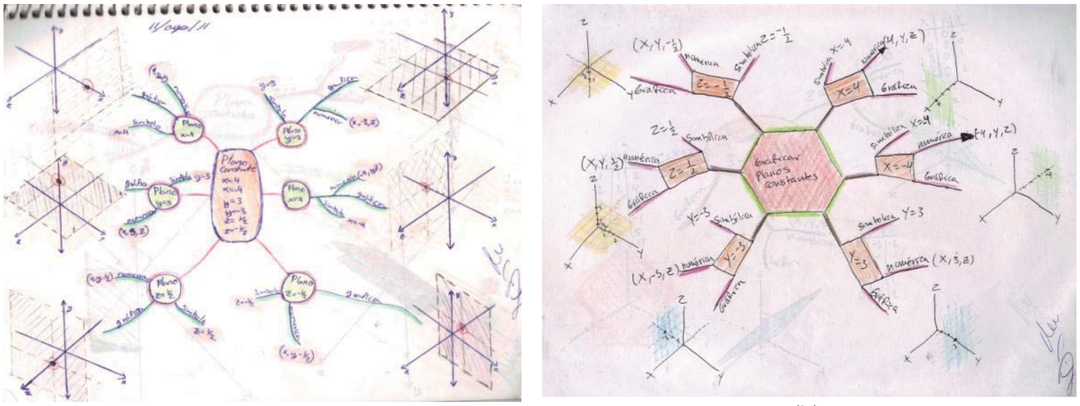
Una vez analizado el concepto de función se presentó el concepto de espacio tridimensional, que incluía su característica geométrica, numérica y simbólica. Por ejemplo en la figura 4, cada mapa mental tiene una expresión artística distinta e incluso la ubicación en la hoja es diferente, la figura 4(a) muestra al mapa mental en el centro, en la figura 4(b) esta hacia la izquierda, la expresión simbólica de la información de la figura 4(b) no se repite, en cambio en la figura 4(a) hay necesidad de reafirmar el concepto de números racionales e irracionales.



(a) (b)

Figura 4. Dos casos distintos de mapa mental sobre el concepto espacio tridimensional.

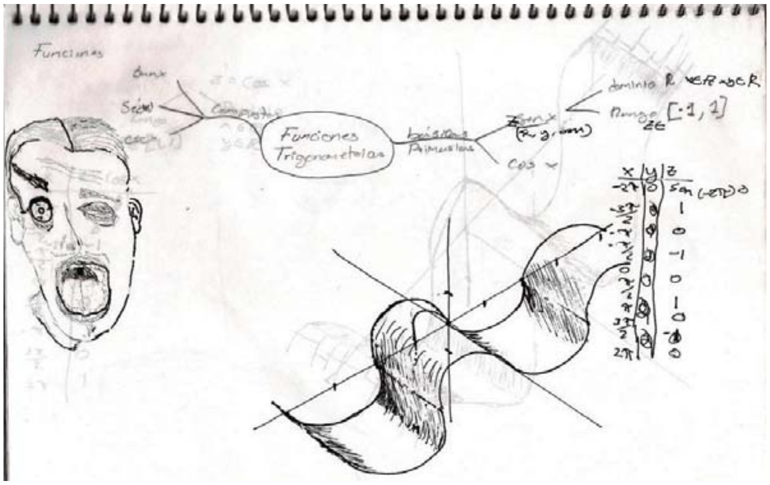
Conforme las clases avanzaron los mapas fueron adquiriendo dinamismo y evolucionaron en presentación y contenido para cada una de las familias de funciones. Por ejemplo la primer familia que se graficó fue las funciones polinomiales, iniciando con los planos constantes. Los estudiantes dibujaron su mapa mental representando a las distintas formas semióticas de una función, la simbólica, la numérica que incluye dominio y rango, así como la gráfica. Cada estudiante ordenó dicha información bajo su propio criterio, no dando jerarquía a ninguna de las representaciones, ya que en clase se les informó que cada representación es la misma función, solo que percibida de distinta forma. Así que los mapas mentales tienen todas sus representaciones, pero con su sello personal como se puede observar en la figura 5 (a) y 5(b) cada estudiante perciben la gráfica de la función en el espacio de forma distinta. En el caso figura 5(a) el plano tiene forma geométrica rectangular, y en el caso figura 5(b) el plano se percibe como una sábana plana sin límites. Por otra parte la palabra plano aparece explícitamente en cada rama del mapa mental figura 5(a), y el de la figura 5(b) no, esto conduce a preguntarse, ¿será que el estudiante que realizó el mapa de figura 5(a) reafirmaba el conocimiento?, o ¿por qué al estudiante de la figura 5(b) solo le basto con poner en la parte central del mapa la palabra plano?, quizás esto es una evidencia que en el proceso de aprendizaje el estudiante involucra su seguridad en la apropiación del conocimiento, o que tanto requiere reafirmar un concepto para adquirirlo.



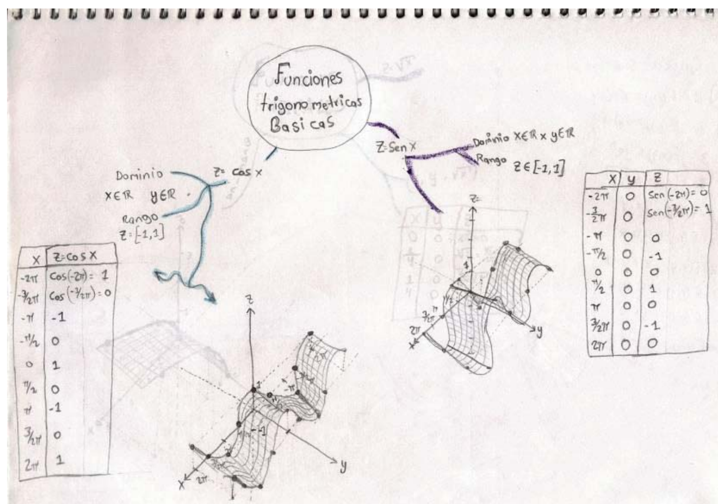
(a) (b)

Figura 5. Mapas mentales de planos constantes.

Otro caso interesante es la introducción de la graficación de funciones trigonométricas en el espacio tridimensional. En la figura 6 se presentan dos casos sobre el mismo ejercicio. En el caso de la figura 6(a), el estudiante muestra la información un poco desorganizada de la función *sen(x)*, no une la representación grafica a su representación simbólica, la tabla numérica casi se empalma con la gráfica. El estudiante en este ejercicio debería haber realizado un procedimiento similar la para función *cos(x)*, sin embargo no lo realizó. Además muestra una imagen que proyecta un rostro con un estado emocional de ansiedad y desesperación la cual da origen a las siguientes conjeturas ¿qué pasa con este estudiante?, ¿se resiste al aprendizaje?, ¿tiene problemas personales?, ¿qué situación le incomoda de la materia? La evidencia de su mapa mental indica que hay facilidad para dibujar y graficar, ya que la representación gráfica de la función está muy bien realizada, sin embargo le hace falta información como los nombres de los ejes, los valores correspondientes a los puntos de cruce de la función con los ejes, así como sus valores mínimos y máximos. Por otra parte en la figura 6(b) del mismo ejercicio, la información del mapa mental es más clara, la formas semióticas de la función están claramente relacionada y le basto con un solo mapa para graficar las dos funciones, le puso color para distinguirlas. Las figuras 6(a) y 6(b) se realizaron en la misma clase, la evidencia indica que el aprendizaje está ligado al estado emocional del estudiante, es decir, en una clase de matemáticas el aprendizaje no abstrae al estudiante de su realidad personal.



(a)



b)

Figura 6. Graficación de la función trigonométrica en el espacio tridimensional.

Observaciones

Los mapas mentales de los 27 cuadernos que los estudiantes involucrados en esta investigación desarrollaron, muestran la percepción y la personalidad, que están impresos en cada uno de ellos y son evidencia de su capacidad, habilidad y disposición para organizar y representar las distintas expresiones de una función. Comprobamos que los mapas metales son una excelente herramienta impulsora para la creatividad, la capacidad de asociación y percepción de los estudiantes hacia los conceptos. El trabajo continúa con un nuevo grupo actualmente, utilizando los mapas mentales para analizar el comportamiento de las superficies que modelan matemáticamente fenómenos reales, el objetivo es estudiar si esta herramienta permite el aprendizaje significativo y el desarrollo de la capacidad de análisis.

Referencias bibliográficas

Buzan, T. y Buzan, B. (2002). *El libro de los mapas mentales*. Edición. España: Urano.

Cervantes, V. L. (2011). *El ABC de los mapas mentales*. Edición México: Asociación de Educadores Iberoamericanos.

Marcelli, A. y García, F. (2008). *Una clase de Yoga*. Edición México: Solar Fundación Cultura.

Friz, M., Sánchez, A. y Carrera, C. (2009). Concepciones en la enseñanza de la Matemática en educación infantil. *Perfiles Educativos, 31*(125), 62-73.

Pravica, D.W. y Spurr, M.J. (2011). *Mathematical Modeling for the scientific method*. USA: Jones & Bartllet Learning.

CAPITULO 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo de Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

Guadalupe Cabañas-Sánchez

Universidad Autónoma de Guerrero (México)
gcabanas.sanchez@gmail.com

Las contribuciones de este capítulo problematizan la construcción social del conocimiento matemático desde la Teoría Socioepistemológica (TS), a objeto de incidir en el rediseño del discurso matemático escolar. Los estudios sustentados en la TS toman en cuenta la complejidad del saber matemático en la vida de las personas, de cómo funciona cognitiva, didáctica y epistemológicamente dicho saber en determinados grupos de personas, enfatizando en su funcionalidad.

El saber desde esta teoría, se entiende como el conocimiento en uso, por ello se cuestiona cómo actúan y aprenden las personas con relación al contexto en que se encuentran a fin de formular epistemologías basadas en prácticas sociales que generen conocimiento matemático.

Los usos del conocimiento matemático articulan dos categorías: la resignificación y la justificación funcional (Cordero, 2001; 2005). La resignificación muestra la función de la práctica social y el desarrollo del uso del conocimiento en situaciones específicas y; la justificación funcional se refiere a que los mecanismos de desarrollo del uso del conocimiento en la situación específica son funcionales, como contraparte de una justificación razonada. Ahora bien, ¿Por qué se habla de resignificar este conocimiento? Cordero (2001) sostiene que es debido a que la "obra matemática" no ha sido funcional en los procesos educativos , lo que no implica que la "obra matemática" no sea funcional.

En este sentido, creemos que los resultados de investigaciones socioepistemológicas han impactado de manera positiva en el rediseño del discurso matemático escolar a través del diseño de situaciones de aprendizaje y su puesta en escena, asimismo, mediante programas de formación docente en matemáticas (e.gr. Farfán, 2012), así como de investigadores en nuestra disciplina, la Matemática Educativa. Por cuanto a la formación docente, Montiel (2010) afirma que llevar al aula propuestas didácticas que rediseñen el discurso matemático escolar no se limita a secuencias que el profesor debe seguir como algoritmos, sino que debe reconocer en ellas cómo se problematiza un saber, el tipo de interacción que se genera en el sistema didáctico, los momentos de construcción de conocimiento, cuándo se logran los objetivos de aprendizaje, cómo se generan construcciones personales y colectivas, cómo pasar del consenso a la institucionalización del saber, reconocer los momentos de intervención para provocar respuestas del estudiantado, etcétera.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), *265-286.*

Cordero, F. (2001). La Distinción entre construcciones del cálculo. Una Epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 103-128.

Farfán, R.M. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. España: Gedisa.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: Formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-I), *69-84.*

OTROS SIGNIFICADOS EPISTEMOLÓGICOS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Carlos Rondero Guerrero, Rosalba López Gómez
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
Secretaría de Educación Jalisco
ronderocar@gmail.com, rlopezgomez@yahoo.com

Resumen. El cálculo de áreas ha sido desde tiempos remotos un problema a resolver. Arquímedes es reconocido como el iniciador del cálculo integral, de modo tal que variantes de sus ideas originales se reflejan particularmente en el método de cuadraturas. En este artículo se hace un recorrido histórico-epistemológico del cálculo de áreas bajo las curvas de parábolas genéricas $y=x^k$, y de sus inversas, hipérbolas genéricas, $y=x^{1/k}$, para realizar el rescate de diferentes significados de la integral definida y así propiciar su instalación en la didáctica del cálculo.

Palabras clave: epistemología, promediación, didáctica, significados

Abstract. Calculating of areas has been a problem to solve since ancient times. Archimedes is recognized as the initiator of integral calculus, so that other variants of his original ideas its reflected particularly in the method of quadratures. In this paper its make a historical and epistemological route of the calculating of areas under the curves of generic parabolic $y=x^k$, and his inverse, generic hyperbolic, $y=x^{1/k}$, to do a rescue of other meaning of the definite integral and thus propitiate his installation in the didactic of Calculus.

Key words: epistemology, average, didactic, meanings

Introducción

Se parte de la consideración de que el problema relacionado con el cálculo de áreas, ha sido estudiado en diferentes épocas y desde las perspectivas de varios autores, hasta llegar a las grandes aportaciones de Newton y Leibnitz a lo usualmente se le llama el descubrimiento del cálculo. En este trabajo se hace un breve recorrido sobre autores como Arquímedes, Bernoulli y Wallis, para mostrar como a partir de sus métodos se hacen evidentes algunos de los significados de la integral definida. Finalmente se contrasta con otro método que se desprende de la noción de promediación, y al que denominamos media potenciada. A partir de tales perspectivas es posible realizar propuestas para su posible incorporación a la didáctica del cálculo, particularmente en lo que se refiere a la integral definida.

La perspectiva de Arquímedes

Históricamente desde tiempos remotos se ha venido estudiando un problema denominado de las cuadraturas aritméticas. Arquímedes usó las fórmulas de la suma de enteros y de sus cuadrados,

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\,;\; 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para establecer resultados equivalentes a las integrales, Edwards (1979),

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}; \qquad \int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Sin embargo, el método de cálculo de Arquímedes conlleva trabajar con desigualdades como las que hace mención en una carta dirigida a Eratóstenes, Torija (1999), *Arquímedes explica que las razones entre los* volúmenes de estos cuerpos y los de los conos pueden encontrarse por medio de *procedimientos de estática; pero en el trabajo Sobre los conoides y esferoides se propone comparar los volúmenes por procedimientos puramente geométricos.*

Es en esta ocasión cuando más se aproxima al cálculo integral moderno, al colocar el volumen que quiere estudiar entre dos series de cilindros inscritos y circunscritos, estos volúmenes difieren tan poco como se quiera, lo que le permite establecer las desigualdades:

$$\frac{n^2}{2} < 1+2+3+\cdots+n < \frac{(n+1)^2}{2}; \quad \frac{n^3}{3} < 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 < \frac{(n+1)^3}{3}$$

con lo que Arquímedes llega prácticamente a establecer el concepto de integral definida.

De lo anteriormente señalado, resulta entonces viable preguntarnos acerca de la forma en que se pueden emplear estas desigualdades para el cálculo de integrales definidas y poder así dar alguna evidencia de que efectivamente Arquímedes contribuyó a establecer los elementos básicos del cálculo integral. La demostración de la primera desigualdad es más o menos inmediata, considerando que,

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

De manera tal que,

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} > \frac{n^2}{2},$$

pues se le está agregando a $\frac{n^2}{2}$, un término positivo $\frac{n}{2}$.

En forma parecida para el lado derecho de la doble desigualdad,

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} < \frac{(n+1)^2}{2} = \frac{n^2}{2} + n + \frac{1}{2}$$

Luego entonces,

$$\frac{n^2}{2} < \frac{n(n+1)}{2} < \frac{(n+1)^2}{2}$$

O sea que efectivamente se cumple la desigualdad de Arquímedes,

$$\frac{n^2}{2} < 1+2+3+\cdots+n < \frac{(n+1)^2}{2}$$

Ahora bien, se puede ocupar esta desigualdad para establecer la integral de *f(x)=x*, en el intervalo *[0,1]*. Si dividimos entre n^2, se obtiene,

$$\frac{1}{2} < \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} < \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

Al realizar una equipartición del intervalo de integración *[0,1],* en n subintervalos de igual tamaño 1/n, de manera tal que los extremos quedan dados por *0/n, 1/n, 2/n, 3/n,* …, *n/n* , se tiene es posible tener a su vez *n* rectángulos todos de base fija *1/n* y alturas, *1/n, 2/n, 3/n, …, n/n,* cuyas respectivas áreas son,

$$A_1 = \frac{1}{n}\frac{1}{n};\ A_2 = \frac{1}{n}\frac{2}{n};\ A_3 = \frac{1}{n}\frac{3}{n}\ ;\ldots;\ A_n = \frac{1}{n}\frac{n}{n}$$

La suma de las *n* áreas de los rectángulos correspondientes son,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n = \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\frac{3}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{n}{n}.$$

Retomando las desigualdades de Arquímedes se obtiene,

$$\frac{1}{2} < \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} < \frac{n^2+2n+1}{2n^2}$$

las que se expresan de la forma,

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\frac{3}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{n}{n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

Se cumple que,

$$\frac{1}{2} < \mathrm{A} < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

Esta última desigualdad posibilita el realizar un paso al límite cuando $n \to \infty$, que resulta bastante accesible, además aparece el resultado de que si un valor A está acotado por la izquierda y por la derecha y si después de tomar el límite ambos tienden a un mismo valor ½, entonces *A=1/2*.

Por tanto el área total que coincide con el área bajo la curva es,

$$A = \frac{1}{2}$$

Es decir,

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Siguiendo un procedimiento similar, para el caso de la función *f(x)=x²*, si se quiere calcular el área bajo la curva en el intervalo *[0,1],* y tomando en consideración la segunda desigualdad de Arquímedes que se obtiene al dividir entre n^3,

$$\frac{1}{3} < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} < \frac{(n+1)^3}{3n^3},$$

queda,
$$\frac{1}{3} < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^2}$$

O sea,
$$\frac{1}{3} < A < \frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^2}.$$

Al tomar el límite del lado izquierdo de la desigualdad cuando $n \to \infty$, se concluye que, *A=1/3,* de donde,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

La perspectiva de Bernoulli

Posteriormente muchos siglos después, Jakob Bernoulli, expresa la suma de los primeros *n* enteros y la suma de sus cuadrados de la forma,

$$\int n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n; \qquad \int n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Donde el símbolo usado por Bernoulli, $\int n$, tiene el significado de $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, o bien, $\int n^2$, se relaciona con, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

Y además se cumple que la suma de los coeficientes en cada una de las sumas correspondientes es siempre uno.

Las mismas expresiones se pueden representar de la siguiente forma,

$$; \frac{1}{n^3}\int n^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Es posible calcular en forma similar las integrales definidas correspondientes de *f(x)=x* y *f(x)=x*^{2}, al realizar la misma equipartición el intervalo de integración *[0,1],* lo que arroja por supuesto los mismos resultados antes encontrados usando las desigualdades de Arquímedes.

En ambos casos estas dos cuadraturas tienen como consecuencia que al calcular los límites cuando $n \to \infty$, se obtienen los resultados esperados,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

La perspectiva de Wallis

Wallis en su famoso libro Arithmetica infinitorum, usa la razón del cuadrado de los indivisibles, que usa para calcular la integral,

$$\int_0^1 x^2 dx$$

El método se expresa de la forma,

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\text{L} \;+n^2}{n^2+n^2+n^2+\text{L} \;+n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

Lo que le permite calcular cuando $n \to \infty$, la integral definida, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Por otra parte, desde su propia perspectiva, Wallis uso la siguiente notación para calcular el área bajo la curva de una función y su inversa, así como la figura correspondiente referida a un cuadrado de área uno, Edwards (1979),

$$\int_0^1 x^{1/k} dx + \int_0^1 x^k dx = 1$$

De donde, usando el resultado previo,

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k}$$

se tiene que,
$$\int_0^1 x^{1/k} dx = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(1/k)+1} = \frac{k}{k+1}$$

Desde esta perspectiva geométrica, siguiendo los mismos resultados, se tiene que las integrales definidas de las funciones de la forma *f(x)*=x^k llamadas parábolas genéricas, cuando se integran en el intervalo, y de las hipérbolas genéricas *f(x)* =$x^{1/k}$, en el intervalo, toman la forma,

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}; \qquad \int_0^{a^k} \sqrt[k]{x}\, dx = \frac{k}{k+1} a^{k+1}$$

Es así como se puede realizar una doble operación, la integral de su función original y la de su inversa, siempre en el entendido de que la suma de ambas áreas es igual al área total de un rectángulo de base *a* y altura a^k, esto es, $A= a.a^k= a^{k+1}$

$$\int_0^a x^k dx + \int_0^{a^k} x^{1/k} dx = a^{k+1}$$

o bien,

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{k+1} a^{k+1} + \frac{k}{k+1} a^{k+1} = \frac{k+1}{k+1} a^{k+1} = a^{k+1} = A_t$$

La perspectiva de la promediación

Si desde esta mismo acercamiento se analiza el caso de la integral definida de cada una de las funciones *y=x* y *y=*x^2, en el intervalo de integración *[a ,b],*

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}; \qquad \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

bajo el entendido de que ahora el tamaño del intervalo es *b-a*, si se divide entre ese valor se obtendrá una altura promedio,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{b-a}\,\frac{(b-a)(a+b)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Analizando las anteriores expresiones, Rondero (2001), se puede considerar que el área bajo la recta *f(x)=x*, toma la forma de un trapecio que resulta de la semidiferencia de cuadrados $\frac{b^2-a^2}{2}$, que a su vez tiene un área equivalente a la de un rectángulo de base *b-a* y altura promedio $\frac{a+b}{2}$.Para el caso de la función $f(x)=x^2$, el área bajo la curva ya es un sector parabólico cuya área puede ser calculada con un rectángulo de área igual a la base b-a, por la altura promedio $\frac{a^2+ab+b^2}{3}$.

Como se puede observar el cálculo del área bajo la curva, al menos para las parábolas generalizadas $f(x)=x^k$, en el intervalo *[a ,b],* siempre se puede expresar como el área de un rectángulo de base *b-a* multiplicada por la correspondiente media aritmética potenciada $M_k(a,b)$, que se puede evaluar para cada valor de *k* por medio de la relación,

$$M_k(a,b) = \frac{1}{k+1}\sum_{n=0}^{k} a^{k-n}b^n$$

Resulta también interesante preguntarse sobre la forma que adquiere la altura promedio para las funciones inversas, $y=\sqrt[k]{x}=x^{1/k}$, si del cálculo del área bajo la curva ya analizada,

$$\int_{a^k}^{b^k} \sqrt[k]{x}\,dx = \frac{k(b^{k+1}-a^{k+1})}{k+1}$$

si se divide entre el tamaño del intervalo de integración, $b^k - a^k$, se tiene,

$$\frac{1}{b^k-a^k}\int_{a^k}^{b^k} \sqrt[k]{x}\,dx = \frac{k(b^{k+1}-a^{k+1})}{(k+1)(b^k-a^k)}$$

desarrollando el segundo término la expresión que representa una altura promedio queda de la forma,

$$\frac{1}{b^k-a^k}\int_{a^k}^{b^k} \sqrt[k]{x}\,dx = \frac{M_k(a,b)}{M_{k-1}(a,b)}$$

o bien,

$$\int_{a^k}^{b^k} \sqrt[k]{x}\,dx = (b^k-a^k)\frac{M_k(a,b)}{M_{k-1}(a,b)},$$

En todos los resultados anteriores de una u otra forma aparece el teorema del valor medio para integrales, en el que se hace referencia a la forma de calcular la altura promedio de una función continua *f(x)* en el intervalo de integración *[a ,b],* de manera que existe un valor *c* en *(a, b),* tal que,

$$\overline{f(c)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \text{ , o bien, } A = \int_a^b f(x)dx = (b-a)\overline{f(c)}.$$

Reflexiones finales

El desarrollo histórico-epistemológica de este trabajo permite hacer una contribución a la didáctica del cálculo en el sentido de ampliar la perspectiva conceptual de la integral definida retomando las contribuciones de varios autores.

En la didáctica actual del cálculo, particularmente de la integral definida, existe una seria limitación en los estudiantes respecto a los significados asociados a la misma.

Se ha hecho un rescate epistemológico de significados de la integral definida en términos del área bajo la curva de parábolas genéricas $y= x^k$, vistas como áreas proporcionales de rectángulos de base *a* y altura a^k.

En un enfoque rescatado de Wallis, se presenta una significación de parábolas genéricas $y= x^k$, y de sus inversas, las hipérbolas genéricas $y=x^{1/k}$, como áreas bajo la curva que son entre sí complementarias del área total del rectángulo de base *a* y altura a^k.

Referencias bibliográficas

Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Rondero, C. (2001). *Epistemología y didáctica: Un estudio sobre el papel de las ideas germinales <ponderatio> y <aequilibrium> en la constitución del saber físico matemático*. Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* Madrid: Nivola.

PRÁCTICAS DE PASO AL LÍMITE EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Marvin Mendoza V., Leonora Díaz M.
Universidad Nacional Autónoma de Honduras Honduras
Universidad de Los Lagos Chile
vinmar28@hotmail.com, leonora.diaz@ulagos.cl

Resumen. Este reporte da cuenta de un estudio exploratorio de prácticas de paso al límite en estudiantes de primer año universitario. Investigaciones muestran que los estudiantes no se apropian significativamente de esta noción. Entre otros, concurren a esta problemática un obstáculo sociocultural a su aprendizaje; una carencia de referencias a fenómenos exteriores a la matemática y que el límite organiza; y, divorcio entre la intuición y el saber, dificultando la construcción matemática del infinito. Con base en el desarrollo de actividades, se explora la puesta en escena de los infinitos potencial y actual, en el cálculo del límite matemático.

Palabras clave: estrategias de Enseñanza, límite matemático, infinitos potencial y actual

Abstract. This research illustrates an exploratory study of pass to the limit practices of freshman university students. Investigations show that students do not understand this idea properly. Among others, this is a sociocultural barrier problem; lack of references to external mathematical phenomena so that it allows the limit to organize; and also the divorce between intuition and knowledge which makes the mathematical construction of limit a difficult task. Based on the development of activities, it explores the staging of the infinite potential and actual, in calculating the mathematical limit.

Key words: teaching strategies, athematical limit, infinity potential, actual infinity

Introducción

Es conocido que la enseñanza del cálculo constituye uno de os mayores desafíos de la educación terciaria actual, ya que su aprendizaje trae ligado dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior. Se debe abordar el desplazamiento de un pensamiento algebraico a uno analítico, de usar igualdades a usar aproximaciones.

Para Artigue (1995) las dificultades en la enseñanza del cálculo provienen de: a) la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo; b) la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y su tratamiento en la enseñanza; y, c) la ruptura álgebra / cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico.

Antecedentes

Diferentes autores han desarrollado investigaciones que giran en torno a la problemática de la enseñanza-aprendizaje del límite matemático. Díaz-Moreno, L. (1999) reporta como obstáculo sociocultural a su aprendizaje, a la estructura de la representación cotidiana de límite. Resultado del cruce de dos ejes categoriales, los ejes de dipolos "evolución"/"involución" y "dentro de las normas"/"fuera de las normas" de connotaciones positivo-negativa respectivamente. Se establece cuatro mundos posibles a los que el estudiantado asocia la noción cotidiana de límite. Una mayoría adscribe al mundo de "*lo que no puedo hacer*" "*cuando* *llegamos a una situación límite (…) ya no puede ser revertida*" y por ende se debe "*evitar llegar a ella*". Eluden traspasar un límite que los expone a riesgos vitales, fungiendo esta representación como un obstáculo al aprendizaje, requiriéndose un diálogo del aula con ella.

Por su parte, Molfino (2010) alerta que se carece de referencias a fenómenos exteriores a la matemática y que, el límite organice. Si, desde una perspectiva fenomenológica (Freudenthal, 1983), las nociones matemáticas emergen en calidad de organizadoras de los fenómenos, este hecho limita de modo sustantivo diseñar la enseñanza para su apropiación.

Para Leston (2011), existen situaciones a nivel social que requieren de un concepto como el infinito, en tanto que la escuela deja fuera a las intuiciones que estas propician, obstaculizando la construcción del infinito matemático en el aula. Tales situaciones han de indagarse para diseñar una enseñanza que evoque en los estudiantes, primeras aproximaciones con el infinito, para después, llevarlos a la construcción del infinito matemático.

Justificación

Este reporte de investigación toma en consideración los análisis previos en los rendimientos de Cálculo Diferencial de los estudiantes de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH) durante el año 2010, específicamente en los contenidos pertinentes al límite. Estos resultados, provocaron un descontento en los docentes de Ingeniería, porque más del cincuenta por ciento de los estudiantes reprobó. Esta situación causó un desafío en los docentes, específicamente investigar los procesos de enseñanza y de aprendizajes del cálculo, en particular la problemática que dichos procesos presentan, en lo referente a la construcción del pensamiento matemático superior.

Las investigaciones que mencionamos en el apartado de antecedentes, nos sirvieron como punto de partida para analizar el problema del tema en cuestión. Reflexiones en relación a que una enseñanza tradicional del límite no favorece el desarrollo de significados acerca de la comprensión del contenido y de su aplicabilidad, puesto que, la misma genera poca interactividad profesor/estudiantes y estudiantes/estudiantes, que se instala en ese tipo de enseñanza. La posibilidad de generarse debates en torno a la problemática del límite, se ve reducida, aspecto que poco contribuye para afianzar los significados asociados a este concepto.

La situación mencionada en el párrafo anterior, repercute de modo dramático en las carreras de Ingeniería, en donde es de suma importancia el manejo comprensivo del límite para su posterior aplicación en situaciones problemas, propias a su especificidad. En el caso de la carrera de *Ingeniería Agroindustrial, de la UNAH-TEC Danlí*, no se da una excepción a los resultados insatisfactorios. Los estudiantes no son capaces de reproducir de manera significativa los conocimientos, supuestamente aprendidos, y en su mayoría no muestran una apropiación significativa del concepto de límite.

Objetivos del estudio

Esta investigación se propone caracterizar estrategias estudiantiles que entran en escena, cuando se incorpora a los estudiantes a trabajar con situaciones construidas con recursos de geometría sintética, y que involucran procesos infinitos para propiciar el paso al límite. Específicamente dar cuenta de los desempeños que presentan los estudiantes al transitar entre registros particularmente, geométrico, analítico-algebraico y verbal, así como también detectar el acercamiento de los estudiantes hacia los infinitos, tanto el potencial como el actual, que les permita dar el paso al límite en contextos de geometría sintética y haciendo uso del recurso de la visualización.

Marco teórico

En esta investigación se utilizaron elementos teóricos de la *Teoría de Representaciones Semióticas de Duval,* una mirada particular para la visualización, definición de infinitos en sus facetas potencial y actual y la definición del paso al límite**.** Para Duval (1999), las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación.

En este contexto trataremos, en lo posible, de enfocarnos en los desplazamientos entre los registros que realizan los estudiantes, al trabajar el paso al límite en contextos de geometría sintética. Lo anterior implica realizar una caracterización de las textualidades de los jóvenes al enfrentarse en actividades que involucran el paso al límite y en los procesos infinitos.

Con respecto a visualización, se entenderá en el sentido de representaciones geométricas o gráficas que requieren de un proceso personal de cada individuo, y que pueda poner de manifiesto la representación de un determinado objeto y operar sobre ese objeto. Esto incluye representar, transformar, documentar y argumentar.

En lo referente al infinito potencial, se comprenderá como aquel que está fundamentado a la reiteración de un proceso que nunca termina. El infinito actual de esta investigación se fundamenta en algunas ideas de Costa y Otto (2005), que tratan al infinito actual como si fuese un elemento que surge al dar el paso al límite. En este sentido, el infinito da cuenta de la llegada, cuando se abstrae el total de elementos de un proceso indefinido.

En base a los elementos teóricos señalados y los aportes realizados por Díaz (2009), respecto de como interpretan el método de exhaución los matemáticos modernos, se propone una secuencia de actividades que involucran diversos aspectos subyacentes en el paso al límite, con las cuales se busca que el estudiantado pueda acercarse al concepto en mención, de una manera más significativa, centrando el trabajo en el estudiante y en su desempeño, ante situaciones problemas que le permitan afrontar desafíos y quiebres cognitivos. Éstas se orientaron a construir significados para la operación de paso al límite. Su secuencia presenta al estudiantado un itinerario para configurar una red de significados, haciendo concurrir distintos registros y propiciando la puesta en escena de las nociones de infinito potencial e infinito actual, subyacentes al paso al límite.

Metodología

Este estudio responde a una investigación-acción, con el objeto de reflexionar y mejorar un modo de proceder didáctico. Propone una secuencia de actividades matemáticas que promuevan el aprendizaje significativo del paso al límite entre estudiantes que se inician en el estudio del Cálculo.

El estudio, entonces, reporta un primer ciclo de investigación-acción, según una espiral autorreflexiva, que incluye la planificación de las actividades, su puesta en escena del aula, el registro de las elaboraciones estudiantiles y la reflexión con base en sus producciones. Con las cuales se pretende lograr el perfeccionamiento docente en la acción y la mejora de los aprendizajes estudiantiles, así como una propuesta didáctica validada internamente que se orienta al aprendizaje significativo del paso al límite.

La enseñanza inició con la exploración de conocimientos previos de los estudiantes, punto de partida al diseño de las actividades. Estas se orientaron a construir significados para la operación de paso al límite. Su secuencia presenta al estudiantado un itinerario para configurar una red de significados, haciendo concurrir distintos registros y propiciando la puesta en escena de las nociones de infinito potencial e infinito actual, subyacentes en el paso al límite.

Se aplicó un diagnóstico a 30 estudiantes de Ingeniería agroindustrial del segundo semestre de 2011. A continuación se reforzaron temas concurrentes y previos al límite matemático: nociones de álgebra, trigonometría, funciones, intervalos reales, modelación. Enseguida los estudiantes desarrollaron una secuencia de nueve actividades, culminando su desarrollo 23 de ellos. Se destinaron 120 minutos a cada actividad durante cinco semanas.

Diseño de la enseñanza

La enseñanza se realizó en dos fases, la primera que consistió en el diseño de prueba diagnóstica. Para ello se realizó una selección de preguntas cuyas respuestas permitiesen establecer el dominio de temas concurrentes y previos al paso al límite matemático y la segunda fase que consistió en el diseño de las actividades. Con base a reactivos de investigación de Sierpinska (1985), tesis de maestría acerca de sucesiones, entre otros) y libros de texto de cálculo, se elaboraron 9 actividades. Las actividades se dividieron en tres subgrupos, los cuales se presentan a continuación en la tabla 1, junto a sus correspondientes propósitos.

Subgrupo	Propósitos
*De la actividad uno a la cinco***.** Se les proporciona reactivos en el registro geométrico, en donde se les solicita diferentes resultados tales como: longitudes, áreas de figuras.	Que los estudiantes pudiesen detectar la puesta en escena de los infinitos tanto potencial y actual involucrados y que logren *dar el paso al límite***.** Conocer las diferentes estrategias de resolución, que utilizan los estudiantes al enfrentarse a sumas infinitas, y como utilizan la visualización, en el proceso resolución del problema, al transitar entre diferentes registros de representación. En particular el geométrico, algebraico-analítico y el verbal.
Actividad seis y siete. Se les solicita a los estudiantes que establezcan si la situación puede o no dar paso al límite y que expresen su justificación al respecto.	Que los estudiantes puedan reconocer cuando *"se da paso al límite y cuando no"*. Conocer las diferentes estrategias de resolución, por parte de los estudiantes y la visualización que emplean, y el uso y tránsito entre los diferentes registros de representación.
Actividad ocho y nueve. Se les proporcionan situaciones que involucran procesos infinitos con el desafío de resolver la relación existente entre ciertas magnitudes tales como distancia, velocidad y tiempo, bajo ciertas condiciones específicas.	Analizar el desempeño de los estudiantes cuando se enfrenten a diferentes situaciones donde estén involucrados las nociones de infinitos. Conocer las estrategias de resolución de la situación problema, y los argumentos de resolución.

Tabla 1: Contrastes entre subgrupo de actividades y propósitos de las mismas.

Resultados

De manera particular se presentan los resultados de un grupo para la actividad uno. Esta actividad consistió en unir los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado L, se obtiene otro cuadrado, en el que volvemos a hacer la misma operación, y así se continua indefinidamente. Los objetivos de la actividad incluyen procesos de identificación de infinitos tanto potencial y actual, la suma de las áreas de los infinitos cuadrados construidos y la identificación de que si la secuencia obtenida en relación a las áreas, les proporcionaba un resultado al sumar las mismas. Concretamente la figura 1, nos ilustra la actividad número uno.

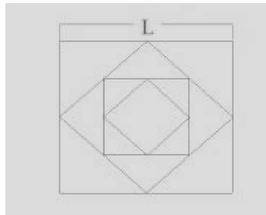


Figura 1: N cuadrados inscritos.

El grupo uno, integrado por cuatro personas, se aboca a la tarea de calcular la suma de las áreas de los infinitos cuadrados, pasando por dos momentos, señalados por a) y b).

a) *Efectuar el cálculo del área de los cuatro cuadrados que vienen dibujados en la figura que se les presenta.* Lo realizan mediante tratamiento en el registro algebraico para poder calcular lados y áreas de los respectivos cuadrados, en articulación con la representación geométrica del enunciado. Es decir, desde el punto de vista de la visualización, los estudiantes son capaces de *"reflejar información visual".*

Para lo anterior, a excepción del lado del cuadrado mayor que ya tiene asignada una variable (L), asignan una letra para el lado de cada cuadrado inscrito de la figura (C, m y S respectivamente). Además, exponen para cada caso el cálculo de los respectivos lados y áreas de cada uno de estos cuadrados inscritos, en términos de L, como se muestra en la tabla 2.

Cuadrado	Lado	Área
Cuadrado mayor	L	L^2
Primer cuadrado inscrito	$C = \frac{\sqrt{2}}{2}L$	$\frac{1}{2}L^2$
Segundo cuadrado inscrito	$m = \frac{1}{2}L$	$\frac{1}{4}L^2$
Tercer cuadrado inscrito	$S = \frac{\sqrt{2}}{4}L$	$\frac{1}{8}L^2$

Tabla 2: Elementos de la actividad

La articulación del registro algebraico (donde efectúan el tratamiento para el cálculo de estos lados y áreas) con la representación geométrica se aprecia cuando calculan - vía Teorema de Pitágoras - los lados (C, m y S respectivamente), que si bien es cierto, corresponden a cada lado del respectivo cuadrado inscrito, al mismo tiempo, corresponden a la hipotenusa de los triángulos que se forman al unir los puntos medios de los cuadrados circunscritos que generan a los inscritos.

b) *Identificar a las áreas resultantes de los cuatros cuadrados como partes de una serie geométrica convergente.* Aquí, el registro geométrico pierde relevancia como referente para la tarea de calcular la suma infinita. Los estudiantes reconocen la razón de la serie ($r = \frac{1}{2}$) y efectúan su cálculo mediante la fórmula usual que se utiliza para ello.

En síntesis, para la construcción de la serie geométrica a la cual le calculan la suma, este grupo utilizó como principal recurso de trabajo, el registro algebraico en articulación con el registro geométrico, actuando en ese proceso como elemento conector, el teorema de Pitágoras (lado del cuadrado inscrito con un doble rol, de lado e hipotenusa).

Por otro lado, este grupo no logra concretar el paso al límite. Reflexionan que se pueden construir muchos cuadrados pero que no se va a llegar a tener un último cuadrado, sosteniendo la imposibilidad de esto, en el hecho de que tal cuadrado no podría tener lado cero. En esta última afirmación está implícita la idea de *"tendencia a un valor"* sin llegar a serlo, lo cual obstaculiza el paso al límite.

Conclusiones

En particular, el trabajo se propuso trazar un itinerario en los estudiantes, en las tareas de configuración del infinito, como proceso implícito en el paso al límite en contextos de geometría sintética, en particular de la series como herramienta de cálculo de sumas que fueron referidas en la actividades de este reporte. En ese sentido, el reporte presenta algunas conclusiones que los estudiantes presentaron en sus producciones, en relación a los infinitos en sus dos facetas, en relación a los registros utilizados y en relación al paso al límite.

Con respecto al infinito potencial, se distingue entre las estrategias estudiantiles varias formas de dar cuenta de su uso, haciéndose esto visible vía variados registros.

En el registro algebraico y también numérico, mediante *"puntos suspensivos"*. En el registro de lenguaje natural vía afirmaciones del estilo: *el área de cada círculo es (…) el área del anterior", "así sucesivamente", "dividir los triángulos indefinidamente"*. En el registro geométrico, dibujando más figuras de las que se proporcionan en la figura que se explicita en la situación problema.

En el registro algebraico y también numérico, explicitando más expresiones algebraicas o cálculos numéricos, para figuras que no aparecen "*dibujadas*" en la original. En algunos casos, incorporan estas expresiones o cálculos sin necesidad de explicitar la figura a la cual debiese corresponder. En ese sentido, asumen que las figuras se siguen generando y que las determinadas expresiones o cálculos corresponden a aquellas. Se ayudan en algunas ocasiones para elucidar lo anterior, con comentarios expresados evidentemente, mediante registro de lenguaje natural.

Con respecto al infinito actual son muy incipientes los indicios encontrados en las producciones estudiantiles, quizás por la doble faceta de ver el infinito desde las dos perspectivas (Tall, 1980; Tall, 1992 y Hitt, 2003).

Con respecto al paso al límite, los estudiantes se quedan con la perspectiva de acercamiento y no dan el paso al mismo, probablemente por los miedos que menciona Díaz-Moreno, (1999) donde se manifiesta un problema sociocultural, de pasar el límite, porque les causa temor o inseguridad.

En las actividades de la investigación se exhibieron diferentes argumentos para la resolución de cada actividad propuesta. En los desplazamientos entre registros algebraico y geométrico evidenciaron su articulación. En las actividades desarrolladas los grupos obtuvieron respuestas análogas, a pesar de la diversidad de estrategias utilizadas.

En suma, los estudiantes siguieron una ruta para el paso al límite, con base en la articulación de los registros geométrico y algebraico, y, la puesta en escena de los infinitos actual y potencial.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. En P. Gómez (Ed.). *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Bogotá: Iberoamérica.

Costa, E. y Otto, B. (2005). Ideología y Matemáticas: El infinito. *Revista Rect@, 13* (1), 1-9.

Díaz-Moreno, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite.* Tesis de doctorado no publicada, Pontificia Universidad Católica, Santiago, Chile.

Díaz, M. (1999). *Fundamentos de la matemática: análisis de la primera crisis.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Díaz, M. (2009). El método de exhaución. *Revista Alternativa, 6* (19), 1-24.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st PME-NA conference* (pp. 3-26). Cuernavaca: ERIC/CSMEE.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Riedel.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 91 - 111). México DF: Fondo de Cultura Económica.

Lestón, P. (2011). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA- IPN, México.

Molfino, V. (2010). *Procesos de institucionalización del concepto de límite: análisis socioepistemológico.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6* (1), 5-68.

Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education* (pp. 170-176). Berkeley, CA: PME.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495–511). New York: Macmillan.

PRESENCIA DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS EN LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA Y DE APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE NÚMERO. TRANSICIÓN ENTRE LA EDUCACIÓN PARVULARIA Y BÁSICA

Claudia Coronata, Ángel Alsina
Pontificia Universidad Católica de Chile — Chile
Universidad de Girona — España
ccoronata@uc.cl, angel.alsina@udg.edu

Resumen. Este trabajo busca estudiar la presencia de los procesos matemáticos en las prácticas de enseñanza de la noción de número en los educadores de párvulos y profesores del nivel básico I en Chile. Se analizarán filmaciones de prácticas de enseñanza en aulas de niños y niñas entre 4 y 8 años y también se entrevistará a los maestros de esos niveles educativos para así poder diagnosticar la enseñanza de la noción de número que desarrollan. Se quiere investigar si se consideran explícitamente tanto los contenidos como los procesos matemáticos y también si existe un proceso continuo y progresivo desde los 4 a los 8 años, favoreciendo aprendizajes relevantes y desafiantes acordes a las necesidades de los niños y niñas, tomando en consideración la articulación entre la Educación Parvularia y la Enseñanza General Básica.

Palabras clave: procesos matemáticos, noción de número

Abstract. This work aims to study the presence of mathematical processes in teaching practices of the number sense in the pre-school teachers and teachers of the first two primary levels in Chile. We will analyze audiovisual recordings teaching practices in 4 to 8 years old classes and also teachers interviews of these educational levels in order to describe the teaching of the concept of number. We want to investigate whether explicitly consider both the content and mathematical processes and also if there is a continuous and progressive process from 4 to 8 years relevant and challenging learning favoring that meet the needs of children, taking into account the link between nursery education and primary school.

Key words: mathematics process, number sens

Introducción

Actualmente existe en Chile una mayor preocupación por las dificultades que manifiestan los alumnos de Educación Básica en relación a los precarios logros de aprendizaje en el área de matemática. Los resultados de la prueba nacional chilena SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación) no cambian significativamente de un año a otro, lo que lleva a cuestionar las prácticas de enseñanza de los profesores, centradas mayoritariamente en actividades repetitivas, memorísticas y sin sentido. Junto a este tipo de prácticas matemáticas, la inexistente articulación de niveles educativos en cuanto a diálogo pedagógico y las oportunidades de aprendizajes significativos para todos los niños y niñas, son algunas de las razones que nos llevan a realizar un estudio para indagar en el tema y encontrar posibles soluciones.

La noción de número es clave en las primeras edades para los demás aprendizajes matemáticos y para un mejor desenvolvimiento en la vida cotidiana, razón por la cual se considera necesario abordar el estudio desde esta perspectiva. En este sentido, en los el estándar de contenidos

"Número y Operaciones" es el que posee mayor énfasis durante las primeras edades (*Prek-2*) y la enseñanza prioriza su comprensión.

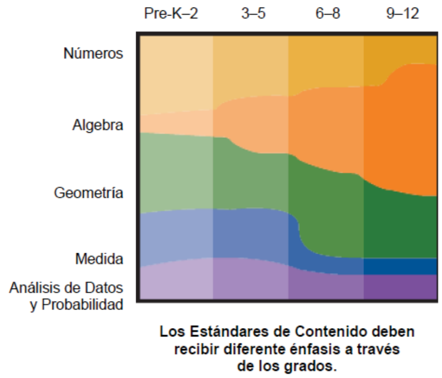


Figura 1: Nivel de atención que deberían recibir los diferentes estándares de contenidos (NCTM, 2000), p. 32

Como puede apreciarse en la Figura 1, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2000), como un aporte a la mejora continua de la educación matemática, propone cinco estándares de contenidos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad. Propone también cinco estándares de proceso para favorecer la comprensión y uso de estos contenidos en diversos contextos significativos:

- La resolución de problemas, siendo una de las principales maneras de hacer matemáticas que implica construir nuevo conocimiento matemático al reflexionar, aplicar y adaptar estrategias que favorecen la solución de situaciones problemáticas. Al tener oportunidades para resolver problemas matemáticos, los alumnos generan nuevas formas de pensar, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza, al observar la utilidad fuera del ámbito escolar.

- El razonamiento y la demostración, que permite a los alumnos tomar mayor conciencia de que las matemáticas tienen sentido y ofrecen poderosas alternativas para lograr comprender una gran variedad de fenómenos. Se desarrolla al investigar conjeturas matemáticas, al elaborar y evaluar argumentos y demostraciones.

- La comunicación, que en definitiva es una herramienta que promueve la interacción con otros para aclarar las ideas matemáticas; al fortalecer la comunicación, las ideas se transforman en objeto de reflexión, de precisión y discusión. Además al comunicarse con argumentos, los alumnos aprenden a ser más claros y convincentes en el uso del lenguaje matemático; y a su vez al escuchar las explicaciones de otros, profundizan en sus propias comprensiones de las ideas matemáticas.

- Las conexiones**,** para enfatizar que las matemáticas no están constituidas por ejes temáticos desvinculados entre sí, sino que por el contrario, esta disciplina es un campo de estudio integrado. Se hace necesario que los alumnos reconozcan y realicen conexiones entre ideas matemáticas progresivas unas y otras y además es importante considerar conexiones matemáticas con otros temas y con la vida cotidiana para entender mejor su utilidad.
- Las representaciones, que corresponden a las formas de representar las ideas matemáticas, las cuales pueden ser a través de imágenes, materiales concretos, tablas, gráficos, números, letras, entre otras. Muchas de las representaciones que existen actualmente son el resultado de una construcción cultural, que llevó muchos años determinar. Cuando los alumnos comprenden las representaciones matemáticas que se les presenta y además tienen oportunidades de crear otras, mejoran su capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Con esta investigación se pretende estudiar la presencia de estos procesos matemáticos en las prácticas de enseñanza de la noción de número durante las primeras edades, para así poder sugerir mejoras en estos niveles educativos con mayor concordancia a los planteamientos teóricos sobre el tema.

La enseñanza-aprendizaje de la noción de número

Durante el S. XX diversos autores han realizado múltiples aportaciones sobre el desarrollo matemático y la adquisición de la noción de número en la etapa infantil: a comienzos de siglo se priorizó la repetición y la práctica para fortalecer el aprendizaje de los algoritmos escritos (Thorndike, 1922); desde el Modelo Lógico Piagetiano (Piaget y Szeminska, 1967) se planteó que el desarrollo del razonamiento lógico es la base del desarrollo del número y las habilidades aritméticas; en contraposición, desde el Modelo de Integración de Habilidades (Baroody, 1998; Bermejo, 1990 Fuson, 1988) se señaló que el desarrollo matemático va a la par con el desarrollo del pensamiento lógico. Baroody (1998) indica que existe escasa evidencia que demuestre que es necesario el entrenamiento lógico para el desarrollo del concepto de número, aunque se encuentra considerable evidencia que demuestra que las experiencias de conteo están directamente relacionadas con la comprensión del sentido numérico. En esta línea, Bermejo (1990) se inclina por un enfoque integral debido a la complementariedad necesaria para interiorizar la noción de número a través de la enseñanza de las operaciones lógicas y de las habilidades numéricas.

Desde otros enfoques se consideran los contextos en los que deben realizarse estos aprendizajes. Así, por ejemplo, desde la Educación Matemática Realista (EMR), Freudenthal

(1991) se utilizan situaciones de la vida cotidiana o problemas contextuales como punto de partida para aprender matemáticas. Progresivamente, estas situaciones son matematizadas a través de modelos, mediadores entre lo abstracto y lo concreto, para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (Heuvel-Panhuizen, 2002). Otro rasgo de la EMR es que se apoya en la interacción en el aula entre los alumnos y entre el profesor y los alumnos. Esta interacción, que debe ser intensa, permitirá a los profesores construir sus clases teniendo en cuenta las producciones de los alumnos (Fauzan, Slettenhaar y Plomp,2002); y otra idea clave es que a los alumnos se les debería dar la oportunidad de reinventar las matemáticas bajo la guía de un adulto en lugar de intentar trasmitirles una matemática pre-construida (De Corte, Greer y Verschaffel, 1996).

De ello se desprende que el rol del profesor como mediador implica que sus prácticas matemáticas no deben estar centradas en la instrucción, sino que debe conocer profundamente cómo aprenden los niños para que la enseñanza de los números sea útil y aplicable a la vida cotidiana. Este planteamiento ha comportado que se enfatice cada vez más la comprensión y la aplicación de los conocimientos numéricos en diferentes contextos en desmedro de la práctica rutinaria y memorística de los algoritmos, de manera que ya en los años noventa del S. XX la enseñanza de los números en algunos países como Estados Unidos y Australia se centra en que los alumnos desarrollen el sentido numérico (también llamado significado numérico), que se describe como un "sentido intuitivo" para dar significado y uso a los números; capacidad para apreciar diversos niveles de precisión o errores aritméticos; y poder estimar y/o poder discriminar diversas estrategias para calcular eficientemente (Devlin, 2000).

Desde esta perspectiva, Alsina (2010) propone una "Pirámide de la Educación Matemática" en la que se presentan de forma sencilla distintos contextos para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable.

En la base de este diagrama piramidal están los contextos que necesitan todos los niños para aprender y que, por lo tanto, se podrían y deberían "consumir" diariamente para desarrollar la competencia matemática. Ahí están las situaciones problemáticas que surgen en la vida cotidiana de cada día; la observación y el análisis de los elementos matemáticos de nuestro entorno; el movimiento como actividad básica para interiorizar, por ejemplo, conocimientos geométricos diversos; la posibilidad de vivenciar elementos matemáticos a través del propio cuerpo; la manipulación con materiales diversos, dado que la acción sobre los objetos posibilita que los alumnos puedan elaborar esquemas mentales de conocimiento; o bien el uso de juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después aparecen los que deben "tomarse" alternativamente, como las situaciones de aprendizaje mediante recursos literarios con un contenido matemático (cuentos populares, narraciones, novelas, canciones, adivinanzas, etc.) o los recursos tecnológicos. Por último, en la cúspide, se encuentran los contextos de aprendizaje que deberían usarse de forma ocasional, como por ejemplo los libros o cuadernos de actividades.

Figura 2: Pirámide de la Educación Matemática (Alsina, 2010), p.14

A partir del problema descrito en relación a la enseñanza de la noción de número en las primeras edades en Chile, y en base a los planteamientos teóricos sobre el tema, se han planteado las siguientes preguntas de investigación que orientan el estudio:

- ¿Qué características poseen las prácticas de enseñanza de los educadores de párvulos y de los profesores de NB1 de los niños y niñas entre Transición I y Segundo año Básico en relación a la comprensión de número?
- ¿Cuáles son las fortalezas y debilidades que declaran los educadores de párvulos y los profesores de NB1 para enseñar el concepto de número?

Particularmente, los objetivos de esta investigación son: a) estudiar el conocimiento disciplinar y didáctico de los educadores de párvulos y de los profesores de los dos primeros niveles de educación básica para enseñar la noción de número; y más concretamente b) analizar la presencia de los estándares de proceso en las prácticas de enseñanza de los profesores de las primeras edades en escuelas municipales de una región de Chile.

Metodología

En este nuevo trabajo, realizado bajo un paradigma interpretativo, se usa una metodología cualitativa con un diseño *ex post facto,* haciendo alusión a que primero se produce el hecho y después se analizan las posibles causas y consecuencias, por lo que se trata de un tipo de investigación en donde no se modifica el fenómeno o situación objeto de análisis (Bernardo y Caldero, 2000).

Como metodología de investigación cualitativa se parte de la *Grounded Theory* (Strauss y Corbin, 1991), que se trata de una metodología cuyo campo principal de aplicación es el estudio de la realidad social, lo que implica asumir y resaltar el carácter humano de las personas estudiadas, por lo que es necesario que el investigador conozca sus creencias e interpretaciones y las incorpore a sus propias interpretaciones.

En el estudio participan 12 maestros de Educación Parvularia y de los dos primeros niveles de Educación Básica (tutores de aula) de tres centros escolares de Villarrica (Chile): un centro público, uno privado concertado y otro privado. Son centros educativos urbanos, similares en cantidad de estudiantes en cada aula, todos se rigen por el curriculum nacional vigente e imparten seis horas semanales de matemática. La diferencia de cada centro educativo se evidencia principalmente por el nivel socio económico de las familias; en el centro público asisten los niños y niñas de las familias de mayor vulnerabilidad social, el Estado se responsabiliza otorgando subvención económica por cada uno de los estudiantes. En el centro privado concertado el Estado subvenciona un porcentaje, dependiendo de las posibilidades económicas de las familias y entrega igualmente la subvención por cada alumno. Y en el centro educativo privado, son los padres quienes cancelan la totalidad de la escolaridad definida por el establecimiento educacional, el Estado no aporta subvención alguna.

La mayoría de los maestros participantes en el estudio, poseen experiencia laboral superior a 15 años, solamente dos de ellos trabajan hace tres años.

Las técnicas usadas para recoger los datos (evidencias) que permitan determinar la presencia de los procesos matemáticos en las prácticas de enseñanza de la noción de número de los maestros de las primeras edades son la observación en el aula a través de grabaciones audiovisuales de las clases de matemáticas, que posteriormente se analizarán utilizando una pauta que se someterá previamente a juicio de expertos, y la entrevista.

Para realizar el análisis cualitativo de los datos obtenidos se usa el método de comparación constante, que es un procedimiento analítico de la *Grounded Theory* que se usa para descubrir semejanzas, diferencias y relaciones entre distintos fragmentos procedentes de los datos, a través de una comparación cuidadosa e intensiva. Se contemplan los siguientes niveles de análisis:

- De los datos brutos a la categorización inicial: consiste en leer las transcripciones (datos brutos) hasta que su contenido sea familiar y, en función de los objetivos del estudio, segmentar la información en fragmentos en función de las ideas que contienen e identificar aquellos que expresen ideas similares o relacionadas, asignándoles una denominación común, esto es, un código más o menos abstracto o conceptual (datos útiles). Este tipo inicial de codificación es provisional y posteriormente se ha denominado categorización abierta (*open coding*).

- El desarrollo de las categorías iniciales: se basa en la búsqueda sistemática de propiedades y registro de notas teóricas (analíticas e interpretativas) para descubrir no sólo categorías sino sus propiedades y dimensiones. Este avance en el procedimiento se produce gracias a la puesta en práctica de dos operaciones analíticas clave, apoyadas igualmente en la comparación constante de la información: la búsqueda activa de propiedades y la escritura de notas de análisis e interpretación para registrar las ideas que vayan surgiendo durante el proceso de codificación. En otras palabras, se establecen categorías grupales, como por ejemplo, "prácticas asociadas a la resolución de problemas", "estrategias usadas para favorecer la comunicación" o bien "opiniones acerca de la enseñanza de la notación numérica", entre otras.
- La integración de categorías y sus propiedades: consiste en la organización o articulación, siempre creciente, de las categorías y las propiedades (códigos). A medida que se van creando relaciones entre ellos, se renombran, eliminan, relacionan, etc. códigos y nos centramos en descubrir la presencia de los estándares de procesos matemáticos en las prácticas de enseñanza de la noción de número en las aulas de niños y niñas entre 4 y 8 años.

Conclusiones

Como se ha indicado, a partir de los resultados de este estudio en curso se busca conocer en profundidad la presencia de los estándares de proceso en las prácticas de enseñanza de la noción de número en las primeras edades, para así poder sugerir mejoras en las prácticas de enseñanza en estos niveles educativos con mayor concordancia a los planteamientos teóricos contemporáneos sobre el tema, que enfatizan que es necesario favorecer la comprensión de los números, las formas de representarlos y las relaciones entre ellos, así como la comprensión de las operaciones, las relaciones entre ellas y la habilidad en el cálculo mental (NCTM, 2000). Con este planteamiento se pretende, pues, romper con la enseñanza tradicional en las escuelas chilenas centrada en el dominio de los contenidos de numeración y cálculo para poder obtener éxito en el rendimiento escolar (escribir números en su forma convencional, calcular correctamente operaciones escritas, etc.). En su lugar, se pretende plantear una visión orientada a usar los contenidos que se aprenden en la escuela en diferentes contextos significativos de la vida cotidiana de los niños. Se trata de una visión que enfatiza la alfabetización numérica, que en esta investigación se concibe como la capacidad de comprender los conocimientos numéricos fundamentales y saberlos aplicar en diferentes contextos.

El conocimiento que se pueda construir a través de este estudio beneficiará a todos los alumnos, pero mucho más a aquellos que se encuentran en situaciones de mayor vulnerabilidad, en pos de una mayor equidad social en el país. Para ello, se hace necesario reorientar el rol del profesor considerando dos líneas fundamentales: por un lado influir en la formación inicial docente de los futuros educadores y por otro lado proponer líneas de acción en la formación permanente de aquellos que actualmente ejercen su profesión.

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2010). La pirámide de la educación matemática. Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de innovación Educativa, 189,* 12-16.

Baroody, A. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction.* Nueva Jersey, EE.UU: Lawrence Erlbaum Associates.

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética.* Barcelona, España: Paidós.

Bernardo, J. & Caldero, J. F. (2000). Investigación cuantitativa (4); Métodos no experimentales. En J. Bernardo y J.F. Caldero (Eds.), *Aprendo a investigar en educación* (pp. 77-93). Madrid, España: RIALP, S.A.

De Corte, E., Greer, B. & Verschaffel, L. (1996): Mathematics Teaching and Learning. En D. Berliner y C. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 491-549). Nueva York, EE UU: Simon & Schuster Macmillan.

Devlin, K. (2000). *The math gene: How mathematical thinking evolved and why numbers are like gossip.* Nueva York, EE UU: Basic Books.

Fauzan, A., Slettenhaar, D & Plomp, T. (2002). Raditional mathematics education vs. realistic mathematics education: Hoping for Changes. En *Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 1□4). Copenhagen, Dinamarca: Centre for Research in Learning Mathematics.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrectht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number.* Nueva York, EE UU: Springer-Verlag.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. En Fou□Lai Lin (Eds.). *Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education* (pp. 1-43). Taiwan: National Taiwan Normal University.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla. España: SAEM Thales.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1967). *Génesis del número en el niño*. Buenos Aires, Argentina: Guadalupe.

Strauss, A. & Corbin, J. (1991). *Basics of qualitative research. Grounded theory: procedures and techniques*. Newbury Park, CA, EE.UU: Sage Publications.

Thorndike, E. L. (1922). *The Psychology of Arithmetic.* Nueva York, EE.UU: The Mcmillan Co.

ESTUDIO DE CASOS DESDE UN ENFOQUE SOCIOEPISTEMOLÓGICO SOBRE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES

Edith Miriam Soto Pérez, Rosa María Farfán Márquez
Universidad Autónoma de San Luis Potosí México
CINVESTAV-IPN.
miriam@fciencias.uaslp.mx,rfarfan@cinvestav.mx

Resumen. Este trabajo reporta los avances logrados hasta el momento, sobre un estudio de casos que tiene como propósito caracterizar, la construcción de saberes profesionales que generan cuatro estudiantes para Profesor de Matemáticas, en un ambiente de problematización para el tema de logaritmos. Estos avances corresponden a las primeras tareas propuestas en dicho ambiente de problematización. Se pretende que los cuatro estudiantes, objeto de este estudio, experimenten un acercamiento a resultados de investigación que se han realizado desde el enfoque socioepistemológico, con la intensión de propiciar espacios de reflexión respecto de: la presentación acabada y centrada en los objetos matemáticos, que aparece en los libros de texto de uso frecuente en nuestro medio, y un diseño basado en la estructura de prácticas sociales y de referencia.

Palabras clave: formación de profesores, problematización, Socioepistemología

Abstract. This paper reports the progress to date on a case study that aims to characterize the construction of professional knowledge that generate four students in a mathematics education program, in an atmosphere of problematization to the topic of logarithms. These developments correspond to the first tasks proposed in the problematization environment. It is intended that the four students, the subject of this study, experience an approach to research findings that have been made from a socio-epistemological approach, with the intent to provide spaces for reflection on: the presentation finished and focused on mathematical objects, which appears in the textbooks commonly used in our area, and a design based on the structure of social and reference practices.

Key words: teacher training, problematization, Socioepistemology

Introducción

Dirigir la atención sobre aspectos relacionados con la formación de futuros profesores de matemáticas, nos hace considerar las dificultades que actualmente enfrenta el profesor en ejercicio.

Recientes investigaciones dan cuenta de que estas dificultades requieren de estudios sistemáticos que nos permitan comprender a fondo su complejidad, concretamente nos referimos al fenómeno de exclusión reportado en Soto (2010), y que consiste en un reconocimiento de la relación que guardan los profesores con el saber que enseñan, influenciada esta relación por los materiales que usan de apoyo, como libros de texto y/o planeamientos curriculares; en los que se propone el estudio del conocimiento acabado, perfectamente organizado y validado en términos de los cánones de la matemática actual.

Lo anterior, pone como centro del Discurso Matemático Escolar (DME) a los objetos matemáticos y sus diferentes estructuraciones conceptuales y no hace de su consideración aspectos de la Matemática como un constructo social. Creemos entonces que, no incluir en el

DME, aspectos que han propiciado la construcción de conocimiento, afecta la estructura y funcionamiento de este conocimiento, y obliga a que su enseñanza sea reducida a procesos de mecanización y memorización de conceptos y procedimientos (Soto, 2010). Es decir, profesores y alumnos quedan excluidos de un contexto que les permita acceder a saberes funcionales.

Por esta razón, en lugar "… de hablar de objetos matemáticos como conceptos acabados y preexistentes a la praxis humana,…" (Reyes, 2011, p.42) el enfoque socioepistemológico construye un camino alternativo al considerar a las prácticas sociales como las generadoras de conocimiento, y por tanto considerar al conocimiento como una construcción social. De tal manera que la estructura de esas prácticas sociales son contempladas para el rediseño del DME.

Este camino alternativo ha sido estudiado en algunos contextos y temas específicos, sin embargo, es necesario seguir colaborando con evidencia empírica en otros contextos y temas, como el de la formación inicial de profesores.

En este nuevo plano, en el de la formación inicial, se genera otro discurso, el correspondiente a la construcción de saberes profesionales, en él, es necesario, estudiar cómo el(los) estudiante(s) para Profesor de Matemáticas (que en lo sucesivo denotaremos con EPM), problematizan el saber desde el enfoque socioepistemológico, de donde esperamos emerjan saberes profesionales.

Nos referimos a la problematización del saber como la integración "… entre las dimensiones del saber y las componentes de la construcción social; en tanto se analiza: la naturaleza del saber (dimensión epistemológica); uso del saber (dimensión social); apropiación del saber (dimensión cognitiva) y la difusión del saber (dimensión didáctica)." (Reyes, 2011, p.70).

Nuestro objetivo por lo tanto, consiste en caracterizar la construcción de los saberes profesionales que generan cuatro EPM, en dicho ambiente de problematización.

Es importante mencionar que no se espera que el EPM haga un análisis histórico–epistemológico sobre el tema de logaritmos, sino, que "…parta de la introspección, la mirada del que aprende y los usos que este saber posee en la cotidianeidad, apoyándose en las discusiones y reflexiones colectivas y en las investigaciones sobre la epistemología del saber que existen…" (Reyes, 2011, p. 71).

Se pretende entonces que, los EPM experimenten un acercamiento a resultados de investigación que se han realizado desde el enfoque socioepistemológico, con la intensión de propiciar espacios de reflexión respecto de: la presentación acabada y centrada en los objetos matemáticos que aparece en los libros de texto de uso frecuente en nuestro medio, y un diseño basado en la estructura de prácticas sociales y de referencia.

Es oportuno mencionar que compartimos la siguiente opinión:

> …llevar al aula propuestas didácticas o resultados de investigación que rediseñen el discurso no se limita a secuencias que el profesor debe seguir como algoritmos, sino que debe reconocer en ellas cómo se problematiza un saber, (…). Es decir, la comprensión de aquello que fundamenta la propuesta didáctica se torna más importante que la propuesta misma (Montiel, 2010, p.71).

En este trabajo, el ambiente de problematización consiste en tareas propuestas a los EPM, con la intensión de propiciar espacios de reflexión. Las primeras tareas propuestas son: la revisión de dos libros de texto de nivel preparatoria de uso frecuente en nuestro medio, así como los planteamientos curriculares para dicho tema, y la resolución de las primeras dos actividades de aprendizaje del diseño elaborado por Ferrari (2008). Se tiene contemplado continuar la problematización del saber y el respectivo acercamiento a los resultados de investigación mencionados, sin embargo a pesar de estar en la etapa inicial de trabajo, con este grupo de EPM, se puede observar que emerge de parte de ellos, el reconocimiento de que es posible apropiarse de un saber sin necesidad de establecer de entrada su definición. Esta reflexión requiere ser fortalecida con la comprensión de aquello que fundamenta el diseño, aspecto que está en proceso.

Marco teórico

Actualmente desde el enfoque socioepistemológico se desarrollan estrategias de investigación, con las que se propone el estudio de las circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento matemático, con la intención, por un lado, de caracterizar las articulaciones entre la evidencia empírica y sus producciones teóricas, además de dar sustento a propuestas de intervención en el sistema educativo. Se basa en una visión sistémica y situada, al considerar las siguientes cuatro dimensiones como fundamento para la explicación de la construcción de conocimiento matemático: la epistemológica, la sociocultural, la cognitiva y la didáctica; que se articulan teniendo como eje central, a las prácticas sociales y de referencia.

Se considera a las primeras de estas prácticas como acciones que realiza el individuo y de las cuales los conocimientos emergen como herramienta, para la respuesta efectiva a una situación desconocida; mientras que las prácticas de referencia, son aquellas desde las que se reconoce el hecho de que la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de problemas cotidianos de donde los saberes adquieren sentido y significación (Cantoral y Farfán, 2003), en término de sus usos y contexto.

Es decir, esta perspectiva teórica se propone "No mirar los conceptos y sus diferentes estructuraciones conceptuales en forma aislada, sino tratar con las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos" (Cantoral y Farfán, 2003, p. 36). Y parte de considerar que estas circunstancias favorables se generan en un contexto de actividad colectiva, pues en él los grupos humanos construyen conocimiento a través de prácticas socialmente compartidas en las que se involucran (Buendía, 2004), lo cual propicia un contexto interactivo en el que se resignifica el conocimiento.

Considerando que, las prácticas sociales generalmente responden a la necesidad que la humanidad tiene de interpretar y comunicar situaciones, esto hace que se establezcan consensos compartidos dotados de un significado propio de la cultura en la que estos consensos se producen, así, las prácticas sociales llevan a cabo una función reflexiva-discursiva e identitaria, lo cual propicia formas particulares de uso, significación y validación de saberes, impregnadas del contexto y momento histórico en el que emergen (racionalidad contextualizada). Por otro lado, esos consensos compartidos se constituyen en argumentos para la acción, permitiendo organizar y regular el comportamiento de los individuos, es decir, también cumplen una función pragmática y normativa de la actividad (Reyes, 2011).

Esta visión epistemológica que considera a las prácticas sociales como las generadoras de conocimiento, y por tanto al conocimiento como una construcción social, propone un replanteamiento para el DME; que consiste en cambiar el centro de atención que el discurso matemático actual usa, es decir, el de los objetos matemáticos y sus diferentes estructuraciones; por la estructura de las prácticas sociales y de referencia, adecuándolas al contexto escolar correspondiente, para que sean dichas prácticas, las que promuevan este discurso.

Creemos que este replanteamiento, genera saberes funcionales porque estos emergen ante la necesidad de resolver una situación planteada, y por lo tanto no son mecánicos o sin sentido.

Para el tema de logaritmos, en Ferrari (2008) se realiza en principio un trabajo de corte epistemológico, con el propósito de reconocer las prácticas sociales que dieron origen y que permitieron permanecer a los logaritmos hasta su introducción a escenarios escolares, de igual manera se reconocen prácticas sociales que dieron sentido y significado a lo logarítmico en momentos históricos y contextos culturales muy particulares, pero que no logran llegar al DME, pues desaparecen ante la necesidad que la comunidad científica tiene de sistematizar y validar la producción científica.

En dicho trabajo de corte epistemológico se estudian diversos contextos y épocas, en los que se observa cómo el tipo de intereses y necesidades (explicación de fenómenos naturales como inundaciones o conquistas), hace emerger herramientas (registros en tablas y cálculos) en las que se observa que lo logarítmico se va desarrollando a la mano de establecer formas de escribir matemáticamente, y ordenar en columnas la relación entre ciertos valores, ante la imperiosa necesidad de facilitar cálculos. Se reconoce entonces a *los logaritmos como transformación*, usados a principios del siglo XVII, para facilitar cálculos engorrosos de multiplicaciones y divisiones, transformándolos en sumas y restas, en respuesta a una necesidad social relacionada con la navegación, artillería y astronomía (Ferrari, 2011).

La figura 1 ilustra esta transformación de multiplicar sumando resaltando que: los números del segundo renglón o sucesión geométrica, involucrados en la multiplicación, se relacionan con los números del primer renglón o sucesión aritmética, involucrados en la suma. Podríamos de forma equivalente observar, que se puede dividir restando.

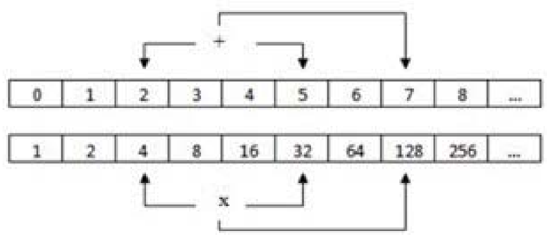


Figura 1. Regla de multiplicar sumando

Por otro lado, se reconocen también las características geométricas de los logaritmos, las que le permiten arribar al discurso matemático del siglo XVII, y a consecuencia ser utilizados *como modeladores* de fenómenos físicos (Ferrari, 2008).

Se rescata de lo anterior a dos prácticas: la de facilitar cálculos y la de modelar; en ambas, la base de las argumentaciones está relacionada con la covariación entre una sucesión aritmética y otra geométrica, sin embargo, estos antecedentes que emergen en un contexto que da sentido y significado a lo logarítmico, no logran llegar al DME por las necesidades de rigor y síntesis que fueron dando forma a la obra matemática, y transformando así a *los logaritmos en objetos teóricos*, es decir, como conocimiento acabado, perfectamente organizado y validado en términos de los cánones de la matemática actual.

Es importante mencionar que ese sentido y significado original no requirió de la notación exponencial, aún no consolidada en esa época, sin embargo hoy es el eje de las primeras presentaciones que se ofrecen a los estudiantes de nivel medio superior, por ejemplo, es típico encontrar en los libros de este nivel lo siguiente: "logaritmo es el exponente al que ha de elevarse un número fijo para obtener un número dado" o la definición de función logaritmo como inversa de la función exponencial, así mismo la definición en términos de una integral para el caso de primeros años de licenciatura.

Ferrari (2008) por su parte, recupera la estructura de las prácticas sociales y de referencia, obtenidas de su análisis epistemológico para el diseño de actividades, que propone a un grupo de estudiantes de sexto de bachillerato, lo cual propició un escenario de construcción social de conocimiento matemático, es decir, aquel en el que no aparecen de entrada las definiciones acabadas, sino situaciones que propician la necesidad de diseñar herramientas (gráficas, tablas, etc.) para la interpretación y resolución de la actividad, en donde es necesario interactuar y por lo tanto argumentar para lograr consensos, lo cual genera prácticas discursivas, que van dando sentido a cada acción y significado a sus producciones; en la medida en que dichos estudiantes transitaron por los tres momentos de desarrollo de los logaritmos: *como transformación, como modeladores y como objetos teóricos.*

Nuestro interés está ahora puesto en, rescatar estos resultados de investigación para el diseño de ambientes de problematización para los EPM, de los que emerjan reflexiones que generen saberes profesionales respecto de la construcción social del conocimiento.

Esas reflexiones que se generen, pertenecerán a un sistema didáctico constituido por los EPM, el formador de profesores-investigador y los saberes profesionales que se construyan. Este sistema tiene su propio discurso, que llamaremos Discurso sobre Saberes Profesionales (DSP). Lo entendemos en un plano distinto de aquel en el que se desarrolla el DME, constituido por el(los) estudiante, el profesor y el saber matemático. Para ambos sistemas, el enfoque socioepistemológico agrega una componente fundamental que le permite considerar a las prácticas sociales, esta es, el contexto.

En este trabajo, los EPM, juegan doble rol, ver figura 2, el de “profesores” en el sistema didáctico I y el de alumnos en el sistema didáctico II.

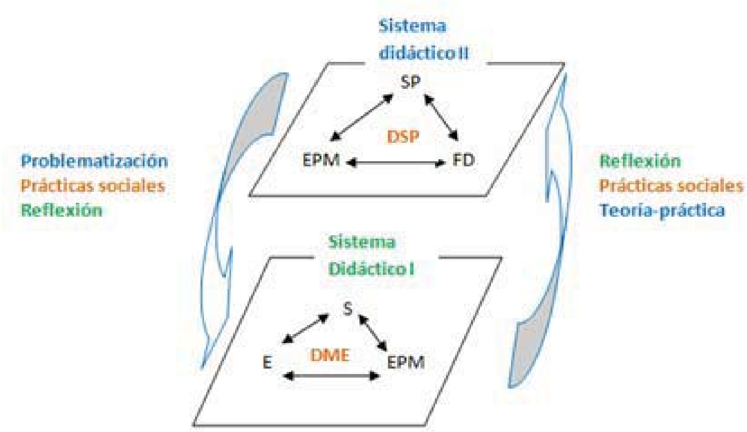


Figura 2: Planos de Discursos

Como se puede observar en la figura 2, es necesario que exista interacción entre los dos planos a través de la problematización, la reflexión y las prácticas sociales.

Desde el enfoque socioepistemológico "…la problematización del saber, radica en hacer del saber matemático un problema localizando y analizando su uso y su razón de ser" (Montiel, citado en Reyes, 2011, p.72). Mientras que, el contexto del saber a problematizar puede ser el de sus orígenes, usos en otros dominios científicos y/o el cotidiano, de donde se rescata la estructura de las prácticas sociales y de referencia (dimensión epistemológica y social), para el rediseño del DME; o el contexto escolar, en el que interesa también localizar y analizar los usos y razón de ser, de los saberes que se generan, por:

- el DME actual, al que se puede tener acceso a través de una revisión de los libros de texto, planes de estudio o la propia experiencia.
- el rediseño del DME, en el que pueden no aparecen de entrada las definiciones acabadas, sino situaciones que requieran para su interpretación y resolución el uso de saberes matemáticos, de tal manera que sea necesario interactuar y por lo tanto argumentar para lograr consensos, lo cual genera prácticas discursivas, que van dando sentido a cada acción y significado a las producciones (dimensión cognitiva y social).
- el funcionamiento del sistema didáctico a través del contexto argumentativo (dimensión didáctica y social).

La dimensión social es el eje rector de las otras tres dimensiones, al estar planteadas desde las prácticas sociales, a través del reconocimiento de los usos que se le da al saber, impregnado de sentido y significados propios de la cultura correspondiente.

La reflexión de parte de los EPM sobre cada momento de la problematización, juega un papel importante, pues le permite dar sentido a la construcción social del conocimiento, participar en ella, es decir, ya no quedar excluido. Le permite además confrontar sus experiencias pasadas como estudiante de cursos de matemáticas y resignificar, su papel como futuro profesor de matemáticas.

Marco metodológico

Se ha decidido realizar este trabajo como un estudio de casos, cuya metodología es de enfoque cualitativo e interpretativo.

Como interesa caracterizar la construcción de saberes profesionales en un ambiente de problematización del saber; y este ambiente consiste en tareas propuestas a los EPM, se ha elegido como unidad de análisis a la reflexión que emerge durante la realización de dichas tareas.

La recopilación de datos se realiza a través de sesiones de entrevista semiestructurada y video-grabada. Se revisan las videograbaciones y se seleccionan aquellos fragmentos de reflexión en los que los EPM den sentido a la construcción social del conocimiento y/o les permita confrontar sus experiencias pasadas como estudiantes de cursos de matemáticas y por tanto resignificar, su papel como futuro profesor de matemáticas.

Concretamente, el contexto sociocultural e institucional, en que se realiza esta investigación, corresponde al de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí; los EPM pertenecen a un programa de formación de profesores de nivel medio superior que ofrece esta institución, pero este grupo de EPM tiene como antecedente, haberse inscrito inicialmente en la licenciatura de matemáticas, por lo que sus primeros curso de matemáticas tienen un enfoque propio de este tipo de carreras.

Avances

Antes de que los EPM iniciaran las tareas de problematización, se les solicitó que comentaran sobre si habían visto el tema de logaritmos en bachillerato y qué recordaban sobre el tema. Las respuestas de parte de todos es que no recordaban haber visto el tema a este nivel. Se les hizo una pregunta equivalente sobre su experiencia en nivel superior, y sus recuerdos eran vagos.

Investigadora: ¿Qué recuerdan sobre el tema de logaritmos según sus cursos de licenciatura?

EPM: sólo recuerdo que se relacionaban con potencias…

Después se les pidieron las libretas y libros que usaron tanto en bachillerato como en licenciatura, y al revisarlos pudieron darse cuenta que sí habían visto este tema en prepa, pero de manera rápida y sólo para poder plantear su derivación. En licenciatura el desarrollo de sus notas deja ver el uso de gráficas y sus diversos efectos, y su uso (de la función logaritmo) en el estudio de la derivación y despeje de ecuaciones implícitas.

La realización de la primer tarea de problematización, de parte de los EPM, que consistió en revisar dos libros de bachillerato de uso común en nuestra comunidad, les permitió repasar el tema en su versión tradicional, empezando por la definición, ejemplos, gráficas y aplicaciones; uno de los libros contempla una gran variedad de aplicaciones en diferentes contextos e intenta propiciar la modelación de dichas aplicaciones. Empezaron retomando el tema de función exponencial.

Decidieron realizar esta tarea primero en forma individual y trabajar colectivamente sobre dudas o dificultades.

Puede verse en sus reflexiones esa cultura heredada de su formación en la licenciatura de matemáticas, al cuestionarse sobre la estructura de la definición de función exponencial cuando se preguntan el por qué la base debe ser positiva, y consultan sobre posibles demostraciones que validen dicha estructura. En otra sesión, encuentran un error en el cálculo de una asíntota, en una de las gráficas que presentaba uno de los libros como ejemplo.

La reflexión más significativa desde el punto de vista de nuestro interés se da al resolver las primeras dos actividades del diseño basado en la estructura de prácticas sociales (regla de multiplicar sumando), a través de la siguiente reflexión:

Investigadora: ¿qué diferencia encuentran entre la presentación de los libros y esta?

EPM: que no hay una definición, que se estaba haciendo sin darse cuenta que era logaritmo.

Interpretamos a esta reflexión como una confrontación con la forma en que están acostumbrados a establecer sus primeros contactos con un tema de matemáticas.

Esto nos da los primeros indicios sobre la posibilidad de hacer emerger otras reflexiones que sienten las bases para generar saberes profesionales respecto de la construcción social del conocimiento.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales* (*Un estudio socioepistemológico*). Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa. Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* (6) 1, 27-40.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico de lo logarítmico: de multiplicar-sumando a una primitiva*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ferrari, M. (2011). Un estudio socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar-sumando a una primitiva. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 805-813.México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* (13) 4, 69-84.

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

SOBRE LAS HABILIDADES ESPACIALES Y LA DIMENSIÓN SOCIOCULTURAL DEL APRENDIZAJE DE "LO GEOMÉTRICO"

Melissa Andrade-Molina, Ricardo Cantoral-Uriza
Cinvestav-IPN México
mandrade@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. En esta comunicación se establece la primera aproximación a un proyecto de investigación, enmarcado bajo la Teoría Socioepistemológica, que busca responder de qué manera las culturas a través de la historia han logrado apropiarse del espacio y cómo ésta apropiación ha sido influenciada por su entorno sociocultural. Para ello se presenta el *estado del arte*, dando a conocer algunos estudios en torno a la *visualización espacial* y a la profunda interacción de lo sociocultural en el aprendizaje de "lo geométrico".

Palabras clave: apropiación del espacio, habilidad espacial, sociocultura

Abstract. In this paper, we establish the first approximation of an investigation based in the Socioepistemology Theory, about how the civilizations have achieved the appropriation of the space and how, this appropriation, has been influenced by the sociocultural environment. We present review of the investigations that we considered, showing some studies focused on spatial visualization and the deep interaction of the sociocultural environment in the learning of geometry.

Key words: appropriation of space, spatial ability, socioculture

Introducción

Son variadas las investigaciones que postulan que las habilidades espaciales de los estudiantes pueden ser desarrolladas mediante ciertas técnicas, métodos y/o herramientas, por ello se han abocado en estudiar cómo desarrollarlas, identificando ciertas dificultades al representar o visualizar el espacio, habilidades para comunicar información espacial, estudiando y analizando lo *cognitivo* que conlleva lo tridimensional. Y finalmente, han propuesto soluciones que, para esos investigadores, se traducirán en aportes a la enseñanza de la geometría plana y espacial, esperando lograr una reestructuración del currículum escolar (Smith, 1964; Ben-Haim, Lappan y Hougang, 1985, 1989; Gutiérrez, 1996; Blanco, 2009; Andrade & Montecino, 2011; Prieto & Velasco, 2010).

Por otra parte, algunos investigadores se han interesado en la herencia de la cultura en el tipo de habilidad espacial que tienen los estudiantes inmersos en diversos escenarios o contextos, en los que proponen que ciertos factores culturales determinan el tipo de desempeño que tendrán los estudiantes frente a acciones que involucren actividades tridimensionales (Bishop, 1979; Mitchelmore, 1980; Lancy, 1981; Clements, 2008).

En el presente escrito se expondrá el estado del arte de este proyecto de investigación. Los artículos se clasificaron en tres categorías afines a las investigaciones analizadas, en este escrito se considerarán sólo dos: (i) Sobre la influencia de aspectos culturales; (ii) Sobre el desarrollo de las habilidades espaciale

Resultados de la revisión

Diversos estudios han puesto en evidencia la relevancia que tiene la visualización espacial, en particular en el entendimiento de la geometría y el "estatus" que tiene en el currículum, por ejemplo, considerar que la visualización es el núcleo de gran parte de la dificultad del aprendizaje de la Geometría (Bishop 1980; Gal & Linchevski, 2010). Otras investigaciones revelan que el currículum escolar de matemáticas favorece al pensador no visual y, en la mayoría de los salones de clase, la enseñanza enfatiza los métodos no visuales, considerando la existencia de un predominio del pensamiento algorítmico por sobre el visual, señalando que existe una resistencia por parte de los estudiantes posiblemente porque pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente (Presmeg, 1986; Vinner, 1989; Eisenberg & Dreyfus, 1990).

Blanco (2009) realiza una crítica al sistema educativo mexicano señalando que el principal problema es que está limitado al estudio de métodos algorítmicos, sin insistir en las descripciones y las argumentaciones respecto a las características de los cuerpos geométricos, ni cómo podrían obtenerse. Concluye que el estudiante no construye el conocimiento manejándose con figuras y construcciones que ayuden a la comprensión de un problema, sino con "recetas" que se aplican para obtener resultados.

Andrade y Montecino (2011), por otra parte, dan evidencia de que gran parte de los estudiantes inmersos en el sistema educativo chileno presentan dificultades en el trabajo y representación de problemas que requieran el uso de habilidades espaciales, en otras palabras, no acuden a la tridimensionalidad para solucionar una determinada situación que requiera de este último.

Con respecto a lo anterior, se torna necesario indagar cómo interactúa lo sociocultural en el aprendizaje de "lo geométrico", es decir, de qué manera las diferencias transculturales, tales como la cultura o el entorno social del estudiante, se reflejan en el uso de modelos espaciales.

Influencia de aspectos culturales

Bishop (1979) demostró cómo mucho de lo que trata de comunicar una imagen depende del bagaje cultural -*cultural background*- de quien está tratando de "leer" la imagen. Por ejemplo, un niño inmerso en una cultura no occidental no es educado para darse cuenta que las líneas punteadas en un bosquejo de un cubo pueden indicar bordes "en el fondo" que no pueden ser vistos desde una vista frontal (Clements, 2008).

Una de las primeras investigaciones que se centraban en los aspectos visuales y espaciales de la matemática fue presentada por Bishop en 1979, enfocada en identificar fortalezas y debilidades en el campo de lo espacial, estableciendo una relación con los diferentes bagajes culturales, lingüísticos y ambientales (entorno) de estudiantes indígenas, de Papúa Nueva Guinea, que participaron de sus estudios.

Clements (2008) comenta que Bishop, en una conversación acerca de la información recogida en Papúa Nueva Guinea, no se había dado cuenta que la cultura y el entorno social del estudiante, lenguaje y preferencias espaciales, pudieran interactuar tan profundamente con las formas en las cuales la matemática es presentada, enseñada y entendida.

Lo anterior puede ser ejemplificado en una de sus experiencias vividas en Papúa Nueva Guinea, donde se hace explícita la influencia de lo cultural en el razonamiento de un estudiante ante una situación escolar y una situación planteada en un contexto cotidiano: Se pudo observar que a pesar que se trate de llevar la matemática escolar a situaciones particulares de la vida diaria, ésta no deja de ser escolar, percibida como ajena a lo cotidiano, es decir, independiente de lo que ocurra en el aula, en la práctica se hace uso de las herramientas que se heredan de lo cultural.

> "Le pregunté a un estudiante:
>
> I: ¿Cómo puedes encontrar el área de esta pieza (rectangular) de papel?
>
> E: Multiplicando el largo por el ancho.
>
> I: Tú tienes jardines en tu pueblo. ¿Cómo juzga tu gente el área de sus jardines?
>
> E: Sumando el largo por el ancho.
>
> I: ¿Es tan difícil de entender?
>
> E: No, en casa sumo, en la escuela multiplico.
>
> I: Pero ambos se refieren al área.
>
> E: Si, pero uno es sobre el área de un pedazo de papel y el otro sobre un jardín.
>
> I: (Entonces dibujé dos jardines (rectangulares) en un papel, uno más grande que otro).Si estos fuesen dos jardines, ¿Cuál preferirían tener?
>
> E: Depende de muchas cosas, no puedo decirlo. El suelo, la sombra…
>
> I: (Cuando estaba a punto de preguntar la siguiente cuestión "Si, pero si tuviesen el mismo suelo, sombra…" fue cuando me di cuenta de lo absurdo que sonaría en ese contexto. Claramente su preocupación se refería a dos problemas: al tamaño de jardines, un problema inmerso en un contexto rico en tradición, folclore y habilidades de sobrevivencia. El otro problema, al área de piezas

> rectangulares de papel, inmerso en un contexto totalmente diferente" (Bishop, 1979, p. 117).

En consecuencia, Bishop (1979) realiza una crítica a los trabajos que hasta ese momento reportaban que los estudiantes inmersos en culturas no occidentales tenían habilidades espaciales más menos desarrolladas, con respecto a los estudiantes occidentales, ya que él considera que los instrumentos utilizados en tales estudios hacen uso de "convenciones" asumiendo una universalidad de conocimiento. Por ejemplo, Lancy (1981) reporta que la mayoría de los estudios previos a 1975, usando instrumentos basados en la teoría piagetiana, concluyeron que los niños de Papúa Nueva Guinea presentan mayores dificultades en la adquisición de habilidades de conservación respecto a niños occidentales.

A pesar de la crítica se continuaron realizando ese tipo de investigaciones, el propio Lancy (1981) evidenció, mediante un estudio que tenía por objetivo documentar la relación entre el ambiente, las características culturales y el desarrollo cognitivo, que la conservación de masa aparece mucho más tarde en estudiantes "indígenas" (no occidentales) en comparación a los estudiantes de occidente, y que la conservación de longitud es lograda por menos de la mitad de la población, aún siendo adultos.

Por otro lado, Mitchelmore (1980) realizó un estudio para identificar diferencias en las habilidades espaciales entre estudiantes de Kingston, Jamaica; Columbus, Estados Unidos y Bristol, Inglaterra, tomó como muestra a 64 estudiantes por país, de tercer, quinto, séptimo y noveno grado. Mediante el análisis de las representaciones bidimensionales de situaciones tridimensionales dadas, concluyó que los estudiantes de Inglaterra poseen una mayor habilidad espacial, con una diferencia de tres años, que los de Estados Unidos, que a su vez superan a los estudiantes de Jamaica, es decir, los estudiantes de Jamaica tienen una diferencia de 6 años en comparación con los de Inglaterra.

Evidenciando que las diferencias observadas en las habilidades espaciales reflejan las diferencias transculturales en la actitud para pensar utilizando modelos espaciales, actitud que es parcialmente revelada por el grado de profundización que se le da a la geometría en el currículum escolar y por factores socioculturales, como por ejemplo que en Jamaica la escuela primaria está orientada principalmente al algebra (Mitchelmore, 1980, p. 213). Así, la investigación de Mitchelmore (1980) revela diferencias en la habilidad espacial que pueden ser atribuidas al contexto sociocultural en el que se encuentren inmersos los estudiantes, reconociendo esta influencia en la forma en la que percibimos el mundo y nuestro entorno, por ende, en cómo lo representamos.

El desarrollo de la habilidad espacial

Ciertas investigaciones han demostrado que se deben incorporar materiales concretos (tangibles) a los salones de clases, o se deben introducir clases de dibujo técnico, o bien realizar adaptaciones o reestructuraciones curriculares para que de esta manera se desarrollen las habilidades espaciales de los estudiantes.

Otras investigaciones surgen para llamar la atención de los profesores con respecto al tipo de representaciones que logran sus estudiantes, por ejemplo Gutiérrez (1998) considera como necesario que los estudiantes aprendan a dibujar y leer representaciones planas de cuerpos tridimensionales, así podrán mejorar su capacidad para comprender la geometría espacial y facilitar el aprendizaje de ésta, ejecutándose mediante instrucciones específicas por parte del profesor.

Habilidad espacial y materiales concretos

Smith (1964) afirmó que las habilidades espaciales y matemáticas están estrechamente correlacionadas y que sus investigaciones indicaban que estas habilidades podían desarrollarse mediante materiales estructurados y cuidadosamente seleccionados.

Ben-Haim, Lappan y Hougang (1985) ponen en evidencia que los estudiantes de 5, 6, 7 y 8 grado presentaron dificultades al momento de: *identificar* por ejemplo ¿cuántos cubos se necesitan para construir un sólido rectangular?, incluso estudiantes de niveles superiores presentan las mismas dificultades (Ben-Haim, Lappan & Hougang, 1985); y en *comunicar información espacial*, a pesar de estar familiarizados con varios tipos de modos de representación verbal, gráfica, icónica, entre otros, (Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989). Proponen que una experiencia con material concreto ayudará a mejorar el rendimiento de los estudiantes y que, además, se deben incluir experiencias concretas con cubos en el currículum escolar de escuela secundaria -*middle school*-, por ejemplo mediante la representación y comunicación de información en la construcción de edificios.

Habilidad espacial y reestructuras curriculares

Otras investigaciones consideran primordial que para propiciar un desarrollo de las habilidades espaciales de los estudiantes es necesario realizar adecuaciones curriculares (Blanco, 2009; Andrade & Montecino, 2011). Reconociendo que se considera a la visualización en matemáticas como un tipo de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos espaciales o visuales, tanto mentales como físicos, utilizado para resolver problemas o comprobar propiedades Gutiérrez (1996).

Blanco (2009) estudió las representaciones visuales, de los cuerpos poliédricos en el plano, que dibujaron los estudiantes que participaron en su trabajo, realizando una propuesta de aplicación de geometría dinámica. Su objetivo fue indagar de qué factores depende la representación de cuerpos geométricos y explorar la influencia del estudio y aplicación de elementos de perspectiva sobre la visualización de objetos tridimensionales en alumnos de escuela media.

Para abordar esta problemática realizó una recopilación de antecedentes e investigaciones orientadas a poner de manifiesto las equivocaciones observadas en el aula de matemática respecto de las representaciones bidimensionales de configuraciones tridimensionales, las cuales se apoyaron sobre algún conocimiento de la geometría bidimensional y los motivos por lo que estas habilidades no se han desarrollado y que traen aparejados muchos inconvenientes al momento de tener que aplicarlos a situaciones que involucren un manejo geométrico.

Sus resultados evidenciaron la presencia de representaciones prototipos de cuerpos tridimensionales, como de un cubo o de una pirámide, por estudiantes de bachillerato que tomaron un curso de perspectiva y, además, la presencia de figuras planas para representar un cubo y una pirámide por parte de estudiantes que no tomaron cursos de perspectiva.

Andrade y Montecino (2011) realizaron un estudio que permitió indagar si los estudiantes recurrían a la visualización espacial o tridimensionalidad al enfrentarse a situaciones que pusieran en juego sus conocimientos, pero que a la vez no involucraran fórmulas algebraicas o patrones de solución. Revelando que los estudiantes utilizan la tridimensionalidad luego de agotar todas las posibles soluciones en el plano.

Para ello, analizaron los textos escolares y planes y programas del Ministerio de Educación de Chile, evidenció que se pone énfasis en desarrollar las competencias necesarias en los estudiantes para que logren desenvolverse exitosamente en pruebas estandarizadas a las cuales deberán enfrentarse durante su formación escolar. Por consiguiente, Andrade y Montecino (2011) concluyen que no se profundiza en las representaciones bidimensionales de cuerpos tridimensionales, lo cual implicaría que los estudiantes no desarrollen sus habilidades para la manipulación de lo tridimensional, por ejemplo en las actividades que se centran en el trabajo con cuerpos geométricos o sus representaciones en el plano, se remiten al cálculo de áreas y volúmenes, identificación de redes, descomposición de cuerpos, entre otros.

Por otro lado, aplicaron dos problemas que involucran el uso de la tridimensionalidad, a una muestra de 76 estudiantes de enseñanza escolar. Los resultados obtenidos pusieron de manifiesto falencias respecto a hacer uso de la tridimensionalidad como recurso para la solución de una situación problemática, ya que sólo surge ésta luego de agotar todas las posibles soluciones en el plano, lo que, proponen, se debe a que durante la enseñanza escolar los problemas: ejemplos y trabajos, se entrelazan con el contenido que está siendo institucionalizado.

En su investigación se pone en evidencia la necesidad de establecer un trabajo interdisciplinario con el Subsector de Artes Visuales, para que los estudiantes desarrollen sus capacidades y habilidades en torno a trazar en el plano la realidad que los rodea, con lo que se pretende que será más fluido el visualizar las representaciones bidimensionales de cuerpos geométricos.

Habilidad espacial y dibujo técnico.

Prieto y Velasco (2010) realizaron un estudio para analizar de qué manera mejoraba la habilidad espacial luego del aprendizaje del dibujo técnico. Aplicaron dos pruebas, de razonamiento visual e inductivo, al inicio y al final de un curso de dibujo técnico, a estudiantes de primer año de ingeniería. En ambos estudios se observó que un porcentaje moderado de estudiantes mejoró la prueba visual, siendo esta mejora similar en hombres y en mujeres. Finalmente, los autores concluyen que la habilidad de visualización espacial puede mejorar luego de un "entrenamiento", en este caso, el curso de dibujo técnico.

En síntesis

De la revisión anterior se puede concluir que la investigación en este campo se centra en abordar problemáticas sobre cómo realizar mejoras para que los estudiantes logren una mayor comprensión sobre la representación geométrica del espacio. De esta manera se distinguen dos categorías, una que se enfoca en realizar mejoras estructurales en el currículum escolar de matemáticas y otra que tiende a destacar la importancia que tiene desarrollar las habilidades espaciales en los estudiantes.

La primera categoría, las que dan cuenta de la necesidad de realizar mejoras estructurales en el currículum escolar, pone en evidencia que, por un lado, es necesario que este currículum favorezca al desarrollo de habilidades espaciales en los estudiantes (Ben-Haim, Lappan & Hougang, 1985, 1989; Gutiérrez, 1996; Blanco, 2009; Andrade & Montecino, 2011; Prieto & Velasco, 2010) y, por otro, que éste reconozca la cultura y el entorno social del estudiante (Bishop, 1979; Mitchelmore, 1980; Lancy, 1981; Clements, 2008).

Sin embargo, se reconoce que el foco de atención de estas categorías radica en la forma en que los estudiantes comprendan los objetos matemáticos involucrados, en otras palabras, el fondo está en el objeto matemático, a pesar de que algunas reconozcan la importancia de factores externos en su desarrollo, como el lenguaje. Es así como se logra identificar que estas investigaciones reconocen, implícitamente, que el papel del estudiante en el proceso educativo es de un mero consumidor de un conocimiento que permanece estático o acabado, es decir, él es quien aprende, descubre o reproduce, pero no quien construye.

Por ejemplo, Bishop (1999) identificó cinco factores que no pueden ser soslayados en la enseñanza de las matemáticas, entre ellos ubicó lo cultural y lo social, argumentando que la educación debe ser considerada como un proceso social, por lo tanto la educación matemática también debería ser reconocida como tal. Asimismo, se observa que la cultura y el entorno social de un estudiante no quedan excluidos de la escuela sino que forman parte del proceso de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, aún al considerar factores de tipo sociocultural, el conocimiento matemático no se trastoca.

De esta manera cabe preguntar si esta influencia, reconocida del entorno sociocultural, interviene sólo en procesos educativos, claramente la respuesta es "no", ya que se sostiene que la problemática va más allá de aspectos curriculares. Por ejemplo, si se considera que el conflicto para que los estudiantes desarrollen habilidades espaciales que les permitan un mayor entendimiento sobre la geometría espacial radica en la visualización y representación espacial, Borrás (1996) evidenció que la existencia de ciertos factores, desprendidos directamente del entorno sociocultural, intervienen en la forma en la que representamos lo que nos rodea.

En otras palabras, la herencia sociocultural va a mediar la manera en la que se comprende el espacio físico. Entonces parece lógico estudiar lo que ocurre dentro de un escenario sociocultural, a fin de reconocer estos factores, en lugar de proponer una reestructuración curricular o actividades. Con preguntas como ¿de qué manera esta influencia, que interviene en el modo de representar nuestro entorno, repercute en la construcción de conocimiento matemático? Por consiguiente se torna evidente estudiar cómo surgen ciertas nociones que conllevan a construir conocimiento, específicamente de geometría.

Con respecto a esto último, se postula que el entorno sociocultural incide en el desarrollo de las habilidades espaciales que permiten a una civilización construir o desarrollar ideas matemáticas. De esta forma, no se consideran las interacciones ocurridas dentro de un ambiente escolarmente regulado, sino que el foco está en las relaciones humanas que ocurren dentro de una civilización, dando respuesta a las siguientes preguntas que orientarán esta investigación: ¿De qué manera las culturas a través de la historia han logrado apropiarse del espacio? ¿Cómo ésta apropiación ha sido influenciada por su entorno sociocultural? Lo que se realizará mediante el estudio de las prácticas de una determinada civilización, identificando qué elementos socioculturales están presentes al apropiarse del espacio.

Referencias bibliográficas

Andrade, M. y Montecino, A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano, *Actas del XIII CIAEM-IACME* 2011. En: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2405.pdf.

Ben-Haim, D., Lappan, G. y Hougang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics* 16, 389-409.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: analyzing and effecting students' performance. *Educational studies in mathematics* 20, 121-146.

Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones*. Tesis de Maestría, CICATA – IPN, México.

Bishop, A. J. (1979). Visualizing and mathematics in a pre-technological culture. *Educational Studies in Mathematics,* 10(2), 135–146.

Bishop, A. J. (1980). Spatial habilities and mathematics education – A review. *Educational tudies in Mathematics,* 11, 257-269.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidos.

Borrás, G. (1996). *Teoría del arte I: Las obras de arte.* Madrid: Historia 16.

Clements, M. A. (2008). Spatial abilities, mathematics, culture, and the Papua New Guinea experience. In P. Clarkson & N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education: Major contributions of Alan Bishop* (pp. 97–106).

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1990). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds), en *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37), MAA Series. USA.

Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Study of Mathematics,* 74, 163 –183.

Gutierrez, A. R. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry In search of a framework. *In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th PME international conference* 1, 3–20.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA,* 3 (3), 193-220.

Lancy, D. (1981). The Indigenous Mathematics Project: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 12(4), 445-453.

Mitchelmore, M. C. (1980). Three-dimensional geometrical drawing in three cultures. *Educational Studies in Mathematics.* 11, 205-216.

Presmeg, N.C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the learning of mathematics,* 6(3), 42-46.

Prieto, G. y Velasco, A. (2010). Does spatial visualization ability improve after studying technical drawing? *Quality and Quantity* 44 (5), 1015–1024.

Smith, I. (1964).Spatial ability: Its educational and social significance. London: Uni-versity of London Press

Vinner S. (1989). The Avoidance of visual considerations in Calculus. Focus Learning Problems of Mathematics. Traducido en *Antología de Educación Matemática.* Cinvestav, 85-93.

EL SERVICIO COMUNITARIO: UN ESPACIO PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA A NIÑOS EN SITUACIÓN DE RIESGO

Karina Hildemar Caballero de Martínez.
Universidad de Los Andes-Táchira. Venezuela
khildemar@gmail.com.

Resumen. Esta investigación de naturaleza cualitativa, bajo el método de investigación acción refiere al servicio comunitario, como espacio para la enseñanza de la matemática a niños y adolescentes en situaciones de riesgo que viven en las casas hogares: Violetas y Ratones y la Ciudad de los Muchachos, ubicadas en la ciudad de San Cristóbal, Estado Táchira, Venezuela. Busca promover el aprendizaje de la matemática, cuyo impacto pedagógico tienda a superar el fracaso escolar. Los hallazgos obtenidos mediante la entrevista, los diarios y las notas de campo, muestran cambios favorables en el aprendizaje de los sujetos de investigación, una vez aplicadas las acciones formativas. Se valora su impacto positivo en el aprendizaje significativo de los escolares, superando en buena medida el fracaso escolar de los educandos favorecidos con dichas actividades.

Palabras clave: servicio comunitario, enseñanza de la matemática

Abstract. This research of qualitative nature, under the method of action research it refers to community service, as a space for the teaching of mathematics to children and teenagers in situations of risk that live in the houses: Violet and Mice, the Childre's City, located in the city of San Cristóbal, Táchira State, Venezuela. It seeks to promote the learning of mathematics, whose pedagogical impact tends to overcome academic failure. The findings obtained through the interview, diaries and field notes, show favorable changes in the learning of the research subjects, once applied the training actions. Its positive impact on meaningful learning of school children are valued overcoming much school failure of students favoured with such activities.

Key words: communitary service, mathematics teaching

Introducción

La educación en el siglo XXI, demanda cambios profundos en sus modos de concebir al ser humano; que permitan verle como ser objeto de formación integral, con sólidos valores, actitudes, sentimientos, emociones y competencias, cuya suma, le permitan integrarse efectivamente a la sociedad. A tal efecto, se deben considerar los señalamientos de la UNESCO y UNICEF, relacionados con la atención a la infancia y adolescencia en aras de formar ciudadanos íntegros, productivos, creativos, afectuosos y comprometidos con el aprendizaje de la ciencia de manera significativa y cooperativa.

El servicio comunitario de los estudiantes de educación universitaria, se propone reforzar y potenciar la función social que la Universidad de Los Andes ha venido cumpliendo en su ámbito de acción mediante las actividades de extensión, docencia e investigación. En virtud de lo anterior, el servicio comunitario de la Universidad de Los Andes-Táchira, en respuesta a las necesidades sentidas de la población, va a las comunidades más humildes y mediante sus estudiantes de la Carrera de Educación, Mención Física y Matemática, brinda asesorías educativas con la finalidad de desarrollar la competencia matemática de quienes conviven en casas hogares. Estas casas son lugares donde se da atención a niños y adolescentes, provenientes de hogares disfuncionales que pasan la mayor parte de su tiempo en las calles y viven en pobreza extrema, cuyas condiciones socioeconómicas y familiares los ponen en situaciones de riesgo y fracaso escolar.

La temática descrita, se enmarca en una experiencia investigativa que tiene por objetivo analizar el aprendizaje de la Matemática en niños y adolescentes en situaciones de riesgo. Asimismo, estudiar el impacto pedagógico del servicio comunitario sobre el fracaso escolar. Se trata de un estudio en desarrollo.

El servicio comunitario

El servicio comunitario se fundamenta en la idea de la integración social de los individuos a la comunidad, en aras de impactar favorablemente en el desarrollo humano, cuyas acciones promuevan la calidad de vida de los ciudadanos de manera sostenida y sustentable por vivirse en un mundo cada vez más conflictuado, con infinidad de problemas, carencias y necesidades, en el que es evidente la ausencia de valores sociales que demandan acciones contundentes que incidan en la formación para la vida y en sociedad desde los primeros años de vida. A tal efecto, urge educar en valores como la solidaridad, porque, la misma "puede ser más que un contenido a enseñar; las actividades solidarias desarrolladas por niños, adolescentes o jóvenes, si se planifican adecuadamente, pueden ser en sí mismas una fuente de aprendizajes de calidad" (Tapía, 2006, p.1). Se trata de un contenido axiológico que merece ser rescatado desde los contextos educativos en todas las escuelas primarias, donde los niños reciben sus primeras lecciones de modo intencional, lo cual es inherente al aprendizaje en servicio.

En atención a lo anterior, es importante conceptuar el "aprendizaje-servicio" como aquella acción pedagógica pensada desde y para la comunidad, dado el especial valor que el mismo reviste en la actualidad, se desarrolla integrando al contexto histórico, la práctica de contenidos sociales, de modo que los individuos, mediante situaciones reales de su comunidad construyan sus conocimientos, afiancen valores, consoliden su identidad comunitaria, fortaleciendo sus habilidades y competencias inherentes a sus intereses, necesidades o perfil de formación profesional, garantes del aprendizaje significativo apoyados en la solidaridad, vocación de servicio en ayuda desinteresada y denodada de la comunidad. Dicha acción, puede realizarse en los escenarios educativos formales (convencionales) y los informales (no convencionales), lo importante de ello, es que incida favorablemente en la comunidad y en cada uno de sus miembros, de modo que sea el resultado de una acción compartida y vivida con entusiasmo.

El servicio comunitario, se conceptualiza como una actividad que los estudiantes de educación universitaria desarrollan en beneficio de las comunidades, con la finalidad de cooperar en el desarrollo del bienestar social (Ley del Servicio Comunitario del Estudiante de Educación Superior, 2005, art. 4). Así pues, es una respuesta social apoyada en los saberes de la ciencia y tecnología de las universidades, que busca realimentar a las comunidades mediante la acción colaborativa y consciente de los estudiantes universitarios, de modo que el talento humano sea formado y pueda responder a las exigencias de la sociedad.

Es de hacer notar que legalmente, esta experiencia se fundamenta en el Reglamento del Servicio Comunitario del Estudiante de la Universidad de Los Andes y, de conformidad con el artículo cinco su cumplimiento "es un requisito obligatorio para la obtención del título universitario y tendrá una duración mínima de ciento veinte horas académicas, las cuales se deben cumplir en un lapso no menor de tres meses" (ULA, 2007, p.11). Como se observa en el aforismo, cada estudiante debe cumplir acciones de proyección a la comunidad en un periodo de tiempo no mayor a 90 días. Asimismo, en el artículo ocho del mismo reglamento, se mencionan los fines de dicha actividad:

> (1)Fomentar en el estudiante la solidaridad y el compromiso con la comunidad como norma ética y ciudadana.(2) Hacer un acto de reciprocidad con la sociedad, mediante la integración de la Universidad de Los Andes con la comunidad, para contribuir a su desarrollo (3) Enriquecer el proceso educativo de la Universidad de Los Andes por medio del aprendizaje-servicio, con la aplicación de los conocimientos adquiridos durante la Formación académica, artística, cultural y deportiva para coadyuvar a desarrollar el capital social del país (4) Contribuir a mejorar la calidad de vida de las comunidades beneficiarias del servicio comunitario (5) Contribuir a la formación de una conciencia colectiva de responsabilidad social en la comunidad universitaria (6) Ofrecer al estudiante la oportunidad de realizar actividades relacionadas con el ejercicio profesional, al aplicar los conocimientos y competencias adquiridos que contribuyan a la solución de problemas que confrontan las comunidades (7) Fortalecer en el estudiante, a través del aprendizaje-servicio, su condición como ciudadano donde el ser, saber, hacer y convivir se conjuguen en pro del desarrollo social.(ULA, 2007, p.11).

Por lo anterior, el servicio comunitario es una experiencia basada en un intercambio de saberes, vivencias y valores. De manera colaborativa, los estudiantes tienen la oportunidad de aplicar su formación profesional para contribuir en la solución de necesidades reales del entorno social, de modo que consolide valores sociales. La comunidad le ofrecerá al futuro docente sus experiencias vivenciales, en el desarrollo y fortalecimiento de valores como la solidaridad, la responsabilidad social, la igualdad, la cooperación, la participación ciudadana, la asistencia humanitaria y la alteridad. Al mismo tiempo, supone fortalecer desde el aprendizaje en servicio la formación integral de los estudiantes universitarios (prestadores de servicio) en las diversas áreas académicas del saber, cuya conjunción incidan integralmente en su perfil de formadores sociales comunitarios.

En lo concerniente a la mejora de la calidad de vida de las comunidades, destacan los aportes académicos y axiológicos, los primeros son sistematizado en actividades formativas prácticas en las que los prestadores de servicio, interactúan con los beneficiarios (niños y adolescentes de las casa hogares) quienes reciben orientaciones pedagógicas, destinadas a fortalecer sus conocimientos matemáticos, evitando así el fracaso escolar. El hecho de visitar a las comunidades, diagnosticar sus necesidades, desarrollar planes de acción concretas y enriquecerlas con los saberes consolidados durante la Carrera Universitaria, axiológicamente, suscita en los prestadores de servicio un elevado sentido de pertenencia y consciencia colectiva, lo cual favorece los valores de compañerismo, tolerancia, respeto, cooperación y, ayuda mutua.

Epistemológicamente, el servicio comunitario se apoya en la teoría de la acción comunicativa de Jünger Habermas, en la cual el hombre tiene capacidad enmancipatoria y auto-reflexiva para comunicarse con los demás, evaluar situaciones y tomar decisiones en función de ello, lo cual se fortalece en la medida que se forma en los espacios formales o no, mediante la interacción comunicativa con sus semejantes, con los que interpreta el mundo que le rodea, siendo capaz de conjugar dialécticamente la teoría y la práctica, compartiendo así sus concepciones, puntos de vista, creencias y demás marcos conceptuales mediante el trabajo cooperativo actuando decididamente, en la resolución de problemas prácticos garantes de la construcción de una mejor sociedad. El servicio comunitario, tiene su explicación gnoseológica en la naturaleza sociocrítica de la educación, en la que Escuela, Universidad o cualquier otro centro educativo, debe ante todo ser un espacio abierto a la comunidad desde el que cada individuo, pueda promover el cambio y la transformación social.

El rol del profesor tutor del servicio comunitario, estriba en ser un orientador e investigador de la realidad social, que apoyado en la metodología de proyectos, con ayuda colaborativa de los estudiantes prestadores de servicio, hacen un diagnostico participativo de las necesidades de la comunidad, las analizan y jerarquizan según el orden de importancia y establecen de manera situacional, las acciones concretas del plan de acción, cuyo objetivo central es el mejoramiento del problema o necesidad detectado. En el caso particular, los estudiantes que prestan el servicio comunitario, planifican, desarrollan y evalúan actividades formativas de aprendizaje significativo de los contenidos matemáticos, asumido este aprendizaje en los términos de Ausubel(1989) , pues vale acotar que en el escenario educativo venezolano, de acuerdo con los hallazgos de Gómez (2010); Guerrero (2005) y Pernía (2010), una de las asignaturas con mayor índice de aplazados y resultados poco favorables, en la que el rendimiento académico tiene a ser bajo, es la matemática.

En síntesis, el servicio comunitario de los estudiantes de la Carrera de Educación, Mención Física y Matemática, es una experiencia donde los profesores en formación ponen en práctica los saberes desarrollados durante su carrera para contribuir al bienestar social y personal de los niños en situación de riesgo y fracaso escolar. Para esto, desarrollan actividades de enseñanza que brindan oportunidades para la construcción de conocimientos matemáticos, acordes con las necesidades de formación de los estudiantes de la casa hogar. Se toman en cuenta los conocimientos previos de los adolescentes, relacionados con los conceptos y procedimientos matemáticos que sirven de base para el desarrollo de los temas y contenidos abordados durante la experiencia del servicio comunitario. Todo ello con la finalidad de mediar en el aprendizaje de la matemática y disminuir el fracaso escolar de los estudiantes. Para ello se propician oportunidades de aprendizaje de conceptos matemáticos que contribuyan al desarrollo del conocimiento matemático de los niños y adolescentes de la casa hogar.

La enseñanza de la matemática

La Matemática, es una disciplina científica formal también considerada por muchos matemáticos como deductiva, porque se encarga del estudio de los patrones en las estructuras de entes abstractos y en las relaciones existentes entre ellos. Es decir, a partir de notaciones básicas y mediante el razonamiento lógico, estudia de manera sistemática las relaciones cuantitativas entre los fenómenos de naturaleza abstracta tales como: números, figuras geométricas, símbolos, lo cual supone el desarrollo de procesos cognitivos, entendidos estos como los "… procesos mediante el cual se planifican las acciones que permiten superar los obstáculos que se interponen entre lo que se tiene y lo que se quiere lograr" (Ríos, 2004, p.45). Son procedimientos intersubjetivos de carácter intelectual, cuyo alcance reside en pensar con efectividad, resolver problemas de modo que se pueda atribuir sentidos y significados contextualizados de lo que se interpreta y comprende, entre los que destacan: la comparación, clasificación, definición, análisis, memorización, inferencia y seguimiento de instrucciones.

Desde el punto de vista didáctico-pedagógico, la enseñanza de la matemática demanda la presencia de un formador que desde su acción pedagógica, desarrolle acciones formativas que respondan a las necesidades educacionales de carácter conceptual, procedimental y actitudinal de cada estudiante, de manera constructiva sobre el saber matemático representado fundamentalmente por hechos, constructos, lógica y principios matemáticos que tengan aplicación en el contexto socio-comunitario inmediato de cada individuo y realidad. Todo ello, denota especial importancia porque la enseñanza y el aprendizaje significativo de la matemática, constituye un saber determinante en la formación integral del individuo que requiere la sociedad del siglo XXI.

Asimismo, merece destacar que la enseñanza de la matemática en el contexto socio formativo de los estudiantes de la Carrera de Educación, Mención Física y Matemática, de la Universidad de Los Andes ULA "Dr. Pedro Rincón Gutiérrez", en San Cristóbal Estado Táchira, reviste de gran importancia porque desde la experiencia del servicio comunitario, se da respuesta a las necesidades educativas de los niños en situación de riesgo de las casas hogares, Violetas y Ratones y la Ciudad de los Muchachos, en estos escenarios de atención al niño y adolescente, los prestadores de servicio comunitario, a través de estrategias de enseñanza y aprendizaje innovadoras, buscan que los niños construyan de manera cooperativa, su propio conocimiento matemático y logren así, encontrar soluciones efectivas que respondan consciente y críticamente a las situaciones problemáticas que se les suelen presentar diariamente en su vida cotidiana.

Desde luego, la enseñanza de la Matemática en las casas hogares, Violetas y Ratones y, La Ciudad de los Muchachos, se apoya en una didáctica activa, con carácter lúdico e innovador, en la que los prestadores de servicio, realizan actividades formativas estimulantes y amenas para los niños, en las que el juego, la interacción social, el trabajo grupal y colaborativo, se conjugan para situar a los educandos frente a situaciones reto, que tienen como propósito suscitar el interés y el aprendizaje significativo, en un clima pedagógico estimulante de modo que el conocimiento se construye a partir de acciones concretas de manipulación en las que los sentidos y significados, son el resultado de la resolución de problemas contextuales vividos cotidianamente, es decir, que aprenden haciendo y jugando. Con ello, se busca estimular el pensamiento creativo y autónomo de cada niño, distanciándolo de la metodología tradicional que predomina en la enseñanza de los contenidos matemáticos.

Niños en situación de riesgo

Se considera que un niño está en situación de riesgo cuando sus condiciones socioeconómicas no le son favorables y, por razones ajenas a su voluntad han quedado desprotegido de la atención de sus padres, no tienen un lugar fijo para descansar, como usualmente suele ser el hogar, ante lo que optan por refugiarse en las calles, incurriendo en la mendicidad, violencia, callejerización, narco dependencia. Generalmente, carecen de formación académica y afecto familiar, por lo que enfrentan problemas psicológicos que inciden desfavorablemente en su desarrollo socioafectivo integral originándose la marginación, estos niños al encontrase en la calle de manera errante, corren el peligro de ser abusados sexualmente, explotados por adultos, maltratados y menospreciados.

Metodología

El estudio se enmarca en el paradigma cualitativo, bajo un enfoque socio crítico mediante el método de investigación acción (Sandín, 2003). Los datos cualitativos, obtenidos mediante entrevistas, diarios y observaciones participante, aplicados a los adolescentes informantes clave y a sus profesores, prestadores de servicio comunitario, fueron analizados mediante el método inductivo de la comparación constante, categorizados y saturados (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Los profesores en formación son estudiantes en la ULA-Táchira, Venezuela, de la Carrera de Educación Mención Física y Matemática. La investigación se realiza en las casas de protección: Violetas y Ratones y la Ciudad de los Muchachos. Los sujetos de la investigación son adolescentes cursantes de primero, segundo y tercer año de educación media general, que habitan en las referidas casas hogar.

Los contextos de la investigación

En la ciudad de San Cristóbal, estado Táchira Venezuela, existen instituciones de carácter social que brindan en los establecimientos denominadas Casas Hogar, protección integral a los niños: comida, educación, habitación, atención médica, educación, deportes, y recreación, de modo que en las mañanas puedan cursar estudios formales en escuelas, liceos y en las tardes regresan a las casas donde reciben reforzamiento pedagógico y realizan actividades extra cátedra como manualidades, música, computación, entre otras. Los estudiantes de la Carrera de Educación Mención Física y Matemática, actúan como prestadores de servicio comunitario en las casa hogar Violetas y Ratones, así como en La Ciudad de los Muchachos siendo las mismas instituciones gubernamentales, en las que se da atención a niños niñas y adolescentes con edades comprendidas entre 6 y 18 años de edad.

Diagnóstico de la situación

La exploración del problema fue realizada por los estudiantes de Educación Física y Matemática durante un mes a razón de 10 horas semanales, sumando 40 horas en la fase diagnóstica. De los hallazgos y resultados preliminares del estudio emergieron dos categorías: a) Deserción escolar motivado a la metodología tradicional para la enseñanza de la matemática. b) Aprendizaje memorístico y descontextualizado; en los niños, niñas y adolescentes se aprecia poco dominio de las competencias matemáticas motivado a la escasa aplicación de estrategias para el aprendizaje de la matemática limitándose a memorizar procedimientos sin darle suficiente sentido y aplicación en su vida cotidiana.

Planificación, ejecución y evaluación

Motivado a los resultados del diagnóstico se procedió al diseño y ejecución de un plan de acción apoyado en estrategias de enseñanza innovadoras que buscaron contextualizar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática para que los niños pudiesen darle aplicación efectiva en la vida cotidiana, el plan se realizó durante 3 meses de trabajo comunitario continuo sumando 130 horas en total.

En lo que respecta al impacto del servicio comunitario en las casas hogares objeto de estudio, la experiencia ha permitido que los niños, niñas y los adolescentes beneficiarios, se motiven y manifiesten abiertamente su entusiasmo hacia las actividades desarrolladas por los prestadores de servicio, resultando ser positivo desde el punto de vista afectivo. Pedagógicamente, los estudiantes de Educación de la ULA Táchira, han experimentado situaciones estimulantes en las que han confrontado sus saberes matemáticos adquiridos en la universidad, pudiendo enriquecer las comunidades con su aportes científicos, académicos y disciplinares con elevado sentido de compromiso, vocación y pertenencia.

Se concluye, que el impacto social del servicio comunitario promueve el aprendizaje significativo de la matemática en niños, jóvenes y adolescentes en situaciones de riesgo, permitiendo superar de manera considerable el fracaso escolar de los estudiantes beneficiarios del servicio comunitario ofrecido por la Universidad de Los Andes. Este cometido, exige que se continúe fortaleciendo la formación de los futuros profesores de matemáticas en su rol de promotores sociales comunitarios.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D., Novak, J., y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Gómez, M. (2010). *Los procesos cognitivos en la enseñanza de la matemática en la educación secundaria venezolana.* Tesis doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador UPEL. Instituto Pedagógico Rural Gervasio Rubio IPRGR. Rubio. Estado Táchira. Venezuela. Mimeografiado.

Guerrero, M. (2005). *Hacia una didáctica motivadora y constructiva en la enseñanza de la matemática.* Tesis doctoral no publicada. Instituto Universitario de Tecnología Agro Industrial IUT. San Cristóbal. Estado Táchira. Venezuela. Mimeografiado.

Hernández, S; Fernández, C; y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación.* México. D.F:

Editorial McGraw Hill- Interamericana. S.A.

República Bolivariana de Venezuela. (2005). *Ley del Servicio Comunitario del Estudiante de Educación Superior*. Decreto publicado en la Gaceta Oficial N° 38.272 del 14 de septiembre de 2005.

Pernía, D. (2010). La educación matemática. Investigaciones de educación superior de Venezuela. *Evaluación & Investigación*, 5 (1), 95-116.

Ríos, P. (2004). *La aventura de aprender.* (4ta. ed.). Caracas. Venezuela: Cognitus

Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en Educación. Fundamentos y tradiciones*. España: McGraw Hill-Interamericana de España. S.A.

Tapia, M. (2006). *Aprendizaje y servicio solidario en las instituciones educativas y las organizaciones juveniles*. Buenos Aires. Argentina: Ciudad Nueva.

Universidad de Los Andes. (2007). *Reglamento del Servicio Comunitario del estudiante de la Universidad de Los Andes.* Mérida. Venezuela: Vicerrectorado Académico.

f y f(x): f(x) DETERMINA A f Y A SU VEZ LA OBSTACULIZA

Alex Montecino M., Ricardo Cantoral U.
Cinvestav-IPN México
montecino@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. Este trabajo, es parte de una investigación enmarcado en la teoría socioepistemológica, orientado a estudiar la relación existente entre *f* y *f*(*x*), que representan respectivamente, la función y su imagen, enfatizando cómo estos interactúan mediante los diferentes usos que se le otorga, donde cada uso propicia a una significación contextualizada de cada signo. Nos centraremos en el análisis de los roles desempeñados en diferentes contextos, el uso asignado y la argumentación que le sustenta. El interés por esta problemática surge de una experiencia de aula donde se observó la existencia de una confusión entre una noción de función con un procedimiento, en el contexto del cálculo de sólidos de revolución, ahí se confundió la imagen, *f*(*x*), con la función (Andrade y Montecino, 2009).

Palabras clave: significación contextualizada, usos, dialéctica y prácticas

Abstract. This work is part of a research framed in the socioepistemological theory, oriented to study the relationship between *f* y *f*(*x*), representing, respectively, the function and its image, and how they interact with the different uses that it's give to these signs, where each use conduce to a contextualized meaning of each sign. We will focus on the analysis of the roles played in different contexts, the use assigned, argumentation that can be inferred. The interest in this problem arises in a classroom experience, where was observed the existence of a confusion between the notion of function with a procedure, in the context of the calculation of revolution solids, there was confused the image *f*(*x*) with the function (Andrade y Montecino, 2009).

Key words: contextualized signification, uses, dialectic y practices

Introducción

El siguiente trabajo toma como premisa central: que la noción de función se resignifica y robustece a la luz de las prácticas y actividades en las que se ve inmersa. En ella se puede observar diferentes significados que se ponen en juego de los signos *f* y *f*(*x*), representando respectivamente la función y su imagen. Por ende, los signos mencionados, interactúan constantemente y con ello significándose uno al otro bajo una relación dialéctica. Esta forma de considerar a los signos toma sentido, ya que *"la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación"* (Cantoral y Farfán, 1998).

La investigación está orientada a estudiar la relación existente entre *f* y *f*(*x*) y cómo estos interactúan mediante los diferentes usos que se le da, donde a su vez cada uso propicia a una significación contextualizada de éstos signos, viéndose reflejado en las argumentaciones que sustentan y respaldan las prácticas con las que se construye el conocimiento.

Los signos en estudio viven y se significan en el ámbito académico, dentro de un proceso de dualidad entre lo escolarizado y el cotidiano, o sea, los signos se dotarán de significados, por una parte, a través del uso que se le da en el discurso Matemático Escolar (dME) dentro de las diferentes actividades y prácticas; y por otro lado en el uso que se le da en las prácticas diarias. Adicionalmente se puede evidenciar que en el dME es escaso el tratamiento sobre cómo se dotan de significado los diferentes roles que pueden cumplir f y $f(x)$, ya que la argumentaciones de los usos de estos signos no se presentan de forma explícita, sino más bien se deben inferir a la luz de los mismos usos, prácticas y contextos en el que se ven inmersos, lo que nos lleva a hablar sobre un discurso matemático subyacente (dMS). De lo antes mencionado se afirmará que existen carencias de argumentos explícitos dentro del dME para construir y fundamentar los roles de f y $f(x)$, junto con ello generar sus significaciones.

Sin duda los usos y significados se desarrollan a la luz de prácticas y actividades en que la función cumple algún rol relacionándose con otras concepciones o nociones. Es durante estos procesos que los signos se robustecen y nutren, dando con ello una multiplicidad de argumentaciones a la hora de hacer usos de estos signos, siendo estas argumentaciones las responsables de sustentar lo que se quiere representar, pero como podemos vislumbrar el uso indiferente de $f(x)$ en los diferentes contextos favorece a que se entienda a este signo como la función. Más aún, la evidencia recolectada arroja la premisa de que se invisibiliza el carácter portador de significado de f que posee $f(x)$ y que a su vez, paradójicamente, impiden la construcción de ésta, es decir, los diferentes roles jugados por $f(x)$ dotan de significado a f. Se concluye que sólo estudiando las imágenes se puede hablar de las propiedades de la función, pero a su vez ello obstaculiza su construcción plena, a modo de ejemplo de lo antes mencionado, al momento de decir que la imagen "se mueve" se dice que la función "es variable", pero la f "no se mueve", lo que sí cambia son las imágenes, es decir $f(x)$, ya que f es sólo una triada formada por una regla específica, un dominio de aplicación y un contra dominio o imagen.

Sobre la relación dialéctica existente entre estos signos es que fundamentamos nuestra problemática, ya que no podemos conceder, una sin la otra; no podemos caracterizar a una función f, o hablar de sus propiedades, sin realizar un estudio de su imagen $f(x)$, en donde los diferentes roles que puede jugar $f(x)$ dotarán de significado a f, está claro que perdería sentido hablar solamente de un $f(x)$, si no encuentra definida la f que le subyace.

Nuestra problemática surge al reconocer que la construcción de significado está en constante desarrollo, además el proceso de significación es socialmente construida y distribuida, relacionadas con las actividades humanas y sus prácticas, siendo esto lo que norma el cómo se están divulgando, significando, entendiendo y haciendo uso de los signos. Inclusive, no podemos desconocer que los conocimientos matemáticos, en este caso el de función, se han ido construyendo sobre ideas previas o bien contra ellas, sobre la base de los intereses, cuestionamientos, problemas, posibilidades y limitaciones de cada cultura y época (Sastre, Rey y Boubée, 2008). Su desarrollo no se puede concebir como algo aislado, de forma lineal ni estática, sino más bien relacionándose con otros conceptos y concepciones.

Se hace necesario observar el desarrollo epistemológico del concepto de función, poniendo énfasis en las diferentes concepciones de función, su evolución, en los roles de f y $f(x)$ y cómo se le están dando significados a estos signos matemáticos (*"un signo puede ser un símbolo matemático, una afirmación matemática, una expresión matemática, el nombre de un objeto matemático, entre otras cosas"* (Berger, 2004)), y cuáles son sus usos. Para este estudio se considero las concepción del concepto de función y su transformación desde que Leibniz lo introduce hasta la definición conjuntista de Bourbaki, para este caso no se considerara la noción de función antes de Leibniz, ya que, *"Es evidente que la noción primitiva de función era mucho más intuitiva; la actual tiene un alto grado de formalización que la hace mucho más abstracta"* (Farfán y García, 2005).

Nuestra investigación se sustenta en la idea de enlazar aspectos sociales del conocimiento matemático, sus signos y la construcción de éstos, abriendo la discusión en base a las nociones de significación, relación dialéctica de los signos f y $f(x)$, y todo esto bajo una perspectiva socioepistemológica. Las preguntas que orientarán este estudio son: *¿Cómo se significan f y $f(x)$ a la luz de los diferentes usos que se le dan? y ¿cómo se relacionan los signos y cómo ha sido su construcción?*

Para evidenciar la relación existente entre los signos se realizará en una primera instancia una búsqueda de carácter histórico, lo que implica reconocer y dar cuenta de las circunstancias que rodean tanto la gestación de un determinado saber, como los procesos de institucionalización que se vio sometido, por lo cual, se analizará, al hombre haciendo y usando matemáticas en un contexto social específico y no sólo a la producción matemática final que logra, donde el análisis de los usos del conocimiento matemático en situaciones socioculturales específicas permite dar cuenta que éste no está conformado por conceptos y estructuraciones conceptuales de forma aisladas, sino que presenta una articulación gestada al seno del desarrollo de ciertas prácticas (Buendía y Montiel, 2009). En una segunda instancia se analizarán textos que son utilizado dentro del discurso matemático actual, el cual se ve presente dentro del dME, este discurso no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula, sino que se extiende al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos (Cantoral, Farfán, Lezama y Martín-Serra, 2006)

Con el análisis realizado se dan evidencias que fundamentan la significación contextualizada del los signos, lo que se lleva a cabo al mirar desde una perspectiva sistémica el cómo se otorga y se está significando a los signos f y $f(x)$ por medio de los usos que se le han otorgado en las prácticas y actividades.

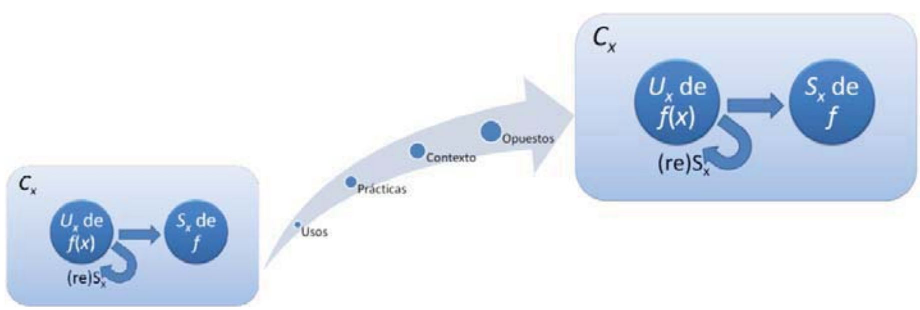
Con el fin de precisar más, se analizaron por una parte, los discursos elaborados por Cauchy (1821, 1823 y 1994) y Bourbaki (2006 y 2007), estas obras surgen como un interés por crear una obra didáctica, la cual se espera, sirva para la formación académica, además de sintetizar el conocimiento de su época y con ello contribuir al desarrollo de las Matemáticas Francesas. Luego nos adentrarnos al *discurso matemático escolar* actual, donde se analizarán los libros de Courant y John (1999) y Stewart (2003). En ambos casos se busca dar evidencia de que los roles otorgado a f y $f(x)$ estarán dando una significación contextualizada de los signos, la que no se encuentra implícita dentro del dME, esta significación ésta respondiendo a una racionalidad que sustenta dichos discursos.

Lo antes mencionado sin duda se verá permeado por la concepción de función con que se esté trabajando, y también por las "ideas" que la sostienen, las necesidades, ideologías y el razonamiento con el que se argumenta los diferentes textos analizados. Podemos ver en los autores Del Castillo y Montiel (2007) el concepto de función puede ser visto como forma de una curva (función geométrica), como fórmula analítica (función algebraica) y como abstracta (función lógica); lo que nos da indicios sobre la racionalidad que subyace a su construcción y los intereses que se tenían en un determinado momento.

Como se comentó anteriormente, el marco teórico tiene como base la Socioepistemología, la cual pone su atención en entender las circunstancias que permitieron que el conocimiento se construyera como se construyó (Cantoral, 2001, p.xxiii), en donde sus objetos de estudios incluye el entender cómo las personas construyen conocimiento matemático en situaciones específicas, y cómo desarrollan una manera matemática de pensar ante situaciones diversas, poniendo en el centro de la discusión, más que los conceptos en sí a las prácticas sociales asociadas con la construcción de dicho conocimiento (Cantoral y López-Flores, 2010), focalizándose en la naturaleza epistemológica, con ello privilegiando una epistemología de prácticas asociada a la construcción de los conocimientos matemáticos, junto con ello retira del centro atención a los objetos matemáticos (Montiel, 2005).

Nuestro trabajo lo centraremos dentro de prácticas matemáticas escolares. Dentro de ellas nos podemos percatar que interactúa el discurso matemático escolar, las nociones del docente, aspectos socioculturales, intereses personales o colectivos, entre otros muchos factores que permean el quehacer dentro del sistema educativo, los que matizan la significación que se le da a los signos. El estudio de estos signos se hace indispensable, ya que consideramos en ellos un doble papel, por un lado su función como herramientas que permite al individuo participar en prácticas cognitivas, y por otro lado, son parte de esos sistemas que trasciende al individuo y que a través del cual una realidad social es objetivada (Berger, 2004). Además del hecho que el signo matemático tiene una significación cultural que se deriva de su uso establecido en el discurso matemático. Teniendo esto presente, es que levantamos la siguiente hipótesis: la noción de función no se constituye entre los estudiantes, si no hasta que sus usos articulados entre *f* y *f*(*x*) estén bajo el control de las actividades situadas del alumno.

Para dar respuesta a las interrogantes se pondrá el acento en dos nociones que desarrollaremos y estarán dentro de la discusión del trabajo, las que son: significación y dialéctica, más específicamente la noción de relación dialéctica. Como podemos ver en la siguiente figura (figura 1), estos signos se relacionan y se van transformando en función de los usos, prácticas, contextos y relaciones entre opuestos. Resultando con ello una adquisición particular de significados y usos dentro de un campo de aplicación, pero a su vez estarán obstaculizando la adquisición plena de cada significado y de su uso particular, pero es gracia a esta confrontación que las significaciones toman un carácter personal, que idealmente debe estar en coherencia con el discurso matemático, para así adquirir una significación congruente a la socialmente aceptada o institucionalizada.



(Tomado de Montecino, 2012)

Figura 1: Relación dialéctica entre los signos

Como se puede apreciar en la figura 1, el proceso de significación es una relación dialéctica, ya que en el caso de la significación de *f*(*x*), se verá robustecida a la luz de las contraposiciones que existirán en los diferentes usos (U_x) del signo, más aún estas significaciones (S_x) de *f*(*x*) estarán dotando de diferentes significados a la función. La existencia de una relación dialéctica entre los signos *f* y *f*(*x*), nos permite hablar de significaciones que estarán dependiendo de los usos, prácticas y contexto (C_x) en donde se vean inmersos el conocimiento.

Además podemos apreciar que del análisis a los textos se puede establecer categorías de significación, en que muestran y dan a conocer cómo se entiende en cada caso los signos, pudiendo observar cómo han evolucionado la significación de los signos y cómo se están argumentando dentro de estos discursos. Estas categorías surgen desde los diferentes usos que se le da a los signos dentro de los discursos analizados, de los cuales se infieren las siguientes categorías de significaciones:

- Del discurso de Cauchy se significará a $f(x)$ como el valor puntual, una expresión algebraica, la función misma y la altura.
- Del discurso de Bourbaki se significará a f como la función o una aplicación; en el caso de $f(x)$ como un valor específico o puntual, como puntos y las alturas.
- Del discurso actual se significará a f como la función; en el caso de $f(x)$ como el(los) valor(es) numérico(s) o algébrico(s), la distribución de los puntos en el plano, la gráfica, una formula algebraica o miembro de una igualdad, modeladoras de sucesos o cuantificadoras de cambio, el resultado de un procedimiento y como la función.

A modo de conclusión, por una parte, se da evidencia que las significaciones de estos signos es evolutiva, es decir, se desarrollan y relativizan paulatinamente, lo que sucede a través de los diferentes usos que se esté dando al signo y más aún en las actividades o prácticas en la que se vea envuelto el conocimiento matemático. Donde la lucha de opuestos nutrirá la relación existente entre los signos y junto a ello implicará una mutua trasformación.

Dentro del desarrollo del discurso matemático existe un predominio del uso de $f(x)$, en donde inhibe que la noción de función se construya, pero he aquí la dialéctica del asunto, ya que sólo cuando se construyen relaciones entre los usos y significados de $f(x)$ es como se constituye a la noción de función, es decir: f

Por otra parte, la noción de función no se podrá construir o constituir, hasta que se articulen los diferentes usos y significados de f y $f(x)$, donde el dMS sustentará y dará herramientas para la argumentación de las diferentes categorías de significación, este discurso, propicia significaciones que complementan las expuestas en el discurso matemático (discurso oficial), otorgando herramientas para poder argumentar, en ocasiones de forma parcial, concepciones, conceptos y constructos.

Podemos ver que dentro los textos de matemática prevalece la postura de Bourbaki a la hora de precisar o definir el concepto de función, pero al momento de ver las aplicaciones de este constructo, se percibe –a la luz de cómo se están argumentando y se está haciendo uso del conocimiento– que es el enfoque de Cauchy el que prevalece, es decir, mirar a la función como una relación, siendo este objeto matemático representado por $f(x)$, lo que favorece a la poca claridad que existe en cómo se están significando y entendiendo estos signos. Más aún con el hecho de que *f* sólo se ve presente al momento de establecer el concepto de función, refuerza el uso indiferente de *f*(*x*) en los diferentes contextos, lo que propicia un predominio en el uso de este último para referirse a todos los aspectos vinculados a la función. La visión de Bourbaki conlleva en si una crisis del concepto de función, ya que éste cambia el paradigma de racionalidad que le sustentaba.

Referencias bibliográficas

Andrade, M. y Montecino, A. (2009). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano: Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Católica Silva Henríquez, Chile.

Berger, M. (2004). The functional use of mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics* 55, 81-102.

Bourbaki (2006). *Théorie des Ensembles*. Editorial N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Bourbaki (2007). *Fonctions d'une variable réelle*. Editorial N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1287-1296.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon. Revista de la S.A.E.M. "Thales", 42*, 353-369.

Cantoral, R. y López-Flores, J. (2010). La Socioepistemología: un estudio de su racionalidad. *Paradigma, 31 (1)*, 103-122

Cantoral, R., Farfán, R.M., Lezama, J., y Martín-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial*, 83-102.

Cauchy, A. (1889). *Cours d'analyse de l'cole royale polytechnique*. Francia: Editions Jacques Gabay.

Cauchy, A (1994). *Curso de Análisis*. Selección, traducción directa del francés y notas por Alvarez, C. MATHEMA, Facultad de Ciencias de la UMAN.

Courant, R. y John, F. (1999). *Introducción al cálculo y al análisis matemático. Volumen 1*. México: Limusa.

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* 568-579

Farfán, R. y García, M. (2005). El concepto de función: Un breve recorrido epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 489-493. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montecino, A. (2012). *f, f (x) y su significación. Una relación dialéctica*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8 (2),* 219-233.

Sastre, P., Rey, G.y Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*, 141-155.

Stewart, J. (2003). *Cálculo de una variable transcendentes temprana*. Cuarta edición. México: Thomson Learning.

LA MODELACIÓN DE LA FUNCIÓN AFÍN: UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Tamara Del Valle Contreras
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
Universidad Católica Silva Henríquez
tamaradc.mat@gmail.com

Resumen. El concepto de función afín está presente en distintos niveles del currículum escolar chileno. Sin embargo, el tratamiento del concepto solo se remite al uso de tablas y algoritmos con poca significancia para los estudiantes. Para que el concepto de función cobre importancia y significado, se propone un diseño de situación con un enfoque Socioepistemológico, el cual se aplica a un grupo de estudiantes con el fin de que estos resignifiquen la noción de función afín por medio de un problema matemático que presenta una situación cotidiana para ellos, y cuyo propósito es promover la modelación como una práctica proveniente del argumento. Para el análisis del trabajo efectuado por los estudiantes se consideran algunos elementos de la ingeniería didáctica, y su estudio se sustenta bajo la mirada de la teoría socioepistemológica.

Finalmente, lo que se pretende en este estudio es otorgarle otro estatus a la modelación, donde deja de ser un servicio para el sistema educativo y su rol pase a ser articulado dentro del pensamiento matemático de los estudiantes.

Palabras clave: socioepistemología, modelación, graficación, resignificación

Abstract. The concept of affine function appears at different levels of the Chilean school curriculum. However, the treatment only refers to the use of tables and algorithms with little significance for students. To take importance and meaning the concept of function, is propose a design with a socioepistemological focus, which applies to a group of students with the purpose of that the notion of affine function be resignifiedthrough of a mathematical problem that presents an everyday situation for them,and whose aimis to promotemodelingas a practicefrom theargument. For the analysis of the work done by students are considered some elements of didactic engineering, and their study is based on the look of the socioepistomological theory.

Finally, the aim in this study is to give another level to modeling, where stops being a service to the education systemand its rolebecomesarticulatedwithin thestudents' mathematicalthinking.

Key words: socioepistemology, modeling graphing, resignification

Introducción

El concepto de función afín trasciende en el currículum escolar chileno, ya que está presente desde los niveles básicos hasta el estudio del cálculo. Lamentablemente, este concepto se limita a ser representado a través de una fórmula y no representa aprendizajes significativos para el estudiante. Este trabajo pretende que la noción de función sea tratada desde otra perspectiva, resignificando el concepto a través de una mirada socioepistemológica, donde las prácticas sociales adquieren mayor importancia, haciendo que la modelación adquiera un estatus diferente, en el cual se le reconozca como que "es todo aquello que es utilizado para entender, predecir o intervenir el comportamiento de un fenómeno, en el cual se incluyen contextos gráficos, numéricos, algebraicos, entre otros"(García, 2007, p.3).

Antecedentes de investigación

Para resignificar la noción de función afín, es necesario analizar algunos componentes que denotan el surgimiento de la problemática en cuestión, por ende se debe entender la distinción entre la obra matemática y la matemática escolar. La primera, básicamente está abocada a producir conocimiento matemático puro, mientras que la segunda, a través de la actividad humana, busca interpretar ese conocimiento matemático para que sea significativo para la vida cotidiana. Sin embargo, la actividad humana hace que la obra matemática y la matemática escolar se vean estrechamente relacionadas, ya que la primera se transforma en un componente de la segunda por medio de las prácticas sociales. Según Suárez (2008), las prácticas que hacen de las matemáticas una herramienta para modelar, son las primordiales para construir conocimiento.

Como se mencionó anteriormente, la función afín ocupa un lugar primordial en el currículum chileno, ya que es fundamental para otros conocimientos, incluso en otras disciplinas. Sin embargo, este concepto aún se traduce a la enseñanza de una fórmula y trazados que representan su gráfica. Fabra y Deulofeu (2000), exponen que en la mayoría de los casos donde se enseñan funciones, no se plantean secuencias didácticas que evolucionen de manera paulatina el concepto, lo cual provoca que el aprendizaje no sea significativo. En consecuencia, este trabajo tiene como objetivo que un grupo de estudiantes, a través de la modelación, logren resignificar la noción de función al trabajar con una problemática que presente una situación cotidiana para ellos. Esto requiere otorgarle otro estatus a la modelación, donde deja de ser servicial al sistema educativo para que su rol sea articulado dentro del pensamiento matemático, es decir, la modelación ya no es una representación del concepto, sino que se hace parte del argumento del concepto de función como algo propio.

Se planea que la modelación como práctica social favorece el estudio de la función mediante la reconstrucción de significados. De esta manera, el concepto adquiere un nuevo sentido para los estudiantes, mejorando la funcionalidad del objeto en cuestión.

Podemos relacionar esta investigación a la realizada por García (2007). En ella se resignifica el concepto de función afín, en una experiencia de educación a distancia bajo el marco de la socioepistemología. En este estudio, se realizan 5 secuencias didácticas con la finalidad de evidenciar las herramientas y argumentos de los estudiantes. Sin embargo, esta secuencia no se presenta como comparación de mi investigación, sino que se expone como restricción y variable de control para la situación realizada a los alumnos que resignificarán el concepto de función. Así, se considerará el tipo de pregunta, la manera de preguntar y el para qué se pregunta, lo que implica que las preguntas proporcionarán información relevante para el estudio.

Análisis histórico-epistemológico

Para comprender y trabajar de manera óptima el concepto de función, previamente, se hace necesario realizar un análisis epistemológico y social del concepto de función. En el caso del análisis histórico se recurre al trabajo de García (2007), que presenta las etapas y evoluciones del concepto (la edad antigua, media y moderna), y al trabajo de Ruiz-Higueras (1998) que da referencias sobre las concepciones de la noción de función (la función como variación, proporción, gráfica, curva, expresión analítica, correspondencia arbitraria y terna). Así también, para el caso del análisis social, se analiza el currículum escolar chileno (2010) con la finalidad de exponer el interés y la utilización del contenido. También, se realiza un análisis exhaustivo al texto de estudio que presenta el concepto de manera formal, para examinar el enfoque otorgado a éste. Cabe destacar que el análisis epistemológico y social está formulado para identificar los obstáculos epistemológicos del concepto en cuestión, y a su vez contrasta la obra matemática de la matemática escolar.

Marco teórico

La investigación se enmarca bajo la teoría socioepistemológica, ya que utiliza como fundamento a la práctica social. Esta permite la interpretación y reestructuración de los contenidos matemáticos, por ejemplo cuando se confronta a la obra matemática con la matemática escolar.

La socioepistemología estudia el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemática, donde la modelación y el uso de la matemática son parte del funcionamiento mental de la persona. Así, la tarea principal de esta teoría, consiste en teorizar la interpretación y reorganización los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos de la obra matemática. En otras palabras, la matemática escolar y los conceptos matemáticos asociados adquieren significado propio, contexto, historia e intención.

Se entiende como práctica social a un grupo de supuestos socialmente compartidos, los cuales rigen a la actividad humana (García, 2007). La práctica social adopta un rol fundamental en la teoría socioepistemológica, ya que permite crear y distinguir las construcciones del conocimiento a través de la interacción profesor-alumno que se observa en el aula.

Se pretende que los contenidos matemáticos, específicamente en este caso, el de función afín, adquiera un estatus funcional, es decir, estos posean un desarrollo e integración constante en la vida cotidiana de los estudiantes. En otras palabras, se tiene la intención de que el contenido se reformule, y como resultado se obtenga algo significativo y útil para la vida cotidiana.

La socioepistemología contempla cuatro componentes imprescindibles para la construcción del conocimiento en el aula, ellas son: la dimensión epistemológica (estudio del contenido desde su origen y funcionamiento), la dimensión didáctica (procedimientos, conceptos y actitudes seleccionadas para el trabajo del aula), la dimensión cognitiva (procesos de construcción mental de los estudiantes) y la dimensión social (significados construidos en la actividad humana). Cabe destacar que en esta última dimensión, la práctica social es el eje para la reconstrucción de significados. Así, la modelación resalta en la práctica social como una construcción original.

El desarrollo de las prácticas en el sistema educativo parte del hecho social, donde cualquier grupo humano utiliza prácticas para generar conocimientos. El desarrollo de las prácticas dependen de la organización, la cultura y de la historia de los grupos humanos. Dichas prácticas, corresponden a los aspectos y formas de la actividad humana, las cuales transforman materialmente los objetos resignificando al conocimiento. Identificadas las prácticas sociales que dan cuenta del conocimiento matemático, éstas requieren ser reinterpretadas para ser integradas al sistema didáctico, ya que se necesita la intencionalidad para que se puedan desarrollar en las condiciones del sistema. Es por ello, que se construye la situación donde la práctica se convierte en el argumento para generar el conocimiento matemático (Cordero, 2006).

Lo social reformula y amplía la visión y la perspectiva de la matemática educativa. En base a ello, es que el papel de la modelación en el conocimiento matemático es una práctica social. Existe la necesidad de modelar para entender los datos de ciertas situaciones. Entre las maneras de modelar los estudiantes grafican, realizan una descripción verbal, una tabla numérica o una formula. Así, dicha necesidad de construir un argumento como práctica social ha permitido generar cierto conocimiento matemático.

Tradicionalmente se entiende por modelación a una aplicación de un conocimiento matemático. Sin embargo, en la socioepistemología, la modelación corresponde a una construcción del conocimiento matemático. En otras palabras, la modelación no es un agente externo ni representativo del conocimiento, sino que se entiende como parte propia de éste.

Actualmente, con la inclusión de nuevas tecnologías, la modelación ha adquirido una importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a tal punto que se cuestiona lo que se entiende por conocimiento matemático. Bajo estas perspectivas, podemos establecer que el concepto de modelación es dinámico y cualitativo, porque se utiliza para ser reproducido o para distinguirlo de otros objetos. A partir de lo anterior, es que toma relevancia el concepto de representación para definir la labor de modelación de un objeto. En la enseñanza de la matemática, el tratamiento de la modelación es considerado como una herramienta didáctica, la cual permite hacer representaciones adecuadas de un objeto matemático. En definitiva, la modelación es considerada como una aplicación matemática, donde se le encuentra significado al objeto matemático en función de su utilidad externa.

Se sabe que la matemática tiene significados distintos según la persona que la interpreta. Por un lado, el profesor contempla a la matemática como una disciplina en servicio de otras, mientras que el alumno ve a la matemática como un conocimiento utilitario en su diario vivir. En consecuencia, la modelación de la matemática desde esta perspectiva, también se interpreta de manera utilitaria, lo que aleja el carácter funcional de ésta. Para hacer utilitario el conocimiento, se debe entender a toda relación didáctica como una construcción de conocimiento, el cual este normado por la institución y lo cultural.

Lo que se quiere dar a entender es que la modelación, bajo la mirada de la socioepistemología, es más robusta que una representación o una aplicación matemática, si no que es un argumento propio del concepto.

La resignificación de un objeto matemático da cuenta de que éste posee significado propio, contexto, historia e intensión, lo que enriquece los conocimientos entre los seres humanos.

> Esta noción busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de los significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intensión; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos (García, 2007, p.4).

En este contexto, toman vital importancia lo que son las concepciones de los estudiantes, las cuales valen la pena analizar, ya que ellas reflejan el estado inicial del conocimiento en un estudiante y, además, da la opción de control de la transparencia de la comunicación directa.

El concepto de función, podría ser representado a través de cuatro formas: descripción verbal, tabla numérica, gráfica o fórmula. Sin embargo, como se mencionó con anterioridad, su enseñanza se traduce al trazado de una gráfica de una expresión algebraica, lo cual carece de sentido para un estudiante. Bien podría responder de manera satisfactoria en un examen, pero su funcionalidad pasa a ser casi nula.

La investigación tiene como objetivo primordial que un grupo de estudiantes resignifiquen la noción de función afín a través de la modelación. Para cumplir con este objetivo, es necesario generar una situación que permita al alumno formular un modelo, con sentido y significado pertinente que se traduzca en un aprendizaje funcional. De esta forma, responderemos a las siguientes interrogantes ¿Cuáles son las visiones que tienen los estudiantes del objeto función? ¿Qué construcción del conocimiento alcanzan a hacer, decir y discutir con respecto a la función afín? ¿Cuál es el control que posee el alumno para relacionar la situación con los diferentes tipos de representaciones?

Puesta en escena

Para dar respuestas a dichas preguntas, se utilizará ciertos elementos de la ingeniería didáctica con la finalidad de recabar información. Esta, se constituye como una metodología de investigación, ya que apoya en los resultados científicos, controla diferentes componentes e involucra la toma de decisiones. Dentro de esta metodología de investigación se contemplan cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, la experimentación y el análisis a posteriori y evaluación. Los elementos a considerar en esta investigación se basan en una confrontación entre la hipótesis de investigación y lo que realmente hicieron los estudiantes para llegar a formular conclusiones, es decir, una confrontación entre el análisis a priori y a el análisis a posteriori, teniendo a la vista las hipótesis a investigar.

El análisis de la actividad se basa en cuatro momentos: introducción a la actividad, donde el profesor entrega los lineamientos generales del trabajo a realizar; construcción de un modelo matemático, donde los estudiantes se ven en la necesidad de crear un modelo que represente de mejor manera a la situación planteada; otorgar significado a los valores reales, donde los estudiantes analizan las opciones de representación de la situación a través de procesos, objetos y argumentos; conclusión de la actividad, donde los estudiantes usan los significados, procedimientos, procesos, objetos y argumentos, destacando la importancia de la función. El resultado de los pasos mencionados anteriormente, permitieron realizar un enriquecedor análisis que logró dar respuestas a las preguntas de investigación antes señaladas.

A través de los pasos mencionados anteriormente, se pretende que los estudiantes le otorguen un significado real a la función afín, utilizando la modelación como argumento de la construcción de conocimiento. Se pretende que este concepto sea funcional para ellos y no se considere como utilitario para ciertos momentos o determinadas situaciones cotidianas.

Es importante considerar que este trabajo aporta elementos que favorecen la noción de función afín, no solamente como una asignación entre objetos, sino que promueve la argumentación gráfica como una estrategia para la formación adecuada de los conceptos.

Una de las primeras preguntas que se intentan dilucidar en esta investigación, da cuenta de cuáles son las visiones que tienen los estudiantes respecto al objeto función. Para dar respuesta a esta pregunta es necesario realizar un estudio respecto a la visión que se posee en la actualidad dicho concepto.

En el análisis de los programas de estudio propuesto por el Ministerio de Educación Chileno para el nivel de Octavo Año Básico del año 2010, se observa que a pesar de introducir el tema de manera contextualizada, otorgándole un sentido a la relación entre variables y promoviendo de manera llamativa el tema, no se aspira a que ese inicio de unidad sea parte de la construcción de conocimientos del estudiante. En el texto se terminan facilitando formulas, proporcionando técnicas que le permiten al alumno resolver problemas, limitando a la función afín a ser, simplemente, la expresión $y = mx + n$, donde *m* es la pendiente y *n* es el coeficiente de posición.

La situación utilizada trata acerca de lo nocivo que es el consumo de cigarrillos para quienes lo hacen directa o indirectamente. Se presenta una tabla y se realizan preguntas específicas que buscan rescatar información desde los estudiantes, tales como el reconocimiento y construcción de modelos a partir de la situación. Es importante detallar cuáles fueron las construcciones de conocimiento que se logran evidenciar en la aplicación de la situación. En primer lugar, se puede especificar que los estudiantes fueron capaces de otorgarle un significado propio a los valores del modelo creado. Al mismo tiempo, hicieron funcional algunos de los conceptos, ya que fueron capaces de utilizar los significados, procedimientos, procesos-objeto y argumentos.

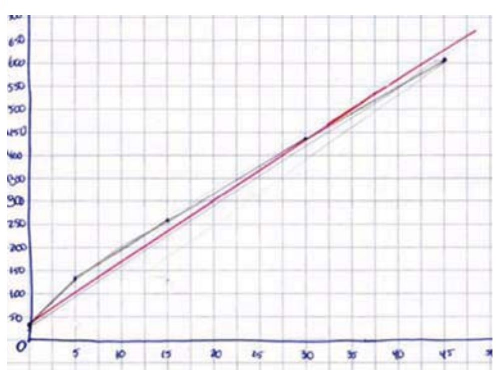
El hecho de que el profesor les pregunte a los estudiantes sobre que pasa a mayor consumo de cigarrillos diarios, qué punto es más importante que otros, qué significado tiene este valor, o simplemente, qué significado tiene la variable, propicia la creación de argumentos que favorecen la relación entre la situación, la gráfica y la expresión algebraica.

La modelación es una categoría que puede configurar una construcción de manera independiente al desarrollo del cálculo u otra área, ya que el uso de la gráfica y de la expresión algebraica surgió de manera espontánea en el desarrollo de la actividad. Por lo tanto, la gráfica representa una herramienta de análisis que proporciona información visual sobre el sentido que posee la pendiente y el coeficiente de posición. Por lo demás, los estudiantes le otorgan un nuevo uso a la gráfica, lo que evidencia una reorganización de sus conocimientos. Asimismo, determinaron que graficar les permite predecir situaciones a futuro, modelar situaciones reales, comunicarse a través de ella, etcétera.

Los resultados de la confrontación entre lo que se pretendía que ocurriría y lo que realmente sucedió, facilitó el proceso de evidenciar la situación de modelación de la función afín, proporcionándonos valiosos elementos para reorganizar la aplicación de la actividad implementada, como por ejemplo: distribuir de mejor manera el tiempo en los cuatro momentos de la actividad; distribuir mejor la hoja donde se plantea la situación, entregando cuadros de respuesta donde el alumno plasme su desarrollo, y finalmente, explicitando al alumno que anote los procesos y argumentos empleados para dar sus respuestas, ya que éstas no siempre son captadas por el profesor.

En el análisis efectuado por los estudiantes al momento de implementar la situación (quienes trabajaron de manera grupal para construir el modelo), se reconoce la no uniformidad de los datos entregados por la tabla a través de: el cálculo de pendientes; la graficación de los puntos; la identificación de la variación de los puntos, entre otros. Por ejemplo:

Ejemplo del apunte de un estudiante



- “Necesito crear nuevos puntos y eliminar otros para que me quede una línea recta”
- “Para elegir la mejor recta, nosotras elegimos el segundo punto con el primer punto”.
- “Es la línea recta que se encuentra más cercana a todos los puntos que se forman con los datos entregados del problema (alumna que realizo una línea recta en rojo entre los puntos que entregaba la situación)”.
- “Elegimos el primer punto con el último punto, porque muestran la realidad de la familia que representan esos puntos, y es por eso que consideramos a las bases (extremos de la muestra) como fundamentales para ello”.

En estos diálogos se puede observar diálogos entre los estudiantes, donde la gráfica toma un rol argumentativo

Conclusiones

Finalmente, se puede observar que los argumentos planteados en la situación, permiten al estudiante resignificar la noción de función mediante un nuevo uso y significado de la modelación. Esto se debe a que el estudiante es capaz de tomar decisiones, asignar significados y generar procedimientos.

El marco de la socioepistemología, provoca un cambio en la actividad matemática escolar, lo cual queda de manifiesto en este trabajo. El análisis realizado permite replantearnos la mirada que se le está dando a la noción de función afín en la actualidad, promoviendo reflexionar sobre la práctica docente (considerando que éste es uno de los propósitos que posee su formación como matemáticos educativos) y así también, lograr que los estudiantes reflexionen sobre sus propios conocimientos.

Se espera que esta investigación sea un peldaño para que otros profesionales de la educación identifiquen y generen estrategias con el fin de propiciar la construcción de conocimientos matemáticos en sus estudiantes.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nella matematica scolastica. *La matematica* e *la sua didattica* 20, 1, 59-79.

Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000). Construcción de Gráficos de Funciones: Continuidad y prototipos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(2) 207-230.

García, M. (2007). *Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia a distancia*. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

MINEDUC. (2010). *Propuesta Ajuste Curricular: Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios. Matemática.Santiago.* Recuperado de http://www.Mineduc.cl

Ruiz-Higueras, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Jaén. España.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

LAS NIÑAS QUE SON ABURRIDAS PARTICIPAN MÁS EN MATEMÁTICAS: LA MATEMÁTICA ESCOLAR ENTRE IDENTIDADES Y REPRESENTACIONES

Claudia Rodríguez Muñoz
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN México
claurom65@yahoo.com

Resumen. Se trata de una investigación longitudinal sobre la matemática escolar y las estudiantes de primaria y secundaria de escuelas mixtas en la Ciudad de México. Desde una perspectiva sociocultural y una multimetodología cualitativa se busca comprender la relación entre los procesos identitarios de género, las construcciones representacionales de las matemáticas y el desempeño de las estudiantes en esta asignatura. Este reporte muestra los resultados del seguimiento que se ha realizado a las estudiantes durante dos ciclos escolares. La triangulación de los resultados permiten describir tres identidades de género de las estudiantes en relación a la construcción de representaciones sociales distintivas y compartidas de las matemáticas escolares, en las que la condición de ser mujer en un contexto social situado deja huellas que se negocian y generan resistencias de cara a las dinámicas del aula de matemáticas, las habilidades y conocimientos matemáticos.

Palabras clave: representaciones sociales, identidades, género, matemáticas

Abstract. This paper is about a longterm study about school mathematics and women elementary and junior highschool students of schools in Mexico City. From a sociocultural perspective and a qualitative multimethodology it's tried to understand the identity processes of gender, the representational construction of mathematics and the performance of girl students in math. This report shows the results of the follow up that has been done to the same students along the last two school years. The results triangulation can give room to describe the three gender identities of students in relation to the construction of the social representation distinctive and shared of the school mathematics, where the condition of women in a specific social context leave footprints negotiated and where some resistance is constructed facing the math classroom dynamics, the skills and the mathematic knowledge.

Key words: social representation, identities, gender, mathematics

Introducción

La investigación en Educación Matemática ha desarrollado desde la década de 1970 una línea de investigación en matemáticas y género, en tres niveles: nivel teórico (Fenemma, 1974; Burton 1995), a nivel empírico (Eccles 1993; Forgasz y Leder, 2000; Ursini y Sánchez, 2008,) y a nivel de las prácticas didácticas (Rodríguez y Ursini 2008). En los estudios de género se revelan distintos aspectos relacionados con las matemáticas escolares (desempeño, actitudes, autoconfianza, resolución de problemas en áreas especificas del conocimiento matemático) por lo general reportan tendencias a favor de los estudiantes hombres en diversos niveles educativos.

La experiencia docente y la experiencia investigativa (INMUJERES, 2009 y 2010) nos permite distinguir que las mujeres construyen distintas formas de *"ser estudiantes de matemáticas"*, formas diversas de construir su *"ser mujeres"* y diversas maneras de relacionarse con la comunidad escolar. Lo que nos ha llevado a preguntarnos ¿Acaso la condición de género, es decir, ser mujer determina su desempeño en matemáticas? ¿Todas las mujeres tienen un modo específico de enfrentar las tareas matemáticas? Estas configuraciones genéricas, representacionales, cognitivas y afectivas dieron pauta para modificar el lugar desde dónde abordar la problemática de género e intentar comprender mejor la relación que guarda la identidad de las mujeres frente a esta disciplina.

Los objetivos en esta investigación se establecieron de la siguiente forma:

- Describir la relación entre los procesos identitarios de las estudiantes de educación básica y la construcción de sus representaciones sociales sobre las matemáticas.
- Analizar la influencia de los procesos identitarios y representacionales en el desempeño matemático de las estudiantes.

Marco teórico

En concordancia con el planteamiento anterior es importante definir la identidad como una herramienta analítica para la comprensión de la escuela y la sociedad (Gee, 2001).

En el ámbito de la Matemática Educativa el trabajo de Gómez Chacón (2000) es uno de los pioneros en incluir a la identidad social, como una categoría de análisis para explicar la dinámica de interacción entre los factores cognitivos y afectivos implicados en el aprendizaje de las matemáticas escolares. En trabajos posteriores diversos autores plantean la identidad matemática partiendo de una identificación o diferenciación de las y los individuos dentro de una comunidad de aprendizaje de las matemáticas (Boaler y Greeno, 2000, Gómez-Chacón y Figueiral, 2007).

En este trabajo planteamos la identidad de género partiendo de la identificación o diferenciación de las estudiantes de una comunidad de aprendizaje de las matemáticas contextualizada. Es decir retomamos el concepto de constitución de *sujetos de género* (Lagarde, 1997) que permite la sintetización de las diferentes condiciones sociales (históricas, culturales, contextuales) en las que viven cotidianamente las estudiantes y de los colectivos (el aula de matemáticas) de los que son integrantes.

Nos apoyamos en la Teoría de las Representaciones Sociales (Moscovici, 1961) porque en ella encontramos una teoría y una categoría de análisis que nos ayuda a evaluar, a categorizar y a entender la realidad social; como guía constitutiva y reguladora de las interacciones sociales, como una expresión del pensamiento cotidiano, compartido y elaborado por un grupo social. Es una teoría que nos permite conocer la manera en que nosotros, sujetos sociales, aprendemos los acontecimientos de la vida diaria, las características de nuestro medio ambiente, las informaciones que en él circulan, las personas de nuestro entorno próximo o lejano (Jodelete, 1986).

Consideraciones metodológicas

Los datos que aquí se describen son de un estudio longitudinal de 20 estudiantes mujeres de primaria (que han cursado 4° y 5° año) y 20 estudiantes mujeres de secundaria (durante el curso de 1° y 2° grados) pertenecientes a dos escuelas públicas de clase media baja, ubicadas al sur del Distrito Federal en México.

Las técnicas e instrumentos para la toma de datos fueron: cuestionario de matemáticas asociaciones libres, Grupos focales y Entrevistas en profundidad.

El enfoque metodológico empleado en esta investigación es cualitativo interpretativo, fundamentado en el análisis de la subjetividad de las participantes, donde se combina técnicas propias de la antropología y psicológica social para dar cuenta de los procesos de interrelación en el contexto del aula de matemáticas, las construcciones identitarias, representacionales y el desempeño matemático.

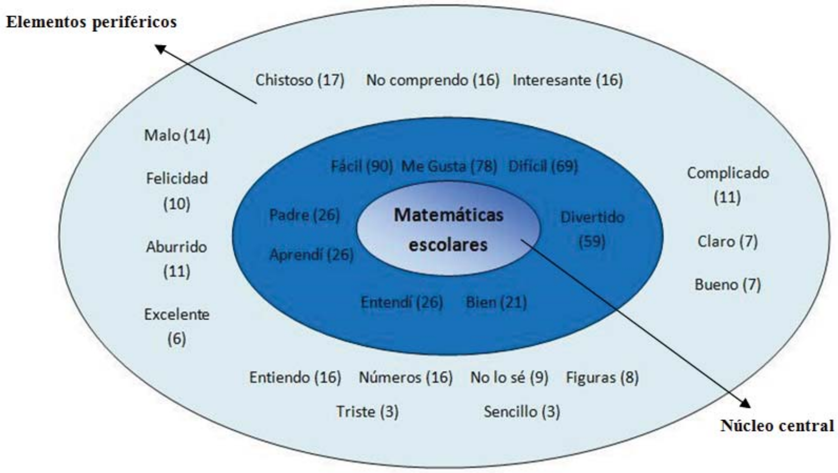
Resultados

Se presentan los resultados de las 20 estudiantes de primaria y las 20 estudiantes de secundaria en torno a las dos primeras técnicas e instrumento de indagación, las entrevistas a profundidad se aplicaron a ocho estudiantes, cuatro de cada nivel educativo, la inclusión de dichas estudiantes se debió a la relevancia de sus trayectorias académicas y a la participación en todas las sesiones de recogida de datos. Además, los análisis previos a esta elección revelaron que estas estudiantes son muestra significativa y representativa de la heterogeneidad que se puede compartir en el aula de matemáticas.

La aplicación del cuestionario de matemáticas de asociaciones libres proporciona series de palabras e ideas en distintos niveles asociativos que permiten determinar la estructura de la representación social de las matemáticas que las estudiantes construyen en su contexto social y cultural.

Las matemáticas escolares, son aprehendidas por las estudiantes con una gran diversidad de significados que ponen de manifiesto un conocimiento heterogéneo acerca del fenómeno. El núcleo organizador de la representación de las matemáticas escolares establece cuatro cogniciones elementales que modelan el sentido del fenómeno: *fácil/difícil/gusto/diversión* lo que da a la representación su significado y coherencia.

Representación social de las matemáticas en estudiantes de primaria.

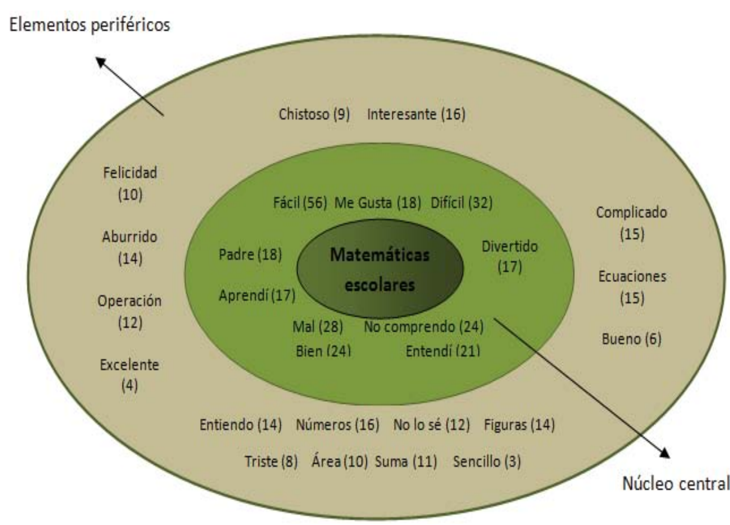


Esquema 1. Estructura de la representación social de las matemáticas en estudiantes de primaria ciclos escolares 2010 y 2011, los números son las frecuencias con que fueron evocadas esas palabras

El nivel informativo revela un conocimiento del sentido común del impacto que tienen las matemáticas escolares en la vida cotidiana y la vida escolar. Aun cuando el núcleo central está compuesto por términos diversos, esta información se puede traducir como una cognición compartida: "las matemáticas escolares son atractivas" para este grupo de estudiantes.

En el nivel periférico, se pueden observar diversos aspectos relacionados con valoraciones afectivas y socio-cognitivas en torno al aprendizaje de las Matemáticas. Por ejemplo, aparecen con frecuencia asociaciones dicotómicas que reflejan seguridad, felicidad, interés, comprensión de los temas planteados o expresiones totalmente inversas.

Representación social de las matemáticas en estudiantes de secundaria.

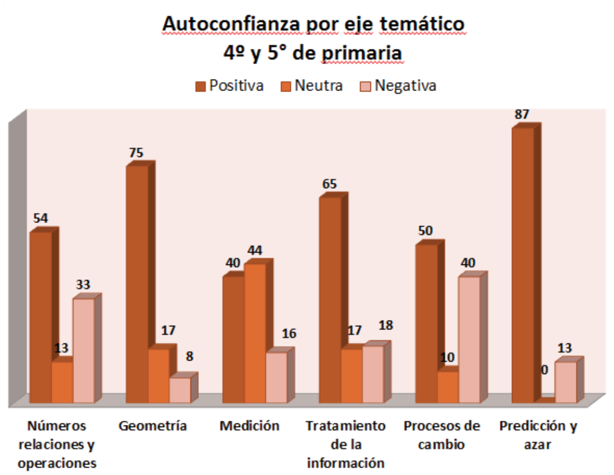


Esquema 2 Estructura de la representación social de las matemáticas en estudiantes de secundaria ciclos escolares 2010 y 2011, los números son las frecuencias con que fueron evocadas esas palabras

Las estudiantes de secundaria se apropian de las matemáticas escolares con una diversidad de significados que ponen de manifiesto un conocimiento heterogéneo acerca de esta asignatura. El núcleo central de la representación de las matemáticas escolares establece cinco cogniciones que modelan el sentido que otorgan a las matemáticas: fácil/difícil/bien/mal/no comprendo, lo que da a la representación su significado y coherencia, aunque este sentido sea dicotómico.

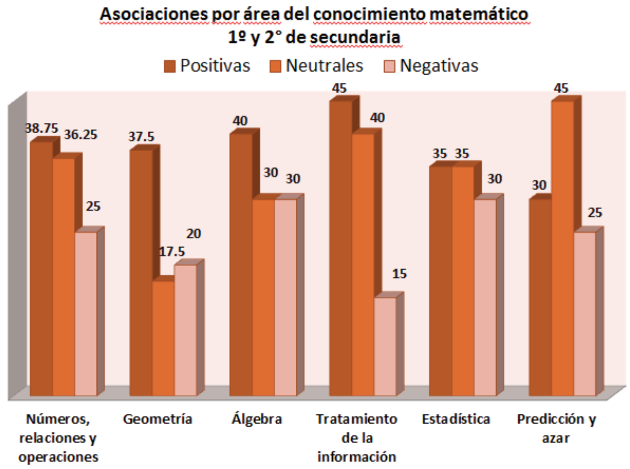
El nivel informativo revela un conocimiento del sentido común del impacto que tienen las matemáticas escolares en la vida cotidiana y la vida escolar, aun cuando el núcleo central está compuesto por términos que muestran dos polaridades, esta información se puede traducir como una cognición contradictoria: para casi la mitad de las estudiantes "las matemáticas escolares son atractivas" para casi la otra mitad de las participantes: "las matemáticas escolares son complicadas" en este grupo de estudiantes.

En el nivel periférico, sucede algo muy similar que en el núcleo central, se pueden observar diversos aspectos relacionados con valoraciones afectivas y socio-cognitivas en torno al aprendizaje de las Matemáticas que coincide con los elementos periféricos que prevalecen en las evocaciones que hicieron las estudiantes de primaria. Por ejemplo, aparecen con frecuencia asociaciones dicotómicas que reflejan seguridad, felicidad, interés, comprensión de los temas planteados o expresiones totalmente inversas, aunque en el caso de las chicas de secundaria son más frecuentes las expresiones que las distancian de las matemáticas.



Gráfica 1. % de autoconfianza de las estudiantes de primaria al trabajar matemáticas por eje temático.

Los reactivos que presentan mayor confianza para las chicas de primaria son los relacionados predicción y azar (87%), geometría (75%), tratamiento de la información (65%) y con números, sus relaciones y sus operaciones (54%). Es de llamar la atención que en las asociaciones libres las estudiantes se muestran más dudosas respecto a temas de tratamiento de la información y geometría. Encontramos más consistencia entre las asociaciones y la autoconfianza en los ítems de medición y procesos de cambio.



Gráfica 2. % de autoconfianza de las estudiantes de secundaria al trabajar matemáticas por eje temático.

Al observar la autoconfianza de las estudiantes por área del conocimiento matemático encontramos que existen problemas matemáticos específicos en este instrumento que les resultan más fáciles de dominar o comprender, áreas en las que expresan mayor seguridad, como son los problemas relacionados con la estadística (65%), probabilidad y azar (55%), geometría (52%) y números sus relaciones y sus operaciones (49%). El caso de geometría en este estudio es relevante ya que contrario a lo que la literatura reporta como un área de mayor dificultad para las estudiantes (por ejemplo, González, 2003). Podríamos suponer que en este grupo en particular se han desarrollado mejores habilidades para visualizar, analizar, interpretar los problemas planteados. Es evidente que las evocaciones emitidas por las estudiantes ponen al descubierto mayor autoconfianza ante estos cuestionamientos en específico. Los problemas que se encuentran en el área de conocimiento algebraico y de tratamiento de la información son los que generaron menor autoconfianza en las estudiantes de secundaria.

La cultura del aula de matemáticas se describe en los grupos focales, es aquí donde ellas expresan sus experiencias y emociones respecto a las distintas formas de enseñanza de las y los docentes que trabajaron en ambos niveles educativos.

Desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y en relación con la identidad cultural de estas estudiantes se puede afirmar que: Las estudiantes de ambos niveles educativos expresan de manera oral y escrita sentimientos de frustración, impotencia, malestar, incomodidad, aburrimiento en relación a los cursos de matemáticas donde la práctica docente no cubre sus expectativas educativas y de convivencia.

Los datos indican que las estudiantes tienen una mejor actitud hacia las matemáticas, sus creencias, valoraciones y sobre todo sus emociones mejoran cuando comparten el aula con docentes que emplean estrategias didácticas más dinámicas, cuando tienden a legitimar a las y los estudiantes como comunicadores matemáticos, esto conducen a interacciones en el aula que modifican la participación, la autopercepción y la autoconfianza como aprendices de matemáticas.

Las entrevistas en profundidad nos mostraron, huellas, rastros culturales que siguen marcando en lo profundo una condición de subordinación frente a las matemáticas y frente a su condición de mujer.

En estas entrevistas, cinco de estas estudiantes reproducen discursos que la cultura escolar y social ha interiorizado y anclado respecto a las matemáticas y las mujeres como aprendices de matemáticas. Adjudican una importancia superior a la matemática. Refrendan la creencia de que la matemática escolar es difícil y que sólo los muy inteligentes pueden acceder a ella. También, está presente en una de las estudiantes la idea de ser exitosa porque se esfuerza mucho.

Sólo dos de ocho estudiantes han logrado reconocerse como inteligentes, capaces de desarrollar habilidades y construir conocimiento matemático, las biografías de estas estudiantes están vinculadas a un capital cultural familiar favorable y a prácticas de equidad de género.

A modo de conclusión pensamos en la relevancia que tiene conocer el ambiente social y familiar que en el que se desarrollan las estudiantes, porque es ahí, dónde se establecen los procesos de construcción de las identidades genéricas y las representaciones de las matemáticas, las relaciones y negociaciones que se hacen en el aula de matemáticas dependen de los interlocutores y sus posiciones frente esta actividad.

La construcción del conocimiento en el aula de matemáticas no está limitada a la interacción del profesor y sus estudiantes sino que abarca redes de interacción social que toca a los pares, compañeras y compañeros de aula, pero también al entorno social y cultural de la clase.

Referencias bibliográficas

Boaler, J., y Greeno, J. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematical worlds. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning.* 45–82. Stamford, CT: Ablex.

Burton, L. (1995). Moving Towards a Feminist Epistemology of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics, 28* (3), 275–291.

Eccles J. S. (1993). School and family effects on the ontogeny of children's interests, self-perceptions, and activity choices. En: J. E. Jacobs (Eds.), *Developmental perspectives on motivation,* Nebraska symposium on motivation (145 - 208) Lincoln, NB: University of Nebraska Press.

Fennema, E. (1974). Sex differences in mathematics achievement: a review. J Res Math Educ *5*, 126–139.

Forgasz, H. J., y Leder, G. C. (2000). The 'mathematics as a gendered domain' scale. In T Nakahara and M Koyama (Eds.) Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (2-273–2-279). Hiroshima: Department of Mathematics Education, Hiroshima University [ISSN 0771-100X, PME 24, Hiroshima, Japan, July 23-27].

Gee, J. P. (2001). Identity as an analytic lens for research in education. *Review of Research in Education 25,* 99–125.

Gómez-Chacón, I. Mª. (2000). *Matemática emocional : los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: NARCEA.

Gómez-Chacón, I. Mª. y Figueiral, L. (2007). Identité et facteur affectifs dans l´apprentissage des mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM Strasbourg *12*, 117-146.

Gonzalez, R.M. (2003). Diferencias de Género en el Desempeño matemático. *Educación Matemática,* 15 (2), 129-161.

INMUJERES, (2009). *Aspectos educativos y género. Modelos de intervención para el mejoramiento de las capacidades de aprendizaje en matemáticas.* México: Autor. Recuperado enero 2012 de: http://www.inmujeres.gob.mx/index.php/biblioteca-digital/cuadernosgenero/ct15.pdf

INMUJERES, (2010). *Actitudes y creencias acerca de las matemáticas. Intervención con perspectiva de género en escuelas secundarias.* México: Autor. Recuperado en de 2012 de: http://www.inmujeres.gob.mx/index.php/biblioteca-digital/cuadernos genero/ct24.pdf

Jodelet, D. (1986). La representación social: fenómenos, concepto y teoría. En S. Moscovici (coord.) *Psicología Social II*. México: Paidós.

Lagarde, M. (1997). *Identidad de género y Feminismo.* Costa Rica: Estudios del Instituto de la mujer/Universidad Nacional de Costa Rica.

Moscovici, S. (1961). *El psicoanálisis, su imagen y su público*. Buenos Aires: Huemul.

Rodríguez, C. y Ursini, S. (2008). Social representation and gender in the teaching of mathematics with multimedia devices. *ICME 11, Topic Study Group 32: Gender and mathematics education*, Monterrey, México.

Ursini, S. y Sánchez, J. G. (2008). Gender, technology and attitudes towards mathematics: a comparative longitudinal study with Mexican students. *ZDM Mathematics Education 40* (4), 559 – 577.

LA YUPANA Y EL SISTEMA DE NUMERACIÓN MAYA

Blanca María Peralta, Darwin Alexander Moreno
Colegio San Bernardino — Colombia
Colegio el Roble. — Guatemala
bmpguacheta@gmail.com, darwinmoreno56@gmail.com

Resumen. Las matemáticas de los pueblos ancestrales han sido opacadas por la gran sombra que producen los avances de las matemáticas de occidente. Pretendemos con este trabajo mostrar una posibilidad de enseñanza de sistemas de numeración y cálculo bajo el uso de la propuesta pedagógica Muiskanoba. Esta propuesta pedagógica recoge las formas de aprendizaje que usaron nuestros ancestros muiscas y tiene como base fundamental la itinerancia, no sólo física sino de palabra y pensamiento.

Palabras clave: nuevas pedagogías, numeración, cálculo

Abstract. Ancient mathematics of our indigenous people have been relegated by the advances of the western mathematics. Our purpose is to show a possibility to teach mayan numeration system and yupana (as another calculation tool) under the Musikanoba pedagogic proposal. This proposal includes pedagogical forms of learning used by our muiscas ancestors and it is based on "itinerancy", not only physically but in word and thought

Key words: new pedagogies, numeration, calculation

Justificación y descripción

En la 26 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa se compartió una experiencia sobre operaciones haciendo uso de la yupana, de la que se da cuenta en este trabajo. En estas sesiones de trabajo los participantes tuvieron la posibilidad de realizar operaciones básicas con números haciendo uso de la yupana y del sistema maya de numeración, y siguiendo la metodología Muiskanoba. Ya que es importante fomentar en nuestros profesores la inquietud por explorar los conocimientos ancestrales para darle corazón y sentido a las matemáticas del aula.

Marco referencial

En el contexto global de la educación las situaciones que incitan a maestras, maestros, niños y niñas a ser diferentes son señaladas como perturbadoras. Desde esa perspectiva "macro", la escuela es percibida como un lugar cerrado y carente de oportunidades para las diversas construcciones de las personas desde sus relaciones territoriales. Sobre todo porque las ideas preconcebidas acerca de un territorio y sus habitantes, fincadas en suposiciones de "sentido común" (Bourdieu, 1999: 130; Geertz, 1994), llevan a estigmatizaciones negativas. En consecuencia, desde los proyectos educativos institucionales se emprenden acciones pedagógicas y educativas que retroalimentan un círculo vicioso social, cultural y escolar de discriminación y señalamiento. Mientras tanto, en los territorios ancestrales que desde siempre han sido interculturales, coexisten saberes, conocimientos locales, pedagogías, rutas y ritos.

Nuestros colegios son "otros" de aquellos lugares con una vida cotidiana de aprehendizajes desde las diferencias étnicas, culturales y generacionales.

Fue así como desde 1999 fuimos buscando una metodología propia de nosotros los americanos y que tuviera como base las formas de aprendizaje de nuestros ancestros muiscas, de la sabana de Bogotá. Ya en 2006 consolidamos esta propuesta, Muiskanoba (Panqueba, Huérfano y Peralta, 2006) y es la que desde ese tiempo nos ha acompañado en los distintos emprendimientos pedagógicos que hemos realizado en el marco de la enseñanza de las matemáticas y otras áreas.

MuisKanoba

Más que un cúmulo de teorías de pedagogía e investigación es un camino abierto, con flexibilidad de principios y de perspectivas. Este camino lo podemos recorrer haciendo uso de cuatro senderos o pedagogías de investigación encontradas hasta ahora: Pedagogía de la contemplación, Pedagogía de las memorias cotidianas, Pedagogía de la revisión histórica y Pedagogía de la descripción.

Pedagogía de la contemplación: que consiste en el ritual de ver y observar. Por una parte, la contemplación se remite a un ritual del Rikuna (ver o mirar en lengua Kichwa), que es leer la cotidianidad con la mirada del inicio o primera impresión, con lo espontáneo y sin pre- juicios, pre- conceptos ni procedimientos. Es un hecho pre- científico de carácter inocente. Por otra parte y encaminada al objetivo de contemplar, tenemos el ritual del Ricunayana (mirar con atención en lengua kichwa), el cual consiste en observar con minucia, con un objetivo y de manera planeada y con un procedimiento.

Pedagogía de las memorias cotidianas: es captar la vida diaria, la realidad, con ayuda de herramientas como la escritura, el dibujo, los medios electrónicos, la fotografía, el video y el audio. Es necesario que en la investigación intercultural, se comprendan las diferentes formas de asumir las identidades, las culturas y la contemporaneidad.

Pedagogía de la revisión histórica: conocimiento de los saberes oficiales, institucionales e institucionalizados. Esto es que los documentos producidos y reproducidos por la hegemonía y por la disidencia han de ser revisados, recuperados y estudiados para conocerlos y ubicar la identificación y las identidades que históricamente han sido asignadas desde poderes ajenos a las culturas propias. En nuestro caso, no se pretende inventar una nación muisca o étnica, aunque políticamente los derechos están dados para ello. Nos mueve más bien el Kanoba que hemos hallado en el corazón y en la sangre del alma de la gente contemporánea que vive no sólo en el territorio muisca de Bosa, sino en muchas zonas del mundo. Este Kanoba nos remite a pensarnos en relación con las demás personas. Por lo tanto, la historia debe revisarse, no cambiarse, pues ya está escrita y dicha. Lo que es susceptible de cambio es nuestro presente y nuestro futuro, pues es lo que desconocemos.

Pedagogía de la descripción: a través de manifestaciones visuales, escritas, gráficas, etc., se copian, crean y re-crean los conocimientos y saberes contemplados en la cotidianidad. La pedagogía de la descripción es la metodología de la propuesta MuisKanoba. La descripción debe ayudar a pensar las relaciones interculturales, desde los estudios étnicos, rurales, urbanos, culturales y en general desde todos los campos aplicables al ámbito de la educación para la interculturalidad. La descripción es para MuisKanoba, una garantía de resignificación de los discursos de la exclusión, no como aparatos de inclusión homogenizadora sino como comprensión diversa, en donde participan diferentes lenguajes y propone, el entendimiento desde el reconocimiento de culturas diferentes.

Principios metodológicos

Itinerancias didácticas**:** Dentro de las itinerancias territoriales hemos encontrado que, en el corazón de las clases del colegio, también están presentes otras historias y cotidianidades particulares. Estas tienen que ver con las itinerancias por las diversas propuestas didácticas de los maestros y las maestras. Estar en un aula con un poco más de cuarenta estudiantes es una experiencia de confluencia de construcciones personales. Cada profesor y profesora cuenta con un acervo que se especula frente a los diferentes acervos de los y las jóvenes, niños y niñas. A través de las pedagogías que describimos anteriormente, contemplamos, describimos y dimos cuenta de las confluencias que conforman las itinerancias didácticas. Estas se definen como los tejidos de relaciones con conceptos o procesos propios de las disciplinas que en la escuela se presentan, pero siempre con una mirada desde lo que cada uno de esos jóvenes, jovencitas, niños y niñas son. Entonces estas itinerancias son producciones in situ en el constante ejercicio de confluir. Son fin, pero también medio para generar relaciones interculturales. Propician espacios por donde la gente se pueda mover, haciendo que los y las estudiantes, se concentren, pregunten e indaguen. Explicado ello en términos de pensamiento crítico, esto ha sido productivo porque hay posibilidades de elegir entre lo que se hace (Mejia, Orduz y Peralta, 2006). A más opciones de acción presentes en el aula, más opciones de aprendizaje hay. En este sentido sería una de-construcción de la persona misma, noción bastante trabajada por quienes se han dedicado a la corriente científica social del pensamiento de-colonial. Entonces en el aula de clase y en la clase misma el principio no es la quietud, es el movimiento; porque es posible que el movimiento de los cuerpos origine movimientos en las ideas. En equipo los estudiantes contemplan desde diversas estaciones un concepto en el mismo tiempo, esto origina que la clase ya no sea una, sino la intersección de las contemplaciones. Hace que se quiera estar en una estación de la clase pero también en la otra. Hace que se vea lo mismo desde diferentes puntos y hace que se confronten ideas, al interior de los sujetos y entre ellos. Y en este movimiento entre personas y al interior de ellas se construye la persona y por ende se le construye sentido al conocimiento formal escolar.

Construcción de las personas para construir conocimientos: Un quinto aporte para la discusión es la idea pedagógica de la construcción de conocimiento sólo en la construcción de la persona. En el marco de una teoría constructivista del conocimiento, como de hecho se decidió en el colegio orientar el trabajo pedagógico, consideramos que dicha teoría sólo tiene sentido en tanto se da en la construcción de la persona. Como lo describimos en el item anterior mediante la itinerancias, las personas se tejen y tejen a las demás con quienes interactúan. Así, se construyen y construyen a las otras personas. Es en esta relación intercultural donde los "conocimientos científicos" institucionalizados –también conocidos como los de occidente- (los que aparecen en la escuela) tendrán sentido o significación, en tanto puedan contribuir a darle sentido o significación a los tejidos realizados en la vida cotidiana desde un contexto.

Así pues, las artes y ciencias deben atender problemas particulares desde la formulación de prácticas pedagógicas coherentes con la misión que les compete en el contexto y realidades actuales. Las instituciones educativas deberían ser laboratorios de la cotidianidad, por tanto deberían emprender su trasformación desde la forma de pensarse. Esto se consigue atendiendo una de las fortalezas más evidentes en el escenario escolar: las diversidades y sus formas de manifestarse. Se precisan discursos pedagógicos que se ocupen de las diversidades y sus palimpsestos, caracterizados por la coexistencia de épocas, culturas, cotidianidades, historias, identidades y memorias. Por esto, antes que cualquier contenido "científico" u "académico", es prioritaria la construcción de las personas (Panqueba y Peralta, 2009).

Legislación

En este marco educativo sólo hasta la aparición de la ley de educación de Guatemala, se pensó curricularmente en la inclusión obligatoria de la enseñanza no sólo del sistema de numeración sino de toda la cosmovisión maya que acompaña a las familias indígenas que asisten a las diferentes escuelas. Fue así como se dio en la clase de matemáticas la enseñanza de los calendarios mayas con la complejidad que se podría llevar al aula de primaria. Y desde esta experiencia los niños hablaron de nahuales y de su significado para los ancestros mayas.

Para el caso de la yupana, ésta no se encuentra propuesta en ningún documento oficial pedagógico en países como Colombia o Guatemala. De hecho en Perú, lugar originario de los incas, la ley de lenguas y el programa de lenguas fueron emitidos en el 2002 y la nueva ley de educación en el 2003. Dicha ley reconoce la diversidad étnica, lingüística y cultural del país y hasta el 2004 se emite el reglamento de la educación básica regular en donde se abre la oportunidad de establecer un currículo diversificado de acuerdo a los contextos particulares de las regiones. Sin embargo en el año 2010 como lo refiere Mendoza (2010) es noticia el que un grupo de estudiantes en el amazonas peruano esté aprendiendo matemáticas a través de la yupana.

Son aquellas las razones que nos mueven a compartir nuestra experiencia con otros maestros de América.

La yupana

En el año 2003 el profesor Oscar Pacheco dedicó un volumen de sus libros para contar y explicar en qué consistía y cómo se puede adecuar la yupana para efectos de la escuela actual. Presentamos un resumen de sus ideas básicas a continuación. *Yupana* según los primeros léxicos, se denominó *yupani,* que en Quechua quiere decir, "hacer cuentas o contar" o, *yo hago las cuentas*. Por las informaciones que ya conocemos, los encargados de la contabilidad (si vale la expresión), preferían calcular con piedrecitas u otros materiales parecidos, en especial granos de quínua, maíz o frijoles, utilizando los tableros con escaques, y luego anotar con nudos en los "Quipus", el cálculo era ejecutado con gran precisión. Esta manera de calcular generalmente, cuando eran varias las personas que iban a realizar las cuentas decían: "*yupanachej"* que significa "*contemos o hagamos nosotros las cuentas*". Luego, de ahí viene el nombre de "*Yupana*" que se le dio al instrumento con el que se contaba y realizaban las cuentas.

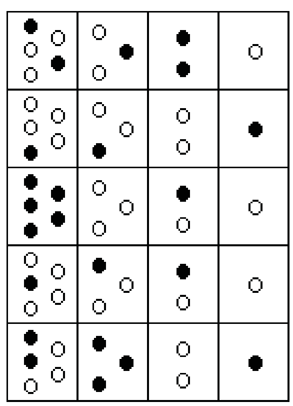


Figura 1: Diseño de la Yupana realizado por Guamán Poma

Aquí tenemos el diseño realizado por el mismo Guamán Poma (figura 1); Según el dibujo, pareciera que son fichas de dominó, pero, viene a ser la *Yupana,* es decir, un tablero con veinte casillas distribuidas en cinco filas y cuatro columnas. En cada casilla aparece cierto número de círculos, correspondiéndole cinco círculos a las casillas de la primera columna, tres a las de la segunda; dos a las de la tercera y uno a los de la cuarta. Además, algunos de estos círculos son negros y otros son blancos.

Algunos investigadores han considerado que los círculos blancos representan sitios u hoyos destinados a ser ocupados por elementos auxiliares de cálculo; tales como granos de quínua (que los hay negros y blancos), maíz, frijoles, piedrezuelas, etcétera. Los círculos negros representarían lugares ocupados por elementos (que en general llamaremos fichas). Dando por válida esta suposición, quizá, podrían colocarse cinco fichas en una casilla de la primera columna, o dos fichas en la casilla de la tercera columna o, una en la cuarta (Pacheco, 2003).

Esa observación hace que nosotros también hagamos la misma consideración para utilizar la *Yupana Incaica* como el instrumento que facilitará las operaciones fundamentales.

Metodología

Este trabajo tiene como fundamento una aproximación pedagógica (Muiskanoba) aprendida del mismo territorio latinoamericano y que procura la educación intercultural en el aula. La propuesta pedagógica Muiskanoba, propicia el reconocimiento, comprensión y valoración de todo el territorio (Entendemos territorio como las tierras, personas y las relaciones entre estos) que hace parte de una institución escolar. En esta propuesta existen dos fuertes principios contemplar y describir. Desde allí es posible lograr el estudio matemático de la cotidianidad de los estudiantes. Contemplar no sólo con los ojos sino con cada uno de los sentidos, haciendo una "recorrido" sistemático del territorio. Describir como la posibilidad de comunicar las contemplaciones realizadas.

Así las cosas, cada sesión tiene cuatro estaciones diferentes para que los participantes las recorran y en ese movimiento haya intercambio de ideas y experiencias. Al cabo de la totalidad de sesiones cada uno de los participantes debe haber construido su forma de ser y estar en una clase de matemáticas donde lo importante es el movimiento, pues consideramos que el movimiento de los cuerpos puede generar movimiento de las ideas pues las situaciones se ven desde diversas perspectivas.

Consideraciones finales

Proponemos este trabajo conjunto pues ha sido realizado de manera aislada en trabajo con maestros en Guatemala y Colombia, esto es, en Colombia con la yupana y en Guatemala con el sistema de numeración maya. Y queremos aprovechar la oportunidad de hacerlo simultáneamente con maestros de América Latina.

Referencias bibliográficas

Bourdieu, P. (1999). *Meditaciones pascalianas.* Barcelona: Anagrama

Geertz, C. (1994). "El sentido común como sistema cultural". En: C. Geertz, *Conocimiento local. Ensayos sobre la interpretación de las culturas*. Barcelona: Paidós

Dirección General de Gestión de Calidad Educativa. (2008). Currículo nacional base. Guatemala: Autor.

Mejia, A., Orduz, M. y Peralta, B. (2006). *¿Cómo formarnos para promover pensamiento crítico autónomo en el aula? Una propuesta de investigación acción apoyada por una herramienta conceptual*. Disponible en http://www.rieoei.org/1499.htm.

Mendoza, S. (2010). La yupana y una nueva forma de aprender a orillas del Huallaga. *Diario oficial el peruano Variedades, 103* (201), 3-5.

Pacheco, O. (2003). *La yupana mi computador incaico*. Santa Cruz de la Sierra: CEPDI

Panqueba, J. Huérfano, J. y Peralta, B. (2006). Bosa: territorio escolar de Colombia. *Magazín Aula Urbana* 54, 6-7

Peralta, B. y Panqueba, J. (2009). Itinerancias territoriales y patrimonios pedagógicos para la escuela intercultural. En Instituto para la investigación educativa y el desarrollo pedagógico (Comp). *Premio a la investigación e innovación educativa y pedagógica 2009*. (pp 161-179) Bogotá: En Instituto para la investigación educativa y el desarrollo pedagógico, IDEP.

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA ENSEÑANZA DE LAS CÓNICAS

Ángel Homero Flores Samaniego, Adriana Gómez Reyes
CCH-UNAM México
ahfs@unam.mx, orodelsilencio@yahoo.com.mx

Resumen. El objetivo del trabajo que se reporta es ilustrar cómo se puede utilizar la modelación matemática en el estudio de las cónicas, en particular circunferencia y elipse, con la ayuda de un software de Geometría Dinámica. Se darán algunos ejemplos de las actividades de enseñanza llevadas a cabo por estudiantes de Bachillerato (edades entre 16 y 17 años) y cómo se pueden utilizar instrumentos de evaluación formativa (rúbricas, listas de cotejo, bitácoras y matrices de resultados, entre otras; SEAM, 2010) para facilitar el análisis de los resultados de las actividades.

Palabras clave: modelación, cónicas, investigación en el aula

Abstract. The work reported aims to illustrate how you can use mathematical modeling in the study of the conical, in particular circle and ellipse, with the help of Dynamic Geometry software. Will be examples of teaching activities applied with high school students (aged 16-17 years) and how you can use tools of formative assessment (headings, comparison lists, blogs and matrices of results, among others; SEAM, 2010) to facilitate the analysis of the results of the activities.

Key words: modeling, conical, classroom research.

Introducción

La modelación matemática, entendida como el proceso de construcción de un modelo matemático que servirá para estudiar o explicar un fenómeno ha venido tomando fuerza como una estrategia de enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos (Alsina, García, Gómez y Romero, 2007; Bloom, Galbraith, Henn y Niss, 2007; Bolea, Bosch y Gascón, 2004; Ortiz, Rico y Castro, 2008). Más que enseñar a modelar a los estudiantes, la intención es que ellos utilicen la modelación como un medio para aplicar la matemática que saben y aprendan la que les sea útil para modelar fenómenos.

El Seminario de Evaluación Alternativa en Matemáticas (SEAM) está conformado por un grupo de profesores del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), preocupados por nuestra propia formación pero más aún por el aprendizaje logrado por nuestros estudiantes, quienes están inscritos en uno de los dos sistemas de bachillerato de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). En este seminario estamos convencidos de que una evaluación eficiente y acorde con un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en el estudiante hará visible el alcance logrado con respecto al desempeño del estudiante, del profesor; y con respecto a la efectividad del material de enseñanza.

En el SEAM se desarrolló un modelo de enseñanza que hemos denominado Aprender Matemática, Haciendo Matemática en el cuál la resolución de problemas juega un papel importante en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. En particular, los problemas de modelación han probado ser un medio efectivo para que el estudiante aprenda matemática.

En este contexto hemos caracterizado los problemas de modelación en dos tipos: *piensa y actúa*, y *ajuste de curvas*. En los problemas de piensa y actúa, se puede proponer un modelo a partir del enunciado del problema o del estudio del fenómeno en cuestión; mientras que en los problemas de ajuste de curvas no se puede proponer de manera inmediata el modelo, por lo que es necesario obtener una serie de datos relativos a las variables involucradas, estos datos se grafican y se busca una curva que los aproxime. En este último caso, la curva y su ecuación, son el modelo que se busca. El conocimiento que se fomenta y se pone en acción en cada tipo de problema de modelación es muy diferente y requiere de razonamiento diferentes.

El objetivo del presente trabajo es ilustrar cómo se puede utilizar la modelación matemática en el estudio de las cónicas, en particular circunferencia y elipse, con la ayuda de un software de Geometría Dinámica.

Se reportarán los avances de una investigación encaminada a responder la pregunta: ¿cuál es el grado de comprensión de circunferencia y de elipse en estudiantes del CCH cuando utilizan la modelación matemática en un ambiente de Geometría Dinámica?

Modelación matemática

En el SEAM definimos Modelación Matemática como el proceso de construcción de un modelo matemático que ayude a explicar y estudiar un fenómeno. Este fenómeno puede ser natural o social.

El modelo matemático puede ser una función, una ecuación, una desigualdad, una tabla, una gráfica o cualquier otro objeto matemático.

El uso de la Modelación Matemática en el aula, como estrategia de aprendizaje, se puede caracteriza según el diagrama de la Figura 1.

Las fases del proceso de modelación son las siguientes:

- identificar el fenómeno que se quiere estudiar,
- convertir los aspectos que nos interesan del fenómeno en un problema a resolver, ya sea planteando preguntas o conjeturas,
- matematizar el problema definiendo las variables involucradas y los datos relevantes para determinar la relación entre ellas,
- proponer un modelo matemático con la información obtenida (modelo intermedio),

❖ verificar el modelo intermedio para determinar si cumple con las condiciones del problema matematizado, (en caso de que el modelo no sea satisfactorio es necesario regresar a la fase de Matematización con el fin de revisar la pertinencia tanto del problema matemático como la del modelo, en este punto es posible que se forme un ciclo Matematización-Modelo intermedio-Verificación, Ciclo Matemático, que se rompa cuando el modelo intermedio satisfaga la verificación).

❖ interpretar el modelo intermedio satisfactorio con respecto al fenómeno problematizado, (si la interpretación del modelo no es consistente con el fenómeno problematizado, se entraría en ciclo más amplio Problematización-Ciclo Matemático-Interpretación llamado Ciclo de Interpretación que se rompería cuando el modelo matemático es consistente con el fenómeno).

Figura 1. Proceso de Modelación Matemática

❖ modelo matemático definitivo obtenido después de la fase de Interpretación.

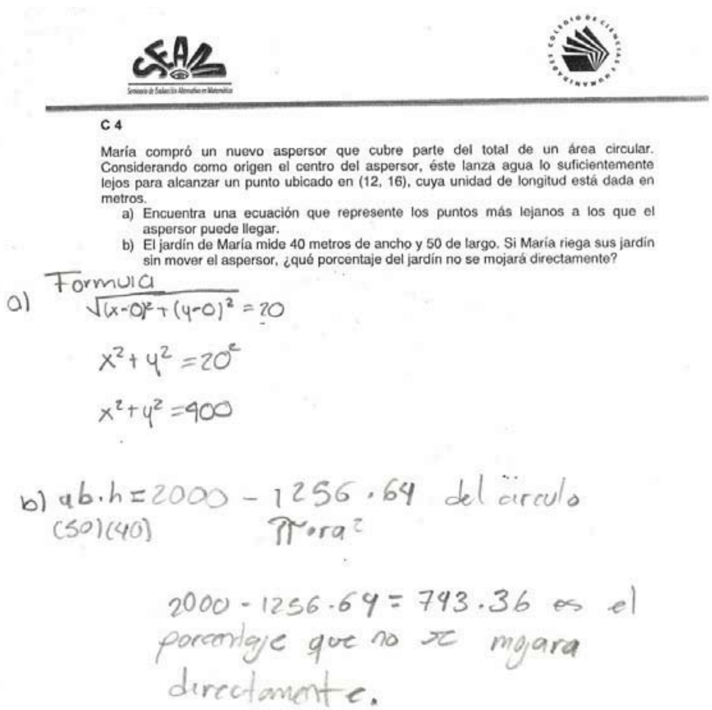
Los objetivos de aprendizaje y el grado escolar del que se trate definirán el énfasis que e pondrá en cada fase. Por ejemplo, en algunos casos se pueden presentar problemas ya matemátizados y poner el énfasis en su resolución; mientras que en otros es posible iniciar el proceso desde el estudio mismo del fenómeno, siguiendo un procedimiento muy parecido al planteado por el aprendizaje basado en problema (ABP) o la enseñanza por proyectos.

Estudio de circunferencia y elipse

Los siguientes ejemplos corresponden a algunas actividades desarrolladas durante el curso de Geometría Analítica que corresponde al tercer semestre del CCH.

La secuencia consta de cuatro actividades relacionadas con la circunferencia y cuatro relacionadas con la elipse; cada una de estas fue elaborada por equipos (entre dos y tres personas), cada equipo contaba al menos con una computadora con el programa Geometer Sketch Pad (GSP), que ya venían trabajando desde varias actividades atrás. En cada una de las actividades se propició la discusión al interior de lo equipos y con el resto del grupo, mientras el profesor atendía el trabajo de lo equipos aclarando las dudas que surgían e incluso llevando información de un equipo, otra función importante del profesor consiste en plantear nuevo cuestionamientos cuando el equipo está cayendo en un error que no han percibido o cuándo tienen frente a si ideas o concepto importantes que se deban destacar. La última actividad de cada uno de los dos temas, se dejó a los equipos trabajar solos (sin la orientación del profesor) con la finalidad de usarla para evaluación.

En la Figura 2 se muestra, a manera de ejemplo, la hoja de trabajo de una de las actividades, con el trabajo presentado por uno de los equipos, donde los estudiante muestran las fórmulas que ocuparon, la ecuación de la circunferencia correspondiente con el problema y la respuesta a las preguntas planteadas.



C 4

María compró un nuevo aspersor que cubre parte del total de un área circular. Considerando como origen el centro del aspersor, éste lanza agua lo suficientemente lejos para alcanzar un punto ubicado en (12, 16), cuya unidad de longitud está dada en metros.

a) Encuentra una ecuación que represente los puntos más lejanos a los que el aspersor puede llegar.

b) El jardín de María mide 40 metros de ancho y 50 de largo. Si María riega sus jardín sin mover el aspersor, ¿qué porcentaje del jardín no se mojará directamente?

Formula

a) $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=20$

$x^2+y^2=20^2$

$x^2+y^2=400$

b) $a b \cdot h = 2000 - 1256.64$ del circulo
$(50)(40)$ $\quad \pi r^2$

$2000 - 1256.64 = 743.36$ es el porcentaje que no se mojara directamente.

Figura 2. Última actividad de Circunferencia

Resultados

Las respuestas presentadas por los estudiantes incluyen, los reportes realizados en las hojas de trabajo tanto como los archivos realizados en el programa por lo que la información para analizar es muy variada y abundante. Este análisis está aún en proceso pero consideramos importante resaltar algunas cuestiones puntuales, a manera de ilustración del trabajo realizado tanto como de los aprendizajes logrados.

La actividad 3 del tema de elipse (E3) tiene el siguiente enunciado:

En la tabla se muestran las coordenadas de un cometa en su órbita alrededor del Sol, que se encuentra situado en un foco de la elipse. Para tomar las coordenadas se colocó el origen de coordenadas en el Sol y eje mayor a lo largo del eje x (las unidades de las coordenadas son UA, unidades astronómicas). (a) Encuentra la ecuación que se ajuste a los datos de la *tabla. (b) ¿Cuál es la mayor distancia del cometa al sol o afelio? (c) Encuentra la excentricidad de la órbita.*

x	*y*	*x*	*y*
-2.1	5.5	900.1	36.1
12.9	16.3	982.4	10.9
62.6	31.5	923.4	-31.5
244.5	54.6	663.0	-52.9
579.3	62.0	450.0	-62.8
778.1	51.6	141.6	-44.5

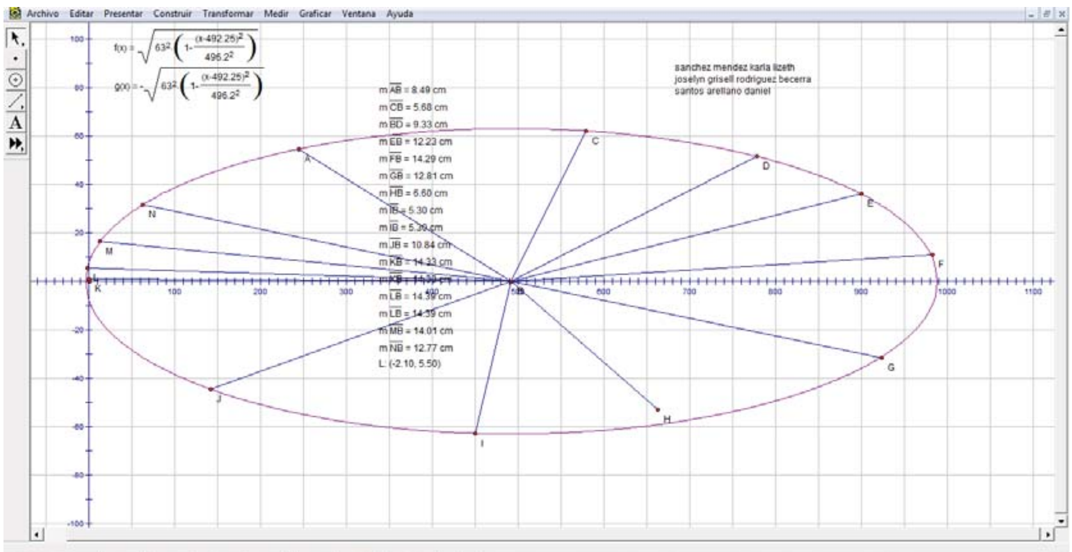


Figura 3. Actividad E3 en el programa

En el programa los estudiante graficaron los puntos indicados y buscaron la ecuación de la elipse que se ajusta a dichos puntos, como se muestra en la Figura 3. En este reporte se puede observar, en particular (Figura 4), como despejan de la ecuación canónica de la elipse para insertarla en el programa en forma de función, dividiéndola incluso en dos funciones (f(x) y g(x)) superando así las limitaciones que podría ofrecerles el programa (solo grafica funciones explicitas), pero superando al mismo tiempo la resistencia que presentan habitualmente los estudiantes a despejar este tipo de funciones y trabajar con los radicales como lo muestran aquí.

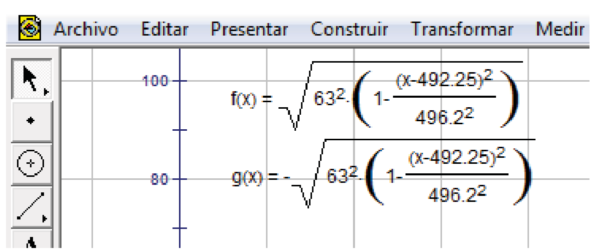


Figura 4. Ecuaciones de la elipse actividad

Otra de las actividades relativas al tema de elipse es la correspondiente a la llamada Capilla de los Susurros (E4) cuyo enunciado es el siguiente:

> *Un recinto tiene forma elíptica con paredes verticales de 2 m de altura y techo elipsoidal. Si el recinto tiene 12 m de longitud y 6 de ancho. ¿Dónde se deben parar dos personas (que no estén una al lado de la otra) para que se puedan secretear sin que nadie las oiga?*

Alguno de los instrumentos de evaluación que se utilizaron para organizar y analizar la información obtenida, fue V de Gowin, como se muestra en la Figura 5.

Capilla de los susurros

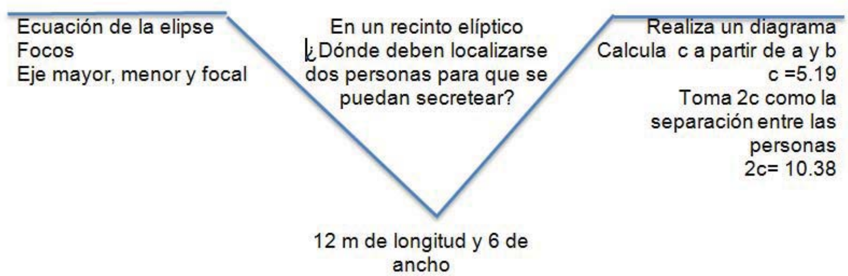


Figura 5: V de Gowin correspondiente a la actividad E4

En este instrumento se puede observar, del lado izquierdo, los conceptos que el equipo está utilizando por lo que se puede ver cuáles son los elementos de lo que disponen ante la solución de un problema nuevo; mientras que el lado derecho se observa el proceso seguido hasta la obtención del resultado. En caso particular que se ilustra podemos observar que manejas la ecuación de la elipse, así como los foco y lo ejes (mayor, menor y focal), y el proceso seguido le permite encontrar la distancia entre los foco sin problema, pero no responde la pregunta planteada en el problema, por lo que les puede recomendar que lean con más cuidado y regresen a interpretar lo resultado obtenido en el contexto del problema (penúltima fase del proceso de modelación, Figura 1) para evitar esta omisión en situaciones posteriores.

Conclusiones

Es posible trabajar las cónicas a través de la modelación matemática, lo cual nos da como beneficio adicional, la posibilidad de superar algunos obstáculos que se encuentran cuando se trabaja de forma tradicional (como cuestione algebraicas mostradas en la Figura 4).

En cuanto a la pregunta de investigación planteada originalmente, podemos afirmar que es necesario terminar el análisis que está en proceso ante de dar una repuesta definitiva, pero lo primeros indicios muestran que se logra el aprendizaje y la apropiación de concepto básicos de la circunferencia y elipse, al grado tal de poder utilizarlos en la solución de problemas nuevos.

Agradecimiento. El presente trabajo se enmarca en un proyecto de investigación (Infocab: Proyecto PB100111, UNAM, México) más amplio que busca, entre otras cosas, conocer el papel que juega la modelación y el uso de software de Geometría Dinámica en el entendimiento de algunos conceptos matemáticos; forma parte de las actividades del Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática (SEAM) que funciona, desde 2006, en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Referencias bibliográficas

Alsina, C., García, L. M., Gómez, J. y Romero, S. (2007). Modelling in science education and learning. *SUMA* 54, 51-54.

Bloom, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss M. (2007). *Modeling and applications in Mathematics Education*. New ICMI study series. Springer.

Bolea, P., Bosch, P., y Gascón, J. (2004).Why is modelling not included in the teaching of algebra at secundary School. *Quadernidi Ricerca in Didattica*. 14, 125-133.

Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2008). *La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: un estudio con profesores en formación*. *PNA, 2* (4), 181-189.

SEAM. (2010). *Paquete de evaluación.* Producto del Seminario sin publicar. CCH. UNAM:

ENFOQUE METODOLÓGICO EN LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS USADOS POR ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL

Hipólito Hernández Pérez, Juan Carlos Cabrera Fuentes
Universidad Autónoma de Chiapas México
polito_hernandez@hotmail.com, jcabrera@unach.mx

Resumen. En este trabajo reportamos las herramientas arqueológicas desde un enfoque metodológico en las estrategias de aprendizaje de los conceptos matemáticos, con la finalidad de favorecer el aprendizaje de los alumnos de la carrera de ingeniería civil (IC) de la Facultad de ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH). El objetivo es caracterizar e identificar los patrones y semejanzas de las estrategias de aprendizaje, sean residuales o no, que han adquirido los alumnos desde su contexto y visión del mundo, a fin de conocer las habilidades y destreza en la construcción de conceptos matemáticos. A partir de ellos, creemos que se puede desarrollar un conjunto de acciones que permitan a los alumnos, desestructurar y desarmar las estrategias adquiridas, reestructurarlas o rearmarlas, deshaciéndose de las ineficientes, para dar mejores respuestas al aprendizaje de conceptos y soluciones en los problemas matemáticos de la carrera de ingeniería civil, en la Facultad de Ingeniería de la UNACH.

Palabras clave: herramientas arqueológicas, estrategias, aprendizaje, estudiantes

Abstract. In this paper we report archaeological tools as a methodological approach in learning strategies of mathematical concepts, in order to promote student learning in civil engineering degree (IC) of the Faculty of Engineering UNACH. The aim is to characterize and identify patterns and similarities of learning strategies, are residual or not, that in time the students have gained from the evidence of the students from their context, their world view to generate learning strategies involving skill and dexterity in the construction of mathematical concepts. From them, we believe we can develop a set of actions that enable students, deconstruct and disassemble acquired strategies, restructure, getting rid of ineficiente, to give better answers to the learning of concepts and solutions to mathematical problems of civil engineering degree at the Faculty of Engineering UNACH.

Key words: archaeological tools, strategies, learning, students

Introducción

En esta investigación reportamos las herramientas arqueológicas como un enfoque metodológico en las estrategias de aprendizaje de los conceptos matemáticos, con la finalidad de favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje en los alumnos de la carrera de ingeniería civil (IC) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH). El objetivo es caracterizar e identificar los patrones y semejanzas de las estrategias de aprendizaje de los estudiantes al construir conceptos matemáticos, a partir de las evidencias de los sedimentos acumulados de la trayectoria escolar, experiencias y visión del mundo, de las prácticas sociales con el fin de mejorar las estrategias de aprendizaje que involucren habilidades y destreza en la construcción de un conocimiento matemático funcional e integral. Puesto que, hoy en día se busca nuevas herramientas metodológicas y su posible inmersión en el sistema didáctico.

Los contenidos matemáticos en la carrera de IC son parte de la disciplina de la matemática y la construcción de nuestro objeto de estudio surge a partir de la problemática cotidiana de las actividades y experiencias en el proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas, este fenómeno social está presente, tanto, en el nivel internacional, nacional y estatal. Además retomamos los señalamientos del Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico/Programa Internacional de Evaluación de los Estudiantes (OCDE/ PISA, 2003) que hacen recomendaciones con respecto al hacer que las matemáticas impliquen: traducir los problemas desde el mundo real al matemático, es decir, se sustenta sobre actividades como las de identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema; representar el problema de modo diferente; comprender la relación entre los lenguajes: natural, simbólico y formal; encontrar regularidades, relaciones, patrones, semejanzas y analogías.

Por lo tanto, para entender esta problemática, nuestro objeto de estudio en la presente investigación son las estrategias que los estudiantes (de la carrera de ic de la UNACH) usan para construir conceptos matemáticos; con estas estrategias desarrolladas pensamos que los estudiantes generan capacidades, destrezas y habilidades en la construcción de conceptos matemáticos y en la solución de problemas vinculados en el entorno de los estudiantes de la carrera de IC de la UNACH.

En consecuencia, cuando se construye un problema de investigación de orden explicativo de conceptos y relaciones entre ellos decimos que es un constructo (Álvarez-Gayuou, 2003). Por ello, nuestras preguntas de investigación están dirigidas hacia los estudiantes de la carrera de IC de la UNACH ¿Cuáles son las características y tipos de estrategias de aprendizaje en la construcción de conceptos matemáticos ponen en uso? ¿Cuáles son los elementos de análisis para valorar críticamente las estrategias de aprendizaje de los conceptos matemáticos que se usan? ¿Qué huellas y sedimentos conservan del pasado académico los alumnos y de las tradiciones de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el campo de la ingeniería civil? Con el propósito de responder las preguntas de investigación nos posicionaremos en una metodología cualitativa y una perspectiva teórica al interior de paradigma interpretativo, desde la propuesta teórica con base en el análisis de las herramientas arqueológicas del saber de Foucault.

Paradigma interpretativo

Hoy en día, se ha dado una polémica de las posiciones epistemológica y nuevas perspectivas de investigación que se engloban bajo el término paradigma, definido por Kuhn (1995, p. 13) como conjunto de "realizaciones científicas universalmente reconocidas, que durante cierto tiempo proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica", estas aportaciones científicas son compartidas por una comunidad que sirven para la solución de problemas aún no resueltos, que constituyen un punto de partida de la investigación. Por otro lado, en el trabajo de Sandín (2003) comenta que el paradigma se usa por consenso no a través de justificaciones que obliguen a hacer la investigación. En otras palabras, en la producción del conocimiento científico no sólo intervienen elementos intelectuales, lógicos y racionales, sino también, se halla determinada por factores actitudinales, afectivos, sociales y políticos. En la misma dirección se tiene la definición "un paradigma supone una determinada manera de concebir e interpretar la realidad, construye una visión del mundo compartida por un grupo de personas, y en tanto posee un carácter socializador" (Sandín, 2003, p. 28). Interpretar la realidad son expresiones diversas que indican el mundo intersubjetivo que hay que interpretarlo y comprenderlo para efectuar cambios dentro de él y la búsqueda de las relaciones.

Para abordar la presente investigación, la perspectiva epistemológica y ontológica de la investigación es el subjetivismo, tal que, el saber de cada sujeto (estudiantes de la carrera IC) está construyendo su propia realidad y visión del mundo de los conceptos matemáticos por medio de las estrategias de aprendizaje, porque la realidad absoluta no existe, según Foucault no existe la verdad objetiva: sólo existen regímenes de "verdad y de poder", de ahí que "otro poder, otra verdad" (Citado en Bunge, 1996, p. 453), para este caso lo que existe es la interpretación de la realidad de los estudiantes de la carrera de IC, en esta realidad que muestran los estudiantes hay un principio de intencionalidad, que es así, como los estudiantes desde sus experiencias están percibiendo y actuando la realidad, en el sentido, en que las acciones sociales están siendo ordenadas, organizadas, y la sociedad se está organizando con base a estas percepciones (Sandín, 2003). Por tanto, la interpretación de las acciones y de las estrategias abordadas por el estudiante, es lo que se le llama paradigma interpretativo de las acciones del sujeto.

En este sentido, el paradigma interpretativo como dimensión epistemológica lo que vemos son las acciones y las acciones implica una manifestación externa lo que nosotros vemos en particular: creencias, motivaciones e intenciones, de tal forma, que el investigador no puede quedarse sólo con la explicación externa, sino que el investigador lo que debe encontrar son las relaciones de las acciones de los motivos. Por ello, desde lo interpretativo toda acción requiere de la búsqueda de esta explicación como dimensión metodológica (Sandín, 2003).

Herramientas arqueológicas como metodología

Abordar la realidad desde las herramientas arqueológicas del saber, aparece como una forma de llevar a cabo el ejercicio de interpretación y explicación de la realidad, que supone que el saber de una época está constituido por los conjuntos de enunciados posibles y visibles en un tiempo y lugar determinado, que resultan de interjuego de reglas para que emerjan unos enunciados y no otros. En este sentido el "saber consiste en referir el lenguaje (…) en restituir la gran planicie uniforme de las palabras y de las cosas. Hacer hablar a todo (…) lo propio del saber no es ni ver ni demostrar, sino interpretar" (Foucault, 2007b, p.48) las estrategias de aprendizaje de los estudiantes de la carrera de ingeniería civil para la construcción de conceptos matemáticos. Es evidente, que el saber es un estudio que se esfuerza por reencontrar aquello a partir de lo cual han sido posibles conocimientos y teorías; según cual espacio de orden se ha constituido el saber; sobre el fondo de qué a priori histórico y en qué elemento de positividad han podido aparecer las ideas, constituirse las ciencias, reflexionarse las experiencias de los estudiantes que convergen en la carrera de ingeniería.

En este sentido, Foucault realiza el análisis de las formaciones discursivas, de las positividades y del saber en sus relaciones con las figuras epistemológicas y la ciencia, el análisis de la episteme (conocimiento matemático) entendido como "el conjunto de las relaciones que pueden unir, en una época determinada, las prácticas discursivas que dan lugar a unas figuras epistemológicas, a unas ciencias, eventualmente a unos sistemas formalizados" (Foucault, 2007, p. 322-323). Por lo tanto, la episteme es aquello con lo que se define un campo discursivo en una época dada, es decir, "no se puede hablar de cualquier época de cualquier cosa" (Foucault, 2007, p. 73), en nuestro caso la matemática de los niveles educativos: básico, medio superior y universitario (los contenidos matemáticos del plan de estudios actual de la carrera de IC de la UNACH), además, en nuestra investigación se caracteriza los lugares e instituciones y regiones de procedencia y el año que ingresaron los estudiantes en la facultad de ingeniería de la universidad a través de nuestros resultados del diagnóstico realizado.

En este sentido, el análisis arqueológico es todo el saber clásico o, más bien, ese umbral que nos separa del pensamiento clásico y constituye nuestra modernidad, Foucault reconstruye el surgimiento de las ciencias humanas, en las palabras y las cosas en su investigación arqueológica muestra dos grandes discontinuidades o rupturas en la episteme de la cultura occidental: "aquella con la que se inaugura la época clásica (hacia mediados del siglo XVII)" y "aquella que, a principios del XIX, señala el umbral de nuestra modernidad" (Foucault, 2007b, p. 7). En consecuencia, debido a la ruptura en la episteme, el umbral de nuestra modernidad se redistribuye el orden del saber, es decir, el reordenamiento se basa en el ordenamiento que reemplaza la episteme clásica por la episteme moderna, donde aparecen las ciencias humanas, en consecuencia, apareció el día en que el hombre se constituyó en la cultura occidental a la vez "como aquello que hay que pensar y aquello que hay que saber " (Foucault, 2007b, p. 334-335).

Por tanto, el concepto de episteme que nos posicionamos en la presente investigación es el subjetivismo, puesto que cada estudiante está construyendo su propia realidad, su propia visión del mundo y paradigma de los conceptos matemáticos, en la modernidad es aquel "conjunto indefinidamente móvil de escansiones, de desfases, de coincidencias que se establecen y se deshacen" (Foucault, 2007, pp. 223-324).

Por otra parte, el sujeto que conoce puede romper las prenociones, desconstruyéndose en este acto como sujeto, a esto, Foucault le llama rupturas con las nociones, los conceptos, teorías y tipos de relaciones que obstaculizan la tarea de una descripción arqueológica, es decir "una descripción pura de los acontecimientos discursivos como horizontes para la búsqueda de las unidades que en ellos se forman" (Foucault, 2007, p. 43).

Por otro lado, en las interpretaciones de las estrategias de aprendizaje que los estudiantes usan en la construcción de conceptos matemáticos "dan lugar a ciertas organizaciones de conceptos, a ciertos reagrupamientos de objetos, a ciertos tipos de enunciación, que forman según su grado de coherencia, de rigor y de estabilidad, temas o teorías (…) cualquiera que sea su nivel formal, se llamará convencionalmente estrategias a estos temas y teorías" (Foucault, 2007, p. 105). El problema es cómo se distribuyen en la historia, para abordarlo, Foucault indica las siguientes direcciones de su investigación: primero, "determinar los puntos de difracción posible del discurso, es decir, dos puntos incompatibles, dos objetos, dos enunciados, o dos conceptos que están en la misma formación discursiva, pero inconsistente- en una sola serie de enunciados que posteriormente se caracteriza como punto de equivalencia (…) o como punto de enganche de una sistematización" (Foucault, 2007, p. 108): segundo, "una formación discursiva no ocupa, pues, todo el volumen posible que abren por derecho los sistemas de formación de sus objetos, de sus enunciaciones, de su concepto, tiene por esencia, lagunas y esto el sistema de formación de su elección de estrategias" (Foucault, 2007, p.111). Por tanto, las estrategias "deben ser descritas como maneras sistemáticamente diferentes de tratar objetos de discurso, de disponer formas de enunciación, de comprenderlas, de manipular conceptos (de darle reglas de utilización, de hacerla entrar en coherencia regionales y de constituir así arquitecturas conceptuales). Estas opciones no son gérmenes de discursos, son maneras reguladas de poner en obra posibilidades de discurso" (Foucault, 2007, p.111).

Región de estudio

En el desarrollo de nuestra investigación es importante considerar el posicionamiento regional a partir de la cultura matemática de los estudiantes que llegan a estudiar la carrera de IC en la UNACH. Se diseñó una cédula para recabar los datos generales de los alumnos inscritos de la

Facultad de ingeniería (lugar de origen, edad, sexo, nivel de estudio de los padres), en el procesamiento de los datos se agruparon en las 15 regiones del estado de Chiapas. En el concentrado por regiones el resultado arrojó la siguiente información: por ejemplo, se tiene un 48.1 % de estudiantes que provienen de la región metropolitana (Tuxtla Gutiérrez, Chiapa de Corzo, Berriozábal, Suchiapa); el 4.88% de alumnos son de la región Valle Zoque (Cintalapa, Jiquipilas, Ocozocoautla); en la región Meseta Comiteca tropical (Comitán, Tzimol, La Independencia, La trinitaria, Las margaritas, y Las Rosas) provienen el 5.4% de estudiantes; en la región Altos-Tsotsil-Tseltal están conformados por diecisiete municipios de estos lugares proviene el 8.1% de estudiantes; el 33.5% de estudiantes están distribuidos en las once regiones restantes del estado de Chiapas. También, se tiene información del porcentaje de estudiantes por géneros, se tiene que el 89.2% de estudiantes es masculino y el 10.8% son mujeres. En el diagnóstico se tiene un porcentaje muy alto (88%) de estudiantes que tienen edad entre los 18 a los 21 años. Los estudios de los padres de los alumnos inscritos en la carrera de IC en su mayoría son del nivel básico. Es importante considerar estos resultados en cuanto al espacio y tiempo de los estudiantes para la regionalización de nuestra investigación.

Interpretación de las estrategias de aprendizaje de los alumnos

Se presenta las interpretaciones de los comentarios de los alumnos provenientes de las diferentes regiones con respecto a las preguntas del cuestionario aplicado. Se aplicó una cédula con 38 preguntas a un grupo de 46 estudiantes del segundo y tercer semestre de la carrera de IC dela UNACH, esta muestra se consideró de forma estratificada debido a que, en la región metropolitana tienen más estudiantes que las otras regiones como se puede observar en el párrafo anterior.

En la interpretación de los comentarios de los alumnos de las preguntas sobre las experiencias de aprendizaje de las matemáticas (considerado como una de las categorías) en los niveles educativos: primaria, secundaria y bachillerato. En consecuencia, podemos ver que aparecen las estrategias: memorísticas o mnemotecnia, la de clarificación/verificación, usadas por los alumnos cuando dicen "que aprendieron las tablas de multiplicar repitiendo varias veces y pudieron realizar suma, resta, multiplicación y la división de diferentes cantidades, o bien la actividad de repasar los apuntes y ejemplos realizados por el profesor y resolver otros ejercicio extraclases"; otra estrategia sale a la luz de lo expresado por los alumnos es la estrategia significativa se visualiza cuando dicen que "les fue agradable y bonita en aprender matemáticas", es decir, cuando los alumnos llegan a expresar en un sentido motivacional el aprendizaje de las matemáticas ya va implícito (estudio, análisis y significado), además usan la estrategia de: razonamiento y la significativa al decir que "la han utilizado en la vida cotidiana y les ha ayudado para comprender el mundo".

En la categoría de las formas de enseñanza de los profesores en el nivel (primaria, secundaria y bachillerato) hay dos características importantes que se observa en el relato de los estudiantes: la mayoría de los profesores que impartieron clases de matemáticas en el bachillerato tienen una carrera de ingeniería; por otro lado, el apoyo o asesoría de los familiares para aclarar las dudas en matemáticas es casi nula. Esta parte se relaciona con el diagnóstico del nivel de estudio de los padres, los datos que se obtienen es que la mayoría de los padres tienen estudios hasta el nivel básico, muy pocos de los padres tienen una carrera o posgrado en ingeniería.

En la interpretación de esta categoría a partir de los comentarios expresados por los estudiantes, se tiene lo siguiente: podemos ver que aparecen la estrategia *memorísticas* y la de *clarificación/verificación* en el momento en que el profesor pide que "aprendieran las tablas de multiplicar repitiendo varias veces y hacer multiplicaciones de diferentes cantidades" otros alumnos dicen que "no se usaba calculadora sino de forma mental" o bien la "actividad de repasar los ejemplos realizados por el profesor y resolver otros ejercicios extraclase"; otra estrategia es la estrategia *significativa* cuando dicen que "fue agradable y bonita en aprender matemáticas", o bien la estrategia de *razonamiento deductivo* cuando el profesor les enseñaban de manera "más analítica y didácticas"; por otro lado también la estrategia de *predicción e inferencia* cuando los profesores les pedían a los alumnos "que dibujaran lo que pudieran, que así le entenderían mejor y eso fue de gran ayuda para el aprendizaje de las matemáticas"; otras de las estrategias implementada por el profesor es "el desarrollo de las habilidades y destreza de contar con la finalidad de desarrollar habilidades mentales a través de concursos internos" a esta estrategia se le denomina *clarificación/verificación.*

En consecuencia, se llevó a cabo la construcción de las categorías de las estrategias de aprendizaje de cada región, siguiendo las trayectorias o huellas de las etapas educativas de los estudiantes que a través de las interpretaciones de sus comentarios, declaraciones y anécdotas se puede vislumbrar los hallazgos de nuestra investigación en cuanto a que algunos estudiantes siguieron las estrategias desde el inicio de su formación educativa hasta el nivel universitario; otros estudiantes abordaron estrategias que les sugerían sus profesores, a veces encontraron dificultades cuando habían cambios de profesores o cambios de niveles educativos; otros alumnos al seguir una estrategia de aprendizaje en un nivel educativo se quedaban varados en ese nivel hasta que otros profesores les sugerían otros tipos de estrategias.

De los comentarios vertidos por los estudiantes, el análisis de las interpretaciones de las estrategias y con el inventario de estrategias establecidas por Díaz Barriga (1999) que usan los estudiantes que en forma simplificada se describe a continuación:

- La estrategia de clarificación es usado por el estudiante para confirmar su comprensión de los temas repasando los apuntes visto en clase.
- La estrategia de predicción e inferencia, los alumnos en la solución de los problemas de los diferentes niveles y los dos problemas que resolvieron hacen uso de los conocimientos previos, por ejemplo, conceptos, símbolos, lenguajes matemáticos, las representaciones gráficas. Y se habla para inferir significados en gráficos, ecuaciones, problemas, etc.
- Los estudiantes usaron la estrategia inductiva puesto que revisan aspectos como ¿qué significado tiene?, ¿Dónde se usó antes?, ¿cómo se escribe, o se simboliza?, ¿con qué se relaciona?
- En los dos problemas que resolvieron los estudiantes usaron la estrategia de razonamiento deductivo puesto que buscaron y relacionaron los conceptos de cálculo diferencial para construir la caja y el tanque para entender y resolver los problemas usando las analogías, síntesis de los conocimientos y contexto del alumno.

Por lo anterior, se concluye que las estrategias de estudios de los conceptos y de resolver problemas matemáticos por los estudiantes de la carrera de ingeniería civil en los diferentes niveles educativos (primaria, secundaria y bachillerato y universitario) son:

- La estrategia *mnemotecnia* y la clarificación/verificación puesto que estudiaban matemáticas repasando y practicando los ejercicios que resolvían en las clases y los ejercicios de tarea que les dejaban en forma extraclase, ellos manifestaron que las dudas que surgían en el proceso al resolver los problemas consultaban a través de algún familiar o maestro.
- La estrategia *significativa* dado que relacionaban las matemáticas con la vida real a través de los negocios familiares para reforzar los conocimientos matemáticos.
- En esta categoría podemos ver que aparecen las estrategias memorísticas y la de clarificación/verificación en el momento en que el profesor pide que "aprendieran las tablas de multiplicar repitiendo varias veces y hacer multiplicaciones de diferentes cantidades" otros alumnos dicen que "no se usaba calculadora sino de forma mental"

- La estrategia razonamiento *deductivo* cuando trataban de buscar un método que se les hiciera más fácil de entender y resolver los ejercicios que dejaban como tarea los profesores
- Los profesores sólo realizaban ejercicios que venían en la guía, es decir, usaban la estrategia *memorística*, por otro lado, los profesores no propiciaban el uso de las estrategias deductivas y significativas cuando los alumnos dicen que "los profesores no dejaban que planteáramos nuestro propios ejercicios de la vida cotidiana, sólo realizar más ejercicios en el pizarrón, así como la búsqueda de ejemplos en los libros y en internet".

Conclusiones

La herramienta metodológica de la arqueología del saber fue de gran utilidad y novedad en la construcción de las categorías de las estrategias de aprendizajes en los conceptos matemáticos en la carrera de ingeniería civil, ya que esta metodología nos permitió ir construyendo o des-construyendo, uniendo las interpretaciones de los discursos narrativos de los alumnos provenientes de las diferentes regiones del estado de Chiapas. Por tanto, hacemos una reflexión teórica de la tradición interpretativa entre los planos epistemológico: plano epistemológico (números y operaciones, formas y figuras, funciones y relaciones, pensamiento variacional, tratamientos de la información, usos de la TIC); Plano metodológico (herramientas arqueológicas, niveles educativos, regiones, espacio tiempo) y las estrategias de aprendizaje (*estrategias de aprendizaje*, memorísticos, Predicción, inductivo, razonamiento deductivo, significativa). Según Sandín (2003) hay que teorizar todo aquello que se quiere conocer y que nos está marcando ciertas posibilidades. Es importante notar los resultados de esta investigación sobre las estrategias de aprendizaje de conceptos matemáticos para mejorar el proceso aprendizaje en matemáticas en la carrera de IC de la Facultad de Ingeniería de la UNACH.

Referencias bibliográficas

Alvarez-Gayou, J. (2003). Cómo hacer investigación cualitativa: fundamentos y metodología. México: Paidós Educación.

Bunge, M. (1996). *Buscar la filosofía en las ciencias sociales*. México: Siglo XXI.

Foucault, M. (2007). *Arqueología del saber*. México: Editorial Siglo XXI.

Foucault, M. (2007b). *Las palabras y las cosas: una arqueología de las ciencias humanas*. México: Siglo XXI.

Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico/Programa Internacional de

Evaluación de los Estudiantes (2003). *Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París, OCDE.

Sandín E. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid, España: McGraw Hill.

Khun, T. (1995) *La estructura de las revoluciones científicas*, p. 13. México: Fondo de Cultura Económica.

Díaz-Barriga, F. y Hernández R, G. (1999). Estrategias para el aprendizaje significativo: fundamentos, adquisición y modelos de intervención. En *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: McGRAW-HILL. Obtenido de: http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/biblioteca/articulos/pdf/estrate.pdf

UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Mario Caballero Pérez, Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav-IPN México
macaballero@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. Con el objetivo de tener un marco de referencia para analizar las dificultades para desarrollar el pensamiento variacional en profesores de bachillerato, en este trabajo presentamos los resultados de una caracterización realizada al Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar), enfocándonos en aquellas características propias de este pensamiento y la forma en que se desarrolla. Para ello nos apoyamos en la teoría Socioepistemológica, y realizamos un análisis documental de diversos trabajos inscritos en el Pylvar. Los resultados muestran que para desarrollar el pensamiento variacional es necesario el uso sistemático de los elementos del Pylvar, y enfocarse en los procesos de cambio involucrados.

Palabras clave: pensamiento y lenguaje variacional, variación, estrategia variacional

Abstract. In order to have a framework to analyze the difficulties to development variational thinking in high school teachers, we present the results of a characterization to Thought and Language Variational, focusing on those characteristics of this thinking and how it develops. We rely on the theory socioepistomological, and perform a documentary analysis of several studies framed in the Pylvar. The results show that the development of variational thinking requires the systematic use of the Pylvar elements, and focus on the processes of change involved.

Key words: thought and language Variational, Variation, Variational Estrategy

Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación que tiene como objetivo identificar las causas que originan las dificultades en profesores de bachillerato para desarrollar un pensamiento variacional, para lo cual consideramos importante entender qué es, en qué consiste, y cómo se desarrolla el pensamiento variacional para tener un marco de referencia que nos permita analizar y comprender la naturaleza de esas dificultades. Con esto en mente, en el presente escrito reportamos los resultados de una caracterización realizada a la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar), que nos permitió precisamente establecer ese marco de referencia, identificando aquellas características propias de un pensamiento variacional y la forma en que se desarrolla.

El Pylvar es tanto una línea de investigación como una forma de pensamiento, que se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación. Las situaciones donde se pone en juego el Pylvar permiten significar los conocimientos matemáticos más allá de la sola manipulación simbólica, por medio de ideas variacionales que dieron vida y desarrollaron esos conocimientos. Por tanto, las ideas de cambio y variación son fundamentales en el Pylvar, pues representa la base en la cual se sostiene y cuyo estudio permite resignificar los concomimientos matemáticos propios del cálculo. De modo que el Pylvar se caracteriza por centrarse en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios.

El interés por realizar una caracterización del Pylvar ha estado presente desde los primeros trabajos que incorporan esta línea a sus investigaciones, como se puede observar en los trabajos de González (1999) y Salinas (2003), quienes realizan una caracterización de algunos elementos del Pylvar, tales como *estrategia variacional* y *situación variacional*, que representan la base para los posteriores trabajos dentro de esta línea de investigación, pero considerándolas no como definitivas, sino dinámicas, ya que con el desarrollo de nuevos trabajos se encontraría una evolución en estos elementos. Asimismo, con el surgimiento de nuevos estudios, nuevos conceptos han surgido a la par, por lo que una nueva caracterización surge como necesaria para establecer lo que se entiende hoy día por Pylvar. Con base en ello, nos planteamos las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son los elementos que caracterizan el Pylvar?
2. ¿Cómo interactúan estos elementos para desarrollar un pensamiento variacional?

El sustento teórico de la investigación se encuentra en la teoría Socioepistemológica, que plantea que el conocimiento matemático tiene su origen en el conjunto de prácticas humanas que son aceptadas y establecidas socialmente llamadas prácticas sociales (Cantoral, 2004). Son las prácticas las que favorecen la construcción del conocimiento matemático, lo que implica un énfasis distinto que caracteriza a la Socioepistemología: pasar de los objetos a las prácticas. Es la praxis la que favorece y permite el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción, proceso o procedimiento (Cabrera, 2009), en el cálculo esta praxis se refiere a las prácticas propias de la variación.

La caracterización propuesta se realizó en tres fases. Primero se llevó a cabo un análisis a trabajos en Matemática Educativa que incorporan el Pylvar a sus investigaciones. La segunda fase consiste en una recopilación de caracterizaciones realizadas en estudios previos sobre los elementos del Pylvar, que complementamos en conjunto con la revisión de la primera fase. Por último, se elaboró un modelo para sintetizar la caracterización propuesta, enfatizando la forma en que se desarrolla el pensamiento variacional.

Resultados primera fase

En esta fase se analizó la forma en que el Pylvar es usado en diferentes trabajos y cómo se refleja en las actividades, buscando la forma en que la variación se hace presente, los conocimientos matemáticos puestos en juego, la forma en que la actividad guía el aprendizaje del alumno relacionado con el estudio de la variación, entre otros. Las investigaciones analizadas fueron seleccionadas bajo dos criterios. Primero, aquellos trabajos que realicen un análisis sobre la forma en que el Pylvar es usado por las personas, o en libros. Segundo, trabajos que realicen un diseño de actividades donde se incorporen elementos del Pylvar. Para esta primera fase se tomó como punto de referencia la caracterización que propone Salinas (2003) de *estrategias variacionales*.

- *Comparación:* Asociada a la acción de establecer diferencias entre estados.
- *Seriación:* Se analizan estados sucesivos y se establecen relaciones entre ellos.
- *Estimación:* A partir de conocer el comportamiento de un fenómenos en estados previos, se proponen nuevos estados o comportamientos a corto plazo.
- *Predicción*: Está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de estados previos.

Por cuestiones de espacio, sólo se presenta el análisis realizado a dos actividades del trabajo de Engler, Vrancken, Gregorini, Müller, Hecklein, y Henzenn (2008)

Actividad 1

La gráfica muestra el comportamiento de la función $y = f(x)$. Analice la gráfica y conteste:

a) ¿Cuánto cambia f si x cambia de -4 a -2?

b) ¿Cuánto cambia f si x cambia de 2 a 3?

c) ¿Cuánto cambia f si x cambia de -1 a 1?

d) Si x cambia de izquierda a derecha, para qué valores de x, se cumplen las desigualdades siguientes?

$f(x + \Delta x)-f(x) > 0$; $f(x + \Delta x)-f(x) < 0$; $f(x + \Delta x)-f(x) = 0$.

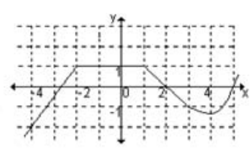


Figura 1: Actividad uno de Engler, et. al. (2008)

Esta actividad muestra la gráfica de una función para propiciar el análisis de los cambios que se producen en la variable independiente y dependiente. Se pregunta por el cambio experimentado al pasar de un punto a otro, y sobre el comportamiento en algunos intervalos específicos. Para esta actividad encontramos el uso de la estrategia de *comparación*, pues el estudiante ha de analizar el estado de la función en dos puntos, uno inicial y otro final, con el fin de establecer diferencias entre esos estados y así argumentar acerca del comportamiento de la función. En el inciso d se pregunta por los valores de x que cumplen las relaciones indicadas, de manera que se requiere el uso de la estrategia de *seriación* para analizar la forma en que cambia la variable en distintos intervalos. Asimismo, la actividad exige de un análisis grafico para determinar el comportamiento de los valores de la gráfica y dar respuesta a las preguntas. Por último, el conocimiento matemático que entra en juego y que permite al alumno estudiar la variación de la gráfica es la función, en particular los conceptos de función creciente y decreciente.

Actividad 2

Una partícula se mueve en línea recta de acuerdo con la ley $s(t) = 2t^3 - 8t^2 + 6t$, donde s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos. Complete la siguiente tabla.

Intervalos	Δs	Comportamiento de la función			Signo de s(t)
		Crece	Decrece	No cambia	
$0 \leq t \leq 0,5$					
$0,5 \leq t \leq 1$					
$1 \leq t \leq 1,5$					
$1,5 \leq t \leq 2$					

a) ¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de s(t) y los cambios Δs?

b) ¿Es cierto que si $s(t) > 0$ entonces los cambios $\Delta s > 0$? Justifique.

c) ¿Es cierto que si s(t) crece entonces $\Delta s > 0$ o que si $\Delta s < 0$ entonces s(t) decrece?

Figura 2.: Actividad dos de Engler, et. al. (2008)

Esta actividad relaciona la idea de cómo cambian las variables con la variación de la función, mediante una tabla en donde se debe escribir en que intervalos una función crece o decrece. Observamos el uso de la estrategia de *seriación*, ya que el alumno debe analizar datos sobre el comportamiento de la función en distintos intervalos y así establecer la relación que subyace entre las variables, es decir, cómo cambia una cuando la otra cambia (si la función es creciente, las diferencias son positivas). A diferencia de la actividad anterior, el estudio de la variación se desarrolla en un contexto numérico, donde el alumno realiza una tabla para analizar cómo los valores cambian. El conocimiento involucrado es la derivada, ya que se analiza la forma en que cambian los valores de la función por medio de las diferencias, analizando la relación entre la función y sus diferencias.

Los trabajos analizados permitieron observar que las actividades diseñadas bajo el Pylvar hacen énfasis en el uso de las *estrategias variacionales* para la generación de un pensamiento variacional, apoyadas siempre en el uso de los conocimientos matemáticos que se pretenden resignificar, aun cuando este no es explicito para los estudiantes, pero jugando un papel medular en todo el diseño. Asimismo, el tipo de preguntas que se hacían en los diseños propiciaban siempre el estudio de la variación, pero éste depende en gran medida del contexto en que se desarrolla la situación (grafico, numérico, analítico) de manera que se aborda la variación de diferente maneras, aunque siempre con las *estrategias variacionales* como punto de partida. Por otra parte, se encontraron elementos de las *estrategias variacionales* que no son descritas en la caracterización de Salinas (2003), como la generación de *argumentos variacionales*, la relación con las *estructuras variacionales*, así como una forma más precisa de diferenciar su uso en situaciones de variación, elementos que se describirán en los resultados de la segunda fase. Asimismo, el análisis permitió identificar que el estudio de los procesos de cambio son más importante que los estados mismos, de modo que para desarrollar un pensamiento variacional las actividades se centran en los procesos de cambio y no tanto en la manipulación simbólica, de modo que enfatiza en identificar aquello que cambia, cuantificar ese cambio y analizar como varían los cambios. Si sólo se verifica que alguna propiedad o regla se cumple, no hay un pensamiento variacional, ya que no requiere comprender los procesos de variación.

Resultados segunda fase

Para esta fase nos apoyamos el análisis realizado en la fase 1, lo complementamos con las caracterizaciones realizadas al Pylvar en diversos trabajos, con lo que se estableció una nueva caracterización de elementos característicos del Pylvar.

Situación variacional (SV): Es el conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de *estrategias variacionales* y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio. No basta saber que algo está cambiando, es necesario conocer el crecimiento relativo del fenómeno en cuestión, analizando cuánto y cómo cambia sus variables. Por otra parte, se considera que una situación no es variacional si se puede resolver empleando un proceso algorítmico que lleve a una respuesta sin la necesidad de analizar y cuantificar los cambios en las variables. Este tipo de situaciones se pueden presentar tanto en un escenario puramente matemático, como en un contexto relacionado con otros campos científicos o cotidianos.

Argumentos Variacionales (AV): Son argumentos que recurren al análisis del cambio y de su cuantificación, y que son utilizados por las personas cuando hacen uso de "maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando" (Cantoral, 2000, pp. 54). Estos argumentos son los que permiten dar explicación a las *SV* expresando un entendimiento de los procesos de variación involucrados en dicha situación.

Códigos Variacionales (CV): Consisten en la expresión oral o escrita del cambio y la variación, y que son articulados para generar los *AV*. Estos códigos pueden consistir en frases, dibujos, tablas o ademanes, que dan cuenta del análisis variacional que se realiza.

*Estructura Variacional Específica (EstV***)**: Son herramientas, procesos y procedimientos especializados del ámbito matemático o científico (González, 1999) que funcionan como punto de apoyo abordar y explicar el estudio del cambio y la variación en las *SV*. El uso de estos conocimientos en la situación permite a la persona tener un referente sobre el cual llevar a cabo el estudio de la variación del fenómeno, de manera que el tipo de análisis dependerá de la estructura en la cual se apoye la persona.

Estrategia Variacional (EV): Consiste en una forma particular de razonar y actuar ante una SV, y que permite la generación de los *AV* que dan explicación a la situación. Asimismo, para el uso de las *EV* se recurre al uso de *EstV* para poder estudiar la variación. Algunas *EV* reconocidas son la Predicción, la Comparación, la Seriación y la Estimación, aunque no se descarta la existencia de otras estrategias. Estas cuatro estrategias como se mencionó anteriormente son caracterizadas por Salinas (2003), la cual se retoma y complementa con el análisis literario anterior, para formular la siguiente caracterización:

Comparación: Asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y su variación. Esta estrategia no se usa siempre de la misma manera, ya que su uso depende del contexto en que se encuentra, y también de las nociones y conceptos que la rodean, en ese sentido se puede hablar de un desarrollo de esta estrategia. Así, en un nivel elemental, es frecuente, y en ocasiones necesario, recurrir a un marco de referencia en el cual apoyarse, mientras que un nivel avanzado no requiere necesariamente de algún marco de referencia, o bien, este se elige según las características de cada situación.

Seriación: Se relaciona con la comparación, ya que está asociada con la acción de analizar entre estados sucesivos y establecer relaciones entre ellos, pero se diferencia que en se analizan varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos, como puede ser hallar una relación funcional dada una tabla, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o relaciones entre variables.

Predicción: Asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos. A diferencia de la Seriación, la Predicción no busca encontrar en si una relación, sino que se postula un nuevo estado usualmente a mediano o largo plazo, siendo este estado local, en el sentido de que corresponde a un momento o valor determinado. No obstante, hallar esa relación puede ser una forma de encontrar ese nuevo estado, por lo que la Seriación puede ser parte de la *Predicción*.

Estimación: Conociendo el comportamiento de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados a corto plazo de manera global, a diferencia de la *Predicción*, donde los estados propuestos son locales. Por ejemplo, se usa en el análisis del crecimiento de poblaciones para saber si crecerá o disminuirá, en tanto que la *Predicción* puede servir para decir hasta que punto crecerá, o la población dentro de un tiempo especifico.

Tareas Variacionales (TV): Consisten en actividades, acciones y ejecuciones dentro de una *SV*, que comparten similitudes en cuanto a sus objetivos y los contextos en que se desarrollan. Se caracterizan por el empleo de una o más *EV* dentro de un mismo contexto de análisis, que puede ser numérico, grafico o analítico, lo que permite organizar el estudio de la variación en las *SV* en acciones y objetivos más específicos dentro de estos contextos. Algunas de las *TV* identificadas son las siguientes:

Tabulación como variación numérica (TVN): Consiste en la acción de proporcionar valores distintos a una variable para observar y analizar sus efectos en cuanto a comportamiento, forma, posición o valor de algún sistema. El análisis surge a partir de observar los efectos derivados de la acciones de tabular, por tanto, si los datos ya están plasmados o la acción corresponde a solo llenar una tabla, entonces no se considera que se trata de una *TV*.

Análisis de datos en tablas numéricas (ADT): Dada cierta información en forma de datos agrupados en tablas numéricas, se realiza un análisis de esos datos fijándose en patrones de comportamiento, y relaciones entre datos. A diferencia de la tarea de *TVN*, está se desarrolla cuando ya se cuenta con los datos, o el hallarlos no implica analizar los efectos.

Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia (CGV): Consiste en la construcción de gráficas apoyándose en el análisis de las variaciones, ya sea por medio de datos numéricos o de alguna gráfica. El objetivo no es hallar algún patrón o relación, sino bosquejar una gráfica que modele lo más cercanamente posible la situación que se presenta.

Análisis grafico con la variación como punto de referencia (AGV): Se buscan patrones, relaciones, comportamientos, tendencias y valores específicos, pero a diferencia de *ADT* el análisis esta sobre gráficas, así como elementos que surgen a partir de ella, como tangentes, alturas, asíntotas, entre otros. Las acciones a realizar giran en torno al análisis de variaciones, incluso en gráficas generadas con tecnología.

Tercera fase

Los resultados de la tercera fase nos permiten establecer un modelo con el cual interpretar la forma en que se desarrolla el pensamiento variacional, modelo que involucra varios aspectos que relacionan el uso sistemático de los elementos del Pylvar.

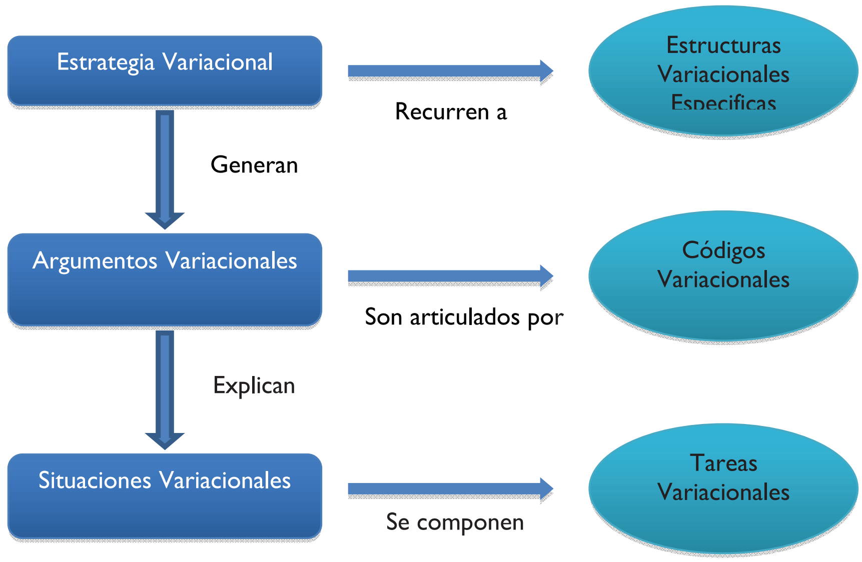


Figura 3: Modelo de interacción de los elementos del Pylvar

De modo que para generar el desarrollo del pensamiento variacional es necesario el uso sistemático e interacción de los elementos que conforman al Pylvar, debido a que el desarrollo del pensamiento variacional implica usar todos estos elementos de manera conjunta y no aislada. Bajo este modelo el desarrollo del pensamiento variacional tiene lugar dentro de una SV, donde el uso las EV generan el estudio de la variación, pues resultan ser el punto de partida para el análisis y reflexión acerca del cambio y sus efectos al permitir identificar aquello que cambian en una situación, cuantificar ese cambio y analizar la forma en que se dan los cambios. Para ello, las EV se apoyan en el uso de una o más EstV, lo que permite a la persona analizar la variación a partir de las características particulares de cada EstV. El uso combinado de las EV y EstV permite a la persona analizar la variación involucrada y con ello generar los AV para dar explicación a la situación que se plantea. Este tipo de argumentos se caracterizan por manifestar respuestas basadas en la variación, y que son articulados por CV que dan cuenta del estudio de la variación, como pueden ser frases, dibujos, esquemas o gráficas. De esta forma, una SV es resuelta por medio del uso de AV, y se caracteriza por el empleo de EV. Por otra parte, estas situaciones pueden ser divididas en una o más TV, lo que permite organizar el estudio de la variación de las SV en acciones y objetivos más específicos dentro de estos contextos.

Reflexiones finales

Esta caracterización realizada al Pylvar nos ofrece un marco de referencia para identificar aquellas acciones e ideas que corresponde a un pensamiento variacional analizando si se usan los elementos descritos, pero también nos brinda una manera de comprender la forma en que se genera el desarrollo del pensamiento variacional, lo que a su vez nos brinda herramientas para analizar las dificultades para desarrollar este pensamiento analizando las respuestas a una actividad y comparándolas con el modelo propuesto.

Referencias bibliográficas

Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México, D.F. México.

Cantoral, R., Farfán, R. M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics,* 53 (3), 255 – 270.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, pp. 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral (Ed.), *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México: Trillas.

Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M., Müller, D., Hecklein, M. y Henzenn, N. (2008). Estudio del comportamiento de la función a partir de la derivada. Análisis de una secuencia didáctica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 466 – 476. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN. México, D.F. México.

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN. México, D.F. México.

ASPECTOS DE LA CULTURA DE UNA CLASE DE MATEMÁTICAS EN EL DISEÑO Y APLICACIÓN DE AMBIENTES DE APRENDIZAJE INCLUSIVOS EN GRADO SEXTO

Sindy Lorena Cortés, Francisco Javier Camelo, Gabriel Mancera
Universidad Distrital Francisco José de Caldas Colombia
udsindylorena@gmail.com, fjcamelob@udistrital.edu.co, gmancerao@udistrital.edu.co

Resumen. Se da cuenta de un proceso de coinvestigación en el que se describe la cultura de una clase de matemáticas desde la perspectiva del aprendizaje dialógico, como aporte a un proyecto de investigación que se preocupa por reflexionar fenómenos sociopolíticos de inclusión/exclusión en la educación matemática desde una perspectiva crítica.

Palabras clave: educación matemática crítica, inclusión y aprendizaje dialógico

Abstract. It realizes about co-research process which describes communicative culture of a mathematics class since dialogic learning perspective, as a contribution of a research project which is concerned to consider sociopolitical phenomena of exclusion/inclusion in mathematics education since a critical perspective.

Key words: critical mathematics education, inclusion and dialogic learning

Introducción

El presente trabajo hace parte de los avances de investigación del proyecto *estudio del papel de los escenarios y ambientes de aprendizaje de las matemáticas en los procesos de inclusión en las clases* cofinanciado en Colombia por COLCIENCIAS, las universidades Pedagógica Nacional y Distrital Francisco José de Caldas; y en Dinamarca por la Universidad de Aalborg.

Nuestro objetivo, en éste documento, es presentar una reflexión de una práctica de aula de matemáticas donde analizamos factores del aprendizaje dialógico, que influyen en la inclusión/exclusión de los estudiantes en las actividades que se les proponen. Lo anterior en el marco del desarrollo de un ambiente de aprendizaje, desde la perspectiva de la educación matemática crítica, en el que pretendimos reflexionar potencialidades y dificultades para que niños de sexto grado (11 a 15 años) encontraran razones para aprender.

Así pues, presentaremos los marcos teóricos que sustentan la propuesta, lo cual permitirá abordar los escenarios diseñados y aplicados colaborativamente mediante el trabajo por proyectos. A partir de lo anterior, centraremos la atención en la descripción y análisis de una observación referida al aprendizaje dialógico en el marco del modelo de cooperación indagativa (AlrØ y Skovsmose, 2010).

Marco referencial

El proyecto parte por buscar y ofrecer a los estudiantes ambientes de clase donde encuentren razones para aprender –matemáticas–, pues consideramos –como una hipótesis– que la construcción de las oportunidades para que los estudiantes se involucren en el aprendizaje de las matemáticas, depende de la creación de escenarios de aprendizaje que inviten a los estudiantes a explorar, explicar y justificar, ofreciendo las posibilidades (a estudiantes y profesores) de encontrar razones, del por qué y para qué del propósito del proceso educativo.

Por lo anterior, un punto de partida está en que los escenarios deben ofrecer la posibilidad a los estudiantes de comprender y encontrar las razones que justifican la pertinencia de su participación en los procesos educativos, mediante ambientes de aprendizaje que se ocultan tras prácticas sociales que requieran para su comprensión algunos contenidos matemáticos. Posibilitando a los estudiantes tomar conciencia del uso que hacen de las matemáticas para modelar fenómenos sociales y culturales con sus correspondientes consecuencias éticas y sociales. Los ambientes de aprendizaje en estos escenarios encarnan aspectos democráticos propios de la microsociedad del salón de clase de matemáticas (Camelo, García, Mancera y Romero, 2008).

Por otro lado, hablamos de inclusión partiendo del hecho que la "exclusión y las desigualdades en la clase de matemáticas operan sobre la base de la clase social, el género, la capacidad intelectual, la lengua, la etnicidad y la cultura de los estudiantes" (Skovsmose, AlrØ, Silverio, Scandiuzzi y Valero, 2008), por lo que en el proyecto de investigación el interés específico, al hablar de inclusión, es el estudio de los procesos de exclusión asociados a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en relación con asuntos de la cultura y las situaciones de marginalidad y conflicto.

Una consecuencia inmediata de lo anterior para nuestra investigación, es que se debió caracterizar la población. Para ello, se analizan dos dimensiones que nos permitan relacionar a los estudiantes y su contexto con la cultura de la clase: estas dos dimensiones se relacionan con el microcontexto y el macrocontexto. Para Valero (2002) el macrocontexto tiene que ver con todos los aspectos de la cultura alrededor del sujeto, su entorno general; mientras que el microcontexto hace referencia a los aspectos individuales del sujeto, sus intereses evidentes, habilidades, comportamiento con la comunidad, limitaciones, capacidades, etc.

Nuestra forma de investigar y accionar en el aula, parte del trabajo colaborativo entre profesores de la universidad y del colegio, dicho trabajo permite complementar en los diseños los saberes teóricos y prácticos que cada uno tiene de manera funcional. De allí que, mediante reuniones permanentes se planifican, observan y accionan las intervenciones en el aula. En un principio, dichas intervenciones tienen el fin específico de reconocer a los niños y capturar algunas de sus disposiciones e intenciones evidentes, además de sus maneras de trabajo grupal; para luego pensar en un escenario de investigación que integra los constructos y percepciones logrados en las intervenciones iniciales, en una propuesta inclusiva que pretende bajo la excusa del trabajo con la estadística descriptiva y de la búsqueda de razones para aprender matemáticas, generar un análisis conjunto de sus proyecciones de vida, que les permita pensarse como grupo y validar de alguna manera sus elecciones de destino.

Es en el escenario de investigación: "en busca de mi destino", que analizamos el aspecto de la cultura de clase que será el foco de éste trabajo, a saber, el aprendizaje dialógico. Se escoge este aspecto en tanto consideramos crucial caracterizar la comunicación como elemento importante, en la reflexión y promoción de las habilidades críticas que se sugieren al pensarse dentro de la perspectiva de la Educación Matemática Crítica. Dicha reflexión se hace a la luz del modelo de cooperación indagativa propuesto por AlrØ y Skovsmose (2004), en tanto es definido como la forma en la que profesor y estudiantes exploran o indagan conjuntamente un escenario de investigación mediante actos de comunicación.

Por lo anterior, en los apartados siguientes haremos un recuento de nuestro accionar metodológico, refiriendo de manera resumida los diseños y resultados parciales que podemos esbozar en relación con la teoría.

Diálogo y Aprendizaje Dialógico

El diálogo, como lo definen Skovsmose y AlrØ (2004) es un proceso de comunicación que requiere condiciones específicas: está asociado a un proceso de indagación, incluye toma de riesgos, y mantiene la igualdad interpersonal y el respeto mutuo, aunque en ocasiones no hallan semejanzas o simetría. Difiere de la discusión en tanto una de sus intenciones es "pensar juntos"; estos autores señalan además, que desde la posición de Freire, dialogar resulta ser una forma humilde y respetuosa de cooperar con otro bajo una relación de confianza mutua. Se trata de respetar la diversidad y estimular el intercambio colaborativo en la búsqueda de significados consensuados; en él, se espera que el estudiante construya, reflexione, analice e intercambie interpretaciones, proceso que además le permitirá, a través de la confrontación de conjeturas, expresarlas con el lenguaje propio de la matemática.

La definición de diálogo como una conversación que tiene como objetivo el aprendizaje, posibilita asumir que para aprender es fundamental establecer interacciones con otros, lo que induce a la definición del aprendizaje dialógico. Éste según Aubert, Flecha, García y Racionero, (2008) "se produce en interacciones que aumentan el aprendizaje instrumental, favorecen la creación de sentido personal y social, están guiadas por principios solidarios y en las que la igualdad y la diferencia son valores compatibles y mutuamente enriquecedores".

¿Quiénes son los niños?

Considerando el aprendizaje como una acción influenciada por las *disposiciones* e *intenciones* de los sujetos, resulta imprescindible describir a los niños y niñas. Como aproximación inicial, contamos con los instrumentos que de manera tradicional se usan para ello: una lista con sus nombres, una descripción hecha por el docente titular de Matemática y nuestras impresiones al visitar el aula de clases.

Sin embargo, sentíamos que hacía falta escuchar la voz de quiénes consideraban ser los propios niños. Así que, decidimos desarrollar una actividad donde se les hace una pregunta poco usual para la clase de matemáticas y que centrara la atención en ellos mismos: *¿quién eres?* Dicha pregunta sugiere plantear aspectos familiares e histórico-personales importantes, enfatizando en tres aspectos esenciales para la Educación Matemática Crítica, su pasado, su presente y sus perspectivas de futuro.

Los estudiantes decidieron presentar sus respuestas, en alto grado, en medios tecnológicos, algunos usan Power Point de Microsoft Office y elaboran diapositivas con imágenes familiares, institucionales y de su barrio. Otros se inclinan por producciones manuales cómo carteleras con collage, autobiografías que incluyen imágenes por etapas de su vida, e incluso una canción de rap.

En tanto la actividad tenía una estructura diseñada con el precepto de anteponer lo social a lo matemático, que los niños que usualmente no participaban en las actividades de clase, de alguna manera dejaran ese rol, y se integraran al escenario propuesto.

De esta experiencia en Triana, Cortés, Mancera y Camelo (2012) hemos establecido que:

> i) en la presentación de las instrucciones de la actividad a desarrollar, los estudiantes buscan establecer un "listado" de acciones a modo de tareas que el profesor ha enunciado como ejemplos; ii) la mayoría de presentaciones buscó la utilización de medios electrónicos y uso de software (particularmente los recursos que ofrece el paquete de office); iii) a los estudiantes les agrada trabajar en colectivos, pero no tienen habilidades para distribuirse las responsabilidades ni organizar un plan de acción, iv) es evidente un apoyo familiar en la realización de las tareas, v) el número de estudiantes es un obstáculo que sumado a la infraestructura del salón de clases, hace casi imposible que se consiga una comunicación fluida por el inmenso ruido que se desarrolla. (pp. 2 y 3).

Como cierre de la actividad, se propone realizar un refrigerio compartido, cuya planeación se basa en aspectos nutricionales y se modela matemáticamente. Para éste, se piensan fases de desarrollo en las que inicialmente se hace una contextualización general del proyecto, explicando que se trata de un refrigerio compartido que incluya alimentos de los 3 tipos: formadores, reguladores y energéticos, que piense en la base de 300Kcal para una nutrición adecuada, con un presupuesto recolectado entre docentes y estudiantes de al menos dos mil pesos colombianos por cada uno. Para el refrigerio, se plantearon cuatro menús, pensados por cuatro equipos de trabajo, de los que se escogió el de mayor agrado. El propósito general fue, entonces, que los estudiantes diseñaran un proyecto "formal" utilizando la modelación matemática como herramienta de investigación y análisis de datos y por qué no, elaborarán representaciones de sus resultados, en función de la escogencia de un menú argumentado desde sus decisiones grupales respecto a los conceptos matemáticos y nutricionales que emplearon. El desarrollo de ésta propuesta hace uso de 3 sesiones de clase en las que se impone el gusto en la comida y al complejizarse matemáticamente pensando en Kcal y costos nos permitió identificar tipos de participación en el trabajo académico.

En busca del destino

Una vez se estableció *¿quiénes son los niños?* y particularmente cuáles son sus perspectivas de futuro, buscamos desarrollar con ellos un proyecto que nos permitiera problematizar la visión de sus proyecciones de vida, relacionando actividades actuales y pensando en posibles alternativas que promuevan el acercarse a ese proyecto de vida.

Para ello, se establecieron dos fases. En la primera se buscó promover un espacio de "sensibilización" a través de un cine foro alrededor de la película "Good Will Hunting" (también conocida en Colombia cómo "En busca de mi destino"), la cual cuenta la historia de cómo un joven prodigio —huérfano, que sobrellevó maltratos a lo largo de su vida, lo que le hizo vivir un mundo sin ilusiones ni aspiraciones— logra traspasar sus miedos y se permite poder expresar sus emociones, sin taparlas ni maquillarlas, gracias a la ayuda de un psiquiatra. La intención con dicha sensibilización fue la de aprovechar la historia del joven prodigio para que los estudiantes pensaran un poco en la manera en la que aprovechan su tiempo libre en función de su proyecto de vida.

En un segundo momento y luego de crear ese ambiente reflexivo —mediante el análisis de auto-biografías— cada estudiante diseñó un *review* (resumen corto a manera comercial como si se tratara de la presentación de una película) de su propia vida; de tal forma que el diseño de su *review* lo indujo a preguntarse sobre su destino o proyección de vida. Del trabajo con el diseño general del review, se encontraron generalidades y coincidencias que permiten ser modeladas matemáticamente a través de la estadística descriptiva, circunstancia que conforma la segunda fase del proyecto.

En lo que sigue, queremos mostrar lo que podrían significar los actos dialógicos que se producen entre los estudiantes y entre profesor y estudiantes alrededor del proyecto "En busca de mi destino". Para ello asumimos —como lo mencionamos anteriormente— que dichos actos de habla tienen las cualidades de realizar una indagación, correr un riesgo y mantener la igualdad.

A manera de ejemplo, en el siguiente fragmento vemos como —en el diálogo entre estudiantes y profesor— se busca indagar la pertinencia de cada una de las preguntas propuestas para hacer una encuesta (como una de las técnicas de recolección de información escogida por los estudiantes) cuyo fin busca explorar si la elección de destino (de los estudiantes) les permite proyectarse profesional, personal y familiarmente:

[I1] Profesor: Vamos a tratar de discutir las preguntas de la siguiente manera […]
Yo propongo una manera y ustedes dicen si sí o si no y si no, pues buscamos otra
Leemos una por una y si alguien tiene que decir algo lo escuchamos de una vez.
Estudiante 1 ¿lees la primera?
[I2] Estudiante 1: ¿Cómo crees que será nuestro futuro?
[I3] Profesor: Pensemos en si esa pregunta es buena para la encuesta.
[I4] Estudiante 1: Si
[I5] Estudiante 2: No…
Porque no van a saber qué vamos a hacer en nuestro futuro
[I6] Profesor: ¿Es clara la pregunta de él (E2)? …
E2: él dice… a razón de qué una persona va a saber ¿cómo va a ser nuestro futuro?
[I7] Estudiante 2: Lo que ellos pueden hacer es opinar cómo puede ser nuestro futuro.
[I8] Profesor: ¿Pero cómo la gente puede saber eso? …
E2 está dando argumentos para decir: esta pregunta al hacérsela a alguien —así sea a nuestros papás, amigos, vecinos— pues no lo podrían contestar con cierta certeza; podrían decir una cantidad de cosas que ellos se imaginan, pero realmente no nos interesa que se imaginen cosas.
Alguien más … E3
[I9] Estudiante 3: Yo digo que eso no sirve porque cómo será nuestro futuro ¿de qué manera?, ¿profesional, en la universidad,…?
[I10] Profesor: Además no está acotada dice E3;
no sólo la persona a la que se la damos tendría que tener una bolita mágica para adivinar el futuro; sino que fuera de eso, no está acotada…
Entonces, ¿esta pregunta hay que cambiarla?
[I11] Estudiantes: Si

En el anterior fragmento se evidencia un *proceso de indagación* cuyo objetivo es obtener nuevas comprensiones sobre la pertinencia (o no) de las preguntas propuestas para la encuesta. Para ello, los participantes actúan —tal y como lo señala AlrØ y Skovsmose (2010) — hacia cada uno de los demás y hacia el tema en consideración con curiosidad, sentido crítico y ponderación reflexiva.

Además, estos autores señalan que cuando se entra en el diálogo hay un riesgo de perder el control o de llegar a un punto muerto (*correr un riesgo*), tal es el caso del planteamiento del Estudiante 3 en el renglón [19] al cuestionar la pertinencia de la pregunta, dado que no solo no es importante indagar sobre cómo es el futuro sino que además no se aclara el futuro en relación a qué aspecto; sin embargo dicha intervención permitió ocuparse del conocimiento tácito en términos de reflexionar sobre la validez de la pregunta, en palabras de AlrØ y Skovsmose (2010) "entraron en contacto".

Por otra parte, se evidencia un esfuerzo por parte del profesor por desarrollar un dialogo con los estudiantes como un proceso dinámico entre personas iguales que se comunican (*mantiene la igualdad*), sin embargo se evidencia que la validación termina definiéndola o decidiéndola el profesor, hecho que no genera una igualdad entre los participantes.

Reflexiones finales

Para terminar, es importante resaltar que un trabajo investigativo pensado a partir de la dimensión sociopolítica de la educación matemática, dónde el dialogo es un constructo esencial para la comprensión de la exclusión, requiere considerar cuáles son las características por las que algunos estudiantes deciden no estar en las actividades que se proponen en clase.

En particular, éste proyecto nos muestra que si los estudiantes encuentran razones para participar en el proceso educativo, podrían involucrarse. Una alternativa para ello podría estar en encontrar sus disposiciones e intenciones y generar desde ellas un enfoque temático que posibilite un ambiente de diálogo propicio para el aprendizaje.

Dadas las características del currículo de matemáticas en Colombia, lo anterior se constituye en un reto para los profesores e investigadores en educación matemática, pues incluir a los estudiantes que por razones políticas han decidido no participar en las actividades de clase se vuelve complejo, ya que involucrar las disposiciones, intenciones y acciones de los estudiantes dada la compartamentalización y linealidad del currículo de matemáticas, es una necesidad inminente. Por otra parte, es aún más necesario que generemos ambientes al interior de la clase de matemáticas en donde sea posible el diálogo y podamos romper con la cultura de nuestras clases que parecen mantener una comunicación unidireccional en donde el profesor informa y el estudiante se informa.

Referencias bibliográficas

Alro, H. y Skovsmose, O. (2010). *Diálogo y aprendizaje en educación Matemática*. (O. de A. Figueiredo, Trad.). Belo Horizonte: Autêntica.

Aubert, A., Flecha, A., García, C., Flecha, R. y Racionero, S. (2008). *Aprendizaje Dialógico.* Comunidades de Aprendizaje recuperado el 6 de octubre de 2012 de http://www.utopiadream.info/red/tiki-

Camelo, F., García, G., Mancera, G. y Romero, J. (2008). Reinventando el currículo y los escenarios de aprendizaje de las Matemáticas, de la espacialidad. Un estudio desde la perspectiva de la Educación Matemática Critica. *En memorias del IX Encuentro de Matemática Educativa.* Valledupar – Colombia.

García, G. y Valero, P. (2010). *Estudio del papel de los escenarios y ambientes de aprendizaje de las matemáticas en los procesos de inclusión en las clases.* Bogotá, Colombia: Documento presentado a COLCIENCIAS.

Triana, A., Cortes, S., Mancera, G. y Camelo, F. (2012). Disposiciones e intensiones en un escenario de investigación para una clase de matemáticas: el caso de un "compartir nutritivo". *Memorias del 13 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Medellín Colombia.

Valero, P. (2002). *Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la Democracia*. Recuperado el 25 de Mayo de 2012 de http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/otros/politica/Consideraciones%20sobre%20el%20contexto%20y%20la%20educaci%C3%B3n%20matem%C3%A1tica%20para%20la%20democracia*Valero,%20Paola*Valero,%20P.%20Consideraciones%20sobre%20el%20contexto%20y%20la%20...2002.pdf

Skovsmose, O., Alro, H., Silverio, Scandiuzzi y Valero, P. (2008). *"Antes de Dividir, se Tiene que Sumar" 'Entre-vistar' Porvenires de Estudiantes Indígenas*. Recuperado en 20 de mayo de 2012 de http://www.etnomatematica.org/v1-n2-julio2008/Valero-Skovsmose-Alro-Silverio-Scandiuzzi.pdf

COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE SORDOS

Claudia Leticia Méndez Bello; Francisco Cordero Osorio.
Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional México
clmendezb@cinvestav.mx; fcordero@cinvestav.mx

Resumen. Esta investigación, en proceso, pretende identificar los usos del conocimiento matemático de jóvenes Sordos en escenarios no escolares, por ejemplo: el trabajo. Esto nos permitirá, caracterizar la funcionalidad del conocimiento matemático en su condición de sordos señantes, al reconocerlos no sólo como miembros de una comunidad lingüística minoritaria sino como una comunidad de conocimiento matemático. Es decir, reconocerlos como constructores de conocimiento permeado por su condición de Sordos, no como factor de minusvalía sino como un elemento que matiza dichas construcciones.

Palabras clave: sordos, comunidad sorda; usos; funcionalidad

Abstract. This research in progress aims to identify the uses of mathematical knowledge of young Deaf in non-school settings, for example: work. This will allow us to characterize the functionality of mathematical knowledge in their capacity deaf signers to recognize not only as members of a minority language community but as a community of mathematical knowledge. That is, recognizing them as constructors of knowledge permeated by its status Deaf, not handicapping factor but as an element that qualifies such constructions.

Key words: deaf, deaf community, uses, functionality

Introducción

Esta investigación, en proceso, se centra en la problemática educativa de la población sorda. Para ello, se consideran las distintas perspectivas en la que la educación se mira y cómo éstas afectan de distintas maneras el tratamiento educativo a los Sordos, o bien, el tratamiento en general a ellos, dotándolos de minusvalía o limitación.

La sordera descrita en diversas disciplinas como la Medicina; Historia; Lingüística, y la Educación, provoca miradas, en ocasiones, alejadas a la realidad del Sordo. Por otro lado, disciplinas como la Lingüística y la Historia, han dotado a la población con sordera el carácter de Comunidad Sorda, población que tiene sus formas propias de ser y hacer, dado que cuentan con una lengua propia, la Lengua de Señas Mexicana (LSM), una Cultura Sorda e Identidad Sorda.

Si bien compartimos dicha postura, es necesario precisar que en nuestra investigación realizaremos una caracterización de un colectivo de jóvenes Sordos, a partir de una situación específica no escolar, como una comunidad constructora de conocimiento matemático que nos permitirá proveer de un marco de referencia sobre la funcionalidad del Conocimiento Matemático (CM) en su condición de Sordos que, en lo posterior, permita la construcción de una propuesta educativa que parta *desde* las características y capacidades propias del Sordo, y no de una atención *para* ellos basándose en propuestas alejadas de su realidad y concebidas para oyentes, o bien, concebidas desde una postura de discapacidad como limitante u obstáculo para que el Sordo sea educado.

Este escrito se divide en tres apartados. En el primero se hace una reflexión sobre aquellos factores que afectan, benéficamente o no, la educación del Sordo, a partir de las distintas perspectivas de lo que es la sordera; el segundo se refiere a lo que es propio de la investigación y, grosso modo, se da una explicación del modelo que permitirá identificar los usos del CM de una población sorda, dada una situación específica y, por último, en el tercero, se hace una reflexión general y se establece la prospectivas de esta investigación en proceso.

La sordera

La sordera ha sido denotada y descrita en distintos términos, de acuerdo a la perspectiva de la disciplina con la que se mira, por ejemplo, la Medicina, Historia, Lingüística, la Educación, entre otras. En seguida, grosso modo, se hará mención de cómo es mirada la sordera, en términos de estas disciplinas, y cómo afectan de manera benéfica o no a la vida actual del Sordo, ya sea en un ambiente escolar o no escolar.

a) *La Medicina.* La sordera como afección física, es considerada compleja. Dado que existen diversos tipos y maneras en que se puede adquirir la sordera, antes, durante y después del nacimiento. Además debe considerarse que en ocasiones ésta se acompaña de otras afecciones físicas en órganos vitales, como el corazón y riñón, entre otros.

Una línea de investigación al respecto, es matizada por estudios sobre la sordera genética que persigue caracterizarla de tal manera que pueda prevenir a las familias sobre las probabilidades de tener hijos sordos, pese a que ellos sean oyentes, tengan o no historial familiar con sordera. Es decir, realizar una evaluación genética permite identificar las mutaciones que provocan sordera en futuras generaciones, o sea, evitar que sus hijos "sufran" de sordera. Estudios especializados en este tópico se realizan en la Escuela de Medicina de Harvard, Centro para la Sordera Hereditaria, y que pueden conocer mediante Rehm, Williamson, Kenna, Corey y Korf (2005).

Por otro lado, existe una gran variedad de investigaciones médicas sobre la sordera que parten de concebir al sordo como una persona enferma, afectada físicamente, y que niegan o trivializan el reconocer al Sordo como un ser social. Esto provoca que la familia, y en consecuencia el sordo mismo, se conciba como una persona diferente en términos de afectación y que necesita "curarse" de la sordera, esto le permitirá comunicarse oralmente como una persona "normal". Si esto no ocurriera, dado el tipo de sordera, se considerará como un eterno enfermo, minusválido o con discapacidad, lo que provocará diversos problemas psicológicos.

> Si bien, dos de diez estudiantes oyentes sufren de trastornos psicológicos, en la población con sordera son cinco de diez estudiantes con trastornos como: Trastornos adaptativos; Trastornos de ansiedad; Trastornos del ánimo; Trastornos de personalidad; Baja autoestima; Trastornos del comportamiento; Síndromes orgánicos; Crisis vitales; Disfunción familiar y de pareja; Abuso sexual; Abuso físico (violencia). (Salamanca, citado en Claros-Kartchner, 2009)

Por lo que, una visión médica desligada de la psicología, entre otras disciplinas que mencionaremos enseguida, limitará al sordo al campo de la salud, como un enfermo que requiere rehabilitarse, curarse.

b) *La Historia y la Lingüística***.** Cada una de estas disciplinas, por separado, realizan investigaciones respecto a la sordera, sin embargo las hemos considerado en un mismo rubro dado que, en ambas, se dota a la población sorda de estatus de comunidad. Investigaciones como las del historiador Jullian (2002), pone en el medio un constructo que dota a la población con sordera el carácter de comunidad, con base en lo que los sordos en México han vivido, desde el ámbito educativo hasta el ámbito familiar. Dicha visión, ha sido fusionada con investigaciones en el campo de la Lingüística, dado que es ésta quien describe a dicha población como una comunidad lingüística minoritaria, siendo su lengua la LSM.

Ésta no es la única característica que nos permite reconocerla como *Comunidad Sorda*, sino más bien, son sus formas de ser y hacer que nos refieren a una cultura propia, la *Cultura Sorda*. Otros autores que fortalecen este constructo son: Fridman (1999); Oviedo (2001); Segura (2007), entre otros.

Los Sordos, considerados como personas con discapacidad, han recibido atención por parte de las autoridades, partiendo de la minusvalía con la que se les caracteriza. Por lo que Fridman (1999), menciona que su lucha deberá darse al paralelo de las comunidades indígenas ya que se considera, de igual manera, como una comunidad lingüística minoritaria. Así podrán considerarse como cualquier persona, la única diferencia sería la lengua con la que se comunican. La exclusión que reciben los Sordos puede entenderse como símil de la exclusión de los indígenas monolingües, ya que la información del mundo que los rodea no considera su lengua, excluyéndolos de ésta.

En esta investigación se coincide con esta postura, sobre todo por la categoría de Comunidad Sorda, que hace una caracterización más cercana a la realidad del Sordo, y no a lo que se pueden imaginar que ocurre en la vida de una persona con discapacidad auditiva. La esencia de dicha postura, que retomaremos en lo posterior, es reconocer, identificar y caracterizar las formas de ser y hacer del Sordo, lo que permitirá entender la funcionalidad del CM en su vida cotidiana, y cómo se puede partir de ésta última en el ámbito escolar.

c) *La Educación.* Anteriormente, se ha hecho mención de algunas disciplinas que realizan investigaciones en torno al sordo, sin embargo, cuando éstas son desligadas una de la otra se alejan cada vez más de la realidad de la persona con sordera. El ámbito educativo, permeado por estas perspectivas médicas, proveen al sordo de un estatus de discapacidad. De tal manera que, la educación del sordo queda a manos de la Educación Especial, ubicando al Sordo como una persona con discapacidad que requiere de ayuda extra a la educación regular, ya sea por medio de las USAER (Unidades de Servicio y Apoyo a la Educación Regular) o CAM (Centro de Atención Múltiple) establecidas por la Secretaría de Educación Pública (Méndez, 2011).

En el 2005, la Ley General de personas con Discapacidad dotó a la población con sordera de un estatus de *comunidad*, reconociéndola como poseedora de una cultura y lengua propia. Además de establecer que la educación para ellos debe ser bilingüe, es decir, en LSM y en el Español, en nuestro caso. Sin embargo, se sabe que en México cada año nacen 4000 niños con sordera (García, sf), y sólo el 10% recibe educación, una educación no bilingüe. Pero, cómo puede asegurarse una educación bilingüe, si el profesorado no recibe capacitación para aprender dicha lengua, es más, es hasta diciembre del 2010 cuando se certifica, por primera vez, la labor del intérprete de LSM, lo que muestra la poca viabilidad de una educación bilingüe.

Pese a que el profesor o profesora se comunique o no con sus alumnos Sordos en LSM, ¿Qué ocurre con el conocimiento que está en juego en las aulas regulares? Si a esta problemática educativa se le otorga mayor peso, a dicha lengua se niega que los Sordos, como comunidad, tengan formas de ser y hacer que les sean propias, dado que la sordera es intrínseca a ellos como seres sociales. Por lo que, la educación en Matemáticas, inclusive la educación en general, excluye al Sordo de la construcción de conocimiento matemático dado que parte de un conocimiento hegemónico que sólo requiere de ser “aprendido” por el estudiante.

En nuestra investigación, consideramos de suma importancia brindar al Sordo atención educativa que se genere *desde* sus necesidades educativas, su realidad, características y capacidades y no sólo *para* ellos basada en Programas y Planes de estudio generados para personas no sordas, o bien, con perspectivas médicas que los consideran minusválidos o limitados.

De tal manera que, generar propuestas educativas, acordes a las necesidades educativas de la Comunidad Sorda, tiene cierta complejidad que no debe trivializarse. Es así, que debe considerarse la gran diversidad de características físicas y educativas que implica la sordera, y no porque conlleven deficiencias en comparación con estudiantes no sordos, sino más bien porque implica características que le son propias a esta comunidad, como comunidad constructora de CM. Por lo que, consideramos que dar cuenta de los *usos* del CM en su vida cotidiana en un escenario específico, nos brindará un marco de referencia sobre la funcionalidad de éste en su condición de Sordo.

Comunidad de conocimiento matemático de sordos

Dada la problemática que describimos y nuestra intención de proveer un marco de referencia que nos permita generar, en lo futuro, una propuesta educativa *desde* las características y capacidades del Sordo, nos basamos en la perspectiva Socioepistemológica. Ésta nos dota de diferentes elementos teóricos, además de una visión diferente de la problemática, dado que no mira a los conceptos por sí mismos, sino que trata con las prácticas que generan tales conceptos. La perspectiva teórica asume a las prácticas sociales como las acciones de un grupo social que tiene significados propios e intención, ubicado en un contexto histórico o actual que actúan de acuerdo a ideologías predominantes en ese momento y utilizan a la matemática como herramienta para construir conocimiento (Cordero, 2001).

En el seno de un seminario y tras discusiones colegiadas, hemos construido un modelo que nos permita identificar y caracterizar a un grupo de personas, que dada una situación específica, son una *Comunidad de Conocimiento Matemático*. Con miras a identificar los usos de CM de un colectivo en específico se ha establecido la triada *CCM* (*reciprocidad*, *intimidad*, *localidad*) matizadas por los ejes, *Institucionalización* e *Identidad*. Dicha triada proporciona características propias de una comunidad, en nuestro caso, a una comunidad de conocimiento matemático, por lo que, ésta expresa aquello que ocurre en el colectivo en la construcción de CM. Dado el carácter sistémico del modelo, no se describen sus partes, sin embargo, cabe destacar que éste refiere a lo que es propio de la comunidad, estos códigos internos que se establecen al asumirse como un todo, y no como individuos aislados.

Grafico 1. Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático (Cordero, 2011)

El constructo *localidad* ha permitido delimitar a la población misma, y caracterizarla mediante aquello que le es propio a la comunidad. Estas características visibles, incluyendo la condición de sordera, y los constructos *reciprocidad* e *intimidad,* permitirá reconocer, identificar y caracterizar, esas formas de ser y hacer, no en meras interacciones, sino en la construcción de conocimiento matemático, dotándolos del carácter de comunidad de conocimiento matemático de Sordos.

Si bien la *identidad* es un eje en este modelo, en esta investigación toma un matiz delicado e importante dados los movimientos sociales que la Comunidad Sorda lleva a cabo para que se respeten como comunidad, reconociendo además su identidad como una Identidad Sorda, dicho constructo permitirá leer los datos que encontremos en nuestra experimentación, en términos de aquello que le es propio al Sordo como constructor de CM.

Este modelo, en construcción, dará explicación a los usos del CM de un colectivo en una situación específica. Sin duda, se requiere de ejemplos empíricos que brinden mejores argumentos para su entendimiento. Dado el nivel de avance de esta investigación, no contamos aún con dicho ejemplo que nos permita identificar y caracterizar los usos de esta comunidad.

Por el momento, se ha considerado una población de cuatro jóvenes Sordos de entre 24 y 28 años de edad, en un escenario no escolar, en este caso, el trabajo. Este escenario nos provee la interacción con un medio cotidiano para el Sordo, cuando se relaciona con Sordos y con oyentes, y donde el CM está inmerso en una actividad propia de su entorno y no obligada o forzada por una institución, como lo es la escuela, dado su carácter homogéneo y excluyente.

Si la cultura y la vida nacional fueran una masa homogénea, tal vez estas políticas de educación serían eficaces (Fridman, 1999)

Consideraciones finales

Dado el estatus de la investigación, no se presentan conclusiones. En este momento se está en la construcción de la herramienta que nos permita observar e interactuar, hasta identificar, aquella situación específica que nos provea de argumentos para dar cuenta de la funcionalidad del conocimiento matemático.

Cabe mencionar la mirada Socioepistemológica a esta problemática educativa, nos provee de entrada, de una postura distinta a otras disciplinas. En ésta última se concibe al Sordo como una persona constructora de conocimiento matemático, donde la sordera no es un factor de minusvalía, sino que matiza dichas construcciones y las hace ser propias de ellos, reconociendo su cultura, lengua e identidad, no sólo como comunidad, sino como *comunidad de conocimiento matemático,* al dar cuenta de la funcionalidad del conocimiento matemático a través de sus *usos*.

Referencias bibliográficas

Claros-Kartchner, R. (2009). La Inclusión de las personas sordas, como grupo étnico, en los sistemas educativos. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, 3 (1), 63-75.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 4 (2), 103-128.

Cordero, F. (2011) *Seminario: Constructos de la teoría Socioepistemológica*. Dirigido por: Francisco Cordero Osorio. Febrero-Junio 2011. CINVESTAV-IPN.

Fridman, B. (1999). La comunidad Silente de México. *Viento del Sur*, 14.

García, M. (sf). ¿Discapacidad o Cultura? Recuperado el 30 de abril de 2012 de http://www.imipens.org/EXTENSO/MARGARITAGARCIA.pdf

Jullian, C. (2002). *Génesis de la comunidad silente en México. La Escuela Nacional de Sordomudos (1867 a 1886)*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Nacional Autónoma de México. México.

Méndez, C. (2011). Los usos de las gráficas en el bachillerato de una Comunidad Sorda. En R. Flores (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 1012-1019. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Oviedo, A. (2001). Algunas reflexiones acerca de las personas Sordas y sus lenguas. En:

Patiño, L.M., A. Oviedo y B. Gerner de García (Esds.). *El estilo sordo. Lecturas acerca de la cultura y la lengua de los sordos.* Cali, Universidad del Valle, 189-203.

Rehm, H., Williamson, R., Kenna, M., Corey, D. y Korf, B. (2005). *Comprendiendo la genética de la sordera: Una guía para los pacientes y sus familias.* Recuperado el 16 de Septiembre de 2012 de http://www.negenetics.org/Libraries/Ongoing_materials/GeneticHearingLossBooklet_Spanish.sflb.ashx

Segura, L. (2005). L*a educación de los sordos en México: controversia entre los métodos educativos, 1867-1902*. Recuperado el 4 de abril de 2007 de http://www.cultura-sorda.eu

DESARROLLO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Jesús Ávila Godoy, Ramiro Ávila Godoy, Francisco Javier Parra Bermúdez,
Universidad Autónoma de Baja California México
Universidad de Sonora
jag_virgo@hotmail.com, ravilag@gauss.mat.uson.mx , francisco.parra@correo.fisica.uson.mx

Resumen. En este trabajo, presentamos algunos resultados del estudio realizado sobre el desarrollo epistemológico de la derivada, llevado a cabo bajo la perspectiva teórica del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) de J. D. Godino.

Aquí mostramos, cómo el objeto derivada de una función, al igual que la matemática en general, es una herramienta construida socialmente por el hombre en el análisis, la interpretación y resolución de un cierto tipo de problemas relacionados con los procesos de cambio y cómo el desarrollo de su significado expresado en distintos sistemas de prácticas ha pasado por distintas etapas hasta integrarse como parte de un sistema de conocimientos lógicamente estructurado.

Palabras clave: derivada, significado, contexto, desarrollo espistemológico

Abstract. In this paper, we present some results of the study of epistemological development of the derivative, conducted under the theoretical perspective "Ontosemiotic Approach of Cognition and Mathematics Instruction" (EOS) of J. D. Godino.

Here we show, how the derivative of a function object, like mathematics in general, is a tool socially constructed by man in the analysis, interpretation and resolution of a certain type of problems related to the processes of change and how the development of meaning expressed in different practice systems has gone through different stages to be integrated as part of a knowledge system logically structured.

Key words: derivative, meaning, context, epistemological development

Introducción

En este trabajo, presentamos los resultados obtenidos del estudio histórico-epistemológico del origen y desarrollo del objeto matemático *derivada de una función*.

Éste se realizó en el marco del proyecto de investigación que estamos desarrollando dentro del Programa de Doctorado en Ciencias que ofrece el Instituto de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, México, en el que nos hemos propuesto investigar sobre la relación del contexto con los significados de los objetos matemáticos, que construyen los estudiantes, concretamente, el significado de la derivada de una función en el contexto de los problemas que se abordan en las carreras de ingeniería.

En la realización de este trabajo, empezamos revisando las ideas que sobre el infinito estaban presentes en la matemática griega, ya que consideramos que en éstas se encuentra el germen de lo que hoy se conoce como Cálculo Diferencial e Integral. También revisamos las ideas de los trabajos matemáticos de los siglos XVI y XVII (Kepler, Cavalieri, Fermat, Descartes, Barrow, entre otros), que con métodos particulares para cada caso, abordaron algunos de los problemas que en la segunda mitad del siglo XVII y en el siglo XVIII abordaron Leibniz y Newton, quienes construyeron en diferentes contextos y, prácticamente de manera simultánea, un método general para resolver una gran variedad de problemas. Por otro lado, se revisaron también las contribuciones de algunos de los continuadores de dichos trabajos como L'Hopital, los hermanos Bernoulli, Euler, Lagrange, D'Alembert, Cauchy y otros.

En el estudio realizado, asumimos las premisas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática desarrollado por Juan Díaz Godino y colaboradores, y bajo esta perspectiva teórica, se muestra cómo el desarrollo histórico- epistemológico del significado de la derivada de una función, se ha expresado en diferentes momentos y en variados contextos como sistemas de prácticas personales y, que dichos sistemas de prácticas se desarrollaron a partir de la necesidad de resolver diversas situaciones problemáticas como las siguientes: hallar la tangente a una curva en un punto dado, calcular la velocidad de un cuerpo en movimiento en un instante dado, problemas de máximos y mínimos, entre otros, en este sentido, se muestra también que la *derivada de una función* es una *herramienta* construida socialmente por el hombre al tratar de entender y resolver una serie de problemas relacionados con *los procesos de cambio* y que el significado de dicho objeto se ha ido diversificando y enriqueciendo en el proceso mismo de resolución de dichos problemas.

Se destaca que aun y cuando a Leibniz y Newton se les considera los creadores del cálculo diferencial e integral, y lo hicieron prácticamente en el mismo periodo histórico pero en diferentes contextos, esto originó que los significados construidos y la simbología utilizada por ellos fueran distintos, y que sólo posteriormente, se pudiera mostrar que ambos sistemas de prácticas eran esencialmente equivalentes.

En dicho estudio, se puso de manifiesto además, que la diversidad y riqueza de los sistemas de prácticas desarrollados (significados del objeto), por un lado, y la exigencia de fundamentar rigurosamente dichos sistemas de prácticas, es decir, la necesidad de construir una fundamentación cuyo soporte no fuera de tipo físico o geométrico, como había sido en un principio, sino una fundamentación basada en la lógica formal, por otro, así como la necesidad de organizar con fines escolares lo realizado hasta ese momento en esta nueva área de la matemática, motivaron el avance hacia la construcción gradual de lo que hoy se considera en la comunidad matemática, en la currícula escolar y en los textos utilizados, como el significado institucional de referencia de la derivada de una función, es decir, se muestra que el objeto matemático *derivada de una función*, ha pasado, en su desarrollo histórico, de la misma manera que la matemática en general, por diferentes etapas de revisiones críticas que han conducido a su sistematización como parte de un sistema de conocimientos lógicamente estructurado.

Consideramos importante mencionar que el análisis e interpretación del desarrollo histórico-epistemológico de la *derivada de una función*, en el marco de nuestro proyecto de investigación se justifica dado que asumimos que, de la misma manera que debe haber una relación entre el contexto de la enseñanza y los significados de los objetos matemáticos, también consideramos que esto debe poder observarse en el origen y desarrollo histórico de dicho objeto, asumimos, además, que esta relación debe ser similar lo cual nos permitirá aprovechar lo observado en una situación para diseñar la estrategia de observación en la otra, sin que esto signifique que pensemos que se puede diseñar una estrategia que elimine todos los errores y dificultades en el aprendizaje.

Desarrollo histórico-epistemológico de la derivada

En este apartado, por razones de espacio, presentaremos sólo algunas reflexiones sobre el trabajo de los matemáticos en la cultura griega y con más detalle las ideas que desarrolló Leibniz en los siglos XVII y XVIII sobre el cálculo diferencial e integral.

En la matemática griega, debido a la inconsistencia lógica que implicaba la concepción pitagórica del espacio, el tiempo, el movimiento y las magnitudes en general (concebidas como continuas) puestas de manifiesto por Zenón de Elea en las llamadas paradojas, la mayoría de los matemáticos de la época evitaron abordar los problemas en cuya resolución aparecían procesos infinitos. Dichas concepciones se expresaban en los siguientes enunciados teóricos…

> Sobre las magnitudes en general:
>
> Toda magnitud finita puede subdividirse indefinidamente mediante la bisección.
>
> En el proceso de subdivisión de una magnitud, las partes se hacen más pequeñas cada vez.
>
> Las últimas partes resultantes de este proceso se llaman "indivisibles".
>
> Las partes "indivisibles" de una magnitud (espacio. tiempo, movimiento) tienen una y la misma magnitud finita (distinta de cero).
>
> Una magnitud finita es la unión (suma) de sus infinitas partes "indivisibles". Así un número es la unión (suma) de unidades.
>
> Toda cantidad finita tiene magnitud finita.
>
> La suma de infinitas magnitudes finitas (distintas de cero) es infinita.
>
> Sobre el espacio:
>
> Punto es la "unidad" que ocupa una cierta posición en el espacio.

El espacio está constituido de “indivisibles” (puntos).

Un cuerpo es la unión (suma) de sus puntos.

Sobre el tiempo y movimiento:

El tiempo está constituido de “indivisibles” (instantes).

Un móvil en cada instante ocupa una posición determinada en el espacio.

Un instante ocurre cuando el móvil pasa de una posición a la siguiente.

Un móvil recorre una distancia finita en un tiempo finito.

La suma de movimientos da el movimiento total.

Dos móviles con la misma velocidad recorren distancias iguales en tiempo iguales.
(Díaz, 2008, p. 4-5).

Esto dio lugar a que algunos matemáticos, entre otros, Arquímedes, abordaran el estudio de problemas relacionados con las áreas y sólidos circunscritos por curvas y superficies, utilizando métodos que, de manera muy ingeniosa, evitaban los procesos infinitos, pero que permitían encontrar soluciones a los problemas abordados con un grado de aproximación suficiente para los requerimientos prácticos. Los resultados y los métodos de resolución se mostraron en los trabajos *Sobre la esfera y el cilindro*, *Medidas del círculo y el Método.*

El origen del cálculo diferencial e integral, así como de la matemática en general, se encuentra en la necesidad de resolver determinados problemas, algunos de carácter extramatemático y otros de naturaleza intramatemática.

En el siglo XVII los problemas que estaban interesados en resolver los matemáticos y otros científicos y que dieron lugar al surgimiento de las ideas y métodos del cálculo son los siguientes: i) Hallar la ecuación de la tangente a una curva dada en un punto, este problema era de interés matemático y técnico. Matemático, porque era un problema planteado en el contexto de la geometría en Grecia y que resolvieron con métodos geométricos para algunas curvas, y se pretendía resolverlo para toda curva; y técnico ya que estaba ligado al problema del diseño de lentes ópticas y a la determinación de la velocidad y dirección de un móvil en un instante dado así como de su aceleración; ii) Problemas de máximos y mínimos, como encontrar el ángulo de inclinación del tubo de un cañón que maximiza el alcance de un proyectil, las distancias máxima y mínima de un planeta al sol, el diseño de recipientes de cierta forma de capacidad máxima, etc.; iii) Problemas de integración, como hallar el área de figuras con lados curvos, hallar la longitud de segmentos de curvas, la distancia recorrida por un móvil conocida la expresión de su velocidad, etc.

Al abordar los problemas mencionados, Pierre de Fermat, Bonaventura Cavalieri, René Descartes y otros, diseñaron métodos específicos para resolver los casos que se les iban presentando y de esta manera fueron construyendo estrategias más generales, pero no lograron establecer la relación existente entre los problemas de la diferenciación y la integración, que hoy se expresa en el Teorema Fundamental del Cálculo. Sin embargo, su trabajo representó un aporte muy importante para el diseño de un método general por Newton y Leibniz.

Leibniz, formado profesionalmente en el campo de la abogacía y con experiencia desde muy joven en el servicio diplomático, aspiraba a la construcción de un lenguaje que permitiera resolver las controversias en las relaciones humanas a través de medios pacíficos y esta inclinación por el lenguaje tuvo un efecto muy importante en su versión del cálculo y le permitió introducir una notación que es la que prevalece hasta hoy. El contexto en el que abordó los problemas matemáticos estuvo siempre en los números y la geometría.

Entre los momentos significativos para el trabajo académico se encuentra cuando Huygens le propone resolver el problema de encontrar la suma de los recíprocos de los números triangulares, es decir, hallar el valor de S en:

$$S=1+1/3+1/6+1/10+1/15+\ldots$$

Esto lo resolvió dividiendo $S/2=1/2+1/6+1/12+1/20+1/30+\ldots$

Y reescribiendo $1/2 = 1-1/2$, $1/6 = 1/2 -1/3$, $1/12 = 1/3 - 1/4$, $1/20 = 1/4 - 1/5$ y así sucesivamente y sustituyendo, obtuvo

$$S/2= (1-1/2)+ (1/2-1/3)+ (1/3-1/4)+ (1/4-1/5)+\ldots$$

$$S/2=1$$

$$S=2$$

La resolución de éste y otros problemas resueltos con la estrategia de sumar diferencias le mostró que ésta podía ser muy fructífera y especialmente cuando las diferencias se toman entre cantidades que están “infinitamente cerca” unas de otras.

Esta manera de concebir lo “infinitamente cerca” lo llevó a considerar una curva como un polígono de una infinidad de lados determinados cada uno por dos puntos de la curva que se encuentran “infinitamente cerca” entre ellos y cada lado de longitud infinitamente pequeña.

De acuerdo con esto, si los puntos P y Q están sobre una curva y están infinitamente cerca uno del otro, el segmento PQ es un lado del polígono que constituye la curva y, la pendiente de la recta tangente en P, es el cociente dy/dx. A este triángulo PQR, Leibniz lo llamó triángulo característico Figura 1.

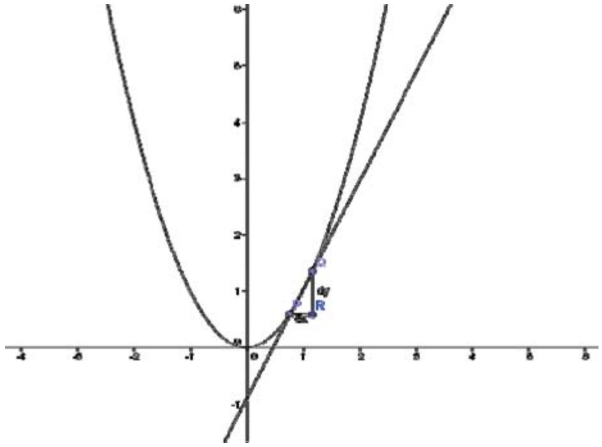


Figura 1: Aquí se muestra el triángulo característico de Leibniz

Leibniz expresa lo anterior de la siguiente manera...Tenemos que entender que hallar una tangente significa trazar una recta que conecta dos puntos sobre la curva que se hallan entre sí a distancia infinitesimal, ello equivale a prolongar uno de los lados del polígono que constituye la curva. La distancia entre los puntos a distancia infinitesimal sobre la curva se puede denotar mediante una diferencial ds. (Kleiner, 2001, p. 146).

Por otro lado, Leibniz calculó el área de la región comprendida entre el eje horizontal, dos rectas verticales y una curva mediante rectángulos de base infinitesimal y en la Figura 2 se observa que la diferencia entre el área bajo la curva y la suma de las áreas de los rectángulos está constituida por las áreas de los "triángulos" de la parte superior. Si la base de los rectángulos se torna infinitesimal entonces los "triángulos" desaparecen.

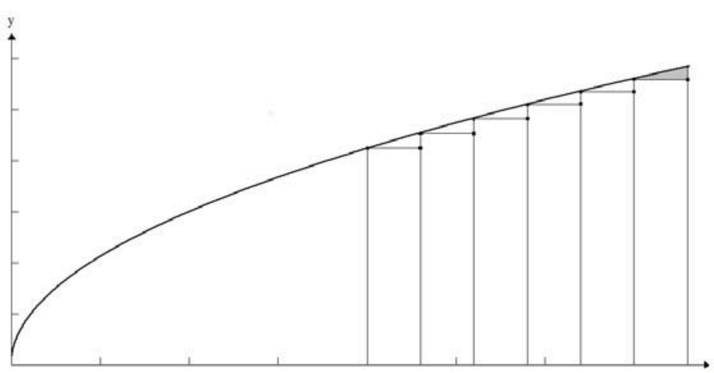


Figura 2: Aquí se muestran los rectángulos de área infinitesimal cuya suma es el área bajo la curva

De aquí, Leibniz concluye que el área bajo la curva es $A=\int ydx$ (donde $\int ydx$ representa la suma de las áreas de los rectángulos de base infinitesimal) y $dA=ydx$ de donde $dA/dx=y$.

La resolución del problema de la tangente a una curva en un punto y del área bajo la curva utilizando los infinitésimos puso de manifiesto la relación fundamental entre el área bajo la curva y la curva misma. Aquí se encuentra ya el núcleo de lo que más tarde se enunció como el Teorema Fundamental del Cálculo.

En el trabajo de Leibniz resaltan dos principios que L'Hôpital retomó en su libro Análisis de los infinitesimales y los presentó como sus axiomas, estos principios son los siguientes:

1.- Toda curva puede considerarse como un polígono que tiene una infinidad de lados. Cada lado es un segmento infinitesimal.

2.- Si A es una cantidad finita y α es un infinitesimal (cuando se le compara con A) entonces, $A+\alpha$ puede sustituirse por A en los cálculos.

Evidentemente el trabajo de Leibniz no fue aceptado unánimemente por la comunidad matemática de la época ya que éste no pudo establecer con el rigor requerido lo que eran los infinitésimos y su argumento para defender el uso de estos nuevos objetos matemáticos era su utilidad para la realización de cálculos que permitían obtener resultados correctos.

Es importante destacar que el sistema de prácticas, tanto operativas como discursivas (significado), implementado por Leibniz está determinado por el contexto de los problemas que abordó previamente y los que intentaba resolver con la nueva estrategia así como por su formación previa en el campo de la abogacía y la diplomacia, ya que todos estos elementos forman parte del contexto.

Reflexiones finales

Como podemos observar, en el trabajo de los griegos y en el trabajo de Leibniz en el siglo XVII, los significados de los objetos matemáticos, en este caso, la derivada de una función, está condicionado por el contexto en el que se usa, incluyendo dentro de éste las significaciones previas que poseen los sujetos, que son los elementos con los que se abordan los nuevos problemas y son la base sobre los que se construyen los nuevos significados.

Esta relación entre el contexto y el significado del objeto matemático derivada de una función que se muestra en el análisis de su desarrollo histórico-epistemológico, y cómo dicho objeto es construido a partir de la necesidad de resolver determinadas situaciones problemáticas, y además, cómo sus distintos significados se expresan como un sistema de prácticas personales es lo que nos proponemos mostrar que también ocurre en el aula escolar.

Por esta razón, dicho análisis representó un elemento muy importante a considerar en el diseño de las estrategias de enseñanza que implementamos en el aula y, consideramos que en general, también debe ser un elemento para el diseño de estrategias que se propongan contribuir a mejorar la calidad de los aprendizajes de los estudiantes.

Referecias bibliográficas

Barceló, B. *El descubrimiento del cálculo*. Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. Antología Pensamiento matemático II. México.

Beliáiev, Y.; Pierminóv, V. (1991). *Problemas filosóficos y metodológicos de la matemática.* Universidad de Sonora. México.

Cauchy, A.-L. (1994). *Curso de análisis*. Facultad de Ciencias, UNAM. México.

Díaz, M. (2008). De la dialéctica de Zenón, al método reducción al absurdo. *Revista Alternativa, 5 (17)*

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica.* Recuperado el 12 de enero de 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* Recuperado el 12 de enero 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino

Grabiner, J. V. (1990). *The Calculus as Algebra. J.-L. Lagrange, 1736-1813*. Garland Publishing, Inc. New York & London.

Hawking, S. (2010). *Dios creó los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia.* Crítica. Barcelona.

Ímaz, C.; Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor.* Trillas. México.

Kleiner, I. (2001). History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics 48 (2/3).*

Kline, M. (2000). *Matemáticas: La pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI editores. México.

GÉNERO Y DESARROLLO DEL TALENTO EN MATEMÁTICAS

Rosa María Farfán Márquez, María Guadalupe Simón Ramos
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional México
rfarfan@cinvestav.mx, gsimon@cinvestav.mx

Resumen. Tradicionalmente el campo de las matemáticas y el de otras áreas relacionadas se han considerado de dominio masculino. Este hecho ha puesto la mirada en aquellas niñas que desde muy temprana edad muestran altas capacidades en matemáticas. Se ha identificado que si bien las mujeres no están en desventaja académica con los hombres diversas situaciones del entorno las llevan a desestimar sus habilidades y a desistir de elegir carreras relacionadas con esta área. Factores de socialización y diversidad cultural, estereotipos de género y métodos de identificación del talento son analizados con el objetivo de exponer este fenómeno.

Palabras clave: talento, género, atención a la diversidad, factores socioculturales

Abstract. Traditionally at the field of mathematics and, others related, there had been consider of masculine dominion. This fact had placed the look in girls that since very soon age show high capacities at mathematics. There had identified that if well women are not at academic disadvantage with man various situations from the context take them to have a low opinion of their abilities and to desist of electing a career related whit this area. Socialization factors and cultural diversity; gender stereotypes and identify methods from talent are analyzed whit the objet to expose this phenomenon.

Key words: talent, gender, sociocultural factors

Introducción

Atender a la diversidad escolar implica, entre otras cosas, atender a las características individuales de cada uno de los estudiantes. Características de origen social, cultural, psicológico, económico, intelectual e incluso físico (Gutiérrez y Maz, 2004). Así, dentro de la complejidad del salón de clase podemos encontrar estudiantes con éxito académico. Para quienes en la mayoría de los casos se obvia su atención al no considerar que ellos también necesitan de entornos de aprendizaje que les permitan desarrollar al máximo sus capacidades (Betancourt y Valadez 2004).

Es aquí donde destacamos la importancia de brindarles una atención especializada como una forma de responder a sus características individuales. En México esta población está considerada dentro del grupo de necesidades educativas especiales considerando que requieren un apoyo educativo adicional o enriquecido al que se les ofrece comúnmente en las aulas, para que puedan cubrir sus necesidades específicas de aprendizaje y desarrollar al máximo su potencial (SEP, 2003).

No debemos dejar de lado que dentro del salón de clase también pueden existir estudiantes brillantes que no tienen grandes logros por una gran variedad de razones (Kreger y Miller, 2009). Así, podemos encontrar a estudiantes de grupos cultural, social o económicamente diversos a quienes el contexto del salón de clase no les permite destacar ni mucho menos mostrar su potencial real.

La escuela, tal como está constituida establece aprendizajes generalizados que en muchas ocasiones no se corresponden con las experiencias y las formas en que los estudiantes ponen en uso sus conocimientos o habilidades. Además de estar diseñada para responder a las necesidades y expectativas de la clase dominante (Carraher et al., 2002). Por lo que podría considerarse que el sistema educativo obstruye las vías de acceso a una educación que permita el máximo desarrollo del potencial de cada uno de los estudiantes.

La medición de las habilidades intelectuales de los individuos a través del tiempo se ha constituido de tal forma que se han estandarizado las herramientas utilizadas para este fin. Existen pruebas de coeficiente intelectual, pruebas de aptitudes, o pruebas que buscan medir la habilidad de los sujetos en un área específica. Tales instrumentos han evolucionado en la inclusión de variables sociales (como la escuela, la familia y el contexto) con el objetivo de ampliar su perspectiva sobre los elementos que constituyen el desarrollo de las altas capacidades intelectuales (Renzulli, 1999). Pero, estas perspectivas no han abandonado el modelo de pruebas estandarizas para estudiar la influencia de estos factores. Nuestra crítica a este tipo de pruebas radica en que la forma de presentar las pruebas, las formas de evaluar el conocimiento, el tipo de conocimiento que se evalúa y los contextos en que se da significado a ciertos conocimientos (Simón, 2009) distan de considerar las características individuales de cada uno de los estudiantes que realizan la prueba y los medios en que sus habilidades pueden manifestarse.

De este modo, a los programas de desarrollo de las altas capacidades tienen más posibilidades de integrarse aquellos estudiantes exitosos tanto a nivel académico como en las pruebas estandarizadas. Logrando con esto que solo los grupos de alto nivel socioeconómico puedan tener este beneficio (Kreguer y Miller, 2009). Negando el acceso a quienes por cualquier circunstancia no muestran altos logros escolares, no tengan desempeños aceptables en las pruebas o simplemente no tengan oportunidad de participar en una selección de este tipo.

Planteamos, por tanto, que a largo plazo el grupo de estudiantes que presentan habilidades académicas e intelectuales por encima de la media también sean atendidos con base en los beneficios que significarían una equidad real del sistema educativo. De tal modo que estudiantes de diferentes orígenes socioculturales, étnicos, socioeconómicos y en el caso especial de este trabajo las mujeres; puedan formar parte de programas que apoyen el desarrollo de sus capacidades y sean incluyentes de sus formas de construcción y adquisición de conocimiento.

Género y talento en matemáticas

Incluimos en este análisis al grupo de niñas con altas capacidades quienes a pesar de ser exitosas en educación básica, en su mayoría, no obtienen altos logros académicos o profesionales como sus compañeros varones (Goetz, Kleine, Preckel y Reinhard, 2008; González, 2010). Y aunque en nuestro país esta tendencia de inferioridad educativa de las mujeres se está revirtiendo, sigue manteniéndose una marcada segregación profesional por género (INMUJERES, 2011).

Consideramos por lo tanto que las niñas con altas capacidades en matemáticas merecen atención especial. Por tratarse de un grupo, dentro del anterior, con características y necesidades específicas, especiales y diferenciadas de las de los varones debido a su condición de género (Canche, Farfán, y Simón, 2011). Sin olvidar, por supuesto, que dentro de otro tipo de diferencias socioculturales al interior de los grupos, como las étnicas, sociales o económicas.

La incorporación del género en las investigaciones y políticas en educación ha dado una nueva visión a las problemáticas de aprendizaje que se analizan actualmente. Los estudios de género han hecho visible que hombres y mujeres al haber sido socializados de forma diferente para actuar en el mundo lo construyen y lo entienden de formas diferentes. Además de hacerse notoria la importancia de la transversalidad del género para todo tipo de acción educativa (González, 2010).

Así, desde la década de los 80´s diversas investigaciones se han ocupado de analizar los fenómenos relacionados al género y al talento en matemáticas. Situaciones como: la escasa representación de las mujeres en el campo de las ciencias exactas, la baja proporción de chicas que forman parte de programas dirigidos a la atención de los altamente dotados en matemáticas y la reducción del número de chicas que participan en estos programas, han sido analizadas (Reis y Herbert, 2008; Goetz et al., 2008; Lee & Sriraman, 2011).

La mayoría de estas investigaciones se han llevado a cabo principalmente en Estados Unidos, país que desde hace varios años ha contado con diversos programas de atención a estudiantes que muestran altas capacidades en algún área de estudio ya sea científico o en cualquier otro campo del conocimiento. Otros países: el Reino Unido, Alemania, Australia, Corea, España, entre otros, también han realizado diversas aportaciones al tema aunque en algunos casos sus programas de atención no han sido muy sólidos o se encuentran en sus primeras etapas de formación. Situación que no parece ponerlos en desventaja ya que nuevas y diversas concepciones sobre los de altas capacidades han surgido en sus investigaciones.

En un principio, estas investigaciones aseguraban que las chicas eran menos capaces que los chicos en matemáticas, situación que al parecer se volvía más notoria dentro del grupo de estudiantes que mostraban altas capacidades. Por lo tanto se interesaron en identificar y analizar el origen y la existencia de diferencias en cuanto al desempeño académico y rendimiento en matemáticas. Concluyeron que estas se debían a factores de tipo biológico y por lo tanto eran innatas. Algunos fallaron al tratar de probar este punto, pero otros mantuvieron su postura por mucho tiempo (Benbowe Efteckhari-Sanjani, Lubinsky y Shea, 2000). Con el paso de los años estas ideas fueron evolucionando. Desde ya no considerar solamente las desigualdades en habilidades, logros y desempeños hasta analizar los factores psicológicos que podrían causar estas diferencias (Goetz et al., 2008; Hargreaves, Homer y Swinnerton, 2008). Así, se identifico que existían diferencias, que ponían en desventaja a las niñas (con mayor notoriedad en el grupo de las altas capacidades y principalmente en la etapa de la adolescencia), en cuanto a auto-concepto, motivación e intereses en matemáticas. Otras investigaciones se dedicaron a analizar el tipo de diferencias que podían existir entre géneros, como el razonamiento mental, razonamiento espacial, resolución de problemas, creatividad, etc. (Benbowe et al., 2000)

Actualmente las investigaciones tienen nuevas vertientes. Una de ellas ha considerado que si bien, no se pueden atribuir las diferencias entre géneros a las diferencias biológicas, no se puede negar su existencia y se propone que estas son producto de la socialización en roles de género (Brüll y Peckel, 2008; Hargreaves et al., 2008; Reis y Herbert, 2008).

Otros han ido más allá al considerar no solo las diferencias de género en el proceso de desarrollo de las altas capacidades sino también las diferencias culturales (Freeman, 2003). En otros casos se han preguntado si la forma de evaluar o de identificar a aquellos que presentan altas capacidades en matemáticas es aplicable a niños y niñas por igual y a poblaciones con marcadas diferencias culturales.

Las investigaciones han concluido que si bien las mujeres no están en desventaja académica con los hombres, diversas situaciones de su entorno las llevan a desestimar sus habilidades y a desistir en buscar carreras relacionadas con matemáticas y otros campos relacionados.

Factores de socialización y diversidad cultural, estereotipos de género fuertemente arraigados y una revaloración de lo que se evalúa y como se evalúa en matemáticas nos brindan un panorama de las vertientes de la investigación en cuanto a género y talento en matemáticas.

Género y educación: El contexto actual mexicano

En el pasado las mujeres que alcanzaban grandes logros profesionalmente lo debían a la conjunción de factores muy especiales como: la educación profesional de los progenitores (del padre en particular), estatus socioeconómico y en la mayoría de los casos total dedicación a su profesión (García de León 1994, González, 2004). Actualmente las mujeres ocupan aproximadamente el 50% de la matrícula universitaria y las condiciones en las que han llegado no se comparan con las de sus predecesoras. Lo cual da indicios acerca del cambio cultural que estamos viviendo y de los beneficios que este pueda traer.

Hay importantes indicadores que muestran el estado actual del acceso a la educación por parte de las mujeres. Comenzando con la casi total eliminación de las desigualdades (en cuanto a matricula) en primaria y una gran ventaja de las niñas sobre los niños en secundaria y medio superior. Con cifras que muestran 70.7% de mujeres con secundaria completa contra 65.8% de varones y 51.4% de mujeres contra 49.5% de varones respectivamente, para el caso del bachillerato (INMUJERES, 2011). Ventaja que comienza a reflejarse en los niveles subsecuentes principalmente en eficiencia terminal.

Un indicador más, es la fuerte valoración que el sector de bajos recursos proporciona a la educación. En la población urbana las mujeres de bajos recursos que asisten a la escuela superior representan un 29.7% contra un 17.5% de aquellas que no carecen de recursos. En la población rural las mujeres de bajos recursos también representan a la mayoría en las escuelas del nivel educativo superior con un 23.4% contra 11.5% (Escobar y Jiménez, 2008).

Otros datos como la disminución en el tamaño de los hogares, las mejoras en el acceso a la educación para poblaciones rurales, así como los programas de “Oportunidades” han afectado positivamente la asistencia a la escuela para las niñas (Mier, Terán y Pederzini, 2010).

Dentro de la elección profesional también se han dado importantes cambios. Ya que a pesar de seguirse manteniendo una fuerte segregación profesional por géneros que la incorporación de las mujeres a carreras estereotipadas como masculinas se está dando con mayor fuerza y favorece la eliminación de estereotipos de género por lo menos en la elección de carrera (Bustos, 2008).

Estado actual de la investigación

Para el caso del estudio del talento, proponemos el estudio de la situación de las mujeres, cuyas particularidades como grupo social han sido analizadas ampliamente por la perspectiva de género.

Para el caso del talento el tener a dos poblaciones (hombres y mujeres) cuyas particularidades como grupos sociales, de desarrollo como individuos han sido analizadas y caracterizadas, incorpora elementos hacia la re-conceptualización del término talento. Principalmente desde el conocimiento, características o habilidades que debe presentar un individuo talentoso, en nuestro caso en matemáticas. Pues todos los elementos básicos del pensamiento matemático que se llevan a cabo para analizar y representar la realidad deberán considerarse en sus diferencias entre mujeres y hombres. Además se ha problematizado sobre las formas en que hombres y mujeres se desempeñan en diversos tipos de evaluaciones que tienen como finalidad medir sus habilidades (Freeman, 2003; Crafter, 2007y González, 2004) y sobre la importancia que tienen los contenidos y las formas de transmisión del saber en la reproducción de los sesgos de género (Rodríguez, 2008) que tienen una gran influencia en las niñas con altas capacidades y principalmente en matemáticas. Situación que da pie a un análisis más riguroso del tipo de conocimientos y habilidades que se consideran valiosos al momento de designar a alguien como talentoso y sobre los diferentes usos e interpretaciones que puedan existir, según géneros, del conocimiento matemático.

Además, de poner un énfasis especial en otros factores importantes para el desarrollo del talento como el entorno familiar, escolar y social desde el papel que juegan en los procesos de socialización en roles de género (Lamas, 1996) y por lo tanto en la constitución de mentalidades y personalidades distintas para hombres y mujeres. Así como en la influencia de estos factores para el desarrollo del talento en un área estereotipada como masculina y en el proceso de constitución de sus habilidades.

Por tanto nuestro principio de partida está en considerar a las mujeres como un grupo social que entiende, construye y trata al saber matemático de forma distinta a como esta en el aula. Y por tanto el ambiente escolarizado, los contenidos, las estrategias de enseñanza y las formas de evaluación no las benefician.

Dos perspectivas teóricas, que en este trabajo se complementan, han servido como base para este análisis bibliográfico.

Por un lado, un análisis desde la perspectiva de género nos permite explicar los distintos medios de relación de las niñas, jóvenes y mujeres exitosas con el saber matemático, analizar las formas en que se construyen en su relación con este saber y las actitudes que toman hacia sus capacidades y habilidades en el área de matemáticas. Todo esto enmarcado por las instituciones sociales, la familia, la escuela y el contexto social, quienes dictan el orden social establecido que nos hace actuar como actuamos, hombres y mujeres. Y por otro lado la socioepistemología al considerar la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos (Cantoral, 2011). Considerando además que la relación al saber es una función del contexto y por lo tanto su validez será relativa al individuo y al grupo cultural. Creemos firmemente, nos permitirá analizar ¿cómo se relacionan las mujeres con el saber matemático? Entendiendo al saber como el conocimiento matemático en uso.

De este modo, ambos enfoques teóricos se apoyan uno sobre el otro para proporcionar un análisis de ¿cómo construyen conocimiento matemático las mujeres bajo una perspectiva que analiza el conocimiento matemático en uso? Y ¿cómo se construyen ellas mismas como talentosas en matemáticas en un entorno que privilegia el uso de dicho conocimiento?

Metodología propuesta

La población que formará parte de esta investigación serán las niñas, con edades entre 11y 13 años, del programa "Niñ@s Talento" del D.F.

Dado que nuestra postura se inclina hacia el talento como desarrollable mediante la interacción con el contexto en el que interactúa, este trabajo se enfoca en el potencial que los estudiantes muestren en su interacción con el uso de la matemática, hecho que consideramos no puede analizarse por medio de pruebas estandarizadas.

Nuestra metodología está constituida por herramientas que nos permiten hacer un análisis exploratorio de la población en general, encuestas de contexto, que además son la base de las futuras decisiones de la investigación respecto a la aplicación de los métodos seleccionados. Y por otras que constituyen un análisis individual de cada una de las estudiantes, historias de vida, entrevistas, observación en su sala de clase con situaciones de aprendizaje diseñadas bajo la perspectiva socioepistemológica.

Las historias de vida son el eje principal de esta investigación pues se han constituido como una herramienta que permite hacer un análisis epistemológico del género, la cual en conjunción con su interacción con las situaciones diseñadas nos dará información sobre cómo se relacionan ellas al saber matemático considerando la socialización de género.

A modo de conclusión

Durante varias décadas los trabajos de investigación que problematizan sobre las diferencias entre hombres y mujeres han puesto un énfasis especial en la inferioridad intelectual del sexo femenino. Tratando de explicar estas diferencias el problema se ha abordado desde diversas perspectivas. En la actualidad estos trabajos han apuntado hacia la necesidad de incluir a los factores socioculturales como una variable indispensable en ese análisis. Por lo tanto, esta investigación tiene como objetivo estudiar la situación de estudiantes exitosas en el campo de la matemática considerando las particularidades del contexto actual de nuestro país y tomando en cuenta una nueva variable: el conocimiento matemático en uso más que el uso de pruebas estandarizadas, las cuales han mostrado perpetuar las diferencias entre hombres y mujeres.

Referencias bibliográficas

Benbowe C. P., Efteckhari-Sanjani H., Lubinsky D. y Shea D. L. (2000) Sex differences in mathematical reasoning ability at age 13: Their status 20 years later. *Psychological science.* 11(6), 474-480.

Betancourt y Valadez (2004). La educación de niños con talento en México. En Benavides M., Blanco R., Maz A. Castro E., *La educación de niños con talento en Iberoamérica.* (pp. 129-142). Chile: Trineo.

Brüll M. y Preckel F. (2008) Grouping the gifted and talented. Are gifted girls most likely to suffer the consequences? *Journal for the Education of the Gifted 32(1),* 54–85.

Cantoral (2011). *Fundamentos y Métodos de la socioepistemología, Conferencia en el simposio en Matemática Educativa del CICATA-IPN.* Recuperado el 7 de febrero de 2012 de http://www.youtube.com/watch?v=byHKKFnAq5Y

Bustos O. (2008) Los retos de la equidad de género en la Educación Superior en México y la inserción de mujeres en el mercado laboral. *ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura.* 733(septiembre-Octubre), 795-815.

Canche E.M., Farfán R.M.y Simón M.G. (2011). Género y talento en matemáticas. *Revista Venezolana de Estudios de la Mujer, 16(37),* 123-135

Crafter S. (2007) Review: Ann M. Gallagher y James C. Kaufman (eds). Gender Differences in Mathematics: An integrative psychological approach. *Feminism psychology.* 17, 395.

Escobar J. y Jiménez J. (2008). La evolución del acceso a la educación por géneros en México. *Revista Digital Universitaria* 9(*12*), 1-16.

Freeman J. (2003) Gender Differences in Gifted Achievement in Britain and the U.S.A. *Gifted Child Quarterly. 47, 202.* Recuperado el 15 de octubre de 2010 de http://gcq.sagepub.com/content/47/3/202

García de León M. A. (1994). *Élites discriminadas. Sobre el poder de las mujeres.* Colombia. Anthopodos.

Goetz, T., Kleine M., Reinhard P., y Preckel F., (2008) Gender differences in gifted and average ability students: Comparing girls and boys achievement, self-concept, interest and motivation in mathematics. *Gifted Child Quarterly . 52(2) 146-159*. Recuperado el 13 de octubre del 2010 de http://gcq.sagepub.com/content/52/2/146

González R.M. (2003) Diferencias de género en el desempeño matemático de estudiantes de secundaria. *Educación matemática.* 15(2), 129-161.

González R.M. (2004) Género *y matemáticas: balanceando la ecuación*. México: UPN-Miguel Ángel Porrúa.

González R.M. (2010) Políticas públicas en género y educación básica en México. ¿Qué falta por hacer? En A.L. Lara (Coordinadora). *Género en Educación: Temas, avances, retos y perspectivas.* 21-32. México: Universidad Pedagógica Nacional.

Gutiérrez M. y Maz A. (2004). Atención a la diversidad. En Benavides M., Blanco R., Maz A. Castro E., *La educación de niños con talento en Iberoamérica.* (pp. 15-24). Chile: Trineo.http://www.unesco.cl/medios/biblioteca/documentos/educacion_ninos_talento_iberoamerica.pdf

Hargreaves M., Homer M. y Swinnerton B. (2008). A comparison of performance and attitudes in mathematics amongst the 'gifted'. Are boys better at mathematics or do they just think they are? *Assessment in Education: Principle, Policy & Practice*, *15* (1), 19-38.

INMUJERES (2011). *Sistema de indicadores de género*. Recuperado el 10 marzo de 2012 de http://estadistica.inmujeres.gob.mx/formas/link_ind_g.php?menu1=2&IDTema=2&pag=4

Kreger L. y Miller N. (2009). A feminine perspective of giftedness. En L. Shavinina (Ed.). *The international handbook on giftedness* (pp. 99-128). Amsterdam: Springer Science.

Lamas M. (1996). La perspectiva de género. *La tarea*. (8). Recuperado el 10 de enero de 2011 de http://www.latarea.com.mx/articu/articu8/lamas8.htm

Lee K. & Sriraman B. (2011) Gifted girls and non-mathematical aspirations: A longitudinal case study of two gifted Korean girls. *Technical reports. Department of mathematical Sciences*. Recuperado el 13 de enero del 2012 de http://www.umt.edu/math/reports/sriraman/10_2011_LeeSriraman_GCQRevised.pdf

Mier y Terán y Pederzini, (2010) Cambio socio demográfico y desigualdades educativas. En A. Arnaut y S. Giorguli (Cords.) *Los grandes problemas de México-Educación.* 623-658. México D.F. El colegio de México.

Reis S. M. & Herbert T. P. (2008). Gender and Giftedness. En S. I. Pfeiffer (Ed.) *Handbook of giftedness in Children* (pp. 271- 293) New York: Springer.

Renzulli. J. (1999). *Examen de aptitudes, intereses y estilos de aprendizaje de los estudiantes superdotados y talentosos*. Recuperado el 1 de octubre de 2008 de http://www.centrohuertadelrey.com/es/libre-acceso/algunos-de-los-articulos-mas-solicitados.html

Rodríguez, H.E., (2008) El enfoque de género en la construcción del conocimiento científico. *Revista digital universitaria. 9(7).* 1-11.

SEP (2003). *Una Propuesta de Intervención Educativa para Alumnos y Alumnas con Aptitudes Sobresalientes.* Recuperado el 29 de abril de 2009 de

http://basica.sep.gob.mx/dgdgie/cva/sitio/start.php?act=sobresalientes&sec=ava

Simón M. G. (2009). *Las aptitudes matemáticas de los estudiantes del programa Niñ@s Talento del Distrito Federal*. Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

EL SIGNIFICADO DEL OBJETO MATEMÁTICO PROPORCIONALIDAD. SU ORIGEN Y DESARROLLO

Francisco Javier Parra Bermúdez, Ramiro Ávila Godoy, Jesús Ávila Godoy
Universidad Autónoma de Baja California México
Universidad de Sonora
fjparra@correo.física.uson.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx, jag_virgo@hotmail.com

Resumen. En este trabajo, presentamos un reporte parcial de los avances de un proyecto de investigación cuyo objetivo más general es investigar el papel de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de construcción de los significados de los objetos matemáticos cuando se utilizan para estudiar situaciones problemáticas en el contexto de la mecánica newtoniana. Esta investigación la estamos llevando a cabo considerando sólo el caso del objeto matemático Proporcionalidad. Abordamos el origen y desarrollo del objeto matemático de referencia, en especial del papel del contexto (geométrico y físico) en este proceso, producto de una revisión bibliográfica sobre el tema. El análisis lo realizamos desde la perspectiva teórica del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática. El propósito de esta etapa fue indagar el origen y desarrollo de los significados del objeto matemático Proporcionalidad y cómo éstos, en un cierto momento, se convierten en obstáculos.

Palabras clave proporcionalidad, obstáculo epistemológico, objeto matemático, significado

Abstract. In this paper, we show a partial report of the progress in a research project which has as main purpose to research the role of the new information and communication technologies in the process of constructing meanings of mathematical objects when used to study problematic situations in the context of Newtonian mechanics. In this research, we are only considering the case of the mathematical object *Proportionality*. We treat the origin and development of the referential mathematical object, specially the role of the context (geometrical and physical) in this process, as a product of a literature review on the subject. The analysis was conducted from the theoretical perspective of the Ontosemiotic approach of Cognition and Mathematical Instruction. The purpose of this stage was to find out the origin and development of the meanings of the mathematical object *Proportionality* and how they, over time, become obstacles.

Key words: proportionality, epistemological obstacle, mathematical object, meaning

Introducción

Uno de los objetos matemáticos más importantes, si no el primordial, para el tratamiento de la regularidad de sucesos que fundamentan el trabajo de investigación de la ciencia, el trabajo técnico y el funcionamiento de gran número de aparatos de medida, es la relación de proporcionalidad entre las magnitudes intervinientes. El sustrato de expresiones tales como razón, proporción, constante de proporcionalidad, etc. que se unifican sintéticamente por medio de la función de proporcionalidad, lo constituyen las operaciones división y producto, dependiendo de las características que fijan la naturaleza de lo que se trata, el que se utilice una u otra.

Los científicos, al estudiar los fenómenos que se producen en la naturaleza, comprueban que en ellos, generalmente se presentan dos (o más) magnitudes relacionadas entre sí. Es decir que al variar una de las magnitudes, la otra también cambia. Por ejemplo al aumentar la masa de un bloque de fierro, aumenta su volumen; la fuerza que se manifiesta entre dos cargas eléctricas disminuye cuando aumentamos la distancia entre ellas, etc. Cuando esto sucede, es decir, cuando las magnitudes están relacionadas, decimos que una es *función* de la otra.

La Física y la Ingeniería son ricas en situaciones donde aparece la variación proporcional.

La Proporcionalidad es un objeto matemático especialmente importante en el proceso de matematización de diversas disciplinas científicas, además de propiciar el desarrollo del pensamiento relacional.

Con respecto a la enseñanza y el aprendizaje del objeto matemático proporcionalidad (OMP) en un curso de Física, si preguntáramos: ¿si una cantidad crece y la otra decrece, pueden ser directamente proporcionales?, la respuesta más frecuente es: *no* que puede considerarse un indicador de las dificultades que tienen los estudiantes para comprender las leyes de la Física y en particular el OMP. Dos cantidades pueden ser directamente proporcionales cuando una crece y la otra decrece, siempre y cuando la constante de proporcionalidad sea un número negativo, (velocidad y tiempo en la caída libre de un cuerpo). La Física nos puede servir como contexto para estudiar matemáticas, y a su vez los significados de los objetos matemáticos (OM) nos sirven para la comprensión de fenómenos físicos. Detectamos como (Valdés, Sifredo, Núñez y Valdés, 1999), que el aprendizaje en los primeros cursos universitarios no está exento de dificultades: los alumnos persisten una serie de interpretaciones erróneas acerca de diversos fenómenos físicos. El OMP es tratado por su relevancia para su enseñanza y aprendizaje por diversos autores (Caputo y Soto, 2002; Rivas, Godino y Castro, 2012).

Con la descripción anterior, pretendemos mostrar la utilidad e importancia del estudio del OMP el cual, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2009; Godino, 2012) emerge del sistema prácticas que se utilizan al tratar de interpretar y resolver cierto tipo de situaciones problemáticas (SP).

El objeto matemático proporcionalidad en la matemática griega

La matemática, a través de diferentes fuentes de la Antigüedad como el historiador romano Plinio (siglo I d.n.e.) y Diógenes Laercio, historiador griego de la filosofía que vivió entre los (siglos II y III d.n.e.), sabemos que por los años 585 a.d.n.e., el matemático griego Thales de Mileto calculó, de una manera ingeniosa, la altura de la Gran Pirámide de Keops. "La relación que yo establezco con mi sombra es la misma que la pirámide establece con la suya.". De ahí dedujo: "En el mismo instante en que mi sombra sea igual que mi estatura, la sombra de la pirámide será igual a su altura" Por lo que estableció la relación entre los lados de triángulos semejantes, que él mismo demostró y hoy conocemos como teorema de Thales.

A Teano se le atribuye haber escrito tratados de matemáticas, uno de ellos sobre la proporción áurea. La búsqueda de relaciones de proporcionalidad fue la principal motivación que dio lugar a la mayor parte de la producción de la escuela pitagórica. Descubrieron que había magnitudes conmensurables e inconmensurables, descubrimiento que posteriormente dio lugar a la creación, primero de los números racionales y un poco después de los irracionales. Conocieron las ocho formas de una proporción y su propiedad fundamental, (Nomdedeu, 2000).

Por la descripción histórica precedente, consideramos que la matemática griega es geométrica, y para ubicarnos en su epistemología, asumimos que el origen del objeto matemático proporcionalidad surge en ese contexto. Los Elementos de Euclides, representan acabadamente el tipo de geometría que caracteriza el período que va desde la Antigüedad hasta la Época Moderna. Dichas características, conjuntamente con las limitaciones que involucran, sólo serán puestas de manifiesto en forma explícita en el siglo XIX, precisamente cuando tiene lugar una profunda revolución metodológica y un cambio de concepción sobre la significación de la geometría (Piaget y García, 1998).

Para comprender el proceso, lo que lograron y sus limitaciones, es necesario empezar desde los griegos destacando las aportaciones de cuatro geómetras, cuyos trabajos nos permiten ahora entender el origen y desarrollo del OMP. Los sistemas de prácticas desarrollados por cada uno de ellos para resolver cierto tipo de problemas, constituyen, de acuerdo con el EOS, el significado que tenían del OMP; por ejemplo: Apolonio tenía, en forma embrionaria, una cierta idea del uso de coordenadas, Arquímedes utilizaba un método de modificaciones sucesivas de una figura que tiende hacia un límite, así también Euclides y Pappus utilizaban transformaciones por proyecciones. Apolonio no sólo aportó una impresionante cantidad de resultados nuevos, sino también una metodología y una renovación conceptual en las cuales puede encontrarse el germen lejano de la geometría analítica del siglo XVII. Se le considera a Apolonio ser el primero en utilizar un sistema de coordenadas para realizar demostraciones geométricas, antes que Fermat y Descartes.

El OMP, se muestra claramente en la obra de Pappus: "cuando se trazan cuatro rectas desde un mismo punto, forman sobre una transversal, trazada arbitrariamente en su plano, cuatro segmentos que tienen entre ellos una cierta relación constante cualquiera que sea la transversal." (Piaget y García, 1998, p. 97).

Para explorar la epistemología del OMP, consideramos, bajo el EOS (Godino *et al,* 2009), que los OM adquieren atributos contextuales que se manifiestan según su uso del lenguaje en facetas duales, el OMP interviene como unidad en el sistema geometría, desde esta perspectiva nos abocamos, en primer término, a la epistemología de la geometría, la cual comienza, con la síntesis que hace Euclides, por un período durante el cual se estudian las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos como relaciones internas entre los elementos de dichas figuras o de dichos cuerpos. No se toma en consideración el espacio como tal, ni por consiguiente las *transformaciones* de las figuras en el interior de un espacio que las comprenda. La siguiente etapa está caracterizada por una puesta en relación de las figuras entre sí, cuya manifestación específica es la búsqueda de *transformaciones* que relacionan las figuras según múltiples formas de correspondencia (geometría proyectiva). Una tercera etapa se manifiesta por la preminencia de las estructuras. No se trata de transformar una figura en otra, sino de una estructura que opera sobre un conjunto de elementos que varían o bien sus relaciones. Las etapas anteriores (Piaget y García, 1998) las denominan "intra-figural", "inter-figural" y "trans-figural", respectivamente. Correspondiéndose la primera a una centrada en "dentro" de la figura geométrica, que sería la geometría griega hasta el siglo XVII, una segunda de relaciones con la algebrización de la geometría con Descartes y dos siglos después una tercera de transformaciones con la geometría dinámica de Ponselet, Chasles y, principalmente, Klein.

En el camino hacia las *transformaciones*, desde la perspectiva de la geometría proyectiva de Chasles y Poncelet tuvieron una fuerte oposición, de eminencias, como: Carnot (Piaget y García, 1998), para quien la utilización de cantidades negativas o complejas aplicada a la representación de entidades geométricas era "absurda", por lo que afirmaba: *"yo demuestro que tal noción es completamente falsa y que de su admisión resultarán los más grandes de los absurdos"*

Los significados de los objetos matemáticos como obstáculos epistemológicos en la geometría y el álgebra

Históricamente, lo que se observa es que una gran limitación en el desarrollo de la geometría es el casi nulo uso de las *"transformaciones"* geométricas, en este sentido la geometría griega permanece en ausencia de un álgebra, de aquí la ausencia de toda *"transformación"*, no obstante los "porismas" de Euclides (o *transformaciones* locales centradas en sus resultados figurales), las coordenadas parciales de Apolonio, y las modificaciones de figuras de Arquímedes o Pappus, todos ellos casos particulares sin generalizaciones metodológicas". Posteriormente Descartes juega un papel fundamental al establecer una relación sistemática entre el álgebra y la geometría, pero fue necesario que transcurrieran casi dos siglos (XVII-XIX), antes de llegar a las *transformaciones* geométricas con Lie, Klein, Chasles y Poncelet vislumbrándose un comienzo con las *transformaciones* pero limitadas a la geometría proyectiva, subordinándose al conjunto de las geometrías a sistemas algebraicos.

Ante lo anterior nos planteamos las siguientes interrogantes: ¿Cuál fue el significado de la geometría que se convirtió en un obstáculo epistemológico para el uso de las *transformaciones*? ¿Qué significados construidos en geometría se convirtieron, en cierto momento, en obstáculos (epistemológicos) que dificultaron la asimilación del significado de *transformación* ante nuevos sistemas de prácticas creados para resolver nuevos problemas? Las cuales pueden ser reflexionadas por las aportaciones de (Piaget y García, 1998): Sobre el terreno algebraico, el sujeto se siente desde un comienzo libre de construir las transformaciones que le convienen, mientras que a la idea de transformaciones geométricas, debe preguntarse si tiene o no derecho a efectuarlas, en vista de la "realidad" impuesta por los "datos". El largo periodo interfigural no se reduce en modo alguno a la historia de una colaboración entre dos tipos de instrumentos directamente coordinables, sino que está caracterizado por el difícil ajuste de la doble naturaleza objetiva y subjetiva del espacio.

Las dificultades que encontraron los griegos en la solución de numerosos problemas geométricos, sólo se explica por la *carencia de un* álgebra que les permitiera formularlos en términos de operaciones. Aunque resulta difícil explicar el estancamiento prolongado de una ciencia que sólo vuelve a florecer hasta el siglo XVI, de ahí la importancia de la obra de Vieti como un sistematizador, al retomar la ciencia de Diophanto y perfeccionarla. Posteriormente Klein ofrece una profunda interpretación de las obras de Diophanto y de Vieti sobre la base de un profundo análisis del pensamiento griego y del significado de la ciencia que se desarrollaría en los siglos XVI y XVII.

En el caso del álgebra el OMP, inicialmente emerge con la teoría de las proporciones geométricas elaboradas en el seno de las perspectivas euclidianas. Eudoxio, Aristóteles y Proclo proclamaron un *divina ars*, lo que sería la teoría general de las proporciones, capaz de englobar todo el conocimiento matemático en su conjunto. En una siguiente etapa el OMP, se manifiesta en los trabajos de matemáticos como Vieti, referidos a las transformaciones, hechas posibles gracias a un simbolismo abstracto y general. A partir de Vieti y hasta mediados del siglo XIX, el estudio del álgebra se limita al estudio de las ecuaciones algebraicas. En el siglo XVII se encuentran soluciones algebraicas para ciertos problemas de la geometría y de la mecánica. Pero, en cada problema se muestra un método de resolución que es propio para cada situación particular. Sin embargo, en la segunda mitad del siglo XVII, haciendo uso de las propiedades de las funciones continuas, tomadas del cálculo infinitesimal, se llegan a formular en el interior del álgebra, problemas de una gran generalidad, lo cual condujo al teorema fundamental del álgebra. Con el cálculo infinitesimal, Euler, Lagrange, Gauss y Cauchy, contribuyeron significativamente al desarrollo del álgebra. Por ejemplo, Lagrange, al considerar el número de valores diferentes que toma un polinomio cuando se permutan las variables de todas las maneras posibles, aportaría la brillante idea que contendría el germen de donde surgiría la teoría de grupos. Posteriormente en una tercera etapa el OMP, se encuentra en las síntesis, donde se alcanzan en el álgebra estructuras, cuyas construcciones comienzan con los grupos de Galois.

El objeto matemático proporcionalidad y su epistemología en la física

En la Física, con Aristóteles surge incipientemente lo que sería el OMP de manera cualitativa: entre mayor es el peso de un cuerpo mayor es su rapidez al caer, es decir una proporcionalidad entre la rapidez y el peso, posteriormente considerada errónea. Al derrumbarse el paradigma aristotélico centrado en los atributos de los cuerpos y no en sus relaciones, el significado del OMP desarrollado en la geometría griega se enriquece al emerger en el estudio de fenómenos físicos, por ejemplo Galileo establece la relación entre la longitud y el tiempo de caída de un cuerpo, lo que arrojaría una *proporcionalidad directa cuadrática* de la forma: $h \alpha t^2$, después Kepler (1618), en sus famosas leyes encontraría para su tercera ley que: *para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica*. Esto es: $T^2 \alpha L^3$. En el siglo XVII al igual que la geometría, la Física también adquiere una algebrización.

Con el desarrollo del cálculo diferencial, el OMP con Newton, se enriquece con sus leyes del movimiento, así en sus *Principia* en la 2da. Ley, para una fuerza F, en la interacción de cuerpos: $dp \alpha dt$ lo que sería una *proporcionalidad directa lineal* entre el momento lineal y el tiempo, al considerar la masa constante la relación entre la fuerza y la aceleración es: $F \alpha a$. El mismo Newton, al formular su Ley de la gravitación universal, tiene que: $F \alpha 1/r^2$ (fuerza y distancia entre cuerpos), como una *proporcionalidad inversa cuadrática*. En la posteridad se daría un continuo establecimiento de relaciones de proporcionalidad entre los objetos de la Física en sus diversas representaciones (*gráfica, numérica y analítica)* en la Física Clásica. Posteriormente, al emerger la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica el OMP, se ha enriquecido aún más.

Los obstáculos epistemológicos en la física y el OMP

El desarrollo de la Física está íntimamente relacionado con los diversos paradigmas imperantes en las diversas etapas de dicho desarrollo, el aristotélico, el newtoniano y el einsteiniano, los cuales se caracterizan por ser: especulativo-descriptivo, experimental-cuantitativo y por su relatividad respectivamente. En el primero de ellos el OMP, se presenta de manera incipiente porque al explicar la naturaleza, éste paradigma se limita a una descripción cualitativa de los fenómenos físicos y la explicación de los mismos se mantiene a un nivel especulativo ya que se basaba en la aceptación de ciertas premisas como verdades evidentes. Carece de la medición, siendo su obstáculo limitarse a describir y no relacionar. En principio, el objeto de estudio es el hecho. Entre sus premisas incuestionables se considera que el estado natural de los cuerpos es el reposo. La axiomática de la Física es material, describir lo que se ve. Lo anterior se refleja, por ejemplo, al considerar que los cuerpos más pesados caen más rápido, lo cual se creyó por alrededor de 2000 años. Fue hasta el siglo XVI, cuando Galileo se centra en el estudio de las relaciones, que exhibió la contradicción lógica del razonamiento aristotélico. Galileo contribuye a un cambio paradigmático en lo metodológico, ante la concepción global de la caída de los cuerpos, y contribuiría en la construcción de los cimientos del paradigma newtoniano caracterizado por lo experimental, consistente en probar lo que se cree, realizando mediciones. Newton crea un modelo matemático de las relaciones entre los objetos al aritmetizarlas, presenta descripciones cuantitativas, por ejemplo la fuerza se concibe como la medida de la interacción entre los cuerpos, la masa como la medida de la inercia. Posteriormente esto también se refleja cuando aparecen los conceptos de energía, trabajo, etc. Pero la limitación de la Física newtoniana se presenta al considerar el carácter absoluto de los objetos relacionados, y no la relatividad de los mismos, desde los diferentes marcos de referencia del observador, por lo que el OMP se limitaba a su carácter absoluto. En el paradigma einsteiniano el tiempo es relativo, las velocidades no se suman en la forma galileana. En el ámbito de la mecánica cuántica: en todo instante un “átomo” no tiene una posición y una velocidad definidas (principio de incertidumbre), contrario a la Física de Newton. Así pues el OMP sigue enriqueciéndose.

Algunas consideraciones sobre didáctica de la matemática

Lo anteriormente expuesto nos lleva a coincidir con (Ávila, Parra y Ávila, 2012), en la escuela debe considerarse: a) El estudio del origen y desarrollo de los objetos matemáticos y sus significados, así como los obstáculos epistemológicos que en un cierto momento se presentaron, porque proporcionan algunos elementos útiles para la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula escolar b) Dicho estudio proporciona elementos para el diseño de estrategias de enseñanza que sean más adecuadas al propósito de mejorar significativamente el desempeño matemático de nuestros alumnos.

Conclusiones

- En el análisis que se ha hecho del desarrollo del objeto matemático proporcionalidad (OMP), se ha asumido que éste es una construcción humana de naturaleza pragmática, lo cual implica que emerge de un sistema de prácticas creado para analizar y resolver cierto tipo de situaciones problemáticas (SP), en la Matemática y en la Física.

- El análisis del origen y desarrollo del OMP en sus diversas manifestaciones: proporcionalidad directa, inversa, al cuadrado, etc., ha permitido valorar la eficacia de las herramientas conceptuales y metodológicas del (EOS) utilizadas para llevar a cabo dicho análisis.

- Un constructo teórico, especialmente útil para la didáctica del OMP, es el de obstáculo epistemológico que ayuda a entender las dificultades que tienen los estudiantes para modificar una concepción previamente construida y proporciona elementos para el diseño de estrategias didácticas para superarlos.

- La investigación que se ha realizado en el campo de la Epistemología, sobre el origen y desarrollo del OMP, ha sido de gran utilidad en Didáctica de la Matemática pues ha permitido identificar elementos que ayudan a comprender de mejor manera el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Ávila, J., Parra, F.J. y Ávila, R. (2012). Epistemología y Didáctica de la Matemática. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 775-783. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Caputo, L. y Soto, N. (2002). *Proporcionalidad directa e inversa: Dificultades en su aprendizaje.* Recuperado el 12 de febrero de 2012 de http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2002/09-Educacion/D-008.pdf

Godino, J. D. (2012). *Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática.* Recuperado el 29 de septiembre de 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemática*. Recuperado el 10 de junio de 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Gómez, A. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 2 (3), 19-29.

Nomdedeu, X. (2000). *Mujeres, manzanas y matemáticas. Entretejidas.* Madrid: Nivola Libros.

Piaget, J. y García, R. (1998). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* México: Siglo XXI.

Rivas, M., Godino, J. D. y Castro, W. (2012). *Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la*

Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. Recuperado el 10 de junio de 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Bolema%2042B_proporcionalidad.pdf

Rodríguez, A. y Pérez, J. (2003). *La noción de proporcionalidad*. Recuperado el 12 de marzo de 2012 de http://www.oei.es/n8923.htm

Valdés, P., Sifredo, B.,Núñez, J. y Valdés, R. (1999). *El Proceso de Enseñanza- Aprendizaje de la Física en las Condiciones Contemporáneas*. La Habana: Academia.

RESIGNIFICACIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA DESDE LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Guadalupe Cabañas-Sánchez,
Universidad Autónoma de Guerrero México
gcabanas.sanchez@gmail.com

Resumen. Este artículo discute aspectos teóricos y metodológicos acerca de la resignificación del concepto de integral definida, desde la teoría Socioepistemología. En la resignificación de este concepto, la tríada *usos, contextos y procedimientos* es introducida con la intención de articular su explicación en torno a la noción de área, en el ámbito de una situación de aprendizaje. Los *usos* se exploran desde una perspectiva de *desarrollo de usos del área;* la noción de conservación del área, normó las acciones de un profesor y sus estudiantes mientras interactuaban con las actividades.

Palabras clave: resignificación, socioepistemología, conservación del área

Abstract. This paper discussed from the Socioepistemological approach, the theoretical and methodological aspect about the re-meaning of the definite integral concept. The triad uses, contexts and procedures in the re-meaning of this concept it is introduced to articulate its explanation around the notion of the area, in the context of a learning situation. The uses are explored from a point of view of development of uses of the area; the conservation of the area *normed* both teacher and students actions while working with the activities.

Key words: re-meaning, socioepistemology, conservation of the area

Introducción

El artículo aborda aspectos teóricos y metodológicos acerca de la resignificación del concepto de integral definida. Se estudia desde la teoría Socioepistemología, y se entiende como el proceso en que las significaciones construidas por un individuo se modifican, obedeciendo a factores contextuales y coyunturales (Cabañas-Sánchez, 2011a; 2011b). Se resignifica porque los grupos humanos somos diversos, de modo que dos grupos humanos no siempre entenderán o usarán un constructo del mismo modo. Una significación construida por los estudiantes sobre la integral definida por ejemplo, se articula a los procedimientos, en razón del privilegio del discurso matemático escolar por el desarrollo de habilidades en el uso de técnicas de integración; la resignificación busca modificar este tipo de significaciones. Esta investigación en particular, centra la resignificación de la integral definida en torno a los usos del área en la matemática sobre regiones planas, más precisamente con relación a la medición, comparación, conservación, aproximación, estimación y representación de superficies.

En la resignificación de conceptos matemáticos desde la socioepistemología, la *práctica social* es fundamental, dado que por medio de ella se formulan epistemologías del conocimiento que contribuyan a la construcción de conocimiento matemático. Esta resignificación se manifiesta en el *uso del conocimiento*, así como en su *desarrollo*, que norma la práctica social; ambas se oponen al desarrollo conceptual del conocimiento (Cordero, 2008). Los usos de este conocimiento dependen de la situación, y evolucionan atendiendo a ello.

La práctica social se comprende como normativa de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica; o aun como se señala en Radford, (2004), como “interiorización reflexiva de prácticas sociales históricamente constituidas” (citado en Cantoral, Farfán, 2008). La connotación que la teoría socioepistemología le da a esta noción es en el sentido de Covián (2005), quien sostiene que *la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen* (Covián, 2005, p.70).

En esta investigación, la noción de conservación del área se constituyó en práctica social, al normar las acciones de un profesor y sus estudiantes durante la resignificación de la integral definida; emergieron en ese proceso, explicaciones acerca de la *medida* del área de regiones planas asociadas a este objeto matemático, de su *forma* y la *posición relativa* respecto del plano. En este sentido, las explicaciones estuvieron centradas en los usos del área, en lugar de los procedimientos algorítmicos, importantes sin duda aunque sin ser el centro.

La noción de conservación del área

En la resignificación del concepto de integral definida la noción de conservación del área es fundamental, al constituirse en eje rector de las acciones de un profesor y sus estudiantes en ese proceso, a fin de contribuir en explicaciones sobre la medida del área de una región plana, su forma y posición relativa con respecto del plano. La conservación del área se caracteriza a partir de una transformación que deja sin cambios la medida del área de una región, significa que esta medida de área permanece sin cambios mientras las regiones de área correspondientes en el plano, pueden ser transformadas a otras cualitativamente nuevas. Se derivan de transformaciones sobre objetos geométricos o analíticos, mediante diversos procedimientos o métodos.

Usos, contextos y procedimientos

La tríada *usos, contextos y procedimientos* es introducida en esta investigación con la intención de articular una resignificación de la integral definida entorno a la noción de área, en el ámbito de una situación de aprendizaje. Los *usos* se exploran desde una perspectiva de *desarrollo de usos del área*, que surgen del estudio de una *práctica social*, la conservación del área. El estudio de los *procedimientos* y los *contextos* se estableció mediante las relaciones que guardan con el *desarrollo de usos del área*, como un medio para comprender su interacción y las características particulares de los objetos, relaciones, nociones y proposiciones matemáticas que se ponen en juego al trabajar sobre las transformaciones geométricas y analíticas (véase Tabla No. 1).

La noción *uso* se adopta en el sentido de Cabañas-Sánchez (2011a; 2012), quien la caracteriza desde el pragmatismo teórico, como *las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico*. Por *contextos* se comprende a los entornos situacionales en los que se considera un hecho, y a los *procedimientos* como las formas de organización de una situación (Cordero, 2003).

Esquema general de la resignificación de la integral definida

La formulación de un esquema fue básico en la estructuración de un desarrollo de usos del área en la resignificación de la integral definida, el cual se configuró a partir de un estudio epistemológico, didáctico y cognitivo proveniente del análisis *a priori*, asimismo, de los estudios de Piaget, Inhelder y Szeminska (1970), Freudenthal (1983), Kordaki y Potari (1998, 2002). En estas investigaciones se reporta una particular relación entre el área y la medición; de la medición y la comparación, y de todas estas con la conservación. De las investigaciones referidas al concepto de integral definida, consideramos los estudios de Cordero (2003, 2005), en los que se discute una forma de resignificación de la integral definida, como una manifestación de usos del conocimiento en el discurso matemático escolar. El desarrollo de usos desde la perspectiva de las acciones de los estudiantes, transitó por el análisis de casos particulares, que los situó a probar de forma empírica, como un primer movimiento validativo, a determinar una medida de área aproximada, para dar paso a procesos deductivos formales y con ello arribar a la definición de la integral definida. Comprendió elementos como los contextos y procedimientos en que se presenta el concepto de área en la geometría y la medición y funciones polinómicas.

	TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS	TRANSFORMACIONES ANALÍTICAS
Usos del área	Medir, comparar, **CONSERVAR**, representar regiones de áreas planas	Medir, comparar, estimar (o aproximar) y representar regiones de áreas planas **CONSERVAR**
Contextos	Polígonos convexos y no convexos	Funciones polinómicas $f(x)=kx^n$, k, n ($n>0$) continuas en un intervalo $[a,b]$.
Procedimientos	Composición y descomposición de figuras, asimetrías en el plano o bien en teoremas, axiomas, propiedades de las figuras geométricas, en relaciones matemáticas generales, así como en otros conceptos matemáticos.	Procesos de aproximación, partición del intervalo, sumas de Riemann, integral definida, fórmulas básicas para el cálculo de área.

Una forma resumida del esquema de usos del área se presenta en la tabla 1. Este fue el marco para configurar la situación de aprendizaje, medio material por el cual se resignificó la integral definida.

Desarrollo de usos de la integral definida
Desarrollo de usos I: Exploración de **usos del área** en *transformaciones geométricas*. *Contexto*: Polígonos convexos y no convexos. *Procedimientos*: Relación de paralelismo, asimetrías en el plano, composición y descomposición de polígonos, construcciones geométricas mediante diversos métodos. *Usos del á*rea: Medición, comparación, conservación y representación del área en regiones planas.
Desarrollo de usos II: Exploración de **usos del área** en *transformaciones analíticas.* **Sumas de Riemann** para una función polinómica de grado *n*, continua $f(x)$ y positiva en un intervalo real $[a, b]$ y con una partición. *Contexto*: La función cuadrática y sus gráficas, en el intervalo [0,1], sucesión y límite de una sucesión. *Procedimientos*: Prueba empírica (aproximación inferior y superior a la medida del área), determinación de la altura, usos de una tabla de valores aproximados, partición del intervalo en *n* partes iguales. *Usos del á*rea: Aproximación, medición, comparación y representación del área en regiones planas limitadas por una curva.
Desarrollo de usos III: Exploración de **usos del área** en *transformaciones analíticas.* *Contexto*: La integral definida mediante **Sumas de Riemann**. *Procedimientos*: Partición del intervalo de integración, sumas de Riemann. *Usos del área*: Aproximación, medición, comparación y representación del área en regiones planas limitadas por una curva.
Desarrollo de usos IV: Exploración de **usos del área** en *transformaciones analíticas.* *Contexto*: Funciones continuas $f(x)$ en un intervalo real $[a, b]$, gráficas. *Procedimientos*: Movimientos, uso de los significados de las operaciones básicas. *Usos del área*: Medición, conservación y comparación del área en regiones planas limitadas por una curva.
Desarrollo de usos V: Exploración de **usos del área** en *transformaciones analíticas.* *Contexto*: Funciones continuas $f(x)$ y positivas en un intervalo real $[a, b]$ y gráficas de funciones polinómicas. *Procedimientos*: Movimientos*,* relación de congruencia, fórmulas, integrales. *Usos del área*: Medición, conservación, comparación, y representación del área en regiones planas limitadas por una curva.

Tabla.1: Esquema general de la resignificación de la integral definida

Una situación relativa a la resignificación de la integral definida

A modo de ejemplo, se presenta una de las situaciones objeto de discusión por los estudiantes durante la resignificación de la integral definida a nivel de experiencia de aula, la cual fue planteada, posterior a su explicación. La actividad se discutió en equipo primeramente, en seguida, de forma grupal.

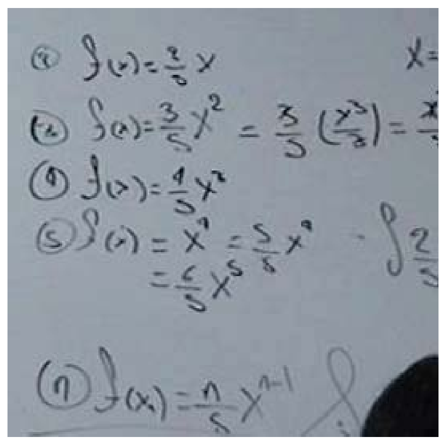
El contexto de la situación, la conservación de una medida de área de una región plana situada debajo de la curva de una función polinómicas, positiva y continuas, en un intervalo cerrado.

Actividad V.4. Una función *f* está definida en el intervalo [0, 1], el área bajo la curva en dicho intervalo es 1/5. Grafica dos funciones diferentes cuyo dominio sea igual al de *f* y el área bajo la curva en dicho intervalo sea también 1/5.

¿Qué usos del área privilegiaron los estudiantes en el proceso de resolución?

La representación gráfica de dos funciones que cumplen con las exigencias de la situación, requiere en primera instancia, la determinación por parte de los estudiantes de las expresiones analíticas correspondientes. Se observó que una mayoría logró determinar las funciones que cumplen con las exigencias y graficarlas. Es decir, buscaron funciones que al integrarlas les resultara un quinto. La primera que pensaron fue $f(x)=\frac{1}{5}$, después en $f(x)=\frac{2}{5}x$. Se dieron cuenta que al integrarla en el intervalo [0,1] obtenían un quinto, propusieron esas dos y representaron las regiones de área en cada caso.

Su método consistió en "probar" con casos particulares de funciones de la forma $f(x)=\frac{n}{5}x^{n-1}$ aunque no fueron conscientes de su trabajo con esta expresión, excepto uno de los equipos quien además, la escribió (ver figura adjunta) y la denominó "expresión general". En el caso de este equipo, se reconoce que fue hasta que trabajaron con varios casos, que identificaron una regularidad en cierto tipo de funciones. Es así que reconocieron que cualquier función de la forma $f(x)=\frac{n}{5}x^{n-1}$ cumple con la condición de que se conserva la medida del área de la región ubicada debajo de la gráfica, en el intervalo [0,1]. El primer caso que usaron fue $f(x)=\frac{1}{5}x$, seguidamente, con $f(x)=\frac{2}{5}x$.



Veamos algunos de los argumentos presentaron por los integrantes del equipo durante su interacción con el profesor.

Carlos: Encontramos una expresión general…

Profesor: ¿Pero cómo? … ¿Podrían explicarme?

José: Primero buscamos una función… efe de equis igual a un quinto de equis … y vimos que no nos daba un quinto… Entonces la multiplicamos por dos … y así encontramos que era tres quintos por equis cúbica….encontramos que es esta expresión …

Los integrantes del equipo reconocieron además, que esta expresión cumple o se conserva una medida de área, para los casos que analizaron, pero que habría que demostrarlo para ver si en verdad es una expresión general.

Otros equipos probaron inicialmente con $f(x)=\frac{1}{5}$.

Reflexiones finales

Poco se ha documentado acerca de la construcción de resignificación en el aula con relación al concepto de integral definida, en los que se ponga de relieve a la conservación del área de regiones planas ubicadas debajo de la gráfica de una función continua y positiva. En este artículo se aborda el concepto resignificación, que aun cuando no es exclusivo de la teoría socioepistemología, si da cuenta del papel que desempeña la práctica social en la reconstrucción de significados, y como ejemplo de ello, el de la integral definida, vista como área bajo una curva. En la resignificación de este concepto, la noción de conservación del área es fundamental, al constituirse en eje rector de las explicaciones de los estudiantes y de las acciones didácticas del profesor al tiempo que conservan, comparan y representan la medida del área, en contextos numéricos, geométricos y analíticos. En condiciones de enseñanza, se privilegia además, la discusión colectiva sobre el comportamiento de las funciones al analizar las regiones de área respecto de su *forma* y *posición relativa* en el plano cartesiano.

Referencias bibliográficas

Cabañas-Sánchez, G. (2011b). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.

Cabañas-Sánchez, G. (2011a). Prácticas asociadas a la situación del salón de clases de matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 785-792. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Farfán, R.M. (2008). Socioepistemología y matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 740-753. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Farfán, R.M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, *53* (3), 255-270.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp.265-286). México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8* (3), *265-286.*

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México: Editorial Iberoamérica.

Covián, O.N. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la Cultura Maya*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holland: D. Riedel Publishing Company.

Kordari, M. y Potari, D. (2002). The Effect of Area Measurement Tools on Student Strategies: The Role of a Computer Microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7 (1), 65-100.

Kordaki, M. y Potari, D. (1998). Children´s Approaches to Area Measurement Through different Contexts. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17* (3), 303-316.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1970). *The Child´s conception of geometry*. New York: U.S.A.: Basic books, Inc., Publishers.

ECOLOGÍA DE LOS SIGNIFICADOS DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS INTERVINIENTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ruth E. Rivera, Ramiro Ávila G., Maximiliano De Las Fuentes, Alberto Navarro V.
Universidad Autónoma de Baja California México
Universidad de Sonora
rrivera@uabc.edu.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx, maximilianofuentes@uabc.edu.mx, navarrovaal@yahoo.com.mx.

Resumen. Presentamos un análisis ecológico de los objetos intervinientes, sus significados y su relación con las dificultades para resolver problemas utilizando ecuaciones diferenciales. Esto bajo el Enfoque Ontológico-Semiótico (EOS). Este análisis muestra que la posibilidad de entender un proceso está asociada a la significación que tienen los elementos que intervienen y a las diferentes formas de representarse. Un objeto matemático tiene sentido alrededor de otros objetos. Debido al carácter epistémico de la investigación se utilizó una metodología cualitativa. Se abordaron casos de estudiantes que cursaban ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería-Mexicali, dependiente de la Universidad Autónoma de Baja California, México.

Palabras clave: análisis ecológico, ecuaciones diferenciales

Abstract. We present an ecological analysis of the objects involved, its meanings and its relationship with the difficulty in solving problems using differential equations. This approach under the Ontologico-Semiotico (EOS). This analysis shows that the ability to understand a process is linked to the significance that have the elements that are involved and the different ways to represent them. A mathematical object makes sense around other objects. Due to the nature of the traditional epistemic research study, we used a qualitative methodology. Examined cases of students who were studying differential equations in the Engineering Faculty campus Mexicali, dependent on the University of Baja California, Mexico.

Key words: ecological analysis, differential equations

Introducción

El curso de ecuaciones diferenciales se considera asignatura clave para todas las ramas de la ingeniería pues en él se pretende que los estudiantes las conozcan y aprendan a utilizarlas, asumiendo que se trata de la principal herramienta matemática utilizable en el análisis, interpretación y resolución de diversos problemas de la ciencia y de la ingeniería, tales como los problemas ligados a la comprensión de diversos fenómenosde la naturaleza; como el crecimiento y decaimiento poblacional, fenómenos de desintegración nuclear, los de la variación de la temperatura de los cuerpos, la propagación de virus, o problemas de ingeniería como los relacionados con los sistemas masa-resorte, iluminación, circuitos eléctricos, etc. Los objetos matemáticos intervinientes han sido estudiados previamente en los cursos de Cálculo Diferencial, contexto en el que se han construido los significados previos de dichos objetos, que al aparecer en el contexto de las ecuaciones diferenciales requerirán adecuarse para un uso más eficaz de los mismos en el proceso de modelación, comprensión y resolución de los nuevos problemas.

El presente reporte de investigación muestralos resultados de una investigación orientada a tratar de entender las dificultades que tienen los estudiantes de ingeniería cuando intentan resolver problemas utilizando ecuaciones diferenciales de primer orden. La investigación se llevó a cabo partiendo de la premisa de que dichas dificultades están asociadas a los significados que adquieren los objetos matemáticos intervinientes como consecuencia de las nuevas relaciones ecológicas que surgen en el nuevo nicho que constituyen las ecuaciones diferenciales.En este reporte se caracterizan los cambios que se originan en los significados de los objetos matemáticos intervinientesen el proceso de resolución de los problemasutilizados en la investigación y se muestra cómo estos cambios se deben fundamentalmente a las nuevas relaciones ecológicas presentes en las ecuaciones deferenciales utilizadas al tratar de resolver los problemas.

El análisis realizado permitió confirmar que los significados previos de los objetos matemáticos intervinientes requieren modificarse para ser utilizados con eficacia en el nuevo contexto debido a las nuevas relaciones que surgen en el nuevo nicho ecológico.Para ilustrar que el significado de los objetos matemáticos está determinado por sus relaciones con otros objetos, consideremos un ejemplo: Tomemos el caso del objeto matemático*número cinco*:cuando hablamos de élnos concretamos a hablar de sus relaciones con otros números, así decimos que es un número entero, positivo, impar, que es un número primo, que es un divisor de 5, 10, 15…,etc.- como puede observarse, el significado, en este caso, del objeto matemático llamado *número cinco*, está determinado por sus relaciones con otros objetos.Todos estos objetos constituyen lo que en el EOS se denomina, metafóricamente, un *nichoecológico*(el de los números enteros). Siempre que se quiere hablar del número cinco se tiene que relacionar con otros números para poder hablar de él. Lo mismo sucede con las funciones y las ecuaciones diferenciales, no es posible hablar de una ecuación diferencial sin mencionar que proviene de relacionar, sumar o restar las derivadas o diferenciales de una función.

Para llevar a cabo esta investigación fue necesario resaltar el origen y el contexto en que fueron dándose los conceptos que imperan en el ámbito de las ecuaciones diferenciales, el término *aequatiodifferentialis*fue primeramente usado por *Leibniz* (enforma bastante restringida) en el año de 1676, para denotar una relaciónentre las diferenciales *dx* y *dy* y dos variables *x* e *y*, este formato seconservaría hasta los tiempos de Euler (1768-1770). Es importante resaltarque las ecuaciones diferenciales ordinarias surgen prácticamente con laaparición del Calculus, en la ya célebre polémica Newton-Leibniz.Famoso es el momento en que Newton comunica (por medio de Oldenburg) aLeibniz el siguiente anagrama1:

6ª cc d ae 13e ff 7i el 9n 4º 4q rr 4s 9t 12v x, que en latín quiere decir "Data aequetionequotcunque fluentes quantitaesinvolvente fluxiones invenire et viceversa", o bien: "Dada una ecuación concantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa". Este fue eldescubrimiento fundamental de Newton que consideró necesario manteneren secreto. En lenguaje matemático actual significa: "Es útil resolverecuaciones diferenciales". Existe la afirmación por parte de historiadorescomo Ince (1926) que la fecha de aparición de estas es el 11 de noviembre de1675, cuando Leibniz escribió la ecuación $\int ydy = \frac{y^2}{2}$, aunque acepta queno resolvió una ecuación diferencial, sino que fue el nacimiento de unaherramienta muy poderosa y el momento en que apareció el signo de la integral (Grijalva, 2007).

Se revisaron los problemas que generaron la aparición de dichas ecuaciones a partir del siglo XVII (Benítez, 2008). En 1690 Jacques Bernoulli planteó el problema de encontrar la forma de la curva queadopta una cuerda flexible inextensible y colgada de dos puntos fijos, a la cualLeibniz llamó catenaria (del latín cadena). En aquel tiempo Galileo pensó queesta curva era una parábola, pero Huygens demostró que esto no era correcto. En 1694, Leibniz y Jean Bernoulli, estudiaron el problema de encontrar lafamilia de curvas que cortan con un ángulo dado a una familia de curvasdada. Bernoulli señaló que este problema es importante para determinar lastrayectorias de los rayos de luz que recorren un medio no uniforme, porquedichos rayos cortan ortogonalmente los llamados frentes de luz. Como se pudo ver estos problemas oscilaron entre los ambientes geométricos y los de la Física. Cada personaje que intervino en esta historia participó poniendo en ésta el enfoque de sus prácticas matemáticas y de sus creencias, así como la importancia que jugó el papel de sus preferencias en la producción de todos esos elementos que hoy denominamos objetos matemáticos adscritos al campo de las ecuaciones diferenciales.

Marco teórico

Para el desarrollo de la investigación se utilizó el Enfoque Ontológico-Semiótico (EOS), (Godino, 2003). Del cual tomamos las herramientas teóricas utilizadas para abordar el problema de investigación.El EOS considera dos herramientas de análisis: *Semiométrico* y *Ecológico.* En un estudio semiométrico (Contreras y Ordoñez, 2006) se requiere caracterizar aquellos problemas que se presentan a los estudiantes para generar el significado propio de las ecuaciones diferenciales; como son el tipo de representaciones, los conceptos y argumentos utilizados; el lenguaje, etc. El estudio ecológico: está centrado en lo que rodea al objeto. Para analizar, interpretar y resolver el campo de problemas de las ecuaciones diferenciales, debemos tomar en cuenta que no son un objeto aislado, requieren de conocimientos previos, de los conceptos que se ponen en juego para comprenderlas.

El Análisis Ecológico consiste en revisar las relaciones implícitas y explícitas dentro de los elementos que aparecen cuando un estudiante trata de resolver problemas. Cuáles son los significados que él pone en juego, o bien, cuáles utiliza para dar explicación a los nuevos conceptos que aparecen en dicha situación problémica; por ejemplo el caso de una expresión matemática, un signo, etc. Se considera conflicto semiótico a la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos -personas o instituciones- en interacción. Dicho conflicto es un constructo teórico que puede ser utilizado para explicar las dificultades y limitaciones en los aprendizajes y en las estrategias de enseñanza implementadas. (Godino, 2003).A continuación se presenta un gráfico que muestra un esquema de las acciones principales del análisis ontológico semiótico:

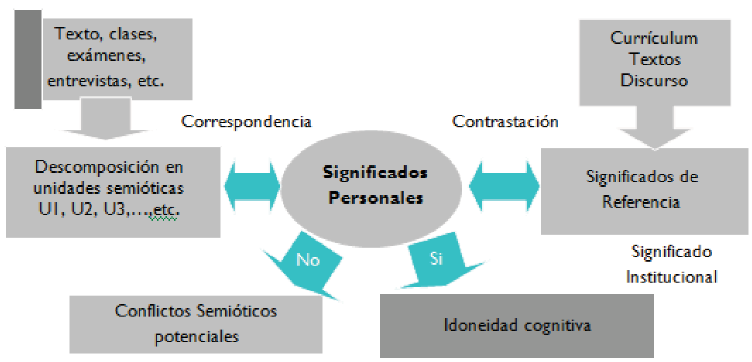


Figura 1: Análisis Ontológico-semiótico

Los elementos primarios del EOS son: El lenguaje, las situaciones-problémicas, propiedades, procedimientos, conceptos y argumentos. Los elementos anteriores, de acuerdo al rol de lenguaje con que participan pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales: Personal-institucional, Elemental-sistémico. (Godino, 2002).

El fundamento de esta teoría (EOS), que aún se encuentra en construcción, es el carácter antropológico del conocimiento, se sitúa tanto en lo cognitivo como en lo epistemológico. Muestra por una parte, la preocupación por los procesos cognitivos del sujeto desde el punto de vista de la semiótica. Además la construcción de los significados personales y la simbología puesta en juego durante el aprendizaje. Por otro lado la propuesta epistemológica, argumenta que en el estudio de las situaciones didácticas es fundamental problematizar el conocimiento matemático, no considerarlo evidente.

Método

Debido al carácter epistémico de la investigación se utilizó una metodología de corte cualitativo. Una combinación de diversas técnicas y métodos de recolección de datos (observación, encuestas, estudio de casos). Se consideraron casos de estudiantes que cursaban la materia de ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería, Campus Mexicali, dependiente de la Universidad Autónoma de Baja California, México.

Se realizó una revisión de los libros de texto más utilizados por los profesores que imparten dicha asignatura.

Se seleccionaron problemas típicos, de crecimiento y de temperatura, del texto de Ecuaciones Diferenciales de Dennis G. Zill (Pág. 96-97) y del Simmons, George F. (2002). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas. Debido a que el primero es uno de los más utilizados por los profesores que imparten este curso en la Facultad de Ingeniería y el segundo adquiere también cierta relevancia pues contiene una buena cantidad de reseñas históricas de interés para motivar el estudio de los temas a partir de cómo los va desarrollando el autor. Para el análisis de los problemas, cada uno de ellos, se ha dividido en unidades, que están relacionadas en función de los elementos primarios del EOS. Tales como:

El lenguaje, se revisó el lenguaje utilizado en el texto para ver de qué tipos son las notaciones que aparecen, si contiene expresiones representadas en forma de gráficos o numérico. *Las situaciones*, en esta parte se revisan como son presentados o abordados los ejemplos de problemas en el texto. *Las acciones o procedimientos*, que hace el autor del texto para resolver ejemplos tipo. *Los argumentos y los conceptos* involucrados. *Las proposiciones* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones. (Godino, 2007). Cada una de las unidades se analiza caracterizando los significados elementales y sistémicos puestos en juego en cada bloque (análisis semiótico).

Se recurrió también al diseño de un cuestionario (pre-test y post-test), para indagar el estado de los conocimientos previos en un grupo de 30 estudiantes inscritos en un curso de Ecuaciones Diferenciales, dentro del programa de Tronco Común en licenciatura que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California (México).El cuestionario se dividió en tres secciones; la primera, denominada la sección A, contiene cinco reactivos abiertos, sobre las características, propiedades y desarrollo de las funciones *logarítmicas y exponenciales*. La siguiente, es la sección B, y está compuesta por cinco reactivos abiertos sobre *diferenciación,* la tercera, la sección C, la forman cuatro ejercicios de tipo rutinario y representativo de la aplicación de métodos y técnicas de *integración*.

Análisis

Para analizar las respuestas dadas en el cuestionario, cada enunciado fue clasificado en unidades de análisis relacionadas con los elementos primarios del EOS: *El lenguaje*, se revisó el lenguaje utilizado por los estudiantes, si se introducen notaciones y de qué tipo, gráfico, numérico, etc.

Las acciones o procedimientos que utiliza el estudiante para resolver los ejercicios planteados. *Los argumentos y los conceptos* involucrados. *Las proposiciones* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones. (Godino, 2006). Cada una de las unidades se analiza caracterizando los significados elementales y sistémicos puestos en juego en cada bloque (análisis semiótico).

Normalmente se espera que aquellos estudiantes que obtienen los mejores resultados en un examen diagnóstico, sean también los que obtengan los mejores resultados en el curso. El análisis de los cuestionarios nos permitió seleccionar a los estudiantes que obtuvieron algunos resultados más representativos para la presente investigación. Se analizaron tanto sus aciertos como sus desaciertos. Finalmente se seleccionaron nueve estudiantes considerados en función de su desempeño. A estos estudiantes se les solicito resolvieran 2 problemas del tipo de Crecimiento, la siguiente Tabla muestra la comparación entre los conocimientos previos de dichos estudiantes y su desenvolvimiento en la resolución de dichos problemas, en donde podemos observar las siguientes situaciones:

Los estudiantes 1 y 5 obtuvieron un avance significativo entre la aplicación de los dos cuestionarios, no les va muy bien a la hora de resolver problemas, pero son exitosos con el curso al final. Los estudiantes 8 y 12, son aquellos que mostraron solidez y buenos resultados en ambas aplicaciones del cuestionario, resuelven problemas y son bastante exitosos en el curso en general. Los demás estudiantes seleccionados no muestran un avance consistente ni significativo entre una aplicación y otra. Con excepción del alumno 22, ninguno resuelve los problemas, pero al finalizar el curso solo dos de ellos no logran aprobar.

Los resultados obtenidos por estos últimos estudiantes, salen de los parámetros esperados, lo cual nos permiten visualizar otro tipo de situaciones que ameritan un estudio amplio sobre estos casos.

Alumno	Sección A		Sección B		Sección C		¿Resuelve Problemas?	Calificación 1er. Parcial[1]	Calificación del curso[2]
1	0	4	4	5	1	4	Resuelve con errores	58	66
5	1	4	3	5	1	4	Solo plantea el problema	80	88
8	5	6	6	6	6	6	Resuelve bien el problema	100	98
12	5	5	5	6	6	6	Resuelve bien el problema	100	85
13	0	4	1	5	2	2	Hace intentos no lo resuelve	23	66
19	0	3	2	6	1	0	Hace intentos no lo resuelve	45	59
20	1	2	2	5	3	3	Solo plantea el problema	20	52
22	0	2	3	5	3	3	Resuelve bien el problema	45	68
31	0	0	2	3	2	3	Ni siquiera intenta	20	60
Nota[1]. Examen primera unidad contiene problemas para resolver con antiderivadas									
Nota[2]. El mínimo aprobatorio es de 60									

Tabla 1: Comparación entre conocimientos previos y resolución de problemas

Es importante hacer notar lo que se observó al revisar las acciones realizadas por los estudiantes al momento de resolver problemas, como ejemplo citaremos el que seles aplico referente al *Crecimiento Bacteriano.* El enunciado dice lo siguiente**:**

Un cultivo tiene una cantidad inicial P_0 de bacterias. Cuando t=1 h. la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$, si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presentes P(t) en el momento t, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de micro organismos.

Por la forma de conducirse y los razonamientos y cuestionamientos dados por los estudiantes pudimos percatarnos que aunque parece obvio y sencillo dicho problema, no lo es. Algunos estudiantes no pudieron interpretar que era exactamente lo que les pedía el problema. Algunos otros dudaban de su interpretación sobre el significado del enunciado "directamente proporcional a la población existente", esto nos hace pensar que aunque pudieron resolver problemas de este tipo en otros contextos, como es el algebraico, no les es fácil cambiarse al contexto de los objetos variables. Otros tuvieron dificultad para interpretar los datos del problema, al parecer no les decía nada que la cantidad inicial era P_0 bacterias…otros menos lograban avanzar en la resolución del problema pero a la hora de cuestionarlos sobre el comportamiento de la función encontrada, no podían describir en forma verbal, las características de dicha función.

Conclusiones

De los resultados obtenidos en esta investigación, se percibe que el análisis semiótico o de significados es un recurso de utilidad para la investigación en el ámbito de la didáctica de las matemáticas. Que el revisar la ecología de significados existentes alrededor de un concepto, nos puede ayudar a descubrir como los estudiantes se enfrentan a una cantidad de conceptos, llámense conocimientos previos, que no son tan sencillos de relacionar. Este tipo de análisis fino de corte semiótico, permite identificar significados puestos en juego en una actividad o bien en la resolución de problemas, tales como el uso de términos y expresiones; lo cual nos arroja luz sobre los conflictos y permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones que se presentan en los libros de texto. Estos conflictos semióticos pueden dar explicación, al menos parcialmente, de las dificultades potenciales de los estudiantes. La información obtenida permite también identificar las limitaciones de los recursos materiales utilizados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y nos puede motivar a buscar otras formas de abordar dichos temas.

Referencias bibliográficas

Benítez, J. (2008). El Pensamiento Matemático: de la antigüedad a nuestros días. *Alianza Universidad.* Universidad Politécnica de Valencia, España.

Contreras, A. y Ordoñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9* (1), 65-84.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. R*echerchesen Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3), 237-284.

Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Recuperado de: http//www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J.D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to researh in mathematics education.ZDM. *The international Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135. Recuperado de: http//www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J.D., Font, V. y Wilhelmi, M.R., (2006). Análisis Ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial,* 131-155.

Grijalva, A. (2007). *El Papel del Contexto en la Asignación de Significados a los Objetos Matemáticos. El Caso de la Integral de una Función.* (Tesis inédita de doctorado), Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Ince, E. (1926). *Ordinary Differential Equations.* New York: Dover.

Simmons, George F. (2002). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*. México: Editorial Mc. Graw Hill.

Zill, Dennis G. (2003). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones al Modelado*. México: Editorial Thomson.

UN PROGRAMA DE MODELACIÓN PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA: LA ESCUELA, EL TRABAJO Y LA CIUDAD

Francisco Cordero, Ruth Rodríguez, Miguel Solís
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados México
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey
Universidad Autónoma de Chiapas
fcordero@cinvestav.mx, ruthrdz@itesm.mx, solis@unach.mx

Resumen. Se presenta un programa de modelación con diversas aproximaciones teóricas, en el ámbito educativo de la matemática. El programa se genera en el seno del Grupo de Investigación latinoamericano denominado Modelación y Tecnología (MyT). Este grupo nace en el año 2008 con la intención de conformar una red de investigadores latinoamericanos interesados en estudiar problemáticas alrededor de la modelación desde diversas visiones teóricas. En esta ocasión discutimos el programa a la luz de dos trabajos de investigación, en regiones diferentes, para mostrar la pluralidad de las conceptualizaciones de la modelación que se pusieron en juego.

Palabras clave: modelación, tecnología, prácticas, ecuaciones diferenciales

Abstract. We present a modeling program with various theoretical approaches in the field of mathematics education. The program is generated within the Latin American Research Group called Modeling and Technology (MyT). This group was founded in 2008 with the intention of forming a network of Latin American researchers interested in studying issues around modeling from various theoretical views. The modeling research program was discussed in the light of two research papers in different regions, to show the plurality of conceptualizations of modeling that were put into play.

Key words modelling, technology, practices, differential equations

Introducción

El Grupo Modelación y Tecnología (GMyT) se conformó en el año 2008, en el marco de la Reunión de Matemática Educativa 22 (RELME 22). Los miembros que lo componen son investigadores, docentes y estudiantes de posgrado, principalmente de México y de Chile (Cordero, Suárez, Mena, Arrieta, Rodríguez, Romo, Cârsteanu y Solís, 2009). Los acercamientos al tema son diversos: la mayoría se desarrollan desde la Matemática Educativa, sin embargo algunos otros integrantes son modeladores matemáticos en la biología y en la física. Este hecho le da un carácter multidisciplinar al grupo MyT.

Esta multidisciplinaridad es una condición que ha favorecido la conformación del grupo MyT y ha permitido avanzar a la formulación de un "programa de modelación" (Cordero, 2011), en el sentido de Lakatos, el cual consiste en establecer un programa núcleo para que éste genere una secuencia de programas de investigación proveyendo de constructos en el seno de la comunidad de científicos. El programa en este caso particular reflejaría la problemática que atiende el grupo. Se pretende identificar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones cuando suceden en comunidades de conocimiento (CC) en la escuela, en el trabajo y en la ciudad. Se problematiza la relación entre los diferentes dominios de conocimiento que obligadamente entran en juego: el discurso matemático escolar, otras disciplinas científicas y el cotidiano del ciudadano. El análisis mismo de la relación destaca dos aspectos: el estatus epistemológico de la funcionalidad del conocimiento en una situación específica y la manifestación de ese conocimiento con una intencionalidad no necesariamente científica: el cotidiano (Cordero, Mena y Montalto, 2010). Se pretende que dentro de los resultados del estudio en curso (Cordero, 2012) se brinden ampliaciones de los episodios de aprendizaje, donde se reconceptualice al estudiante en el aula como el ciudadano en su cotidiano como un referente educativo de la matemática.

Para tal fin, se concibe una problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde la construcción social del conocimiento matemático, lo cual provee categorías que manifiestan la función del conocimiento matemático. Esta perspectiva ha permitido entender que las formulaciones educativas se orientan a lo que sabe un estudiante con respecto al conocimiento matemático pero no así a cómo lo usa. Las epistemologías de prácticas, de usos y de funciones son soslayadas, no son el referente educativo de la matemática. Las usanzas del conocimiento matemático no son aisladas, sino por el contrario tienen tradición, pertenecen a la cultura y a la historia de ciertas comunidades de conocimiento. En algún sentido, son la expresión de una humanización del conocimiento en cuestión.

Un referente así, obliga a ampliar la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conlleva reflexionar sobre los significados de la problemática misma y sobre las pautas para que estas construcciones intervengan y afecten a los sistemas educativos.

Se pretende entonces el conocer los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento. El estatus epistemológico de la funcionalidad y la intencionalidad no necesariamente científica, son aspectos que conformarán una categoría de conocimiento matemático *C*(CM), expresada en los usos de ese conocimiento, los cuales se desarrollarán a través de sus resignificaciones cuando las comunidades de conocimiento alternan situaciones específicas. La *C*(CM) será el núcleo para brindar ampliaciones de los episodios de aprendizaje, donde obligadamente el "estudiante en el aula" será reconceptualizado en el "ciudadano en su cotidiano".

La contribución teórica de la propuesta consiste, para identificar los usos del conocimiento matemático, en generar un modelo de "Comunidad del Conocimiento" (CC) consistente con la Teoría Socioepistemológica. Este modelo se compone de una triada que caracteriza los usos del conocimiento de una comunidad ante una situación específica: reciprocidad, intimidad y localidad. Estos elementos son simultáneamente analizados en dos grandes ejes: la institucionalización del conocimiento y la identidad de la comunidad.

La Comunidad del Conocimiento (CC) es el constructo principal de un proyecto que está en curso el cual conduce a modificar el aula. Lo que sucede en el aula es finalmente una CC en una situación específica. Es la que resignifica el conocimiento en la alternancia de dominios: la escuela, el trabajo y la ciudad. Todo ello compondrá un marco de referencia para ofrecer los cambios educativos de la matemática acorde con las realidades sociales (Cordero, 2012).

Así los programas de modelación secuenciales son los siguientes:

- el uso del conocimiento matemático en el mantenimiento de rutinas y en la socialización (Zaldívar y Cordero, 2010 y Gómez y Cordero, 2010);
- en las prácticas institucionales (Cen y Cordero, 2010);
- en la integración de la tecnología escolar (Briceño y Cordero, 2010) y
- el desarrollo de redes de usos del conocimiento matemático (Méndez y Cordero, 2009);
- la matemática en el aula (Rodríguez, 2010); y
- la matemática desde la CC de la ingeniería (Solís, 2009; Morales y Cordero, 2009; Rodríguez, 2010; Mendoza y Cordero, 2011).

A continuación se presentan dos estudios que ejemplifican los programas secuenciales de la modelación desde el aula escolar con el trabajo de Rodríguez (2007, 2010, 2011 y 2012) y desde la CC de la ingeniería con el trabajo de Solís (2009).

La modelación matemática desde la comunidad de ingenieros: modelación de comportamientos gráficos como una base para significar las ecuaciones diferenciales lineales

Este estudio aborda a la modelación como práctica que construye conocimiento matemático (Solís, Hernández, Muñoz, Poirier, Ordóñez y Pérez, 2009). Hernández y Solís (2009) proponen un diseño de una secuencia didáctica que tiene como objetivo la identificación de patrones gráficos de la suma de polinomios (uno de grado n con otro de grado $n - 1$) que permitirían resignificar a las ecuaciones diferenciales. De este trabajo con profesores y estudiantes en diferentes escenarios, se ha encontrado un argumento gráfico, al que se ha denominado "Comportamiento Tendencial de las Funciones" (CTF). El CTF es una noción sui generis del carácter funcional del conocimiento matemático cuya construcción está con relación en la modelación y el uso de las herramientas matemáticas, permitiendo formular categorías del conocimiento matemático que a priori no se encuentran dentro de la estructura matemática (Cordero, 2001). Éste permite reconstruir significados en el sentido de la socioepistemología. La investigación tiene el objetivo de resignificar las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma $ay' + by = F(x)$ a través de situaciones gráficas de transformación (Solís, 2009).

En la estructura $Y(x) = Af(ax + b) + B$ la variación de los parámetros *A*, *a*, *B* y *b* definirá los comportamientos gráficos. La función *Y*(*x*) es ahora una instrucción que organiza comportamientos. Esta argumentación estará ahora instalada en las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

El diseño de la secuencia didáctica favorece la noción de CTF en la suma de una función y su derivada. La secuencia consta de varios momentos, en el primero, los estudiantes trabajan con operaciones gráficas sobre funciones (translaciones y dilataciones), a través de la variación de los parámetros *A*, *a*, *B* y *b* en la estructura $Y(x) = Af(ax + b) + B$, a partir de una función prototipo $f(x)$ dada, en este caso un polinomio. En un segundo momento se trabaja con la suma de funciones (polinomios en este caso) y son cuestionados a identificar los patrones gráficos de la función suma a partir de las funciones sumandos. En el tercero se presenta el problema de sumar una función y su derivada, transladando los observados en el momento anterior, y es entonces que se discute la estructura $ay' + by = F(x)$ que puede verse ahora como la suma de las funciones $ay'(x)$ y $by(x)$, que guardan relación entre sí, pues una es la derivada de la otra. La actividad típica en ese momento es:

En cada caso encuentra una expresión para $y(x)$ *que satisfaga la ecuación:*

a) $y'(x) + y(x) = 0$

b) $y'(x) + y(x) = 1$

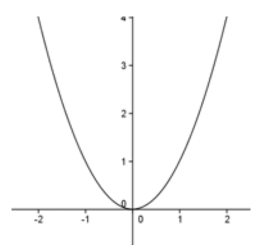
c) $y'(x) + y(x) = x$

d) $y'(x) + y(x) = x^2$

y también gráficamente:

Bosqueja las gráficas de los sumandos, sabiendo que uno de los sumandos es la derivada del otro, esto es $y'(x) + y(x)$

y'(*x*) + *y*(*x*) =



Entre las conclusiones del estudio, Solís (2009) afirma que los nuevos dispositivos permiten el acceso libre a aplicaciones informáticas de matemáticas, y dado que esa disponibilidad de recursos es cada día más grande se deberá trastocar la práctica educativa de la enseñanza de la matemática.

La modelación matemática desde el aula: la enseñanza y aprendizaje de ecuaciones diferenciales a través de la modelación y el uso de tecnología en ambientes centrados en el estudiante

A partir de los trabajos de Rodríguez (2007 y 2010) se explora a la modelación matemática como un medio que permite enlazar situaciones de la vida real con situaciones matemáticas escolares con lo cual se pretende obtener una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. En particular se pretende analizar la implementación de situaciones diseñadas en base a la modelación matemática en un curso de Ecuaciones Diferenciales (ED) dirigido a estudiantes de ingeniería.

El estudio de la modelación no es un tema nuevo en la comunidad de Matemática Educativa, tiene alrededor de 35 años. De acuerdo a Kaiser y Sriraman (2006) se pueden identificar hasta seis perspectivas diferentes desde las cuales puede ser vista la modelación matemática en el ámbito educativo. El trabajo de Rodríguez (2007 y 2010) parte de una perspectiva realística o aplicada puesto que enfatiza la importancia de la enseñanza a través de la modelación matemática como un medio pragmático para resolver problemas reales en el aula y desarrollar eventualmente competencias de modelación en la persona que aprende (Rodríguez y Quiroz, 2012).

Existen diversos autores que buscan definir a la modelación matemática, siendo una de las definiciones más completas la que exponen Blum y Niss (1990) quienes explican que la modelación matemática es un proceso en el cual se transita a partir de un problema planteado desde una situación real hasta un modelo matemático reconociendo en este último diversos registros de representación (analítico, numérico y gráfico). Aunque se tienen diversas definiciones del proceso de modelación, en este estudio se ha elegido la descripción de Rodríguez (2007) la cual es representada de manera gráfica en la figura 1:

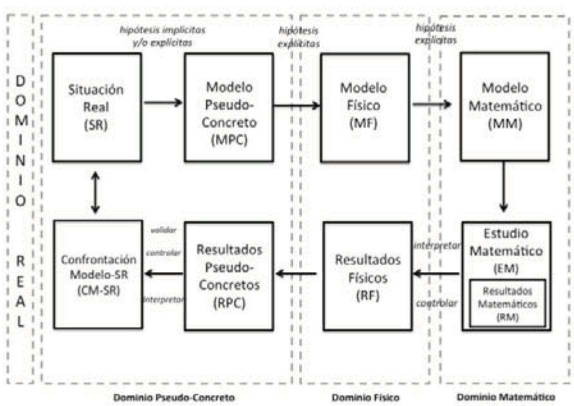


Figura 1.- Ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010)

Es importante enfatizar que este proceso ha sido definido en base a diversos autores (ver detalle en Rodríguez, 2007) pero en particular esta propuesta incorpora de manera explícita dos elementos importantes a señalar: la inclusión de un dominio físico en el cual se modela (puede ser un dominio extra-matemático biológico, químico u otro) y la importancia del dominio pseudo-concreto como esa transición difícil para los estudiantes y clave en el proceso de modelación (basado en el modelo pseudo-concreto de Henry, 2001 citado en Rodríguez 2007 y 2010; este es a su vez análogo al modelo real o *real model* introducido por los trabajos anglosajones sobre modelación).

Se pretende que, en base a esta descripción de modelación, el identificar las dificultades de los alumnos al modelar contextos de mezclas de sustancias salinas en tanques de agua (Rodríguez e Illanes, 2011) así como el identificar las competencias de modelación a propósito del aprendizaje de uso de ED para modelar circuitos eléctricos RC, RL y RLC a propósito del tema de ED lineal (Rodríguez y Quiroz, 2012). Los resultados de estos trabajos permiten dar evidencias del desarrollo de competencias de modelación. Esta experiencia permite evidenciar que el diseño de actividades e implementación en base a la modelación permite dotar al objeto matemático ED de significados varios que un ambiente sin esta estrategia didáctica difícilmente podrían poner en juego.

Estudios más recientes sobre esta línea de trabajo han llevado a reflexionar en el papel de la tecnología en la enseñanza de las ED (Rodríguez e Illanes, 2011 y Rodríguez y Quiroz, 2012). En particular, y aunado a los hallazgos de Solís (2009), actualmente se deja ver el gran potencial de uso de tecnología en clase gracias a la riqueza de los diversos ambientes de aprendizaje que permitirán eventualmente modelar situaciones en contextos reales en el aula a través de las ED.

Los trabajos anteriormente presentados en este rubro ponen en evidencia la importancia de la enseñanza de las ED y de las Matemáticas a través de la modelación, sobre todo el trabajo previo del diseño de las actividades con base en las etapas del proceso previamente definidas y la importancia de llevar a los alumnos a transitar entre las diversas etapas y momentos claves de la modelación. Las diversos estudios hasta ahora realizados han permitido caracterizar las diversas competencias (matemáticas, extra-matemáticas o disciplinares, colaborativas y de discusión así como tecnológicas) que el alumno debe o puede desarrollar cuando se pretende estudiar las competencias de modelación. Además hemos podido reconocer que parte de la dificultad de implementar actividades de modelación en clase radica en el hecho de poner en juego todas esas competencias relacionadas a las de modelación pero al mismo tiempo esto evidencia la gran riqueza que genera el implementar en clase situaciones que permitan a los alumnos el modelar situaciones a través de las ED.

A manera de conclusión. Se formuló un programa núcleo de modelación y, como ejemplo, dos programas secuenciales. Debido a la riqueza de perfiles e intereses de los miembros del grupo, se espera organizar y sistematizar la gran gama de posibilidades de llevar al aula actividades de modelación. Sin embargo, el planteamiento anterior, por un lado muestra la manera en que es estudiada la modelación en el seno del Grupo de Investigación MyT, y por el otro lado muestra la conceptualización de la diversidad de perspectivas como una secuencia de programas de investigación, situación que ha permitido avanzar en la solidez de la investigación y en la conformación de una red latinoamericana plural.

Referencias bibliográficas

Blum, W., & Niss, M. (1990). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68.

Briseño, E. y Cordero, F. (2010) Desarrollo del pensamiento variacional con el uso tecnológico en un ambiente de difusión del conocimiento. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 1003-1012. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cen, C. y Cordero, F. (2010). El uso de las graficas en el bachillerato. Una segmentación del conocimiento matemático. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 869-878. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4*(2), 103-128.

Cordero, F. (2011). La modelación y la graficación en la matemática escolar. En L. M. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta y A. R. Hernández (Coords.). *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación. (Re)pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (pp. 377 – 399). Barcelona-México: Gedisa-Cinvestav.

Cordero, F. (2012). *Las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemático: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad.* Propuesta de Proyecto CONACyT Ciencia Básica 2012. Clave 0177368.

Cordero, F., Suárez, L., Mena, J., Arrieta, J., Rodríguez, R., Romo, A., Cârsteanu, A., y Solís, M. (2009). La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1717-1725. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F., Mena, J. y Montalto, M. (2010). *Il ruolo della giustificazione funzionale in una situazione di risignificazione dell`asintoto. l´insegnamento della Matematica*, *33B*(4), 457-488.

Gómez, K. y Cordero, F. (2010) Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 919-927.

Hernández, P. y Solís, M. (2009). El comportamiento gráfico de la suma de funciones como argumento para resignificar las Ecuaciones Diferenciales. *Resúmenes de la Vigésima Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Santo Domingo, República Dominicana, Editora Universitaria-UASD.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM 38*(3), 302–310. doi:10.1007/BF02652813

Méndez, M. y Cordero, F. (2009). La función de la modelación en la resignificación de conocimiento matemático. Memorias de la *XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa,*(pp. 194-209). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Morales, A., y Cordero, F. (2009). La Modelación-Graficación y la Serie de Taylor en la Socioepistemología del Cálculo. *VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 1043-1048). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Puerto Montt – Chile.

Mendoza, J. y Cordero, (2011). El uso de las ecuaciones diferenciales y la ingeniería como comunidad. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 77-84. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d ' élèves en Terminale S. Sciences-New York*. Joseph Fourier Grenoble I. Recuperado el 30 de septiembre de 2012 de: http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/29/22/86/PDF/TheseRuthRdz.pdf

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*(4-1), 191–210.

Rodríguez, R. e Illanes, L. (2011). Modelación de Problemas de mezclas en un curso de Ecuaciones Diferenciales. *Memorias de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa,(pp. 318-325)*. México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Rodríguez, R., y Quiroz, S. (2012). Modelación y tecnología en ecuacionesdiferenciales. *Memorias del VI Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*. Monterrey: Asociación Nacional de Investigadores en el uso de la tecnología en educación matemática.

Solís, M. (2009). El comportamiento tendencial de las funciones en la resignificación de las ecuaciones diferenciales lineales: la relación entre predicción y simulación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 779-787. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Solís, M., Hernández, H., Muñoz, G., Poirier, P., Ordóñez, A. y Pérez, A. (2009). Situaciones de modelación para resignificar el conocimiento matemático en ingeniería. *Resúmenes de la Vigésima Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.421-421). Santo Domingo, República Dominicana, Editora Universitaria-UASD.

Zaldívar, J. y Cordero, F. (2010) Los usos de las gráficas en la resignificación de lo estable en un escenario de difusión de la ciencia. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23,* 929-938. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

ALGUNAS HERRAMIENTAS TEÓRICO-METODOLOGICAS DE LA APROXIMACION SOCIOEPISTEMOLÓGICA PARA LA INVESTIGACION EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Luz María Mingüer Allec
Instituto Tecnológico de Oaxaca México
Luzma16@hotmail.com

Resumen. El objetivo de este escrito es mostrar algunas herramientas teórico- metodológicas de la aproximación Socioepistemológica para la investigación en matemática educativa, propuestas en la tesis doctoral de R. Cantoral, "Un estudio de la formación social de la analiticidad". Dichas herramientas definen un paradigma de investigación que posibilita abordar objetos de estudio que no aparecen de manera explícita en los escenarios que forman las diferentes problemáticas de investigación en Matemática Educativa, estableciendo un método de acercamiento a tales problemáticas en el que se estudian fenómenos de construcción de conocimiento matemático. Este método contempla un conjunto de herramienta que permiten analizar de forma introspectiva e integral cualquier evento que lleve implícita la construcción de conocimiento matemático.

Palabras clave: aproximación socioepistemológica, analiticidad, praediciere, fenomenología

Abstract. This paper's main objective is to show some theoretical and methodological tools of socioepistemological approach for research in mathematics education, proposed in the thesis of R. Cantoral, entitled "A study of the social formation of analyticity". These tools define a research paradigm that allows objects of study address that do not appear explicitly in the scenarios that form the various problems of research in mathematics education, providing a method of approach to such problems in which phenomena are studied construction mathematical knowledge. This research method used provides a set of tools that allow the analysis of introspectively and integral carrying any event implied the construction of mathematical knowledge

Key words: socioepistemological approach, analyticity, praediciere, phenomenology

Introducción

La aproximación socioepistemológica, se caracteriza por definir, en el centro de su estructura, a una corriente de pensamiento que otorga importancia preponderante a la relación que se establece entre la construcción de conocimiento matemático y las influencias socioculturales vigentes en los espacios y momentos en los que se realiza tal construcción.

La tesis doctoral de R. Cantoral, *Un estudio de la formación social de la analiticidad*, es considerada como el fundamento de la corriente de pensamiento que ahora se conoce como aproximación socioepistemológica, motivo por el cual creemos que todo intento por abordar dicho acercamiento teórico debe partir del análisis de las investigaciones doctorales iniciadas por Cantoral.

La naturaleza de las investigaciones plasmadas en dicha tesis definen un paradigma de investigación que posibilita abordar objetos de estudio que no aparecen de manera explícita en los escenarios que forman las diferentes problemáticas de investigación en Matemática Educativa, estableciendo un método de acercamiento a tales problemáticas en el que se estudian fenómenos de construcción de conocimiento matemático. Para nosotros este método de investigación empleado por Cantoral representa la herramienta ideal que permite analizar de forma introspectiva e integral cualquier evento que lleve implícita la construcción de conocimiento matemático.

En las investigaciones abordadas por Cantoral se recurre al análisis minucioso de los contextos socioculturales vigentes en los momentos históricos cuando se ha construido conocimiento matemático, estableciendo un conjunto de herramientas que posibilitan el acercamiento a estos fenómenos de construcción, como pueden ser: categorías, métodos y técnicas, que permiten problematizar y organizar aquellos elementos de orden sociocultural y científico, existentes en el momento en el que se construye conocimiento matemático.

En este escrito realizaremos un breve análisis de la tesis mencionada, enfatizando las partes en las que se definen las principales herramientas metodológicas propuestas por el autor.

Análisis de la tesis doctoral: *Un estudio de la formación social de la analiticidad*

Con el objeto de profundizar en el significado de las categorías, métodos y herramientas que Cantoral emplea en sus investigaciones doctorales, realizamos un análisis de su tesis, *Un estudio de la formación social de la analiticidad,* cuyo tratamiento según el autor, tiene fundamento en «una práctica» referida a cierto programa de formación y actualización de profesores de matemáticas del nivel superior de educación, diseñado y sostenido por el equipo de investigación en matemática educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN); y en «una mística», «la sólida creencia en la posibilidad de la construcción de conceptos y procesos matemáticos a la luz de los ámbitos en los que adquirieron progresivamente significación propia, así como de aquellos otros contextos en los que hoy se significan nuevamente». La mística se sustenta en la manera como el pensamiento físico propicia la construcción de conceptos y procesos matemáticos. «Aludimos exclusivamente a la matemática de la variación y el cambio: "el calculus"; y a su expresión didáctica en la currícula de escuelas de ingeniería y ciencias físico matemáticas».

En dicha tesis se plantea como problema de investigación el análisis de «los procesos de construcción del conocimiento matemático cuando estos se orientan vía el pensamiento físico; especialmente por aquel que se nutre de las peculiaridades de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza». El autor explica: «para ello requerimos de entender los mecanismos funcionales que operan la relación dialéctica entre las nociones de «predicción» propia de las ciencias físicas y de la ingeniería y de lo «analítico», peculiar de las matemáticas».

Para enfrentar la problemática propuesta, el autor sugiere realizar una serie de tareas entre las que destacan el análisis de producciones intelectuales de los científicos de los siglos XVII y XVIII y de los matemáticos de los siglos XIX y XX, así como de los «participantes del proceso educativo y científico contemporáneo»; plantea también, como otro punto de interés, el análisis del fenómeno de la «transposición didáctica», implícito en la naturaleza de lo que Cantoral denomina una «didáctica normal» del Cálculo y que se traduce en una versión «diluida» del análisis matemático. Presentamos dos de las principales tareas de la lista que Cantoral propone para esclarecer la problemática propuesta.

1. «Análisis de construcciones originales de conocimiento matemático en ámbitos físicos de fenómenos de flujo»: a través del análisis minucioso de memorias, textos y tratados de los siglos XVII, XVIII, XIX y XX, Cantoral persigue el objetivo de identificar estrategias formales e informales que propiciaron la construcción de conocimiento matemático, teniendo como marco o contexto, el pensamiento físico que hace referencia a fenómenos de flujo. Este análisis busca establecer de qué manera el pensamiento físico, que se nutre de los fenómenos de flujo, contribuye a la construcción de pensamiento matemático.

   Con este marco, el autor realiza un estudio exhaustivo basado en el análisis epistemológico del cálculo y de la serie de Taylor. La principal característica de este «tipo de estudio» es la manera de ir relacionando los hechos epistemológicos con las circunstancias imperantes en el momento histórico en que se lleva a cabo la construcción de los conceptos matemáticos en cuestión, al hacerse preguntas sistemáticamente acerca de «porqué se piensa de esta manera», en relación con la dirección, significado y sentido del pensamiento de los científicos y matemáticos de la época. Este tipo de estudio va definiendo «algo» que llamaremos tentativamente un «método», el cual, en un primer tiempo, permite «detectar», para después, identificar y rastrear la conformación de una noción que es la que transmite un impulso vital y que hace evolucionar al pensamiento matemático a través del tiempo, revelando que al contrario de lo que se piensa, el surgimiento del Cálculo no está asociado a: procesos infinitos, al arribo del concepto de límite, ni al desarrollo del infinitesimal como noción de uso y de fundamentación, o a la aparición del concepto de función, entre otros más, sino a la existencia de una noción que guió y estructuró al proceso de construcción del pensamiento matemático avanzado a lo largo de tres siglos: «*El Praediciere*». A este respecto el autor comenta: «Es importante mencionar que este estudio se refiere por un lado, a fenómenos de la física, específicamente la mecánica de cuerpos celestes, terrestres, partículas o medios continuos; y por otro, a una parte de la matemática conocida ampliamente como el

"Calculus", sin perder de vista que en el trasfondo del desarrollo de esta última se encuentra *El Praediciere* como idea germinal».

El procedimiento empleado hasta aquí por Cantoral señala una manera de intuir para, más tarde, descubrir la presencia de una idea o noción cuya existencia no se manifiesta de manera explícita, sino que hay que emprender un análisis y una búsqueda avanzada de las influencias socioculturales –que definen las ideas científicas– las cuales predominan en un momento histórico específico y que determinan las condiciones y orientación que el pensamiento científico de la época llega a tener.

A este respecto Cantoral expone que, así como el Praediciere guía el pensamiento físico a lo largo de la historia, de modo similar «lo analítico» está detrás, orientando el desarrollo del pensamiento matemático. De nuevo, de acuerdo con este principio metodológico, Cantoral llega a descubrir la existencia de otra noción clave en el proceso de evolución del pensamiento matemático, es decir, a través del análisis profundo de los marcos contextuales, no sólo científicos, sino también socioculturales.

Al continuar con el análisis de la tesis doctoral de R. Cantoral, encontramos que el estudio epistemológico de la serie de Taylor nos permite la estratificación de las imágenes conceptuales de dicha serie; esto es posible luego de una cuidadosa selección de 8 modelos que, según nuestro autor, representan esquemas paradigmáticos, los cuales son: el modelo de regularidad binomial, el modelo de variable variación, el modelo de predicción paramétrica, el modelo de evolución paramétrica, el modelo de aproximación polinomial, el modelo de metamorfosis funcional, el modelo de generalización inductiva, y el modelo de analiticidad compleja.

El autor, como lo explica en su tesis, llega a esclarecer el significado de la noción de «lo analítico», a través de un análisis interpretativo de tres tipos de referencias documentales para llegar a conformar las imágenes conceptuales de la noción de la serie de Taylor: tratados usuales que contienen discusiones históricas y epistemológicas; unos cuantos textos antiguos de reconocida influencia educativa (fines del siglo XVII principios del XX), y escritos originales de producciones intelectuales de los científicos de los siglos XVII y XVIII y de los matemáticos de los siglos XIX y XX.

La razón por la que el autor se decidió a abordar el tema de la construcción de las imágenes conceptuales de la Serie de Taylor o de «lo analítico», se apoya en la constatación de una presencia repetida como idea generadora, entre un número importante de construcciones conceptuales en los inicios de la física matemática.

Ir a la búsqueda de las imágenes conceptuales que una noción matemática suscita en la mente de los matemáticos de otra época, implica profundizar en un análisis de documentos escritos y en una aguda reflexión acerca de los antecedentes, referencias teóricas y circunstancias activadoras, provenientes del contexto histórico sociocultural del momento, es decir, una forma de percibir y de aproximarse a los fenómenos de construcción de conocimiento matemático, cuyo eje rector es el contexto sociocultural imperante; se trata del mismo aparato teórico y metodológico que permitió la identificación de el Praediciere.

En esta nueva forma de «mirar la historia» de los conceptos, las preguntas que se hacen a la epistemología de las nociones matemáticas son: ¿cómo se llega a pensar de esta manera?, ¿qué influencias externas educativas, políticas, filosóficas, científicas guían el pensamiento científico de esa época? De tal forma que las respuestas vienen a enriquecer la visión del concepto mismo y arrojan luz acerca de los factores que impulsaron o no estimularon los procesos de construcción de conocimiento matemático.

Es claro que la evolución del pensamiento matemático en la historia, obedece a fuerzas provenientes de circunstancias y necesidades del mundo científico y del mundo social, que se sustentan en ideologías, que han influido de modo fuerte en la orientación precisa de las ideas matemáticas.

Hay que señalarlo, en este punto del análisis de la tesis doctoral de R. Cantoral, aquello que llamamos tentativamente "un método", se va definiendo como un aparato complejo y multifacético que envuelve a todo el estudio y a cada una de sus partes medulares.

2. La segunda tarea es un análisis de acercamientos didácticos ambientales (textos originales o textos claves) en los que tuvieron efecto las construcciones originales citadas en el punto anterior.

   En este segundo aspecto de la lista de tareas propuestas por Cantoral, para enfrentar su problemática, expone que persigue como primer objetivo «reconocer el grado de permeabilidad de las construcciones originales en la didáctica de entonces y recíprocamente el nivel de influencia de ésta sobre las estrategias que favorecen la construcción de conocimientos matemáticos».

   Para llegar a reconstruir el discurso matemático escolar, Cantoral estructura, a través de su propio paradigma, una metodología que gira alrededor de cinco elementos estratégicos, conceptos claves, que definen las herramientas por excelencia de la «aproximación socioepistemológica», los cuales son: la génesis histórica, la didáctica de antaño, la fenomenología intrínseca, los constructos característicos, la reconstrucción de los significados asociados y la praxis educativa.

Estos puntos clave -detectados por el autor con antelación –, constituyen puntos centrales de la teoría de la Matemática Educativa sustentada en la práctica docente. A este respecto, Cantoral señala: «El campo conceptual que enmarca nuestro estudio, se nutre de la reflexión y sistematización de las experiencias que nos provee la práctica cotidiana en la formación y actualización de profesores de matemáticas».

Las herramientas mencionadas constituyen diferentes acercamientos al estudio de los contextos socioculturales que rodean a la construcción de conocimiento matemático, en la historia o en la época contemporánea, en la escuela o fuera de ella. Son los instrumentos que la aproximación Socioepistemológica ofrece al campo de la investigación en Matemática Educativa.

- ❖ La génesis histórica: el autor plantea la génesis histórica de los conceptos no sólo como un enfoque epistemológico sino que, además, se propone conocer las circunstancias socioculturales y científicas que propiciaron la construcción de conocimiento a lo largo de la historia

  > Así la génesis histórica de los conceptos, enfoca el problema epistemológico con otros parámetros, nos interesa conocer las circunstancias que permitieron construir el conocimiento y no solo las que dieron pie a su evolución. Claramente, estos aspectos no pueden ser concebidos ajenos, sin embargo presentan características que nos permiten distinguirlos (Cantoral, 2001, p. xxiii)

- ❖ Cantoral explica «la fenomenología intrínseca», basado en el señalamiento de Hans Freudenthal sobre la necesidad de construir la fenomenología didáctica de los conceptos matemáticos. A partir de ahí el autor señala la exigencia de construir la fenomenología intrínseca del concepto, entendiendo por ésta el rescate de todos los elementos que caracterizaron los diferentes significados que la noción tuvo en su génesis histórica. En la fenomenología intrínseca están comprendidos y ocultos muchos fenómenos que forman parte de la naturaleza misma del concepto, a tal punto que lo definen. Llevar a cabo la fenomenología intrínseca de un concepto representa ir a la búsqueda de «algo que no se ve», por lo tanto se requiere de una gran intuición y conocimiento de la génesis histórica de la noción.

- ❖ Los «constructos característicos»: entre los elementos que históricamente hicieron posible la construcción de un concepto se encuentran los «constructos característicos» y estos son todos los recursos cognoscitivos del sujeto que aprende para poder actuar sobre el objeto de conocimiento y de esta forma poder llegar a construir conocimiento.

A través de un análisis riguroso de la génesis histórica de los conceptos, el autor identifica los «constructos característicos» que vienen a aclarar los procesos «reales» por los que atravesó la construcción de cada concepto matemático; ellos posibilitan la identificación de analogía y procesos inductivos que definen formas personales de aproximación al objeto. Así se llegaron a definir estilos de pensar la matemática. Asimismo, por medio de los constructos característicos se llega a reconocer una estructura cognoscitiva que posibilitará la adquisición de nuevos conocimientos.

- La didáctica de antaño: En este aspecto, Cantoral explica que se propone identificar las ideas existentes en la enseñanza de la época, que hacen alusión al nuevo conocimiento matemático; esta propuesta la considera una hipótesis y la avala adelantando la consideración de que «el saber es un producto cultural», excluye así el supuesto de la «la generación espontánea de conocimiento». Por este medio delimitó «acercamientos, métodos y concepciones» que en ese tiempo propiciaron de manera natural el desarrollo de los «métodos de descubrimiento y demostración».

- «La reconstrucción de los significados asociados»: en esta propuesta confluyen los aportes que se desprenden del análisis de los aspectos mencionados antes, ya que todos juegan un rol importante en la reconstrucción del discurso matemático escolar. El autor explica la enorme posibilidad de plantearse la reconstrucción de los conceptos matemáticos y su reintegración en el discurso matemático escolar actual.

- La praxis educativa: este rubro se refiere a la reflexión de la práctica educativa. La relación biunívoca entre la investigación educativa y la praxis educativa asegura que los aportes de la investigación, tales como: teorías, métodos, técnicas, se vayan afinando cada vez más hasta lograr que los estudiantes aprendan matemáticas, objetivo único que se propone la práctica de la docencia en Matemáticas.

3. Análisis de los procesos de conocimiento matemático en las producciones de los profesores cuando trabajan un problema de investigación sobre didáctica de las Matemáticas en ingeniería a la luz de acercamientos fenomenológicos.

Esta tarea persigue el objetivo de identificar pautas y técnicas –desarrolladas en el marco del pensamiento de la Física y de la Ingeniería en la enseñanza de conceptos matemáticos.

4. Seguimiento de las producciones de los profesores de Matemáticas y Física, partícipes de un proyecto de investigación dirigido al rediseño del discurso matemático escolar, en particular el referido a la enseñanza de Cálculo en Ingeniería. Se diseña, para este propósito, material didáctico (secuencias planeadas de aprendizaje) fundamentado en cuatro ideas fundamentales:

   a. Génesis histórica de los conceptos matemáticos.

   b. Acercamiento didáctico de antaño en el campo de la matemática.

   c. Acercamiento didáctico contemporáneo en Matemáticas.

   d. Acercamiento didáctico propio de la Ingeniería.

   Este apartado persigue, como primer objetivo: «Reconocer el efecto que una didáctica del cálculo (fruto de la transposición didáctica operada previamente) produce sobre las acciones de los profesores cuando piensan en problemas reales de flujo en la naturaleza.»

5. Análisis de una serie de cuestionarios diagnósticos aplicados al grupo de profesores participantes (profesores de Matemáticas, Física e Ingeniería, con una formación profesional inicial, que se compone mayoritariamente de ingenieros y en menor cantidad de físicos y matemáticos).

   El objetivo que cubre esta tarea es: «Delinear perfiles o clasificaciones con base en sus estrategias de resolución de problemas matemáticos de cálculo tanto usuales como no típicos, estudiando principalmente sus acercamientos a las variaciones en el cálculo, su universo de representaciones gráficas y el manejo y representación de la serie de Taylor.»

6. Proceso de observación clínica, de entrevista participante con enseñanza audiograbada (tiempo efectivo de voz), de profesores elegidos como representantes de los perfiles elegidos formados en un momento en el que su problema de investigación ha sido parcialmente “resuelto”.

   Objetivo primero: detectar el tipo de representaciones mentales de los conceptos y procesos matemáticos que se sustentan en razonamientos físicos de los fenómenos de flujo en la naturaleza específicamente referidos a sus propios problemas de investigación, como la variación instantánea, las variables y sus variaciones, las ecuaciones diferenciales, convergencia, predicción y lo analítico.

   Objetivo segundo: observar los mecanismos de pasaje entre las nociones de predicción y lo analítico.

7. Estudio de sus producciones de investigación. Reporte de investigación de conceptos y

procesos matemáticos del Cálculo en ambientes fenoménicos de la enseñanza de la Ingeniería: niveles medio superior, bachilleratos propedéuticos de ciencias físico-matemáticas y superior, licenciaturas en Ingeniería.

Como Cantoral lo expresa, su tesis gira alrededor de dos principios que definen su estructura metodológica: una mística y una práctica, de tal forma que en la lista de tareas que el autor diseñó para enfrentar la problemática trazada, identificamos dos tipos de acciones –que se corresponden con los principios mencionados– para alcanzar los objetivos propuestos: la primera de estas acciones (se hace alusión a las tareas 1 y 2 de la lista de tareas propuesta) se refiere a «un prototipo de análisis documental» que arroja información extremadamente rica y valiosa con respecto a la identificación de las circunstancias ideológicas del contexto social y del contexto científico que determinaron situaciones, momentos y espacios que propiciaron la generación de conocimiento matemático, así como información relacionada con el acercamiento didáctico de antaño que provee datos únicos susceptible de ser rescatados para beneficio de la reconstrucción del discurso matemático escolar actual; la segunda acción (se hace alusión a las tareas 3,4,5,6,7 de la lista de tareas propuesta) tiene que ver con un conjunto de actividades centradas en la práctica educativa de los profesores del nivel superior de educación.

La primera de estas dos acciones constituye el marco teórico contextual para la segunda acción emprendida por Cantoral en su estudio. Es por medio de este marco que las actividades realizadas en esta segunda etapa se justifican y explican.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001b). La Socioepistemología: una mirada contemporánea del quehacer en Matemática Educativa. En F. Cordero (Ed.), *Serie Antologías* 1, (pp. 331-333): CLAME-Red de Cimates.

MOTIVACIÓN HACIA LA MATEMÁTICA, EXPERIENCIA DE ESTUDIANTES DE UN CURSO INICIAL DE CÁLCULO UNIVERSITARIO

Emilio Castro Navarro, Jorge Ávila Contreras.
Universidad De Los Lagos; Universidad Católica Silva Henríquez Chile
ecastronavarro@gmail.com, javila@ucsh.cl

Resumen. El aprendizaje y las vivencias en el primer semestre lectivo universitario, ha sido un tema central en el futuro desarrollo académico en la carrera universitaria de los estudiantes. Este trabajo se enfoca en este período de tiempo crítico en los estudiantes, en el que en algunos de ellos toman la decisión de desertar de su carrera, indagando en las experiencias y narraciones de los propios estudiantes. Se configura una mirada investigativa de corte cualitativa a partir de los aportes al área que han estado al seno de la educación matemática, específicamente en la socioepistemología, en una experiencia de aprendizaje en el contexto del pensamiento variacional y las implicancias que tiene este proceso en el devenir temporal de la motivación en los estudiantes, que se analizará desde la teoría de eficacia que analiza la motivación intrínseca versus motivación extrínseca de Harter (Naranjo, 2009).

Palabras clave: motivación, cálculo inicial, entendimientos, narrativas

Abstract. Learning and experiences in University academic semester, has been a central theme in future academic performance in college students. This work focuses on this critical period in students, in that in some of them make the decision of dropping out of his career, investigating the experiences and narratives of the students themselves. You have set up one investigative eyes of qualitative cut at this problem from the contributions to the area that have been at the heart of mathematics education, specifically in the social epistemology, in an experience of learning in the context of the variational thinking and implications that has this process in the temporal evolution of motivation in students, which will be discussed from the theory of intrinsic motivation versus extrinsic motivation.Harter (Naranjo, 2009)

Key words: motivation, initial calculus, understandings, narratives

Introducción

La presente comunicación trata de las fluctuaciones motivacionales en el transcurso de una asignatura de cálculo inicial, en un contexto de enseñanza orientado hacia el desarrollo de pensamiento variacional. Respecto de este tipo de pensamiento, Artigue (1995) señala que para construir saberes propios en los estudiantes se debe emplear un tiempo, que puede ir entre 3 hasta 10 años de enseñanza, con la intención de lograr la apropiación por parte de los estudiantes. Con esto, se vislumbra una problemática muy compleja para los estudiantes de primer año de universidad que cursan cálculo inicial, y es que, los estudiantes se deben involucrar en un proceso de enseñanza que conlleva a adentrarse en el pensamiento variacional en una medida temporal que ocupa entre un sexto y hasta un veinteavo de lo que recomiendan las investigaciones. Teniendo esto presente surgen los siguientes cuestionamientos con respecto a lo que está viviendo el estudiantado ¿Tendrán esta preparación inicial del pensamiento variacional?, si es que no la tienen o es deficiente, ¿Qué acciones se deben tomar para enfrentar esta problemática de manera que en un semestre puedan superar los obstáculos que se generen a partir de ello? ¿Cómo incide esto en la emocionalidad estudiantil y, por ende, en su motivación hacia el aprendizaje? ¿Qué aspectos propios de la persona se ven afectados en esta experiencia? ¿Qué tipo de entendimientos se logran en estas condiciones?

Según Díaz (2005), para generar aprendizajes en el estudiantado tiene relevancia que éste vea el escenario matemático que enfrenta y que a la vez comunique sus experiencias y hallazgos, que dimensione la matemática que debe saber utilizar en su práctica y que entienda que no debe frenar su desarrollo, sino al contrario intentar ahondar en ella. Como herramienta metodológica para indagar en el escenario antes mencionado Díaz señala que es pertinente atender a las narrativas de los sujetos que se enfrentan a las experiencias de aprendizajes en el contexto del pensamiento variacional. La narrativa estudiantil actúa como la llave que abriría este mundo de investigación y experiencia de quien logra comunicar fielmente lo que está pasando y está entendiendo. El estudio de la narrativa, es el de las formas en que la persona experimenta y se representa el mundo, es decir, sus epistemes. Las distancias entre saberes de la vida diaria, los escolares y los eruditos, afincan sus raíces en matrices de sentido de epistemes propias. Díaz (2005).

A propósito del estudio de las narrativas como medio para conocer las experiencias estudiantiles, es atingente rescatar las herramientas utilizadas en Ávila (2006). En este estudio, mediante el uso de bitácoras reflexivas para acopiar narrativas estudiantiles, fue posible develar tramas de complejidad que se ven envueltas en cursos de Cálculo Inicial en el nivel educativo superior sobre la base del pensamiento variacional. En dicho estudio, los entendimientos se conciben como un dispositivo analítico que permite comprender la imbricación entre redes semánticas y redes de tonalidades emocionales del estudiantado. Más específicamente, la red semántica es la que construye el estudiante a medida que va elaborando nociones variacionales en contextos de enseñanza, en un proceso durante el cual activa secuencias de nodos de distinta naturaleza. Esto ocurre simultáneamente con la constitución de la red de emocionalidad estudiantil, estableciéndose así una red de tonalidades emocionales imbricada con la red de significados. Este entramado entre lo emocional y variacional en el estudio se denominó entendimiento. Así, a través de las bitácoras reflexivas, se espera abrir un escenario para profundizar en la emocionalidad del estudiante, al mismo tiempo que construye su conocimiento. Con respecto a la emocionalidad y sus distintas aristas surge interesante el indagar y explorar en esto y como es determinante en la actividad del estudiante.

En cuanto a los estudio de emocionalidad hacia la matemática, un referente es Gómez-Chacón (2002) quien centra su interés en los bloqueos afectivos en la resolución de problemas y en la actividad matemática, y en la descripción de episodios emocionales de los estudiantes en el aula Gómez-Chacón (2002). Esta autora afirma que el estudio de la reacción afectiva hacia la matemática y la motivación por el aprendizaje de los estudiantes no debe restringirse a situaciones de laboratorio o niveles de sujeto o de aula, es decir, se debe considerar en cuenta el escenario social que produce estas reacciones y el entorno sociocultural de los estudiantes.

El estudio mediante bitácoras y la consideración del dispositivo de entendimientos-pensamos-ayudarán a dilucidar relaciones entre factores afectivos, emocionales y motivacionales en el estudiantado hacia la matemática y distinguir a la vez el surgimiento de la motivación como elemento a considerar dentro del escaparate investigativo.

La mirada de la psicología sobre la motivación, dice lo siguiente,

> En su afán por comprender la actividad humana, la Psicología ha asignado a la motivación el cometido de explicar las causas del comportamiento. Entre los procesos psicológicos básicos, tal vez sean los motivacionales los que se presentan más estrechamente vinculados con la acción, con independencia de que el marco teórico adoptado sea conductista, cognitivo o dinámico (Barberá y Mateos, 2000, p. 1).

Es decir, la motivación se adentra en las complejidades de la actividad humana, intentando comprender sus desarrollos y precursores de acciones que emprenden estos, la acción se vincula con la motivación como parte de los procesos psicológicos básicos. Siguiendo la motivación entonces es pertinente preguntar con respecto a la motivación, ¿la motivación es capaz de descubrir procesos internos del estudiantado que sean provocadores de acciones y sentimientos hacia la matemática, precisamente hacia el pensamiento variacional?

Desde el enfoque educativo Barberá (2002) señala -sobre la motivación- que la psicología educativa releva la importancia de los procesos motivacionales en la acción entre motivación, rendimiento académico y logro. Junto con revisar las complejidades de la acción, en el desarrollo estudiantil, la motivación tiene un papel preponderante en el rendimiento académico, es decir, en la medición de los conocimientos impartidos en el aula. Desde este punto de vista no se cuestionará al proceso de medición de rendimiento académico como tal, sino que, se intenta constatar la importancia de la motivación en los procesos de aprendizaje de los estudiantes y que, en relación al rendimiento académico, es a la motivación a quien se releva especial importancia como eslabón en el desarrollo de la experiencia académica del estudiante, además de ser un elemento que siempre está presente de manera preponderante al momento de emitir juicios a priori y sin mayor mediación de procesos o técnicas más complejas de estudio acerca de las capacidades matemáticas de los sujetos de estudio.

Según lo expuesto anteriormente, es que se considera pertinente, analizar experiencias con foco en las emocionalidades y motivaciones estudiantiles en un contexto matemático enfocado hacia el pensamiento variacional, decantando la pregunta que interesa abordar en una investigación mayor en la cual se encuentra inmerso este trabajo ¿Qué elementos motivacionales presenta el estudiantado, al emprender una experiencia de aprendizaje del pensamiento variacional, en el devenir temporal de una asignatura de cálculo inicial?

Antecedentes teóricos

Como en el presente estudio se busca abordar -respecto del aprendizaje de la matemática en su faceta de pensamiento variacional- posibles nexos entre el objeto en cuestión, que es la motivación hacia la matemática, y lo propio a temáticas de pensamiento variacional, se consideran aspectos teóricos del pensamiento variacional y estudios de la motivación y las emociones. Tomando en cuenta, además, el estudio de las narrativas.

La socioepistemología, articula cuatro dimensiones: cognitiva, epistemológica, didáctica y socio-cultural, para la investigación en Matemática Educativa. En ella, surge el Programa de Pensamiento y Lenguaje Variacional como línea de investigación que permite tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos Cantoral y Farfán (1998). Específicamente, sobre pensamiento y lenguaje variacional, Cantoral (2004) sostiene que:

> estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida, pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados, utilizando para ello diferentes estructuras y lenguajes variacionales" (op. cit, p.1).

Por su parte, Ávila (2006), rescata el cambio de mirada de las matemáticas que se da desde esta perspectiva teórica refiriéndose a que en ella

> se reconoce en los últimos años un giro desde una matemática estática a una matemática dinámica (Cantoral, 2001; Cordero, 2001; Ferrari, 2004; Arrieta, 2004). En lugar de aceptar unas matemáticas como producciones estructuradas e inmutables en el tiempo, éstas se conciben como elaboraciones sujetas a transformaciones y reconstrucciones mediante los sujetos y sus prácticas e interacciones, en un contexto social y cultural. Más que en las estructuras y las producciones matemáticas como resultado acabado de una progresión del saber,

> se brinda un papel protagónico a los procesos y a la actividad matemática, a las personas haciendo matemáticas.(Op. Cit., p. 23).

Es decir, se otorga en su propio mérito y protagonismo a los procesos, en la actividad matemática de las personas haciendo matemáticas.

Para abordar la motivación se utilizará la teoría de eficacia desde los trabajos de (Harter, 1980) por considerarse que sus características son apropiadas para conocer el grado de motivación hacia el aprendizaje de estudiantes, en virtud de que permite contestar a la pregunta: ¿en qué grado está determinada la motivación del alumno por factores intrínsecos o extrínsecos? Harter, (1980). Por su parte, distintos investigadores Martín-Albo Lucas, Navarro Izquierdo, y Núñez Alonso (2005) refiere a la motivación como uno de los conceptos más importantes en el contexto educativo. Evidencia de esto es que se ha reportado que la motivación está relacionada con diversos aspectos como la persistencia, el aprendizaje y el nivel de ejecución del estudiantado.

Existen numerosas perspectivas teóricas sobre la motivación; no obstante, para comprender la propia del aprendizaje escolar, son esenciales las teorías de motivación intrínseca y las enfocadas en las creencias de competencia y eficacia. Las primeras responden a la pregunta ¿quiero hacer la tarea? y las segundas se orientan a contestar ¿puedo hacer la tarea? Son muy importantes las razones para dedicarse a una actividad, pero también son determinantes las expectativas para realizarla.

Una teoría de motivación que analiza dos aspectos en el sentido de los procesos cognoscitivos y afectivos es la de la motivación de eficacia Harter (1980), esta se centra en el desarrollo de la motivación intrínseca y extrínseca en los estudiantes. En esta teoría se identificó las variables mediadoras de la motivación de eficacia, relevando la importancia del papel que le corresponde de los agentes socializadores ante las experiencias de éxito y fracaso. De hecho se postula que las respuestas de los agentes de socialización ante los intentos iniciales de eficacia de los estudiantes, así como ante los éxitos o fracasos de tales intentos de manejar su ambiente, tienen un impacto importante en la orientación de motivación, además de su mirada en sí mismos respecto de sus competencias y del control de su medio. En este encuadre, los estudiantes con motivación de eficacia prefieren los retos, se esfuerzan por satisfacer su propia curiosidad, realizan intentos de dominio y muestran juicio independiente y criterios internos de éxito y fracaso.

En cuanto al estudio de las narrativas, el interés en este tema radica en la importancia de ésta para “capturar” eventos especiales que el estudiantado vivencia durante sus procesos de aprendizaje, a fin de permitirnos desentrañar su naturaleza hacia la motivación. Para Connelly y

Clandinin, (1995), la narrativa favorece el estudio y análisis de la forma en que las personas viven y experimentan su mundo, y por tanto, es una forma de visualizar y trabajar sobre los fenómenos de la experiencia humana, con respecto al uso de la narrativa en la investigación educativa, es relevante debido a que los seres humanos somos contadores de historias, que tanto personal y socialmente, vivimos vidas relatadas. En el presente trabajo, se tendrá como fuente de información fundamental las narraciones estudiantiles recogidas mediante el instrumento de las bitácoras de reflexión, de modo que la narración tiene un rol central en el estudio. Díaz (2005) resume componentes de la narratividad en cuanto a su relación con la educación y la investigación, señala que ésta es una forma natural de nuestras experiencias sobre los relatos, a su vez, la misma experiencia tiene como referente los relatos, es decir, hay un ir y venir entre experiencia y relatos.

Metodología

La metodología utilizada es de tipo cualitativa. El foco de interés radica en comprender entendimientos y motivaciones del estudiantado a partir de su propia reflexión, es decir, desde el propio marco de referencia de quien actúa. Además sigue una modalidad de investigación-acción, debido a la interacción que se realiza entre los sujetos de estudio y el investigador que en este caso es el mismo docente del curso en donde se realiza el estudio, a saber, un universo de 50 estudiantes de primer año universitario que están cursando una asignatura de cálculo inicial en la Universidad Andrés Bello, en Santiago, Chile. El instrumento principal de recolección de información son las bitácoras de reflexión, las cuales se consideran pertinentes para los propósitos del estudio en atención a lo que señala Ávila (2006) respecto que éstas permiten "vislumbrar aspectos relacionados a los vértices del triángulo didáctico que dicen relación con tonalidades emocionales del estudiantado, lo cual provee al profesor de una sensibilidad en ese aspecto."(*Op. cit., p.136*). Asimismo, propician el acercamiento a los entramados que experimentan los estudiantes, relacionados con cualquier situación que se está viviendo en el aula, elicitadas en las narrativas de los estudiantes. La bitácora entonces permite ver aspectos más profundos del comportamiento del estudiantado, de su desarrollo y experiencia de aprendizaje, favorece acceder a profundidades del pensamiento, con las narraciones de ellos mismos. Para las fases futuras del presente estudio, las bitácoras se articularán en base a la teoría de motivación intrínseca versus extrínseca desde la mirada de Harter, de manera de hacer una exploración más acabada de la motivación, y se pedirán a los estudiantes de manera quincenal. Lo que se presenta a continuación, en esta comunicación, son los resultados de una aplicación preliminar de las bitácoras de reflexión atendiendo a la problemática expuesta.

Ilustraciones de un primer acercamiento

Como primera fase del estudio que se presenta, se ha comenzado con la aplicación de las bitácoras de reflexión en el grupo curso antes señalado. Con estas primeras versiones se adelantan distinciones de aspectos afectivos y emocionales, que comienzan a evolucionar en el tiempo, analizando cómo influyen en las acciones estudiantiles. Para ejemplificar, se presentan algunas de las textualidades rescatadas en esta primera etapa, a partir de las dos primeras bitácoras recolectadas, en el caso de dos estudiantes, que designamos por E1 y E2.

Textualidades de E1:

> Bitácora 1: "Lo que pienso sobre lo que hicimos, es sólo frustración al parecer no he aprendido lo esperado y eso no me beneficia, ya que, me genera menos confianza al realizar los ejercicios , por más que me esfuerce no parece ser suficiente, debería haber alguna receta de memoria con respecto a las matemáticas, no es que no me gusten es sólo que me cuesta demasiado hacer los ejercicios y eso me frustra y me hace sentir tonta y esa sensación no me agrada"
>
> Bitácora 2:"Siempre entiendo la mecánica pero el cómo razonarlo me cuesta bastante, por eso es que propuse que existiera una receta, no sólo de lo típico, eso de que si haces muchos ejercicios lo entenderás, pero en realidad yo sigo aplicándolo mecánicamente, es más bien una receta que me permita desarrollar una capacidad de razonamiento matemático"

En un principio siente que puede, pero encuentra dificultades, y al llegar la frustración "no puede", entonces, como salida espera una *receta* para no sentirse *tonta*. La receta como un razonar que le permita construir un pensamiento variacional (a propósito del contexto de enseñanza en que se haya involucrada). Sobre cómo se define a sí misma con respecto al saber matemático, es prudente seguir indagando en detonantes de estas ideas sobre sí misma, además pesquisar los niveles de avance académico en una estudiante en estas condiciones motivacionales y afectivas. También se podría pensar en que tan grande sería el emprender la tarea de cambiar sus preconceptos si es que estos pueden ser cambiados o si están ubicados en su inconsciente ya como un paradigma robusto en su persona.

Textualidades de E2:

> Bitácora 1:"Saber la materia no te asegura el éxito y al momento de la prueba no atino que paso seguir, porque me falta confianza. Mi problema siempre ha sido matemáticas y lo seguirá siendo, aunque lo estudie y entienda en las pruebas siempre me equivoco "
>
> Bitácora 2: "Aprendí la regla de la cadena en fórmula, pero tengo que hacer ejercicios para usarlo adecuadamente con las fórmulas"

Su entendimiento del saber matemático lo resume en reglas y mecanización. Eso le lleva al no poder hacerlo, es más, siente que nunca podrá, en una profecía auto-cumplida, que se profundiza en un no quiero. Aun está en un momento lejano, sobre lo que implica aprender pensamiento variacional, esto a partir de la predisposición que muestra desde una mirada netamente resultadista, en donde sería interesante indagar en qué nivel de preponderancia le atribuye al adquirir construcciones propias sobre nociones del pensamiento variacional. Por otro lado, un estudiante que se muestra tan lejano al saber matemático ya sea por su noción de éste y por su disposición, son elementos donde se puede generar el caldo de cultivo propicio para la motivación.

Conclusiones

Si bien en este estudio incipiente se muestran aspectos iniciales de una investigación, ya se comienza a descubrir aspectos y entramados interesantes de seguir profundizando. Desde ya, las bitácoras de reflexión comienzan a mostrar su efectividad para permitir analizar los entendimientos de los estudiantes en lo que respecta a aspectos motivacionales y emocionales y es que la motivación es un elemento crucial en el desempeño estudiantil. Si un sujeto está con una buena porción de motivación, su resiliencia se fortalece y, por ende, le da una suerte de recubrimiento para soportar distintos embates emocionales y afectivos. La construcción investigativa en este proceso demanda retos a lograr en el sentido de comenzar a llevar los diálogos de las bitácoras a un escenario en donde los saberes matemáticos se vuelvan los protagonistas de los diálogos, de manera de ir profundizando precisamente los aspectos motivacionales involucrados.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, J. (2006). *Representaciones estudiantiles de variación desde mediaciones pedagógicas. Un estudio con bitácoras reflexivas*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Barberá, E. y Mateos, P. (2000). Investigación sobre psicología de la motivación en las universidades españolas. Revista Electrónica de Motivación y Emoción, 3(5-6), 5-20.

Barberá, E. (2002). Modelos explicativos en psicología de la motivación. *Revista Electrónica de Motivación y Emoción*, *5* (10), 1-14

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Una mirada Socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17(1), 1-9). México: CLAME.

Cantoral, R., y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon*, *42*(3), 854–856.

Connelly, M. y Clandinin, J. (1995). Relatos de experiencia e investigación narrativa. En J. Larrosa (Ed.), *Déjeme que le cuente. Ensayos sobre narrativa y educación* (pp. 10-24). España: Editorial Alertes.

Díaz, L. (1999). Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos. *Memoria doctoral. Facultad de Educación. PUCCH*.

Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8* (2), 145–168.

Díaz, L. (2008). *Coherencias Cognitivas, Matemáticas y Culturales en la Matemática de la Variación.* Disponible en: http://tsg.icme11.org/document/get/660

Gómez-Chacón, I. Mª (2002). Cuestiones afectivas en la Enseñanza de las Matemáticas. Una perspectiva para el professor. (Affective Questions in the teaching of Mathematics. A perspective for the teacher). En L. C. Contreras and L.J. Blanco, *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente,*(pp. 23 -58) Cáceres: Universidad de Extremadura.

Harter, S. (1980). *A scale of intrinsic versus extrinsic orientation in the classroom*. Manual University of Denver.

Martín-Albo, J., Navarro, J. G., y Núñez, J. L. (2005). Validación de la versión española de la Échelle de Motivation en Éducation. *Psicothema*, *17* (2), 344–349.

Naranjo, M. (2009). Motivación: Perspectivas Teóricas y Algunas Consideraciones de su Importancia en el Ámbito Educativo. *Educación*, 33 (2), 153–170.

EXPLORACIÓN DE LO BILINEAL DESDE LA PRÁCTICA SOCIAL DE MODELACIÓN DE UN SISTEMA DE RESORTES

Silvana Gómez, Jaime Arrieta, Leonora Díaz
Universidad de los Lagos Chile
silvana.gomez@usach.cl

Resumen. En el marco de una investigación en desarrollo sobre la construcción de lo bilineal al ejercer prácticas de modelación y simulación , se reporta la aplicación de una secuencia basada en prácticas sociales de modelación, A partir de un fenómeno simulado virtualmente, los estudiantes registran datos que sistematizan en una tabla con la que predicen y determinan un modelo algebraico. En la experiencia fueron considerados cinco estudiantes de cuarto año de ingeniería y a dos estudiantes de, cuarto año medio.

Palabras clave: prácticas sociales, modelación, modelos

Abstract. Upon an investigation about the development in bilineal construction, after execersing modeling and simulation practices, the application of a sequency based on social behavior of modelation is reported. From a visually simulated phenomenon, students register the data into a standarized board which helps them to predict and develop an algebraic procedure. The subjects for the experiment were five students from the fourth year of engineering and two seniors from high school.

Key words: social practices, modelling, models

Introducción

La experiencia que se reporta es la actividad exploratoria de una investigación en curso que estudia la construcción de lo bilineal en el ejercicio de prácticas sociales de modelación y simulación, tuvo como antecedentes, los trabajos de Arrieta (2003) y Méndez (2006) que se desarrollaron en la línea de investigación de las prácticas sociales, en la emergencia del conocimiento matemático. Estos autores intentan explicar cómo, en el ejercicio de las prácticas sociales, los actores construyen sus conocimientos como herramientas. Se Adaptó el diseño de Méndez (2006) quién investigó la construcción de lo multilineal al ejercer la práctica de modelación de un sistema de resortes, reportó que lo multilineal se construye cuando se articulan dos o más modelos lineales. Es decir es visto y trabajado como dos modelos disjuntos al ejercer esta práctica.

Problemática

Los objetos matemáticos son entes fundamentales en actividades matemáticas cuya intención es el desarrollo de las matemáticas, pero son herramientas cuando la intención de las actividades es el uso de la matemática con diferentes fines, por ejemplo cuando se tiene que identificar una realidad con una estructura matemática de un fenómeno en estudio, requiriendo para ello conocer la estructura matemática del fenómeno, el comportamiento de las variables que intervienen en el fenómeno (Arrieta, 2003). El modelo de enseñanza tradicional en matemáticas suele entrenar en el empleo de algoritmos para la resolución de ejercicios, en la ejercitación mecánica a través de guías, centrando las actividades en los objetos matemáticos para el desarrollo de las matemáticas, dejando de lado el pensamiento matemático, el estatus de herramienta que tienen los objetos matemáticos, las prácticas del uso de las matemática, el proceso de constitución de relaciones entre variables que permiten estudiar un fenómeno, la construcción de modelos y la predicción, los que casi no se aprecian en los diseños, actividades que los profesores emplean en el aula, esto lleva a que solo un escaso porcentaje de alumnos sean capaces de trabajar de manera eficiente con modelos explícitos de situaciones complejas concretas, puedan seleccionar e integrar diferentes representaciones, relacionándolas directamente con situaciones del mundo real, posean la habilidad de razonar flexiblemente y de lograr cierta profundización de los contextos, elaborando y comunicando sus explicaciones y razonamientos, sobre la base de sus propias interpretaciones, argumentos y acciones.

Antecedentes

La modelación de fenómenos es una práctica poco usual en el aula. Históricamente Se observa que esta práctica, se ejerce en los laboratorios experimentales en diferentes áreas de la ciencia, pero pocas veces en el salón de clase. La Historia de la ciencia muestra la íntima relación entre la física y la matemática y cómo en nuestros días esta relación, en el ambiente escolar, se ha ido perdiendo. Bassanezi y Biembengut (1997) denominan al proceso dinámico que ayuda a entender ciertos problemas de física, química y biología modelización, reportando que han existido intentos por hacer uso de la modelización matemática como un método de enseñanza-aprendizaje, en perfeccionamiento de profesores y en cursos regulares, los que mostraron que el proceso de modelización puede ser más eficiente que el método tradicional teoría-aplicación. Para ellos la mayoría de los autores se refieren a la modelización matemática como el proceso que utiliza conceptos y técnicas esencialmente matemáticas para el análisis de situaciones reales. Afirman que la palabra modelación es una “contracción” de los términos modelización y educación es decir la suma de modelización más educación. La modelización matemática también se considera como una herramienta útil que ayuda a la adquisición de competencias, en España desde el ICMI XIV se ha establecido como una herramienta útil para aproximar las matemáticas al ciudadano. Biembengut y Hein por doce años han investigado lo que llaman modelaje matemático, la construcción de un modelo matemático siguiendo ciertos pasos, para ellos un modelo matemático es el conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen de alguna manera un fenómeno el que se puede formular a través de varias alternativas, expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, tablas, etc. En el ámbito internacional el área de investigación denominada

Modelling and Applications in Mathematics Education (Blum, Galbraith, Henn y Niss, (2007); Barbosa (2006) se ha consolidado, estos autores consideran a la modelación como un proceso que génesis en la conceptualización de una situación o problema de la realidad, teniendo como punto de partida a un conjunto de situaciones asociadas a los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes y de la escuela. En Blum et al. (2007) se presentan algunas evidencias del grado de desarrollo e institucionalización de la investigación en *modelación y las aplicaciones en Educación Matemática* a nivel internacional; se destaca, por ejemplo, la conformación de temas de estudio relativos a la modelación y las aplicaciones, entre ellos: epistemología, la modelación como competencias y su relación con otras competencias, prácticas de enseñanza y aprendizaje de la modelación y las aplicaciones, los aportes de la tecnología a la modelación y las aplicaciones, y la implementación de la modelación como proceso y recurso en el aula de matemáticas, existen reportes que destacan su importancia en el diseño de situaciones y actividades para la construcción de algunos conceptos matemáticos en el aula de clase (Bassanezi, (2002); Villa, (2007); Biembengut y Hein, (2004); Borromeo (2006). Entre los argumentos que sustentan la importancia de la modelación en las aulas escolares colombianas el MEN (1998) plantea que:

> La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa.(p. 101).

De esta manera, el MEN (2006) asume un modelo como un concepto clave dentro del proceso de modelación y lo define en los siguientes términos:

> Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también "una estructura"– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo (p.52).

Desde la perspectiva socioepistemológica, Francisco Cordero considera a la modelación como una actividad necesaria para la reconstrucción de significados matemáticos, ejemplo de esto es el uso de la modelación gráfica para resignificar la parábola. Arrieta (2003) concibe la modelación como actividad humana con la intención de comprender y transformar la naturaleza, una forma particular de participar en el mundo, una forma de interacción con los otros, cómo actividades que desarrollan interactivamente docentes y alumnos en el aula, usando las matemáticas para interpretar y transformar un fenómeno de la naturaleza confrontando y argumentando diferentes versiones, desde este enfoque lo lineal, lo cuadrático, lo inversamente proporcional, lo bilineal por ejemplo son herramientas utilizadas en las prácticas sociales de modelación ejercidas en contextos sociales, teniendo su significado en cada escenario donde se ejercen las prácticas, así la linealidad al ejercer la práctica llamada "*la figuración del devenir de las cualidades*" significa líneas rectas,es decir ponen en el centro a los modelos gráficos (líneas rectas) y a partir de ellos construyen diferentes argumentos, significados y herramientas de lo que es la linealidad. En la práctica llamada "*la numerización de los fenómenos",* las tablas con razón de cambio constante se ponen como centro para así partir de ellas construir los significados. A la estructuración discursiva de las prácticas sociales en el aula, Arrieta llama modelación como proceso de matematización en el aula.

Perspectiva teórica

La perspectiva teórica con que se aborda la investigación es la socioepistemología que considera la naturaleza social del conocimiento como eje central y al sistema social como un sistema complejo, donde los humanos aprenden a ejercer prácticas (Arrieta, 2003). Se concibe al conocimiento científico como una construcción social sujeta a ciertos procesos discursivos específicos (Méndez y Arrieta 2005) se sostiene que es en el ejercicio de las prácticas donde los conocimientos adquieren el estatus de herramientas, los conocimientos son utilizados con intenciones situadas en un contexto, es decir se interactúa con ellos pero a nivel de herramientas. El considerar el carácter discursivo en la construcción social del conocimiento significa incluir las versiones sobre ciertos temas como la organización del discurso, las maneras de hablar, de argumentar de analizar, de observar, de construir con palabras el resultado de una experiencia, el estudio de las interacciones de los alumnos que se dan en el proceso de aprendizaje o al momento de ejercer las prácticas sociales, las herramientas utilizadas y sus construcciones da la oportunidad de caracterizar prácticas de construcción del conocimiento matemático cuando se trata con los fenómenos (Arrieta, 2003). Es por eso que en esta línea se investiga qué prácticas se ejercen en un contexto discursivo propuesto, las herramientas que utilizan y qué condiciones de significación se crean colectivamente. Se afirma que es en el ejercicio de ciertas prácticas sociales usando herramientas, donde aparecen, se estructuran y se movilizan, como argumento, ciertas nociones matemáticas.

La modelación cómo práctica social

Desde la perspectiva socioepistemológica, las prácticas sociales son la base de los diseños donde la actividad humana se reconoce como una organización social donde se construye el conocimiento (Cordero, 2001). Desde esta perspectiva al hablar de prácticas de modelación se refiere a las que se desarrollan en interacción con diversos fenómenos, conjeturando y realizando predicciones a cerca de ellos, utilizando modelos. Al ejercer una práctica de modelación, se articula dos entidades, para actuar sobre una de ellas llamada lo modelado, a partir de otra llamada modelo. Al decir de Arrieta (2003), una entidad se convierte en modelo, cuando el actor la usa para intervenir en otra entidad. Su razón de ser es la de herramienta. Las entidades matemáticas en esta práctica son herramientas. Así, la modelación como práctica social, en el sentido de actividad con la intención de comprender y transformar la naturaleza, se considera fuente que desarrolla procesos de matematización. Dentro de este proceso se han identificado actividades claves para el desarrollo de la práctica de modelación, como lo son: Crear herramientas especificas (las gráficas, las tablas numéricas) y formas particulares para describir los hechos, construir argumentos a través de conjeturas y confirmaciones, basadas en la inducción como práctica, desarrollar formas de predicción, argumentar y validar versiones, de otros o de ellos mismos, utilizando múltiples herramientas (Arrieta, 2003).

Propósitos de la actividad exploratoria Interesa investigar la práctica social de modelación de un sistema de resortes como un proceso de matematización en el aula, donde se considera a ésta última como un contexto social en la que el conocimiento matemático es negociado y construido (Bauersfeld (1998); Cobb (1986), citado por Arrieta 2003, p 72). Se espera que al realizar el estudiante la modelación de un sistema de resortes, la derivada parcial aparezca como herramienta con la cual se interactúa para ayudarse al momento de construir una fórmula la que se transformará en modelo algebraico.

Metodología Se considera la práctica social de modelación de un sistema de resortes como base epistemológica en el diseño de la secuencia de aprendizaje, las que se centran en las prácticas que ejercen los estudiantes utilizando herramientas en un contexto social, o sea en grupos de trabajo. La metodología empleada es la ingeniería didáctica, considerando el análisis a priori, la experimentación y análisis a posteriori.

Análisis a priori

Fase I la experimentación A partir de una situación real, los estudiantes tienen que encontrar cuáles son las variables involucradas para empezar a buscar datos y construir las tablas, exploran el simulador, montan el arreglo experimental para estudiar la elasticidad de un sistema compuesto por dos resortes en serie. Al darse cuenta que las variables son el peso de cada objeto y la elongación total del sistema de resortes, comienzan a construir una tabla de tres columnas. Un punto importante a considerar es que tienen que acordar un punto de referencia.

En la Fase II. Acto de modelar-predicción Se le presenta la siguiente situación: Si colocamos 30 gramos en el porta pesas 1 y 30 gramos en el porta pesas 2 ¿en qué posición estará el indicador?. En esta situación los estudiantes deben buscar algún conocimiento que le permita predecir, la regla de tres, el promedio. Pudiera suceder que ocupe razón de cambio. Al construir herramientas de modelación, están modelando.

En la Fase III Construcción del modelo algebraico y gráfico Se le presenta la siguiente situación: Si colocamos p1 gramos en el portapesas 1 y p2 gramos en el portapesas 2 ¿en qué posición estará el indicador?. Aquí se trata de que los estudiantes construyan un modelo algebraico del fenómeno. Construyen la fórmula calculando las razones de cambio, es decir lo que se estira el sistema al colocar un gramo en la pesa p1 ,$\frac{\Delta x}{\Delta p1}$ y lo que se estira el sistema al colocar un gramo en el porta pesas 2, $\frac{\Delta x}{\Delta p2}$. Para encontrar la posición del indicador debe multiplicar los gramos colocados en el porta pesas 1 por $\frac{\Delta x}{\Delta p1}$, luego sumar el producto de los gramos en el portapesas 2 por $\frac{\Delta x}{\Delta p2}$ para luego sumar, esto lo llevará a escribir el modelo algebraico $\frac{\Delta x}{\Delta p1}$ p1 + $\frac{\Delta x}{\Delta p2}$ p2 + la posición inicial= x(p1,p2) . En esta situación los estudiantes habrán encontrado una relación entre las variables que se transforma en modelo algebraico, este hecho se logra partiendo de la tabla que se transformas en modelo numérico. Se observa la relación entre los dos modelos. Posteriormente se plantea la siguiente pregunta ¿Cuál es la gráfica de los datos? Cuyo objetivo es llevar al estudiante a relacionar las variables a través de una gráfica, la que posteriormente será el modelo gráfico, lo ideal es que logre la articulación de modelos.

Resultados de puesta en escena Se muestran algunas argumentaciones extraídas de los episodios de las puestas en escena. Al aplicar el primer diseño, el de Méndez, a los estudiantes de Ingeniería, se observa que los alumnos interactúan con el fenómeno, construyen la tabla, analizan los datos tabulados con el fin de encontrar una expresión matemática que les permita predecir, Informan que la relación es línea, apoyándose en la ley de Hooke, al encontrar una ley física que aplicar, no se preocupan de predecir usando bisección o punto medio. En la fase dos acto de modelar, no obstante que dos estudiantes calcularon "deltas" de elongación en cada resorte, lo hicieron a partir de la ley de Hooke, uno de los estudiantes recurrió a la interpolación de valores conocidos para llegar al valor por conocer, usaron como herramienta la ley de Hooke lo que los llevó a considerar a los dos resortes como uno en línea. Este antecedente llevó a reformular la situación para pasarla a estudiantes de cuarto año de enseñanza media, los resultados fueron diferentes.

Argumentos textuales que muestran como los alumnos construyen lo bilineal a partir de dos modelos lineales disjuntos, poniendo como centro los modelos gráficos (líneas rectas)

EST.1 Si mejor lo tabulamos de otra forma, hagamos dos tablas distintas una para el recipiente uno y otra para el recipiente dos
EST.2 Yo cacho que deberíamos buscar una relación, como que si baja 15 cm en 20 grs. cuanto cm va bajando por cada gramo, porque por lo menos lo que baja en el peso 1 siempre va a ser constante ……
EST.1 Lo que yo digo es que grafiquemos las dos situaciones paralelamente después obtenemos lo que baja en 17 si estuviese solo y después el 2 y ahí sacamos la relación que hay entre las dos si es que es un promedio
EST.2 Pero se supone que es el mismo aparato que debía seguir la misma regla.la medición en cm está diferente, ya sabemos que una recta no es.
EST.1 Te das cuenta tiene una relación que tiene una diferencia constante entonces podríamos decir que es lineal.

Los estudiantes buscan el modo de encontrar el modelo algebraico e intentan graficar en tres dimensiones, dibujan el eje X, eje Y, eje Z. La derivada parcial como herramienta aparece en forma implícita. La imposibilidad de graficar puede deberse a que el estudiante tiene que pasar de graficar en el plano al espacio, pues la gráfica es un plano

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical Modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. ZDM- *The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 293-301.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto.

Bassanezi, R. C. y Biembengut (1997). Modelación Matemática: Una antigua forma de investigación, nuevo método de enseñanza. *Revista de didáctica de las Matemáticas, (32)*, 13-25.

Biembengut, M, y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16* (002), 105-125.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM- *The International Journal on Mathematics Education, 38* (2), 86-95.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.W., y Niss, M. (Eds.).(2007). *Modelling and aplications in mathematics education.The 14th ICMI Study*. New York: Springer.

Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos, *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática educativa, Número especial*, 83-103.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4,* 103-128.

Ferri, R.b. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education, 38*(2), 86-95.

Méndez M. y Arrieta, J (2005). Las prácticas sociales de modelación multilineal de fenómenos en el aula. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 575-582. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Méndez, M. (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilineal; modelando un sistema de Resortes.* Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México

EL USO DE TÍTERES EN LA PRÁCTICA DE CLASIFICAR

Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero México
marcela_fe@yahoo.com.mx

Resumen. En esta investigación, realizada bajo la mirada socioepistemológica, analizamos la emergencia de características esenciales de figuras geométricas en el ejercicio de la práctica de clasificar, entrelazada con lo sensible y lúdico que evoca el teatro de títeres. Trabajamos con un grupo de 25 profesores del nivel de secundaria y bachillerato a quienes se les invitó a reflexionar sobre el uso de los títeres en su clase de matemáticas en dos estadios: como "estudiantes" creadores del final de una obra y como "profesores" criticándola para diseñar una sesión con sus estudiantes. Reportamos entonces esta experiencia donde percibimos el impacto que el uso del títere produjo en varios de los profesores y alumnos así como la distancia en otros.

Palabras clave: práctica de clasificar, títeres, geometría

Abstract. In this research, conducted under the socioepistemological approach, we analyzed the emergence of essential characteristics of geometric figures during the application of the practice of classifying, which is intertwined with sensitive and ludic aspects evoked through puppetry. We worked with a group of 25 middle and high school teachers, who were invited to reflect on the use of puppets in their mathematics lessons in two stages: as "students" responsible for creating the end of a play, and as "teachers" criticizing it in order to design a session with their students. We report this experience where we perceived the impact that the use of puppets had in several of the teachers and students, as well as the distance in other participants.

Key words: practice of classifying, puppetry, geometry

Introducción

Los títeres, estructurados desde el juego, la expresión artística, la creatividad en un mundo donde lo titiritesco propicia el transferir a un objeto inanimado nuestra propia voz (Finkel, 1984; Palomas, 2002; Tillería, 2003; Rogozinski, 2005; Szulkin y Amado, 2006), nos permite escapar de nuestra propia realidad, de aquella que nos aprisiona; dando paso a la estesis como manera de hablar de lo sensible, de la significancia, de los procesos que involucran a un ser en tanto sujeto abierto al mundo (Mandoki, 2008) entremezclada con la semiosis en tanto proceso de intercambio de significación y significancia.

Las matemáticas en tanto, estructuradas desde el rigor científico, como aquello que debe ser transmitido, preservado, alejándose cada vez más de sus génesis, de sus primeros argumentos, invitándonos escolarmente a conocerla desde sus síntesis más descarnadas, en general desde las "obligaciones" de saber y de demostrar diariamente que desarrollamos nuestro lenguaje matemático, la mayoría de las veces como aquel discurso externo que se requiere reproducir sin cuestionar ni cuestionarnos, evoluciona en permanente vigilancia disminuyendo quizás nuestro gusto por ellas y aumentando la distancia entre la matemática escolar y la matemática del cotidiano (Arrieta, 2003; Carraher, Carraher y Schilemann, 1991; Chaiklin y Lave, 2001).

En este reporte, nos interesa discutir el papel que le confieren algunos profesores a los títeres, aquella expresión cultural que nos acompaña desde la prehistoria (Escalada Salvo, 1993) y cuyas características han ido evolucionando a la par del humano, al solicitarles que utilicen la obra de títeres "La aldea de los rombos" y reporten su experiencia como "estudiantes" y como "diseñadores de clase".

Marco teórico y metodológico

Como socioepistemólogos (Cantoral, Farfán, Lezama, y Martínez-Sierra, 2006), giramos la mirada de los objetos y conceptos de la matemática escolar hacia las prácticas generadoras de ese conocimiento tan escindido de ellas. Hablamos y caracterizamos así, prácticas sociales como "predecir", "modelar", "matematizar" entendiendo como práctica social, aquello que norma, que forma, que comunica, que difunde, sin nombres o tiempos, sin jerarquías u órdenes, pero que evoluciona en su recurrencia, que se consolida en su quehacer, que forja identidades, que genera pertenencias a comunidades.

En esta investigación, analizamos la emergencia de características esenciales de figuras geométricas en el ejercicio de la práctica de clasificar, entrelazada con lo sensible y lúdico que evoca el teatro de títeres (Rogozinski, 2005, Tillería, 2003) con un grupo de 25 profesores del nivel de secundaria y bachillerato a quienes se les invitó a reflexionar sobre el uso de los títeres en su clase de matemáticas en dos estadios: como "estudiantes" creadores del final de una obra y como "profesores" criticándola para diseñar y gestionar una sesión con sus estudiantes.

El objetivo de esta experiencia, organizada para ser desarrollada en dos fines de semana, fue evidenciar a los profesores la riqueza discursiva que provoca invitar a los participantes a conocer una obra de teatro guiñol, a generar su propio final y a compartirlo con sus estudiantes. Así, observaríamos y analizaríamos la respuesta de los profesores al solicitar que replicaran la experiencia con un grupo de sus estudiantes, es decir:

- Diseñar la actividad y su puesta en escena
- Filmar la experiencia
- Analizar lo sucedido y realizar un informe cuyo resultado sería compartido en la última sesión.

Luego de haber trabajado sobre la obra generando su propio final y construyendo sus títeres para presentar a los compañeros los diálogos generados en el intercambio de ideas.

Discutiendo con los profesores

En la primera sesión del taller se reflexionó brevemente con los profesores sobre las ideas principales de títeres desde sus propias experiencias. Sólo una de las maestras comentó que había incorporado a los títeres en sus clases de civismo y ética para discutir ciertos valores con los jóvenes se secundaria y que la experiencia había sido muy enriquecedora para todos gracias al entusiasmo de los estudiantes. Los demás profesores comentaron que su contacto con los títeres había sido muy tenue, y sólo como espectadores, algunos en teatro y la mayoría los habían observado en películas como la titulada: Cascabelito (1962) de Viruta y Capulina, actores mexicanos del siglo pasado o en programas de televisión como la de Plaza Sésamo, que sigue en vigencia.

Ante la pregunta de qué papel podría jugar el títere en su clase de matemáticas, no lograron articular ideas ya que su mirada estaba más hacia el títere para niños pequeños y divertir desde cuentos clásicos que para dialogar con las matemáticas. Cerramos la discusión de esa sesión presentando un ejemplo del quehacer de los Matetíteres, grupo de teatro guiñol creador de varias obras tal como la titulada "La aldea de los rombos" (Ferrari, 2010) a la que se les invitó a observar críticamente y crear un final de la misma, así como un análisis de su contenido matemático.

El argumento central de la obra mencionada es la clasificación de figuras geométricas, particularmente discutir que todo cuadrado es también un rombo, idea que implementa al generar una aldea de rombos a la cual llega un cuadrado forastero el cual produce diferentes reacciones, desde apoyo a desconfianza, comparación y rechazo llegándose a encarcelarlo para enjuiciarlo.

Con papeles de colores y crayolas, los profesores, organizados en equipos de cinco participantes generan, entre risas, distintos finales, algunos dibujando comics y otros construcciones geométricas con papiroflexia, escribiendo guiones (ver Esquema 1) y reflexionando sobre el trasfondo matemático sobre la clasificación de figuras geométricas, problemática aún presente en las aulas y estudiada por varios investigadores (Scaglia y Moriena, 2005; Mederos y Ruíz, 2007, D´Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli, 2008). Aparecieron allí, el respeto al diferente aceptándolo por varios argumentos, ya sea defendido por abogados rombos; o la idea de que ser más gordito no inhibía ser rombo ya que sus lados eran iguales, en tanto que otros consideraron que saltando en una patita el cuadrado era reconocido como rombo.

Esquema 1: Profesores generando su final de la obra

En la siguiente sesión, los equipos diseñaron la actividad a presentar a sus estudiantes. Dos equipos eligieron trabajar con estudiantes de bachillerato y los demás en secundaria. Llamaremos Equipo 1 al que decidió que sus estudiantes realizaran un video con el cuento completo para presentar a sus compañeros. El Equipo 2 decide invitar a sus estudiantes a confeccionar títeres de varilla y generar su final para que recrearan la obra completa. El Equipo 3, decidió confeccionar los títeres de varilla e invitar a sus estudiantes a que presenciaran la representación de la obra hecha por los profesores, dejándoles a ellos la representación del final que propusieran. El Equipo 4, en cambio, se inclinó por narrar el cuento y solicitarle a sus estudiantes de primer año de secundaria confeccionar los títeres y preparar sus finales para representarlos. El Equipo 5 genera otro cuento cuyo argumento se centra en la clasificación de triángulos, decidiendo proporcionarles el cuento completo a un grupo de sus estudiantes para que confeccionaran los títeres de guante y lo representaran en el salón de clases a sus otros compañeros para generar un debate sobre lo equitativo del reparto de una herencia.

Diferentes son las ideas que surgen entre los profesores, todas para analizar la reacción de sus estudiantes ante un nuevo desafío, generar un ambiente discursivo especial al trabajar con títeres, donde emerja la clasificación de figuras geométricas.

Experiencia de los profesores

Comentaremos en este parágrafo el trabajo de cuatro de los equipos, aquellos que utilizaron la obra “la aldea de los rombos”, reportando diferentes análisis de su experiencia, todos coincidiendo en lo enriquecedor que fue trabajar con un grupo de estudiantes, filmarlos, observarse trabajar y confeccionar una síntesis de lo ocurrido.

Como mencionáramos antes, el Equipo 1 (ver Figura 1) mediante caricaturas establece el final del cuento valiéndose de un fiscal y un abogado defensor, así como de un juez quien organiza la discusión entre ambos personajes. Estos profesores invitan a un grupo de sus estudiantes de bachillerato a confeccionar los títeres de varilla, representar la obra y filmar un video, aprovechando la expertés de uno de los estudiantes. Se observa en su video que el grupo de titiriteros se divierte, evidenciando un gran trabajo para hacer los rombos y al cuadrado como títeres de varilla, pero su actividad se limita a "representar", es decir, repetir un discurso ajeno a ellos. No se les invita a construir su final, lo cual implica analizar las características de las figuras para decidir si el cuadrado se puede incorporar a la aldea de los rombos o no, por tanto, consideramos que al retener la creatividad de los jóvenes y no incentivarla matemáticamente, debilitan el desarrollo del pensamiento geométrico de los mismos. Es decir, les confirieren a sus estudiantes el papel de espectadores de la matemática que se desarrolla pese a que tenían que actuar como titiriteros.

Figura 1: Producción de Equipo 1

El Equipo 2 (ver Figura 2) nos sorprende al comentarnos que sus estudiantes de bachillerato conformaron dos grupos de trabajo. Uno de ellos, siguió las indicaciones de los profesores discutiendo su final, buscando información para defender al cuadrado y construir sus títeres de varilla para, al siguiente día, presentar la obra. El otro grupo, decidió hacer teatro, por tanto, se disfrazaron de juez, fiscal y defensor presentando también testigos y jurado. En el diálogo que proponen, se escuchan sus risas pero también características interesantes en los personajes como padres rombos, niños rombos, linaje de las familias de rombos, mostrando una lectura robusta de las figuras geométricas y su clasificación. Los profesores, luego de observar las presentaciones de los muchachos, generan una dinámica para consensuar con el grupo las ideas principales trabajadas enriqueciendo así el pensamiento geométrico de los estudiantes.

Figura 2: Producción de Equipo 2

El Equipo 3, decide trabajar en un primer año de secundaria al cual, luego de confeccionar los títeres de varilla, los telones, improvisar el teatrino y practicar sus participaciones como titiriteros, contando con un narrador, presentan la obra sin final. Al terminar, agrupan a los estudiantes en equipos y los desafían a generar su propio final. En esta puesta en escena, es interesante percibir la fragilidad en los argumentos matemáticos de los jóvenes pues se privilegia argumentos afectivos, es decir, aceptar al diferente por altruismo. Frases como "saltando en una patita el cuadrado es aceptado" o "ampliemos la aldea a todas las figuras", observando entonces que la forma y posición es priorizada a la hora de clasificar.

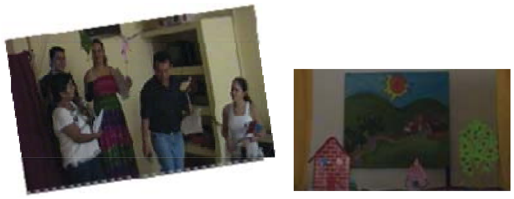


Figura 3: Producción de Equipo 3

El Equipo 4 (Figura 4), también desafía a un grupo de primer año de secundaria, narrándoles el cuento sin su final. Les entrega material para que construyan sus personajes como títeres de varilla, tarea que los obliga a estudiar las características de un rombo para construirlo con papel y pegarle una varilla para convertirlo en su títere. Darle un final al cuento, propicia la discusión e intercambio de ideas en los pequeños grupos de trabajo, donde van armando el diálogo utilizando sus títeres. La actividad continúa improvisando con las mesas y telas el teatrino para que los estudiantes, sentados en el suelo, representen sus obras. El entusiasmo demostrado por los estudiantes, a quienes se les había solicitado recabar información sobre cuadrados y rombos el día anterior sorprende a la maestra, quien comenta ante sus compañeros de taller: "es interesante ver cómo uno reconoce las actitudes y formas de ser de cada estudiante al verlos representar un personaje, son ellos mismos…" es decir, expresan más de los que ellos mismos son conscientes que están compartiendo y abriéndose a los demás.

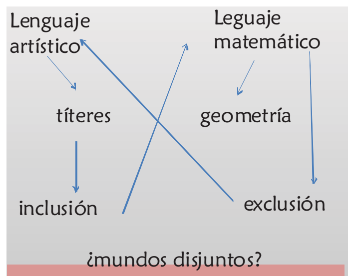
Figura 4

La relatoría y primer análisis que los profesores lograron realizar en las sesiones de cierre de la experiencia es lo que compartimos en este reporte, consensuando todos en que el desafiar a sus estudiantes a generar sus títeres y actuar, cambió el tono de la clase, el entusiasmo de sus estudiantes, la participación activa de todos, emoción con la que se profundizó su acercamiento a la caracterización de rombos y cuadrados así como la clasificación de cuadriláteros.

A manera de conclusión

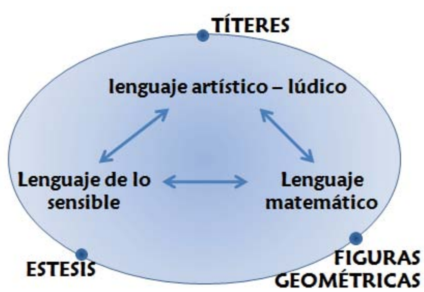
Tanto el títere como las matemáticas emergieron en ámbitos comunitarios con la necesidad de generar una manera de comunicar ideas, ambas con el propósito de conservar el acervo cultural.

El primero invita a reírnos, a reflexionar sobre nuestro imaginario, al desarrollo de esa sensibilidad o condición de abertura, permeabilidad o porosidad del sujeto al contexto en que está inmerso (Mandoki, 2008), propiciando la inclusión. El segundo, las matemáticas, pareciera ser percibido como un arduo camino que excluye y desanima a la mayoría de los jóvenes al ser presentada alejada de su cotidianidad. Pareciera que títeres y matemáticas conforman conjuntos disjuntos, en uno la invitación a la resiliencia, el otro a heredar escolarmente discursos ajenos; uno a propiciar la estesis, el otro a la exclusión.



Esquema 2: Síntesis

Sin embargo, lo presentado en este artículo nos da evidencia de que el entrelace intencional (Esquema 3) de ambos mundos genera acercamientos diferentes, nos abre a otras posibilidades exigiéndonos ser creativos y permeables al contexto. El entretejer el lenguaje matemático con el lenguaje artístico-lúdico y el lenguaje de lo sensible, nos desafía a conformar ámbitos discursivos particulares, donde las prácticas evocadas propicien la emergencia del saber que se desea construir, en este caso, la clasificación de figuras geométricas.



Esquema 3: Entrelace de ideas

La obra propuesta a los profesores nos sumerge en un conjunto de emociones y risas, de saberes construidos y decisiones a tomar, donde al invitar a los títeres a estar presentes la magia aparece, invoca a la estesis, proceso donde la interobjetividad se alía a la intersubjetividad abriendo una brecha para construir nuevos elementos y en particular a ejercer la práctica de clasificar, es decir, de percibir similitudes y diferencias, de normar las decisiones, de caracterizar los personajes, de utilizar un lenguaje particular.

Lo reportado por los profesores nos permite concluir que el uso de los títeres, otorga libertad de expresión a los estudiantes, propicia la generación de sus propias maneras de comunicar una idea matemática, de desafiarlos a decidir y argumentar geométricamente, enriqueciéndose así la interacción entre jóvenes en un ambiente lúdico e integrador, siempre y cuanto el docente esté abierto a generar un ambiente titiritesco genuino.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cantoral, R., Farfán, RM., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (4), 83 –102.

Carreher, T., Carreher, D. y Schilemann, A. (1991). *En la vida diez en la escuela cero: los contextos culturales de educación matemática*. (Primera edición en español). Madrid, España: Siglo XXI.

Chaiklin, S. y Lave, J. (Comps.) (2001). *Estudiar prácticas. Perspectivas sobre actividad y contexto*. Buenos Aires, Argentina: Amorrortu editores.

D´Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I & Sbaragli, S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica Analisi di situazioni di mancato apprendimento.* Italia: ERICKSON.

Escalada Salvo, R. (1993). *Taller de títeres*. Argentina: Aique didáctica.

Ferrari, M. (2010). Lo titiritesco en matemáticas ¿dos esencias en la misma práctica? En P. Leston (Ed.): *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol 23*. (pp.849-858). México: CLAME. Disponible en: http://www.clame.org.mx/alme.htm

Finkel, B. (1984). *El títere y lo titiritesco en la vida del niño*. Buenos Aires, Argentina: Plus Ultra

Santa Cruz, E. y García Labandal, L. (2008). *Títeres y resiliencia en el nivel inicial. Un desafío para afrontar la adversidad*. Rosario, Argentina: HomoSapiens Ediciones.

Mandoki, K. (2008). Estética cotidiana y juegos de la cultura. Prosaica uno. México: Conaculta-Fonca

Mederos, O. & Ruíz, A, (2007). Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexos. *Números 67*. Recuperado el 5 enero de 2010 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/67/ideas_02.php

Palomas, S. (2002). *Estrategias metodológicas para la promoción de la salud comunitaria. Los títeres tienen la palabra.* Argentina: Espacio editorial.

Rogozinski, V. (2005). *Títeres en la escuela. Expresión, juego y comunicación.* Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

Scaglia y Moriena (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática 17*(3). 105-120.

Szulkin, C. & Amado, B. (2006). *Entretelones. Una propuesta para el uso del teatro de títeres como herramienta socio-pedagógica en las escuelas rurales*. Argentina: comunicarte editorial.

Tillería Pérez, D. (2003). *Títeres y máscaras en la educación. Una alternativa para la construcción del conocimiento*. Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

EL USO DE FIGURAS DE ANÁLISIS EN ESCENARIOS NO ESCOLARES. SU INFLUENCIA EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Mónica Lorena Micelli y Cecilia Rita Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, CICATA - IPN México
monikmathis@gmail.com - crccrespo@gmail.com

Resumen. La investigación tiene su origen en las dificultades que presentan los alumnos del profesorado de Matemática para el uso de figuras de análisis. Esta problemática llevó a reflexionar sobre el rol que juegan estas figuras en la resolución de problemas en la sociedad. Para ello, se seleccionaron tres oficios que requieren la construcción de objetos (modista, tejedora y obrero de la construcción). En entrevistas, se obtuvo evidencia del uso de dibujos o croquis que acompañan a su labor. En estas prácticas detectadas, también presentes en el aula, pudieron observarse algunas normas propias de un determinado grupo social, relacionadas a su labor.

Palabras clave: figuras de análisis, escenarios no escolares, oficios

Abstract. The research has its origin in the difficulties in the use of analysis figures of students for mathematics teachers. This problematic that we take is reflecting on the roll of these figures in the resolution of problems in the society. So we selected three offices that require constructions of objects (seamstress, weaver and worker of the construction). The interviewed people that gave evidence of the use of drawings or croquis that accompanies their work. These practices are also present in the classroom, and their norms are caractheristic of certain social group.

Key words: analysis figures, non-academic settings, offices

Introducción

Las dificultades que presentan los alumnos del profesorado de Matemática en el uso de figuras de análisis, llevaron a reflexionar sobre cuál es el rol que juegan estas figuras en la resolución de problemas en la sociedad. Para ello se hizo un relevamiento histórico, recogiendo figuras que aparecen en distintos documentos matemáticos desde la antigüedad. También se relevó el uso de estas figuras, en la actualidad, tanto en escenarios académicos como fuera de ellos. En este reporte solo se tomará este último aspecto con la intención de profundizarlo.

Una manera de mirar la problemática que surge en el aula de Matemática es desde la visión de la Sociopistemología que permite comprender a la Matemática como una construcción social y analizar su presencia a través de los usos que se le da a sus conceptos en un escenario sociocultural determinado. Esta visión de la realidad se sustenta en cuatro pilares: epistemológico, didáctico, cognitivo y social. Este enfoque trata de explicar algunos mecanismos de "adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza" (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006, pp.85-86).

En esta investigación, la pregunta que surge y que se intentará responder es: ¿De qué manera se emplean las figuras de análisis en escenarios no escolares? Para poder dar respuesta a esta pregunta, se han seleccionado algunos oficios donde los entrevistados dan evidencia del uso de dibujos o croquis que acompañan a su labor. Veremos a continuación en estos escenarios socioculturales, sujetos que pertenecen a un grupo determinado, comparten un oficio en particular y poseen conductas que modelan sus formas de accionar.

Antes de continuar es fundamental dejar explicito qué se entiende para esta investigación por el término figuras de análisis. Estas son “figuras o bosquejos que no poseen rigurosidad geométrica, en donde se vuelca la información dada como primer paso ya sea para resolver un problema geométrico, una demostración o realizar una construcción” (Micelli, 2010, p.11). Es importante destacar que cuando se habla de no poseer rigurosidad, se hace referencia a que dichas figuras, bosquejos o esquemas como aparece en algunos textos, pueden ser realizados a mano alzada; no es necesaria la precisión que brinda el uso de regla, escuadra o compás. No se trata de construcciones geométricas sino simples dibujos que permiten comprender el problema, visualizando las ideas en el papel, buscando relaciones entre datos e incógnitas. Por tal motivo, no hace falta que haya una determinada escala numérica o que un ángulo mida exactamente lo indicado, por ejemplo. Estas representaciones no son un mero dibujo que acompañan al problema sino que se encuentran llenas de significados para quien las elaboró. Además, son dinámicas, ya que se puede ir agregando elementos según la interpretación del enunciado, empleando códigos algunos de los cuales se comparten en un grupo. Las figuras de análisis, generalmente no tienen la intención de comunicarse a otro, son una materialización de una imagen mental. Es así que se considere a las figuras de análisis como una herramienta en el proceso heurístico. Se identifica a las figuras como nociones paramatemáticas según la tipología planteada por Chevallard (1998) debido a que las figuras de análisis

> no se encuentran dadas en forma explícita, muchas veces, dentro del discurso matemático escolar pero que viven en su hacer diario. Existen libros de texto escolares que promueven su uso aunque muchas veces no se especifica a qué se refieren al hablar de figuras de análisis, también llamada figura auxiliar o bosquejo en otros países (Micelli y Crespo Crespo, 2011, pp.702-703).

Estas nociones paramatemáticas, en particular hacen referencia a “nociones-herramientas”, por lo tanto las figuras de análisis responden a esta categorización de herramienta (Micelli, 2010).

Escenarios no académicos

Este trabajo se centra, como se ha dicho, en el uso de figuras de análisis en escenarios no académicos, específicamente en el ámbito laboral de tejedoras, modistas y obreros de la construcción. El objetivo es comprender su uso en escenarios no académicos para estudiar qué características poseen y cómo ese análisis puede enriquecer el Discurso Matemático Escolar. Sabemos que día a día lo visual va reemplazando en muchos casos a lo expresado en forma escrita. Es así como podemos encontrar que en muchos libros escolares o, también, por ejemplo, manuales de diferentes artefactos las explicaciones presenten, cada vez más imágenes y menos texto explicativo. Las palabras de Alsina aseveran lo percibido diciendo que "en nuestros días la imagen ha adquirido en todos los niveles comunicativos una importancia capital, sustituyendo en muchos casos a mensajes de otro tipo." También ese cambio afecta a la escuela; en la clase de geometría, el dibujo tiene "doble interés: como lenguaje para meditar, ejemplificar o representar conceptos y propiedades, y como finalidad de representación fiel y rigurosa" (Alsina, citado en Ferragina, Fisichella y Rey, 1999, p.32).

En los escenarios no académicos, el conocimiento científico no es central de manera intencional, pero eso no significa que en ellos no se pueda construir y manejar este tipo de conocimiento, e incluso influir en la construcción de conocimiento que se lleve a cabo en un escenario académico (Crespo Crespo, 2009). Se plantea que es "en este tipo de escenarios laborales (ligados a trabajos en oficios), las ideas matemáticas están sumergidas en el contexto situacional; las simbolizaciones y conceptualizaciones matemáticas usadas cotidianamente funcionan de manera intuitiva, sin rigor matemático y a veces como nociones implícitas" (Elguero 2009, p.17).

La realización de figuras de análisis puede considerarse dentro de las "prácticas de uso", entendiendo por ellas a "todo aquello de empleo rutinario de saberes matemáticos que el ser humano, con una cultura específica, ha implementado en la búsqueda de soluciones a problemas prácticos de su vida cotidiana y profesional". Estas ideas se amplían afirmando que "estas 'prácticas de uso' son empleadas en casi todos los oficios de carácter artesanal y en la resolución de problemas de la vida diaria, de manera intuitiva, sin ningún rigor matemático" (Mingüer 2006, p.11). A continuación se presentarán dibujos que aunque pertenecen a oficios distintos podrá concluirse que tienen rasgos socialmente compartidos por grupos que tienen en común, en su labor, la construcción de objetos.

Las figuras de análisis asociadas a distintos oficios

En este marco se intenta registrar qué características presentan las figuras de análisis y cuáles son las normativas que se ponen en juego en su construcción en determinados oficios. En la investigación (Micelli, 2010) se dejó evidencia de que las figuras de análisis comparten similitudes en su uso en determinados grupos asociados por sus labores. Pudo relevarse el uso de figuras que son elaboradas por sujetos en su quehacer diario, dibujos que fueron construidos y se encuentran relacionados con su oficio. A continuación se presentan y analizan algunos ejemplos tomados de cuatro investigaciones (Covián, 2005; Elguero, 2009; Fioriti, 1999 y Micelli, 2010). Los oficios seleccionados son: tejedora, modista y obrero de la construcción, a simple vista parecen muy distintos pero puede concluirse que los tres comparten un eje en común: la elaboración de un determinado objeto que requiere poseer unas medidas establecidas a priori. En dicha construcción es donde aparecen, en todos estos casos, dibujos que guían el proceso de construcción desde un inicio, dibujos que no siempre se realizan sobre un papel.

Dibujos de una tejedora

En el caso de la tejedora, pudo observarse que su cuaderno, donde realiza los cálculos para confeccionar las prendas a medida, contiene varios dibujos en cada página. Dibujos que fueron realizados a mano alzada, con marcadas irregularidades en su trazado, con medidas que no guardan una relación proporcional con los números que acompañan a dicho dibujo (Figura 1).

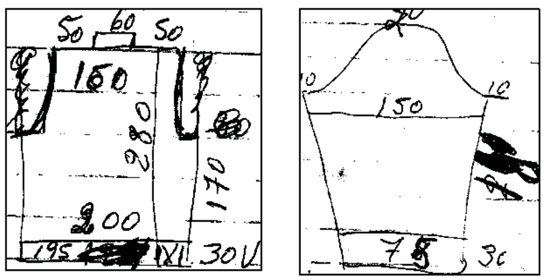


Figura 1. Dibujos para la confección de un pullover

En la entrevista realizada a la tejedora pudo extraerse, en principio, que estos conocimientos fueron adquiridos en una formación asistemática, porque se lo explicó la madre, es decir se trata de un saber transmitido de una generación a otra, en forma oral.

Haciendo referencia a la confección de los dibujos, la tejedora explica: "Primero hago el dibujo y luego lo completo con los resultados de los puntos y con las vueltas de las cuentas que hago (…) Los números que están ubicados en forma vertical representa las vueltas y los horizontales, los puntos necesarios" (Micelli, 2010, p.167). De sus palabras pueden extraerse varias conclusiones: en primer lugar, estos dibujos sirven de soporte para volcar los datos calculados, para guiar su trabajo al momento de confeccionar la prenda. En segundo lugar, puede deducirse que en su construcción hay una norma que no tiene la finalidad de comunicarse a otro sino de organizar los datos. Dicha norma que se desprende se puede sintetizar como 'los números ubicados en forma vertical equivalen a la cantidad de vueltas que necesita realizar para alcanzar la medida buscada, mientras que los números ubicados en forma horizontal hacen referencia a los puntos requeridos'. Puede interpretarse, en la figura 1, que

200 equivale a los puntos necesarios para el ancho del pullover mientras que 280 es el total de vueltas necesarias para lograr el largo requerido.

Estos dibujos presentan similitudes a lo largo de todo el cuaderno, si se trata de una prenda de pullover todos los dibujos tienen tamaños similares independientemente de las medidas que expresan, es decir, independientemente si se trata de una prenda para un niño o un adulto. Al respecto la tejedora comenta: “es un croquis para poner los puntos y las vueltas pero no necesita tener las medidas reales de la prenda” (Micelli, 2010, p.167). Puede observarse que la entrevistada hace referencia al dibujo con el término “croquis”, según lo expuesto en esta investigación estos dibujos cumplen con la definición dada para figuras de análisis. Además la tejedora responde que no hace falta que las líneas sean rectas, lo cual remarca la imprecisión que pueden presentar estas figuras sin distorsionar, estas irregularidades, el fin que lleva su confección. En este caso, el objetivo de estas figuras es volcar los datos calculados en una forma ordenada, bajo una norma personal que facilite el trabajo de confección de la prenda. “(…) estos croquis son figuras de análisis confeccionadas y creadas por el propio sujeto para responder a sus necesidades laborales, que amoldó los métodos explicados en libros a sus propios conocimientos y experiencia para crear un método propio” (Micelli, 2010, p.168).

Dibujos de una modista

Es evidente que el proceso de elaboración de una prenda por parte de una tejedora es muy distinto al de una modista pero, aún así, pueden observarse similitudes. En ambos oficios se trabaja con la geometría del cuerpo humano y para la construcción de las prendas se pudo identificar en los dos oficios abordados hasta el momento, la confección de dibujos que permiten visualizar las partes de la prenda antes de su confección.

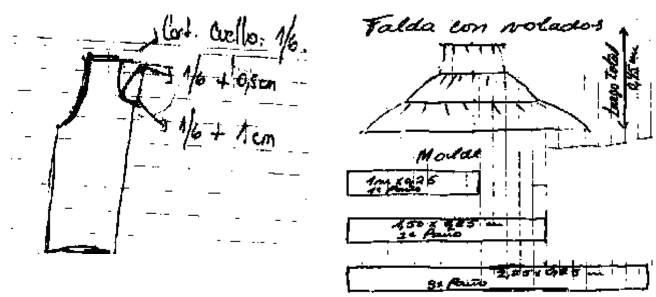


Figura 2. Dibujos de una modista (Elguero, 2009, pp.91, 108)

En el primer dibujo de la figura 2, puede verse solo la mitad de la pieza a elaborar, esto se debe a la simetría que presenta el cuerpo humano con respecto al tronco que es tomado como eje de simetría (Elguero, 2009). Al igual que en el caso anterior, el dibujo también presenta irregularidades y en él se vuelcan los datos necesarios para poder confeccionar el molde con el cual se cortará luego la pieza en la tela.

En el segundo dibujo (figura 2), realizado por la modista para explicar el procedimiento necesario para calcular las medidas de una pollera con tres vuelos, puede observarse que existen dos tipos de dibujos, uno pictórico, que representa la prenda que se desea realizar mientras, en la parte inferior es acompañado por otros dibujos que representan los moldes con las medidas necesarias para confeccionar dicha prenda.

Puede observarse que ambos oficios poseen una gran similitud, pues en los dos se debe elaborar una prenda a medida, puede notarse también que en ambos casos existe una necesidad de registrar los datos necesarios para que la prenda responda a las medidas deseadas (ya sean puntos y vueltas o medidas del molde). La construcción de estos dibujos o croquis, no son otra cosa que figuras de análisis que permiten visualizar los datos necesarios para resolver el problema como es realizar la prenda.

Dibujos de los obreros de la construcción

En el caso de las entrevistas realizadas en el trabajo de Fioriti (1999) puede observarse que los albañiles realizan gráficos que acompañan su explicación sobre las construcciones.

> También la capacidad de imaginar y anticipar transformaciones espaciales es una habilidad desarrollada por los obreros especialmente en situación de resolver problemas espaciales; los gestos o el dibujo actúan como soporte cuando se trata de comunicar la solución. Esta capacidad también se pone de manifiesto aunque de manera implícita cuando se enseña y aprende a trabajar (Fioriti, 1999, pp.111-112).
>
> D (Daniel): yo de ahí le tengo que sacar para ponerla a 45, para poner una pared así más o menos, tengo que sacar a la pared
>
> E (entrevistador): y ¿cuánto le saca? ¿cómo hace para hacer eso
>
> D: y tiene que ser más o menos un metro, un metro ochenta y me queda 45°. (Fioriti, 1999, p.96).

Es posible concluir que las explicaciones dadas por Daniel, no son muy claras pero del dibujo que realiza conjuntamente mientras da su respuesta (figura 3) puede desprenderse que “toma la misma distancia desde el vértice de un ángulo recto y une los puntos marcados con lo cual le queda formado un triángulo rectángulo isósceles, garantía de que los ángulos de la base son de 45°” (Fioriti, 1999, p.96).

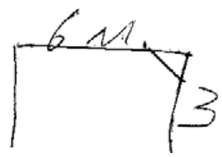


Figura 3. Explicación para construir un ángulo de 45° (Fioriti, 1999, p.96)

Con respecto a cómo hacer una arcada, otro entrevistado realiza, como el caso anterior, un dibujo para acompañar su explicación:

> R (Reginio): ahí me indican la medida que tiene de acá (dibuja y señala la altura) supongamos que acá vamos a hacer una arcada, me tiene que dar la medida el capataz, del plano es un metro y un metro acá y buscarle la vuelta ingeniármelas para que me dé la altura (Fioriti, 1999, p.99)

Figura 4. Para una arcada (Fioriti, 1999, p.99)

En la figura 4, puede verse que la gráfica no responde a la rigurosidad que requiere la construcción de una arcada: ángulos rectos, trazos rectos y una semicircunferencia para la arcada. Pero a pesar de todo ello, el dibujo parece ser el soporte para una explicación que no es muy clara.

No siempre estos dibujos son presentados en un soporte convencional como es el papel, evidencia de ello ha quedado registrada en la investigación de Covián (2005), donde el constructor de casas mayas realiza un esquema sobre la tierra para ir explicando cómo construye las viviendas tradicionales mayas. Casas que guardan una relación en sus medidas y características en función de quienes la habitaran y según sus necesidades, razón por lo cual la construcción es muy singular. En la figura 5, se ha reproducido a la derecha la figura creada en la tierra acompañando la explicación de cómo se construyen y se toman las medidas en este tipo de viviendas.

Figura 5.Explicación sobre la tierra (Covián Chávez, 2005, p.119)

Conclusiones

En síntesis, los tres oficios detallados pueden presentar diferencias en su quehacer, pero se ha dejado evidencia de la utilización de figuras en su labor. Además en los tres oficios, las figuras de análisis tienen algunas características similares: el dibujo con sus irregularidades se encuentra asociado a una modelización del objeto a elaborar, ya sea una prenda o una construcción edilicia. Por lo tanto, puede decirse que en dichas figuras se modeliza un espacio de tres dimensiones en un espacio de bidimensional. Además el dibujo anticipa el resultado a elaborar permitiendo una visualización de las medidas requeridas.

En los tres casos, tanto la interpretación como la representación gráfica (llamada figura de análisis para el presenta trabajo) hacen alusión a una información espacial de objetos a construir. En cambio, en la mayoría de los problemas abordados en el aula de Matemática, las representaciones gráficas hacen alusión a representaciones de objetos matemáticos, en su mayoría a entes geométricos, razón por la cual se busca en su construcción la mayor perfección posible. Esta búsqueda de perfección no es necesaria en las figuras de análisis pues lo que se busca en ellas es una visualización concreta de una imagen mental, el soporte sobre el cual se buscarán relaciones entre datos dados e incógnitas. Más aún la perfección puede llevar a extraer conclusiones erróneas ya sea por tomar un caso particular y perder así la generalidad del problema o también pueden ponerse en juego las ilusiones ópticas de las cuales nuestros ojos no pueden escapar.

Estas prácticas que se detectaron en distintos oficios donde pudo observarse algunas normas y que son propias de un determinado grupo social, afín a su labor, están presentes en el aula. Cabe el interrogante de si los docentes de Matemática hacen explicita la utilidad de la elaboración de figuras de análisis al momento de resolver un problema. Al caracterizarse a las figuras de análisis como objetos paramatemáticos estamos asumiendo que son objetos que no se enseñan como tales, sino que se los emplea bajo condiciones implícitas en el discurso matemático escolar. El problema radica en si nuestros alumnos perciben y hacen consciente eso "no dicho" sobre las figuras de análisis.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, 83-102.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Cován, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Crespo Crespo, C. (2009). Una caracterización de los escenarios socioculturales desde la socioepistemología. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1061-1069. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Elguero, C. (2009). *Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural del trabajo*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Ferragina, R., Fisichella, L. y Rey, G. (1999). *Matematizando*. Buenos Aires: UPR, Un problema resuelto.

Fioriti, G. (1999) *Conocimiento geométrico de los obreros de la construcción: conocimiento situado versus conocimiento escolar*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Micelli, M. (2010). *Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Micelli, M. y Crespo Crespo, C. (2011). Las figuras de análisis en el aula de matemática. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 701-709. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Mingüer, L. (2006). *Entorno Sociocultural y cultura matemática en profesores de nivel superior de educación. Estudio de caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

LA INSTITUCIONALIDAD, FUNCIONALIDAD E HISTORICIDAD. ELEMENTOS PARA EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Karla Gómez, Francisco Cordero
CINVESTAV-IPN México
kmgomez@cinvestav.mx; fcordero@cinvestav.mx

Resumen. El trabajo distingue como problemática fundamental que el discurso Matemático Escolar (dME) produce un fenómeno de opacidad del conocimiento de la vida cotidiana. Para atender este fenómeno se le apuesta al desarrollo de la socialización del conocimiento matemático caracterizado a través de tres Procesos Sociales (ProSoc) los cuales son la expresión de la función social del conocimiento en el cotidiano: el Proceso Institucional (PI), el Proceso Funcional (PF) y el Proceso Historial (PH), cuya función social es la construcción, el funcionamiento y la organización del conocimiento, respectivamente. Como resultado se propone el desarrollo de la institucionalidad, funcionalidad e historicidad del conocimiento matemático como ejes para el Rediseño del dME.

Palabras clave: institucionalidad, funcionalidad, historicidad, socialización, opacidad

Abstract. This work distinguishes as fundamental problematic: school mathematical discourse (DME) produces knowledge opacity phenomenon of everyday life. To understand this phenomenon is betting on the development of mathematical knowledge socialization characterized by three social processes (ProSoc) which are the expression of the social function of knowledge in the daily: Institutional Process (PI), the functional process (PF) and the Process History (PH), whose social function is the construction, the functionality and organization of knowledge, respectively. As a result we propose the development of institutionality, functionality and historicity of mathematical knowledge as axes for the Redesign of the DME.

Key words institutionality, functionality, historicity, socialization, opacity

Introducción

El trabajo distingue como problemática fundamental que el discurso Matemático Escolar (dME) produce un fenómeno distinguido como la *opacidad del conocimiento de la vida cotidiana*. Este fenómeno no permite darle visibilidad a otros dominios de conocimiento que no están centrados en el objeto matemático, sino que son de un carácter funcional y que varían dependiendo de la comunidad, de su contexto y de la vida cotidiana.

Partiendo de este hecho, la Matemática Educativa distingue la necesidad de un Rediseño del dME, que privilegie estos aspectos que han quedado opacados bajo un discurso que tiene un grado de supremacía y legitimidad social, de tal manera que hace parecer que ese es el único conocimiento y todos debemos acceder a él. Entonces, ¿cómo tendría que ser este Rediseño?

Para atender este fenómeno se le apuesta al desarrollo de la socialización del conocimiento matemático, reconociéndolo como la expresión de los grupos sociales en busca de la permanencia de aquellos conocimientos que consideran deben continuarse. Por lo tanto, este proceso lo caracterizamos a través de tres Procesos Sociales (ProSoc) los cuales son la expresión de la función social del conocimiento en el cotidiano: el Proceso Institucional (PI), el Proceso Funcional (PF) y el Proceso Historial (PH), cuya función social es la construcción, el funcionamiento y la organización del conocimiento, respectivamente, (Gómez, 2009). Es a través de los ProSoc que se desarrollará la socialización del conocimiento matemático para expresar la permanencia de dicho conocimiento.

Bajo esta postura, el conocimiento de la vida cotidiana tendrá que alcanzar mayor robustez y ser entendido en los procesos de socialización del conocimiento, (Cordero, Gómez, Silva y Soto, 2012).

Entonces, ¿de qué conocimiento matemático estamos hablando? La teoría Socioepistemológica sostiene que la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática no recae sobre el profesor, ni sobre el estudiante, sino que le apuesta a que es el dME el causante. Como consecuencia, se acepta que toda persona puede aprender, sólo hay que crear las condiciones para que se propicie el aprendizaje. En este sentido, pensar un Rediseño del dME que permita hacer socializable el conocimiento tendrá que ser abordado desde una mirada que concibe el conocimiento de manera funcional y que reconoce la diversidad de epistemologías para construir conocimiento.

La Socioepistemología nos provee de estas categorías del conocimiento matemático funcional, en nuestro caso la Categoría del Comportamiento Tendencial ζ(ctf), que pone énfasis en la descentración de los objetos matemáticos y, en su lugar, cuestionarse por "aquello" que obliga a construir los objetos, es decir, a las prácticas sociales que norman la construcción de los objetos matemáticos, (Cordero, 2006).

Los resultados de la investigación, van orientados hacia aquellos elementos que trazarán rumbo para el Rediseño del dME y las consideraciones necesarias para desarrollarlos.

Problemática: La opacidad del conocimiento de la vida

Distinguimos como problemática fundamental un fenómeno que llamaremos la opacidad del conocimiento de la vida, el cual es consecuencia del actual dME. Para explicar a qué nos referimos con este fenómeno creemos conveniente comenzar ejemplificando una situación.

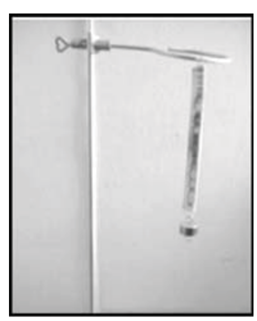


Figura 1: Resorte con pesa

Ante la indicación de dibujar el movimiento de un resorte al colocarse una pesa, ¿qué tipo de respuesta se recibe?, ¿cómo sería este dibujo? (ver Figura 1) Seguramente la respuesta hará uso de algunos términos como funciones, gráficas, tal vez un poco de álgebra, ciertas definiciones, incluso se podría hablar de geometría o física. Pero estos argumentos que nombramos, ¿son producto del conocimiento propio, es decir, surgen como consecuencia de nuestros conocimientos de la vida cotidiana o más bien son respuestas promovidas desde la matemática escolar?

Bajo nuestra postura, estas respuestas que recurren a conceptos que ya están legitimados socialmente y que se promueven sobre todo en el aula, son producto del dME. Pareciera que son las repuestas naturales ante tal situación, incluso los estudiantes tienden a responder con argumentos parecidos cuando se les realiza esta pregunta dentro de los escenarios escolares. Pero analicemos este punto, es decir, ¿qué responderían bajo esta situación y fuera de un escenario del aula?, ¿qué es lo que mira un ciudadano ante la tarea de dibujar este movimiento? Justo este punto expresa la opacidad del conocimiento de la vida cotidiana. No contamos con argumentos del cotidiano del ciudadano como referentes para enseñar matemáticas, no son visibles como herramientas didácticas explícitas y por lo tanto, no toman un papel fundamental en nuestras maneras de promover el aprendizaje.

Al realizar esta situación en niños y jóvenes durante algunos episodios de divulgación se obtuvieron resultados que hacen cuestionarnos sobre la naturaleza de dichas respuestas. Como ejemplo, mostraremos los siguientes.

Esta figura (Figura 2) es lo que uno de los ciudadanos-participantes respondió ande la situación. Para él tiene sentido y le permite explicar el fenómeno del resorte. Al preguntarle ¿qué significan las rayas alrededor?, él responde: *"…pues que se está moviendo"*. Posteriormente al cuestionarle sobre el tiempo en que tarda en detenerse el resorte y cómo se encuentra expresado en el dibujo, la respuesta es: "*ocho segundos*" y dos justificaciones que se obtuvieron fueron: *"porque rebota 8 veces"*, *"porque tienen 8 flechas"*. Haciendo referencia a las flechas para arriba y para abajo que tiene el dibujo en los lados.

Figura 2: Dibujo de resorte

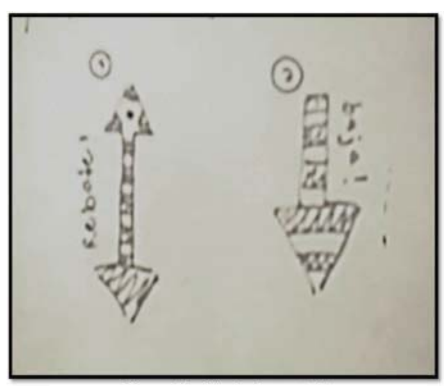


Figura 3: Dibujo de resorte 2

Otro ejemplo que expresa el cotidiano de los jóvenes es este caso donde se evidencia que dentro de su razonamiento hacen referencia a diferentes opciones de lo que podría suceder.

Por ejemplo, expresan lo siguiente: *"son dos teorías: la primera (caso 1) es que si la pesa es pesada como para que el resorte pueda bajar y subir; pero si la pesa es muy pesada para el resorte (el caso 2) entonces se queda abajo porque la pesa se va y ya no sube"*, (ver Figura 3).

Un tercer ejemplo, es el que nos puede parecer que se acerca más a la situación que se pretende representar, (ver Figura 4).

Figura 4: Dibujo de resorte 3

En este dibujo, ¿qué es lo que nos quiere expresar este joven con los picos dibujados?, ¿qué es lo que mira?, ¿tendrá su centro de atención donde el dME espera, es decir, en una función o en una gráfica cartesiana?

En general, el dME al privilegiar ciertos argumentos legitimados y que toman un estatus hegemónico (Soto, 2010) ha opacado otro tipo de argumentos como los que surgen en este experimento y que son la viva expresión de un conocimiento desde la vida cotidiana de los jóvenes entrevistados. Por tanto, el estatus de este tipo de argumentos es siempre menor y quedan rezagados en la matemática escolar, de hecho ni siquiera son parte de los marcos de referencia para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no se les ha dado un estatus que les permita ser un elemento para hacer visibles y fomentar la diversidad de epistemologías del conocimiento.

Para cerrar este apartado, hacemos hincapié en la siguiente cuestión, ¿cómo tomamos en cuenta la manera en que se explican nuestros estudiantes el conocimiento matemático desde sus conocimientos cotidianos?, es decir, ¿cómo atendemos la opacidad de la que hablamos y promovemos la visibilidad de los diferentes argumentos desde el cotidiano del ciudadano?

La socialización del conocimiento matemático: La institucionalidad, funcionalidad e historicidad

Para atender el fenómeno de opacidad se cree conveniente tener una postura del hombre haciendo conocimiento, es decir, sin una comunidad no hay conocimiento. En este sentido nos cuestionamos no por el conocimiento en sí, sino por su función social y por la manera en que ésta se ve expresada en el conocimiento de la vida cotidiana. Para ello fue necesario entender un mecanismo por el cual el conocimiento se ha desarrollado socialmente, este mecanismo es el proceso de socialización.

De acuerdo a las referencias de estudio, el proceso de socialización atiende a la permanencia del conocimiento. Algunas perspectivas sobre la relación entre la socialización y la permanencia las declaramos a continuación. Desde 1897, Giddings pensaba que la permanencia se lograba a través de la adaptación al otro, es decir, cuando entiendes y te acomodas a lo que hay y lo que se quiere; mientras en 1916 Burgess afirmaba que el punto es la coparticipación ya que importa lo que quiere el otro pero también lo que uno mismo necesita; en 1957, Sears, Maccoby y Levin le apuestan a la imitación de comportamientos para lograr esa permanencia; en 1967, Berger y Luckmann enfatizan hacia una ontogenia social, es decir, hacia la formación y el desarrollo de los grupos sociales; en 1911, Durkheim expresa que es la socialización la función de la escuela y que es a través de la creación de seres sociales donde interpretamos que se logra la permanencia del conocimiento.

Por lo tanto, reconocemos al proceso de socialización como la expresión de los grupos sociales en busca de la permanencia de aquellos conocimientos que consideran deben continuarse.

Si creemos en esta postura, el punto de reflexión será entonces hacia cómo socializar el conocimiento matemático, lo cual es lo que nos concierne.

Arendt (1958) afirma que los hombres somos condicionados por el simple hecho de ser humanos, en sus palabras: "Los hombres son seres condicionados, ya que todas las cosas con las que entran en contacto se convierten de inmediato en una condición de su existencia", (Arendt, 2005, p. 36). Esta postura la retomamos para preguntarnos, ¿qué actividades realizan los grupos humanos, desde su cotidianidad, para socializar su conocimiento? La respuesta a esta cuestión será dada a través de los ProSoc los cuales son la expresión de la función social del conocimiento en el cotidiano: el PI, el PF y el PH, cuya función es la construcción, funcionamiento y organización del conocimiento, respectivamente, (Gómez, 2009).

Es a través de los ProSoc que se desarrollará la socialización del conocimiento matemático para expresar la permanencia de dicho conocimiento. El PI será aquel que exprese la construcción del cuerpo de conocimiento, el PF es la expresión del funcionamiento del conocimiento y el PH se manifiesta en aquellas prácticas de la comunidad que permiten organizar el conocimiento.

Por la naturaleza de los ProSoc y para mostrar evidencia de su desarrollo consideramos que el tipo de método que justifica nuestro trabajo es de tipo cualitativo. Además, se propone un estudio de contraste para mostrar evidencias del proceso de Socialización del CM en diferentes comunidades, y de esta manera justificar el papel que juegan los ProSoc en cada tipo de comunidad.

Como hipótesis de la investigación proponemos que el desarrollo de los ProSoc es a través de tres ejes (ver Figura V). Para el PI, de poner la atención sobre los objetos matemáticos deberá desarrollarse hacia ideas más transversales del conocimiento matemático. Con respecto al PF, no es suficiente tomar en cuenta el contexto, si no se desarrolla hacia los diferentes usos del conocimiento matemático nos quedaremos en cambiar de forma el conocimiento pero no de fondo. Por último, el PH deberá cambiar la mirada, de considerar al estudiante en los marcos de referencia para la enseñanza y aprendizaje de la matemática hay que ampliar estos marcos hacia el conocimiento del ciudadano en su cotidiano, considerar sus argumentos y su forma de expresar y concebir el conocimiento.

Por lo tanto, el desarrollo de los ProSoc, es decir desarrollar el PI, PF y PH del conocimiento, permitirá marcar dirección hacia el Rediseño del dME.

Conclusiones: Hacia un rediseño del dME socializable

¿Hasta dónde nuestros marcos de referencia para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas toman en cuenta las características del conocimiento de la vida cotidiana de nuestro país?

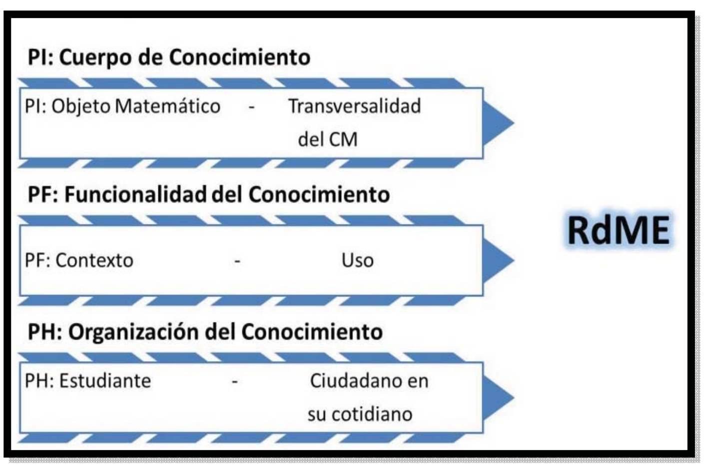


Figura 5: Elementos para propiciar un conocimiento socializable

El dME, con base en su epistemología de objetos, eliminó la realidad social, aquella donde el humano socializa para construir su conocimiento. El conocimiento matemático se presenta despersonalizado y rompe con la epistemología de la socialización, por lo que se encuentra alejado del humano.

Esto trae como consecuencia una falta de visibilidad del conocimiento de la vida cotidiana en estos marcos de referencia, es decir, no toman en cuenta los procesos sociales de los grupos humanos para construirse. Se fomenta una opacidad al conocimiento de la vida.

Así, desde la Matemática Educativa se reconoce la necesidad de un Rediseño del dME que permita hacer socializable el conocimiento. Esto se logrará con el desarrollo de los tres ejes propuestos PI, PF y PH.

Por lo tanto, bajo una mirada socioepistemológica se propone el desarrollo de la institucionalidad, funcionalidad e historicidad del conocimiento matemático como ejes para el Rediseño del dME.

El proceso de socialización tendrá que poner a la mesa la relación entre el conocimiento matemático y el conocimiento cotidiano: si no se trastoca el conocimiento hacia categorías transversales, no se dirige la mirada hacia los usos y no se concibe la organización del conocimiento dirigido a un ciudadano seguiremos en un discurso vertical, inflexible y alejado de la realidad Latinoamericana.

Referencias bibliográficas

Arendt, H. (2005). *La condición humana*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S.A. (Versión original 1958).

Berger, P. y Luckman, T. (2006). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires: Amorrortu. (Versión original 1967).

Burgess, E. (1916). *The Function of Socialization in Social Evolution.* Chicago: University of Chicago.

Cordero, F. (2006). *La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar.* En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 824-830. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C

Cordero, F., Gómez, K., Silva, H. y Soto, D. (2012). Exclusión, Cotidiano e Identidad: Una problemática fundamental del aprendizaje de la matemática. En Flores, R. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 1041-1048. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C

Durkheim, E. (1976). *La educación: su naturaleza, su función*. En E. Durkheim, Educación como socialización (pp. 89-113). Salamanca: Ediciones Sígueme. (Versión original 1911).

Giddings, F. (1897). *The Theory of Socialization: A Syllabus of Sociological Principles*. New York: The Macmillan Company; London, Macmillan & co., ltd.

Gómez, K. (2009). *Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico.* (Tesis de Maestría inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.

Sears, R., Maccoby, E. y Levin, H. (1957). *Patterns of child rearing*. California: Stanford University Press.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica.* (Tesis de Maestría inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.

CAPITULO 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

Introducción al Capítulo de El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional

Marger da Conceição Ventura Viana

Universidade Federal de Ouro Preto (Brasil)
margerv@terra.com.br

El capítulo aborda los procesos involucrados en la formación del profesor de matemáticas incluyendo su pensamiento, sus prácticas y, además, los elementos que se consideran indispensables para su formación profesional en la carrera docente educativa de Licenciatura en Matemáticas.

Inicialmente, se trata lo referente al pensamiento del profesor y, en particular, los tipos de pensamiento que deben desarrollarse en su formación, sus características. Se hace énfasis en el pensamiento independiente pues se valora la necesidad de que el profesor pueda utilizar por sí mismo los conocimientos que posee para instrumentar estrategias metodológicas que posibiliten a los estudiantes la construcción de los conocimientos matemáticos en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Como una vía para contribuir al desarrollo de ese tipo de pensamiento, se trata la enseñanza de conceptos matemáticos sobre la base de diferentes posiciones teóricas con el fin de capacitar al futuro profesor en la instrumentación de métodos y técnicas que lo conduzcan al logro de sus objetivos. Para una mejor comprensión de este aspecto, se ofrecen ejemplos que ilustran cómo se expresan en la práctica los enfoques metodológicos que se valoran y se incluyen trabajos de investigación pedagógica en el campo de las matemáticas.

Posteriormente, se analiza la concreción de esos enfoques en la práctica de la enseñanza que el profesor realiza en el aula, es decir, la significación de la práctica en su relación con la teoría y su necesaria coherencia. Para ilustrar este aspecto, se ofrecen diversos ejemplos de intervención en el aula donde se muestran los resultados de procesos educativos dirigidos al aprendizaje de las matemáticas.

El tratamiento del currículo se incluye como momento central de este capítulo en su doble dimensión: el currículo específico para la formación de profesores de matemática y el currículo para la enseñanza de las matemáticas que el alumno utilizará una vez egresado de la carrera en los distintos niveles de enseñanza donde ejerza su labor su labor profesional.

A esos efectos, se ofrecen para su análisis y valoración, propuestas de perfeccionamiento de programas y de currículos para la formación inicial de profesores de matemáticas, tanto en su modalidad presencial como "on line". Entre otras propuestas, se sugieren las que van dirigidas al proceso de evaluación del aprendizaje en la propia formación de profesores de matemáticas.

Al analizarlo en su otra dimensión, se hace énfasis en que para el logro de un proceso educativo exitoso, es indispensable que el profesor tenga un buen dominio del currículo que desarrolla, su significado para la labor en el aula, su función, estructura y utilización en la determinación de los objetivos y contenidos de cada momento del proceso educativo que planifica. Como complemento, se presentan ejemplos de diversas actividades prácticas de utilización del currículo.

La relación de la práctica con los conocimientos teóricos se retoma cuando se analiza la importancia de las prácticas del profesor en formación y se presenta en las diversas modalidades con sus objetivos y formas de instrumentación.

De manera particular, se abordan los diferentes tipos de medios de enseñanza y su utilización. Con la presentación de estos contenidos, se incluyen las prácticas de apropiación, construcción y/o desarrollo de los ya establecidos así como la creación de medios que considere propician un óptimo resultado en la aplicación de los métodos de enseñanza que ha seleccionado.

Es indiscutible que el profesor necesita estar actualizado en el uso de la tecnología, consecuentemente, se presta especial atención al uso de los programas de computación. Esos programas ofrecen múltiples oportunidades de elevar la efectividad del proceso educativo porque ayudan a la apropiación de contenidos muy importantes, hoy en día, en la formación presencial y en la formación a distancia (EAD) como, por ejemplo, la visualización de figuras o su desplazamiento en el espacio.

La resolución de problemas de diversa naturaleza para el aprendizaje de las matemáticas constituye un reto actual y, por esa razón, se enfatiza como un objetivo que debe estar presente en la formación del profesorado. En este contexto, se analiza el papel de la modelación matemática de la realidad en la solución de problemas y se valora la importancia de investigar con los estudiantes la modelación matemática para la enseñanza de esos contenidos.

Además, se abordan otros elementos generales referidos a las matemáticas como rama del conocimiento cuya utilización como recurso metodológico es un hecho en la enseñanza de las matemáticas y, consecuentemente, se entiende necesario incluir esos contenidos en el currículo para la formación de sus profesores, por ejemplo, la historia de las matemáticas y las etnomatemáticas.

Para finalizar, también se presentan los contenidos de psicología que se consideran indispensables en el currículo para la formación de un profesor en cualquier campo de enseñanza por cuanto le permiten conocer al alumno, las características de su edad, su personalidad, sus relaciones personales, los procesos que tienen lugar en la construcción del conocimiento, entre otros..

RELAÇÕES ENTRE A FORMAÇÃO DOS PROFESSORES E O CURRÍCULO

Wanderlei Aparecida Grenchi, Angélica da Fontoura Garcia Silva
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
grenchi@gmail.com, angelicafontoura@gmail.com

Resumo. Este artigo apresenta algumas relações que se estabelecem entre a formação do professor e suas percepções acerca da instituição de um novo currículo de matemática no Estado de São Paulo – Brasil. Os resultados apresentados baseiam-se na releitura de alguns dados provenientes de uma dissertação finalizada em 2011, para a qual entrevistamos 36 professores de matemática em efetivo exercício do magistério para o Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano) e ou Ensino Médio. Nosso estudo concentrou-se na identificação do posicionamento dos professores de matemática sobre o novo currículo e em suas opiniões acerca de algumas inovações metodológicas propostas neste documento, objetivando assim, relacionar as possibilidades oferecidas por esse processo de mudança curricular no desenvolvimento profissional dos professores participantes da pesquisa.

Palavras chave: educação matemática, formação de professores, mudança curricular

Abstract. This paper presents some relationships established between teacher education and their perceptions about the institution of a new mathematics curriculum in the State of Sao Paulo - Brazil. The results presented are based on the reinterpretation of some data from a dissertation completed in 2011, for which we interviewed 36 teachers of mathematics in effective practice of teaching for Elementary Education II (6th to 9th grade) or high school. Our study focused on the identification of the positioning of math teachers about the new curriculum and in their opinions

Key words: mathematics education, teacher training, curriculum change

Introdução

O Currículo do Estado de São Paulo, desenvolvido pela Secretaria Estadual de Educação (SEE) e destinado ao Ensino Fundamental – Ciclo II e ao Ensino Médio, foi primeiramente implementado no ano de 2008 como uma Proposta Curricular e oficializado como novo currículo no ano de 2010. Este currículo originou a introdução de alguns materiais instrumentais denominados Caderno do Professor, Caderno do Aluno e Caderno do Gestor. Esses materiais atuam como referências essenciais para o estabelecimento das matrizes de avaliação do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp), dos programas de reforço e recuperação dos alunos e dos cursos de formação continuada da Escola de Formação de Professores da SEE.

Os conteúdos básicos de matemática presentes no currículo são organizados em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações, cujos conteúdos se interpenetram permanentemente, numa espécie de "interdisciplinaridade interna" da própria matemática e, explicita ainda, que os conteúdos que compõe o currículo, para cada série/ano são semelhantes aos diversos programas e materiais didáticos existentes e alinham-se com as atuais práticas dos professores (Grenchi, 2011), contudo, a SEE espera também que haja uma inovação nas práticas dos professores (São Paulo, 2010).

Tal contexto constituiu-se no objetivo da nossa investigação, ou seja, identificar por meio das percepções dos professores de matemática como esse currículo contribui para a inovação de suas práticas letivas e, consequentemente, sua contínua formação profissional.

Fundamentação teórica

De acordo com Gatti e Barreto (2009), ao discutir-se a formação de professores no Brasil deve-se considerar que o início da expansão da escolarização básica ocorreu somente a partir dos meados do século XX, sendo que, em termos de rede pública, o crescimento efetivo deu-se nos final dos anos 1970 e início de 1980.

Portanto, ainda segundo as autoras, esse recente crescimento das redes públicas e privadas no país, comparado com a escolarização histórica de outros países, ainda ocasiona reflexos na formação de professores, como também, existem vários fatores que interagem na composição dos desafios à formação dos professores brasileiros, dentre os quais, a expansão da oferta de educação básica, a inclusão social, a demanda por um maior contingente de professores, as transformações sociais, os conhecimentos e práticas educativas como contributos para a construção de uma sociedade mais justa, democrática e moderna e, as heterogeneidades regionais e locais. Além disso, as complexidades oriundas dos desdobramentos culturais, políticos, econômicos, técnicos e científicos, também devem ser levados em conta. Por esses motivos: "certamente, os professores não podem ser tomados como atores únicos, nem de forma independente de suas condições de trabalho, de seus vínculos de emprego, de incentivos e de reconhecimento social para o exercício de suas responsabilidades profissionais" (Gatti e Barreto, 2009, p. 13).

A formação dos professores constitui-se numa temática de âmbito internacional, cujos resultados de muitas pesquisas enquadram-se perfeitamente ao contexto deste estudo, como por exemplo:

De acordo com Pérez Gomez (1995), a formação de professores não é autônoma quanto ao conhecimento e decisão, pois se encontra inserida num contexto histórico e político, cuja orientação depende do conceito de escola para uma determinada sociedade, de qual modelo de ensino está sendo adotado e do currículo prescrito no momento.

Pesquisas de Zeichner (2003), sobre o potencial de desenvolvimento genuíno do educador, revelam a existência de um pensamento meio-fim que negligencia as reflexões dos professores relacionadas ao currículo, restringindo-as a questões envolvendo técnicas de ensino e organização interna da sala de aula.

Os argumentos de Imbernón (2009) sustentam que a aquisição de conhecimento por parte do professor é um processo amplo e não linear, está diretamente ligada à prática profissional e condicionada pela organização educacional onde é exercida, trata-se de um processo complexo, adaptativo e experiencial.

Para embasar nosso estudo acerca das implantações curriculares no cenário internacional e seus respectivos reflexos nos processos de mudanças, apoiamo-nos nas concepções dos seguintes pesquisadores:

Por meio de suas teorias Hargreaves (1994) defende a ideia de que as diversas reformas educacionais quando impostas aos professores de cima para baixo, por meio de currículos prescritos, com programas precisamente detalhados a serem seguidos e, ainda, seguidos por programas de metas e resultados, impactam diretamente o trabalho dos professores.

Na mesma linha de raciocínio, Tardif (1991) considera que os diversos saberes dos professores, como por exemplo, os disciplinares, os curriculares, os profissionais e os experienciais, são integrantes indissociáveis da prática docente e que, portanto, os professores lançam mão desse saberes mantendo uma relação de exterioridade para com as implementações curriculares que trazem em seu bojo conteúdos predeterminados.

Complementando tais tendências, Zeichner (2003) afirma que atualmente, em todos os países do mundo, há um processo de reforma educacional orientado para educação centrada no aluno e que seja culturalmente relevante. No entanto, para que isso ocorra de fato na prática é necessário quebrar paradigmas, sobretudo em relação às resistências e subversões dos professores em relação às mudanças curriculares propostas pelo Estado, que muitas vezes, são motivadas por fatores intrínsecos ao sistema educacional onde os próprios órgãos governamentais não consideram os professores como agentes importantes no processo de reforma educacional, tomando-os como meros implementadores eficientes das políticas desenvolvidas por outros que são desalinhadas com a realidade da sala de aula. Por esses motivos, somente irão ocorrer mudanças qualitativas na prática letiva, quando os professores compreenderem e aceitarem essas reformas como suas.

As argumentações expostas demonstram um campo profícuo para pesquisas e realçam os motivos pelos quais nos dedicamos ao estudo das relações entre o currículo e a formação docente.

Metodologia

Nossa pesquisa norteou-se pela busca de respostas para as seguintes questões: Qual é o posicionamento dos professores de matemática perante o novo currículo? Quais são as relações que se estabelecem entre a formação do professor investigado e suas percepções a respeito das inovações curriculares propostas?

Nosso estudo possui enfoque de pesquisa qualitativa e interpretativa conforme as características definidas por Godoy (1995, p. 62): ter sido realizado em um ambiente natural como fonte direta de dados; o pesquisador utilizou sua própria pessoa como o instrumento mais confiável de observação, seleção, análise e interpretação dos dados coletados; apresenta caráter descritivo; os significados dados pelos sujeitos foram considerados como preocupação do investigador e; por possuir enfoque dedutivo.

O planejamento estratégico da pesquisa deu-se com a elaboração de um questionário exploratório constituído em sua maioria por perguntas fechadas. A fase operacional da pesquisa caracterizou-se pela pesquisa de campo com 36 professores que lecionavam para o Ensino Fundamental – Ciclo II e ou Ensino Médio, oriundos de seis unidades escolares do município de Santo André (estado de São Paulo – Brasil).

Resultados e discussões

Esclarecemos que os resultados apresentados refletem a ótica do pesquisador a partir de suas próprias convicções, lapidadas por sua prática docente dentro do mesmo contexto proposto para o estudo da pesquisa. Portanto, consideramos que:

> Nunca é possível ao investigador eliminar todos os efeitos que produz nos sujeitos ou obter uma correspondência perfeita entre aquilo que deseja estudar e – "o meio ambiente natural" – e o que de fato estuda – "um meio ambiente com a presença do investigador". Pode, contudo, compreender os efeitos que produz nos sujeitos, mediante conhecimento aprofundado do contexto. (Bogdan e Biklen, 1994, p. 69)

Assim, apesar de estarmos inseridos no contexto do estudo, procuramos manter ao máximo uma postura de neutralidade no processo de análise, a fim de minimizar os efeitos produzidos nos sujeitos de pesquisa, salvaguardando a confiabilidade dos resultados que apresentamos na sequência:

Ao que se refere à formação inicial, indagamos os professores a respeito da importância das orientações obtidas durante a graduação para a sua prática letiva. Nesse sentido, constatamos que 19 dos 36 professores consideraram que as orientações obtidas durante a formação inicial foram suficientes para o exercício da função docente, dessa forma, concordamos com Ponte (1998) de que uma boa formação inicial pode favorecer o desenvolvimento profissional do professor.

Ainda sobre a formação inicial, investigamos quais dos conteúdos presentes no novo currículo foram mais e menos contemplados no curso de licenciatura realizado pelos professores pesquisados. Quanto a esses quesitos, identificamos que os conteúdos relacionados com Álgebra foram os mais contemplados durante a formação inicial, sobretudo em relação aos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental, em contrapartida, os conteúdos relacionados com Geometria foram os menos contemplados nos cursos de licenciatura, especificamente, os pertinentes aos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental e ao 1º ano do Ensino Médio.

Também questionamos os professores a respeito dos conteúdos presentes no currículo que mais e menos gostam de lecionar. A esse respeito não obtivemos resultados significativos em relação aos conteúdos preferidos, percebemos apenas uma ligeira preferência dos professores em lecionar Álgebra, por esse motivo, inferimos que essa homogeneidade nas respostas demonstra que os professores gostam de lecionar independente do conteúdo. Por outro lado, os conteúdos relacionados com a Geometria mostraram-se como sendo os preteridos de serem lecionados, principalmente os relacionados com o 2º ano do Ensino Médio e o 9º ano do Ensino Fundamental.

Dessa forma, observamos fortes evidências de que os professores preterem lecionar os conteúdos menos contemplados na formação inicial. Partindo dessa hipótese e tomando como referência o conteúdo de Geometria, os resultados do nosso estudo coincidem, por exemplo, como as colocações de Lorenzato e Vila:

> [...] cada vez mais os professores deixam de abordar esse importante conteúdo em suas classes. Isso se deve, principalmente, à má formação dos professores que, não tendo um bom conhecimento do assunto, preferem preterir ou suprimir de suas aulas o ensino da Geometria. (Lorenzato e Vila, 1993, p. 48)

Com base em análises de pesquisas desenvolvidas por outros pesquisadores, Pavanello (2007) também oferece uma corroboração importante sobre o conhecimento dos professores relacionado aos conteúdos de Geometria:

> Muito dos professores entrevistados, que atuam nos níveis fundamental e médio, apesar de considerarem importante um trabalho com esse ramo da matemática, afirmam não terem condições de realizá-lo por terem aprendido muito pouco de geometria enquanto alunos, mesmo durante sua formação inicial. Afirmavam que nesta, a abordagem desse conteúdo, quando realizada, tinha sido deficiente, as aulas tendo se voltado preferencialmente para temas mais complexos. Quanto aos conteúdos que deveriam posteriormente desenvolver em sala de aula, ou não eram abordados, ou essa abordagem era muito superficial. (Pavanello, 2007, p. 5)

Mediante tais observações, consideramos que embora a Geometria possua relevante importância na formação matemática dos alunos e, por esse motivo, encontra-se presente em todos os currículos, o fato dos professores preterirem lecioná-la pode estar relacionado com suas próprias práticas em sala de aula, bem como, com as deficiências oriundas de sua formação profissional.

Quanto à formação continuada, buscamos saber se os professores haviam participado de atividades de formação continuada promovidas pela SEE (Secretaria Estadual de Educação) nos anos de 2008 e 2009. Como resultado, identificamos que 15 dos 36 sujeitos de pesquisa participaram dessas atividades e, dentre os mesmos, 8 professores consideraram que as atividades foram úteis para a melhoria de suas práticas letivas e 7 professores consideraram as atividades pouco úteis para tal finalidade. Todavia, independentemente das opiniões acerca da qualidade das atividades de formação continuada, consideramos o fato dos professores buscarem novas competências por meio desse tipo de programa destaca-se positivamente, inclusive, corroborando com o pensamento de Imbernón (2009) de que a vigente demanda social de mudança e de transformação requer um profissional da educação com competências adequadas para esse novo cenário.

Ainda, sobre a formação continuada, ressaltamos que do total de 36 professores entrevistados, 9 haviam realizado curso de especialização com carga horária de no mínimo 360 horas e 2 professores possuíam mestrado em Educação Matemática.

Dos 36 professores pesquisados, 16 afirmaram aceitar o novo currículo e 11 professores disseram estar comprometidos com o mesmo, embora, esses mesmos professores também tenham considerado que o novo currículo foi imposto pela SEE. Nesse sentido, o posicionamento favorável dos professores contribui para com os propósitos do currículo, afinal, segundo Hargreaves (1998) o professor é a chave da mudança educativa e do aperfeiçoamento da escola. Por outro lado, supomos que a consideração dos professores a respeito da imposição do currículo coincide com as opiniões de Zeichner (2003) no sentido de que há um pensamento meio-fim que negligência as reflexões dos professores relacionadas ao currículo, restringindo-as a questões envolvendo técnicas de ensino e organização interna da sala de aula.

Inquirimos os professores também a respeito da utilização das situações de aprendizagem contidas no novo currículo em suas aulas, perante essa abordagem, evidenciamos que 15 professores utilizam algumas das situações sugeridas na íntegra, 8 professores utilizam todas parcialmente e 7 professores utilizam todas na íntegra. Dessa forma, inferimos que tal posicionamento condiz com as ideias de Gómez (1995) acerca do modelo reflexivo e artístico, no qual o professor é considerado um prático autônomo, que no desenvolvimento de suas ações, age como um artista que cria, reflete e toma decisões.

Em relação aos materiais instrumentais do novo currículo, evidenciamos que 19 dos 36 professores consideraram os conteúdos matemáticos dos Cadernos do Professor insuficientes para a aprendizagem dos seus alunos, como também, 25 professores apresentaram a mesma opinião sobre os Cadernos do Aluno, essas constatações coincidem com os argumentos de Zeichner (2003) e também com os de Imbernón (2009). Inclusive, perante essa perspectiva, Imbernón afirma que:

> Não se tratou o bastante da função do profissional da educação no campo da inovação, talvez devido ao predomínio do enfoque que considera o professor ou a professora como um mero executor do currículo e como uma pessoa dependente que adota a inovação criada por outros, e à qual, portanto, não se concede nem a capacidade nem a margem de liberdade para aplicar o processo de inovação em seu contexto específico. (Imbernón, 2009, p. 20)

Tal ponto de vista nos leva a considerar que, se talvez, os professores da rede pública estadual paulista tivessem participado mais efetivamente desse processo de mudança curricular, provavelmente haveria uma maior adesão dos mesmos em relação aos materiais instrumentais advindos com as inovações curriculares propostas.

Conclusões

Propusemo-nos, por meio da nossa primeira questão de pesquisa, identificar o posicionamento dos professores de matemática perante o novo currículo proposto pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo. Nesse tocante, observamos que o posicionamento de aceitação e comprometimento dos professores frente ao novo currículo levou-os a utilizar as situações de aprendizagens sugeridas nos Cadernos do Professor e do Aluno, muito embora, por vezes, não em sua totalidade e ainda considerando os seus conteúdos matemáticos insuficientes para a aprendizagem dos alunos. Portanto, apesar de algumas nuances nas opiniões dos professores, consideramos que, possivelmente, o novo currículo favoreceu a reflexão sobre a prática pedagógica e a metodologia de ensino.

Em relação a nossa segunda indagação de pesquisa, sobre a identificação das possíveis relações que se estabelecem entre a formação do professor investigado e suas percepções a respeito das inovações curriculares, observamos a presença de algumas contradições nas opiniões expressadas. Assim, a partir das percepções dos professores, inferimos que os cursos de licenciatura foram satisfatórios quanto ao fornecimento de subsídios para o desenvolvimento profissional, bem como, na definição de seus posicionamentos de aceitação e comprometimento frente ao novo currículo.

Contudo, evidenciamos duas contradições relacionadas com as percepções dos entrevistados. A primeira refere-se ao fato da formação inicial se mostrar suficiente aos professores apesar do conteúdo de Geometria ter sido pouco contemplado durante sua realização. A segunda explicita-se pela diferença de perspectiva entre os professores e alguns pesquisadores acerca da formação inicial, pois os professores consideram-na adequada para o desenvolvimento profissional docente, ao passo que muitos pesquisadores questionam sua eficácia.

Outra constatação importante refere-se ao indício de que há uma propensão dos professores em participar de cursos de formação continuada, mesmo que em alguns casos, o conteúdo abordado nesses cursos não se mostre alinhado com as necessidades específicas dos professores.

De modo geral, os resultados da pesquisa permitem-nos concluir também que, se por um lado, o processo de mudança curricular pode favorecer a reflexão individual, por outro, deveria haver mais espaços nas unidades escolares destinados ao cultivo da reflexão como prática social para o desenvolvimento dos professores. Nesse sentido, consideramos que o favorecimento do desenvolvimento profissional, associado com a prática social reflexiva dos professores, contribuiria para que os mesmos se apropriassem de maneira mais efetiva das inovações propostas pelos currículos.

Referências bibliográficas

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto.

Gatti, B. A. e Barreto, E. S. de Sá (2009). Professores do Brasil: impasses e desafios. Brasília: *UNESCO*.

Godoy, A. S. (1995). Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de Administração de Empresas,* 35(2), pp. 57-63.

Gómez, A. P. (1995). O pensamento prático do professor: a formação do professor como profissional reflexivo. Em NÓVOA, A. (org.). *Os Professores e a sua Formação* (pp. 95-114), Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Grenchi, W. A. (2011). *Percepções de professores da rede pública estadual de São Paulo acerca do ensino da matemática num contexto de mudança curricular.* Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Bandeirante de São Paulo, Brasil.

Hargreaves, A. (1998) *Os professores em tempo de mudança:* o trabalho e a cultura dos professores na Idade Pós-Moderna. Portugal: McGraw-Hill.

Hargreaves, A. (2009). *Os professores em tempo de mudança:* o trabalho e a cultura dos professores na Idade Pós-Moderna. Portugal: McGraw-Hill.

Imbernón, F. (2009) *Formação docente* e *profissional:* formar-se para a mudança e a incerteza. 7ª Edição. São Paulo: Cortez.

Lorenzato, S. e Vila, M. C. (1993). Século XXI: qual Matemática é recomendável? *Zetetiké*. Campinas, v. 1, n. 1, pp.41-50.

Pavanello, R. M. (2007). *O ensino da Geometria no Brasil nas últimas décadas:* algumas preocupações a partir de pesquisas. Artigo apresentado durante participação da Mesa Redonda na Universidade Federal de Ouro Preto.

Ponte, J. P. (1998) Da formação ao desenvolvimento profissional. Em *Actas do ProfMat 98* (pp. 27-44), Lisboa: APM.

São Paulo – Estado (2010). Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo:* Matemática e suas tecnologias. Coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. São Paulo: SEE.

Tardif, M., Lessard, C. e Lahayet, L. (1991). Os professores face ao saber: Esboço de uma problemática do saber docente. *Teoria & Educação* nº 4, Porto Alegre: Pannônica.

Zeichner, K. M. (1993). *A formação reflexiva de professores:* ideias e práticas. Lisboa: Educa.

Zeichner, K. M. (2003). Formando professores reflexivos para a educação centrada no aluno: Possibilidades e Contradições. Em Barbosa, R. L. L. (Org.). *Formação de Educadores:* Desafios e Perspectivas (pp.35-55), São Paulo: Editora UNESP.

FORMAÇÃO CONTINUADA DO PROFESSOR DE ANOS INICIAIS E A (RE)CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS COM GEOMETRIA DINÂMICA

Marinês Yole Poloni; Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
marines.poloni@cda.colegiodante.com.br; nielce.lobo@gmail.com

Resumo. Este artigo refere-se a uma pesquisa de mestrado cujo objetivo foi investigar, em um projeto de formação continuada de professores do Ensino Fundamental I, a (re)construção de conceitos geométricos sobre o tema Figuras Planas utilizando como recurso tecnológico o software *Cabri-Géomètre*. Nele apresentamos s reflexões dos professores surgidas no processo de formação continuada. Adotou-se a metodologia do *Design-Based Research* e a análise dos dados foi interpretativa. Discutimos algumas das atividades desenvolvidas por três professoras participantes bem como alguns dos resultados encontrados. Tais resultados indicaram que esta formação continuada pôde possibilitar a (re)construção de alguns conceitos geométricos e que, além disso, os estudos teóricos feitos pelos sujeitos e a articulação com a prática docente foram fundamentais para discussões que desencadearam reflexões sobre as práticas.

Palavras chave: formação de professores; geometria dinâmica; design-based research

Abstract. This paper refers to a research aimed to investigate, in a project of continuing education for teachers of elementary school, the (re) construction of geometrical concepts on the subject Figures Plane using as a technology recourse the software Cabri-Géomètre. In it we also present teacher's reflections emerged during the process of continuing education. We adopted the Design-Based Research methodology and we have done interpretative analysis. We discuss some of the activities conducted by three participant teachers and some results. These results indicated that this continuing education could enable the (re) construction of some geometrical concepts. Moreover, theoretical studies made by the subjects and interaction with the teaching practice were central to discussions that provoked thoughts about the practices.

Key words: teacher education; dynamic geometry; design-based research

Introdução

Atualmente, por sentirem-se pouco seguros quanto ao próprio conhecimento matemático, mais e mais professores procuram nos cursos de formação continuada, metodologias e ferramentas inovadoras para auxiliá-los a transpor os obstáculos que se apresentam no seu cotidiano profissional. Há, entretanto, professores que têm conhecimentos consistentes do conteúdo matemático, contudo procuram cursos de formação continuada com o intuito de aprimorar suas metodologias. Muitos dos professores ainda precisam incorporar o uso das novas tecnologias em suas práticas de sala de aula uma vez que essas ferramentas já fazem parte do cotidiano escolar. Todos esses fatores somados à pequena quantidade de pesquisas advindas dessa área – formação e integração de tecnologia à prática - conforme alertam Fiorentini, Nacarato, Ferreira, Lopes, Freitas e Miskulin (2003), justificam a importância de se pesquisar o tema. Além disso, poucas são as pesquisas no Brasil com foco na formação do professor que ensina Geometria nos anos iniciais de escolaridade, especialmente com o uso de tecnologia. Nessa faixa etária, a preocupação tem sido no letramento linguístico e matemático. Os PCN (1997), por sua vez, dividem os conteúdos matemáticos em quatro blocos: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação sendo que espaço e forma e grandezas e medidas são fundamentalmente os conteúdos voltados à Geometria. Tal documento mostra a importância de que o aluno tenha contato com a Geometria desde os primeiros anos de escolaridade.

Grande parte das pessoas adultas e dos alunos que frequentam as salas de aula brasileiras tem pouca capacidade de percepção espacial, segundo Pavanello (2004). Para a autora tal percepção é requerida no exercício ou compreensão de muitas atividades profissionais. A contribuição do ensino de Geometria na formação dos alunos não se resume apenas ao desenvolvimento da percepção espacial, mas, é um campo fértil para o desenvolvimento de capacidades tais como as de "abstrair, generalizar, projetar, transcender e deduzir, que estão entre os objetivos do ensino da Matemática, oferecendo condições para que níveis sucessivos de compreensão possam ser alcançados" (Pavanello, 2004, p.3).

Fundamentação teórica

A pesquisa fundamentou-se nos estudos de Shulman (1986) sobre o conhecimento profissional; de Ponte & Oliveira (2002) a respeito das vertentes do "conhecimento didático-pedagógico" e nos estudos de Schön (1995) sobre o professor reflexivo.

Shulman (1992, p.9-10) estabelece três vertentes a respeito do conhecimento profissional do professor quais sejam: conhecimento do conteúdo da disciplina— *subject matter contentknowledge*; conhecimento pedagógico do conteúdo — *pedagogical content knowledge* e conhecimento pedagógico geral — *curricular knowledge.* Ponte & Oliveira (2002, p.5 - 7) desdobraram o conhecimento didático do professor em quatro vertentes: conhecimento da Matemática, conhecimento do currículo, conhecimento dos processos de aprendizagem e conhecimento do instrucional.

No tocante à reflexão, os conceitos desenvolvidos por Schön (1995, p.79) - *a reflexão-na-ação, a reflexão-sobre-a-ação* e *sobre-a-reflexão-na-ação* - possibilitam ao professor um repensar sobre sua prática com objetivo de melhorá-la durante toda a sua carreira. Neste estudo, o grupo discutiu com maior intensidade as reflexões *na* e *sobre a ação* feitas pelas professoras durante todo o processo. Já a *reflexão-sobre-a-reflexão-na-ação* que presume uma postura mais distante e com olhar crítico sobre as ações passadas teve, por decorrência de situações que aparecem durante o ano letivo, um menor tempo de discussão.

O estudo

A pesquisa foi empreendida ao longo de um projeto de formação continuada denominado *"Geometria em Ação"* inserido em um processo de Formação de Professores do Ensino Fundamental. O foco deste artigo está nas reflexões sobre a prática de três professoras dos anos iniciais num processo de reconstrução de conceitos geométricos.

A metodologia da pesquisa ao qual se liga esse estudo foi a do *design research*. Tal metodologia, como proposta por Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer e Schauble (2003) pode ser entendida como o gradual aprimoramento da investigação a cada experimento de ensino de forma que estes experimentos de ensino possam ser revistos, analisados e redesenhados durante todo o processo visando minimizar os obstáculos para os próximos experimentos. Para a pesquisa, constituiu-se um grupo de trabalho intitulado *Grupo Geometria em Ação*, formado pela pesquisadora da Universidade, sua orientadora que atuou à distância (nas análises e decisões para cada sessão) e onze professoras de uma escola particular na qual foi desenvolvido o curso. Dessas, quatro concluíram o curso que teve 24 encontros semanais divididos em quatro etapas: Oficinas; Elaboração de atividades e protocolos; Aplicação da atividade com alunos e Discussão. Vale ressaltar que, a pedido das participantes, essas etapas se misturaram fazendo com que houvesse redesigns durante todo o processo de formação. Nos encontros foram desenvolvidas oficinas no Laboratório de Informática, elaboradas atividades para os alunos com o uso do software *Cabri-Géomètre* sendo que tais atividades foram aplicadas com os estudantes e discutidas no grupo em sessões destinadas à reflexão sobre a experiência didática.

O objetivo da pesquisa foi identificar a (re)construção de conceitos geométricos por professoras participantes de um processo formativo, bem como provocar reflexões a respeito de suas práticas pedagógicas.

As atividades propostas tinham como objetivo gerar desestabilizações para futuras reflexões e (re)construções de conceitos. Numas das sessões, discutiu-se o conceito de polígono. As professoras construíram polígonos no *Cabri-Géomètre*, e a pesquisadora constatou *in loco*, que elas se preocuparam em pintar a região interior dos polígonos, pois era essa a imagem mental de polígonos que tinham. Ou seja, a concepção de polígono que tinham incluía sua região interior.

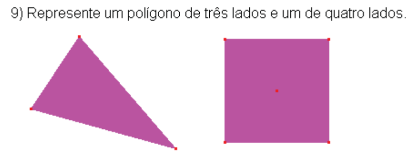


Figura 1: Representação do conceito de polígonos na visão de todas as Professoras do grupo

Em uma rápida pesquisa na internet, as professoras encontraram a seguinte definição para polígono: "*Um polígono é uma linha poligonal fechada formada por segmentos consecutivos, não colineares que se fecham.*"

Esse episódio abriu a seguinte discussão:

Professora B: "Então não é pintado?"

Margarida: "Mas nos livros as figuras são pintadas."

Orquídea: "Na Educação Infantil a gente manda o aluno pintar a figura e a chama de polígono mesmo assim"

Professora B: "Eu nunca soube disso!"

Professora C:" Então o quadrado também é vazado ? DEUS!"

Formadora:"Reparem que o próprio Cabri-Géomètre faz qualquer polígono só com as linhas poligonais. Vocês tiveram que buscar outro menu para preenchê-lo." (Sessão3)

As sessões que envolveram os conceitos de segmento e de polígono, paulatinamente, foram gerando um sentimento de desconforto entre as Professoras. Tal sentimento fez com que elas pedissem a intervenção da Coordenadora Begônia que solicitou uma reunião. Nela, Begônia relatou que as Professoras estavam sentindo dificuldades com os conceitos Geométricos e pediram uma mudança na metodologia com a qual o *Curso Geometria em Ação* vinha sendo desenvolvido.

Begônia: "É melhor que as sessões sejam em formato de aula: primeiro seriam dados os conceitos, depois os exercícios e, por último, um fechamento."

Begônia: "As Professoras não sabem todos os conceitos e isso está trazendo dificuldades. Talvez fazendo uma retomada de tudo o que já foi abordado antes de seguir em frente fosse mais fácil" (Reunião dia 8/5/09)

A Coordenadora explicitou que o Curso estava trazendo muitos elementos novos para as professoras, tanto do ponto de vista do conhecimento matemático quanto da informática, o que estava gerando certo medo em algumas, porém o ponto crítico foi a definição adotada para polígono. Em sessão de orientação, decidiu-se que seria feita uma retomada dos conceitos vistos até então. Para tal retomada escolhemos o slide abaixo a fim de retomar o conceito de visualização.

Figura 2: Slide escolhido para alavancar a discussão a respeito de visualização

Escolhemos esse slide com o objetivo de fazer com que as Professoras vivenciassem a situação de enxergarem uma mesma figura de maneiras diferentes.

Formadora: "Moça ou velha?"
Professora A: "Eu estou vendo uma velha."
Margarida: "Velha com cara de bruxa."
Hortência: "Eu estou vendo uma moça."
Professora C: "Onde?"
Hortência: "Posso mostrar ai na frente?"
Formadora: "Pode. Claro!"
Hortência: "Aqui é o colar, o pescoço..."
Violeta: "Ai! Agora eu vi a moça!"(sessão 5)

As Professoras vivenciaram a experiência de, numa mesma figura terem duas diferentes interpretações. Nesse momento, o grupo refletiu a respeito dessa dupla interpretação:

Formadora:"E o que podemos tirar de reflexão a respeito disso?"
Margarida: "Nem todo mundo enxerga a mesma coisa?"
Formadora: "Será que todos os nossos alunos enxergam a figura que eu estou mostrando na lousa?"
Violeta: "Acho que a gente tem que fazer o máximo de representações possível para atingir todos os alunos da classe."
Hortência: "É verdade... a gente pode estar falando de uma figura e ele não estar vendo aquilo que estamos explicando. Nossa! Aí ele não entende nada mesmo!"(sessão 5)

Violeta percebeu que, em Geometria, sempre há representações e é fundamental que o professor mostre- como ela mesma disse- o máximo de representações possíveis a fim de que a aprendizagem aconteça para todos os alunos da sala. Constatamos que foi atingido o objetivo de levar as Professoras a vivenciarem uma situação em que, apesar de ser mostrado o mesmo desenho, nem todas o estariam vendo da mesma forma.

Constatamos também que as Professoras refletiram sobre sua prática quando concordaram com Violeta a respeito das representações que são feitas em sala de aula para que a aprendizagem do aluno aconteça.

As Professoras do grupo continuavam as discussões a respeito dos tópicos abordados durante as sessões em seus horários de intervalo, na sala dos professores. Um dos Professores do Ensino Médio do colégio, que não era do grupo, ouvindo tais comentários intercedeu dizendo que quando um aluno desenha um polígono no caderno, ele já o enxerga preenchido.

Esta frase foi resgatada durante a sessão gerando o seguinte diálogo:

> Formadora: "Vocês me disseram a seguinte frase: a partir do momento em que o aluno desenha um polígono no caderno, ele já o enxerga preenchido. Vamos retomar um pouco essa discussão?"
>
> Professora A: "Se nem o que eu estou vendo ai na frente é o mesmo que Margarida vê, imagine os alunos!"
>
> Hortência: "Não dá para saber exatamente se o aluno está enxergando preenchido ou não. Eu não sei, você sabe? (Sessão 5)

Analisando a reflexão feita pelas Professoras, constatamos que elas concluíram não ser possível saber ao certo de que forma cada aluno compreende e enxerga as representações geométricas que lhe são apresentadas em sala de aula. Isso, na nossa percepção, é um incremento no conhecimento dos processos de aprendizagem dos alunos (Ponte e Oliveira, 2002), que pode vir a gerar um maior cuidado com as metodologias utilizadas em sala de aula por essas Professoras (conhecimento do instrucional) como afirma Violeta:

> Violeta: "Eu já tinha visto essa brincadeira da jovem e da velha, mas nunca tinha me ocorrido que isso pudesse acontecer com as coisas que eu ensino para as crianças, com as coisas que eu ponho na lousa... Nossa a gente tem que tomar muito cuidado."(Sessão 5)

Constatamos, por essa fala, que Violeta refletiu, não apenas no tocante à Geometria, mas a respeito de suas ações em relação ao que ensina e como ensina em sala de aula (reflexão sobre a ação (Schön, 1995)). Essas frases reforçam a nossa convicção de que a vivência dessa situação levou as Professoras a refletirem (reflexão sobre a reflexão na ação (Schön, 1995)), a respeito da didática nas aulas (conhecimento do instrucional (Ponte e Oliveira, 2002)) e da aprendizagem de seus alunos.

Quanto às atividades desenvolvidas pelas professoras podemos destacar as de Violeta, Hortência e Margarida.

Violeta elaborou a tela da figura três, relacionou-a com o conceito de sequência e pensou em usá-la como atividade para seus alunos. Ela pensou em um número de colunas de modo que as cores das linhas não ficassem repetidas. Ela também esperava que seus alunos percebessem que as linhas 1 e 3 iriam se repetir bem como as 2 e 4.

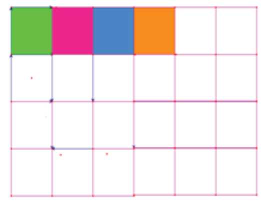


Figura 3: Atividade 2 da Professora Violeta

Durante as sessões destinadas à reflexão, Violeta mostrou-se satisfeita com os resultados obtidos na aplicação das atividades com os alunos. Ela observou que a aprendizagem foi significativa para a maioria das crianças uma vez que estas estabeleceram espontaneamente relações entre os conteúdos abordados, como, por exemplo, identificar que as linhas ímpares da sequência de cores eram sempre iguais assim como as linhas pares e que linhas pares e ímpares eram diferentes.

A segunda Professora, Hortência, escolheu o tema "simetria" e elaborou a seguinte sequência didática: (i) construção de um mural de recortes simétricos em sala de aula; (ii) exploração dos exercícios propostos no livro didático e (iii) aulas no laboratório de informática para realização de atividades.

Figura 4: Atividade de simetria com dobraduras

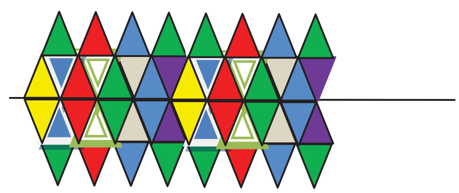


Figura 5: Atividade de simetria do livro didático

Para a aula no laboratório de informática, Hortência elaborou a atividade abaixo onde os alunos deveriam fazer a simetria das figuras dadas por ela.

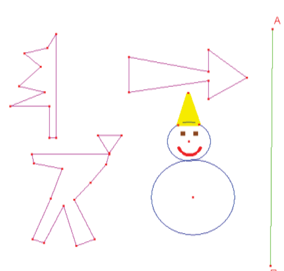


Figura 6: Atividade de simetria no *Cabri-Géomètre*

Percebe-se que Hortência, preocupada com a aprendizagem de seus alunos, fez uso de diversas representações do mesmo objeto de estudo fazendo uso também de metodologias diversificadas. Ela também fez intervenções e questionamentos, durante a aplicação da atividade no laboratório de informática, de forma a ajudá-los a construir seu conhecimento.

Para Hortência a melhor parte do curso foi a aplicação com seus alunos e as reflexões feitas com as colegas no sentido de explorar as decisões que foram tomadas durante a ação. Durante tais sessões, Hortência mostrou-se satisfeita com os resultados obtidos na aplicação das atividades com os alunos. Ela observou que a aprendizagem foi significativa para a maioria das crianças uma vez que estas estabeleceram espontaneamente relações entre o conteúdo abordado, com o *Cabri-Géomètre* e aquele que havia sido trabalhado em sala de aula com outras estratégias.

A terceira Professora, Margarida, elaborou uma atividade bastante tradicional, entretanto, ao longo da aplicação, decidiu desafiar seus alunos a desenharem, com o *Cabri*, o quarteirão do colégio. Com essa proposta, ela percebeu que os alunos não conheciam os nomes das ruas que circundavam o colégio. Decidiu, então, fazer um estudo de campo com seus alunos. Em seguida, eles fizeram a atividade com papel e lápis para só depois usarem o *Cabri-Géomètre*. Analisando a postura de Margarida constatou-se que a Professora procurou fazer com que sua turma vivenciasse diversas representações da mesma atividade: o estudo de campo, a representação com papel e lápis e a representação com Geometria Dinâmica. A figura abaixo é um exemplo de resolução feita por uma dupla de alunos de Margarida.

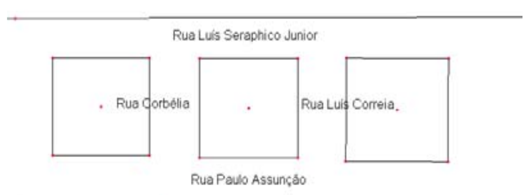


Figura 7: Tarefa final da atividade feita pelos alunos da Professora Margarida

Margarida concluiu dizendo as seguintes palavras:

> Margarida**:** "Realmente foi um desafio, mas o trabalho de campo ajudou muito com certeza! A construção, no Cabri-Géomètre foi mais difícil do que a atividade com a tela pronta, mas quase todos conseguiram e eu estou muito feliz com o resultado."

Constata-se que Margarida ficou bastante satisfeita com os resultados obtidos. Ela também concluiu que dar uma tela pronta para os alunos faz com que a tarefa se torne mais fácil para eles, entretanto quase todos seus alunos (apenas duas duplas não conseguiram uma figura semelhante à que foi mostrada acima) foram capazes de resolver o desafio na tela em branco.

Conclusões

As três professoras iniciaram suas atividades utilizando o *Cabri-Géomètre* como uma ferramenta de desenho, entretanto, no decorrer do curso, perceberam outras vantagens pedagógicas em se usar a Geometria Dinâmica.

Os resultados obtidos as surpreenderam e elas, ao final das discussões, declararam estarem satisfeitas com o trabalho realizado e com a aprendizagem de seus alunos. Elas, durante as sessões de reflexão, notaram que seus alunos foram além do esperado. Refletindo sobre suas ações, as professoras verbalizaram que suas decisões na ação foram acertadas.

A leitura e discussão dos textos "*Reflexões a respeito do ensino de Geometria*" e *"Donald Schön e o ensino reflexivo"* foram determinantes para promover reflexões a respeito de ensino de geometria e de suas práticas. Estes textos sensibilizaram o grupo para a busca de maiores conhecimentos do conteúdo geométrico. Dessa forma, pode-se dizer que a articulação entre teoria e prática pode auxiliar na transformação das práticas e no refino dos saberes dos professores.

A metodologia utilizada - *design-based-research*-, foi fundamental para que fossem feitos ajustes quanto ao *design* inicial planejado de acordo com as análises que eram feitas sessão a sessão. Essas análises contribuíram e deram embasamento às decisões que foram tomadas durante toda a formação.

A pesquisa em questão evidenciou que a identidade profissional madura e responsável, fez consolidar o grupo. Foi essa mesma postura de responsabilidade com a própria aprendizagem, com a docência, e para com a formadora que as levou a concluir o curso apesar das dificuldades enfrentadas.

Referências bibliográficas

Brasil. (1997) Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *PCN Parâmetros Curriculares Nacionais* 3, Brasília: MEC/SEF.

Cobb, P.; Confrey, J.; Disessa, A.; Lehrer,R. e Schauble, L.(2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher* 32(1), 9-13.

Fiorentini, D., Nacarato, A.M., Ferreira, A. C., Lopes, C.S., Freitas, M.T.M. e Miskulin, R.G.S. (2003). Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em Revista*,*36*, 137-160.

Pavanello, R. M. Por que ensinar /aprender geometria? Em: VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. Disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr21-Regina.doc Acesso em 20. mar.2010.

Ponte, J.P. & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista da Educação*, *11*(2), 145-163.

Schön, D. A.(1995). Formar professores como profissionais reflexivos. Em: Nóvoa, A. (Org.). *Os Professores e a sua Formação*. Lisboa, Portugal: Publicações Dom Quixote.

Shulman, L. (1993). Renewing the Pedagogy of teacher education: the impact of subject-specific conceptions of teaching. In: Mesa, L. M. e Jeremias, J.M.V. (Eds.). *Las didácticas específicas en la formación de la profesora: conferencias, ponencias, sesión simultánea* (I), 53-69. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións.

_____________. (1986).Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4-14.

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO SOBRE JUEGO EQUITATIVO EN FUTUROS PROFESORES

Nordin Mohamed, Juan J. Ortiz, Luis Serrano
Universidad de Granada España
nordin.mohamed@gmail.com, jortiz@ugr.es

Resumen. El objetivo de este trabajo es evaluar los conocimientos matemático-didácticos de futuros profesores de Educación Primaria en relación a la idea de juego equitativo. Para evaluar el conocimiento común del contenido se analizan las soluciones dadas por futuros profesores de Educación Primaria españoles a un problema abierto; para evaluar el conocimiento especializado del contenido se pide a los participantes identificar los contenidos matemáticos en la tarea; y para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes se les pide identificar, entre un grupo de respuestas a la tarea proporcionada por alumnos de Educación Primaria, cuáles son correctas e incorrectas. Los resultados sugieren la necesidad de reforzar la formación de los futuros profesores de Educación Primaria, tanto en su conocimiento matemático, como en el conocimiento pedagógico del contenido.

Palabras clave: evaluación, conocimiento matemático, profesores, probabilidad

Abstract. The aim of this study is to assess the mathematical knowledge of future teachers of primary education in relation to the idea of fair game. Common knowledge of content is assessed through the responses given by future spanish teachers of primary education to an open-problem; specialized knowledge of content is assessed from their analyses of the tasks' mathematical content; and knowledge of content and students is assessed from their assessment of responses provided by primary school students. The results suggest the need to strengthen the training of future primary school teachers, both in their mathematical knowledge as well as in the pedagogical content knowledge.

Key words: **:** assessment, mathematical knowledge, teachers, probability

Introducción

El conocimiento matemático para la enseñanza es "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno." (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 374). Dentro del conocimiento del contenido matemático se distinguen el Conocimiento Común del Contenido (CCC), que es el puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona; Conocimiento Especializado del Contenido (CEC), que incluye aspectos que no necesariamente tiene una persona ordinaria, por ejemplo, elegir una secuencia de enseñanza; y el Conocimiento en el Horizonte Matemático (CHM), que incluye, por ejemplo, conocimiento de la relación con otras materias.

Para el conocimiento pedagógico del contenido Hill, Ball & Schilling (2008) proponen tener en cuenta el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CCE), que es el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular; Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (CCEn), que incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas; .y Conocimiento del Currículo (CC).

El marco teórico utilizado ha sido el propuesto en Godino (2009), quien construye un modelo de niveles y facetas del conocimiento matemático didáctico del profesor que engloba los citados anteriormente y plantea, asimismo una guía para la formulación de cuestiones de evaluación de dicho conocimiento.

La finalidad de este trabajo es evaluar los conocimientos de los futuros profesores de Educación Primaria en relación con la idea de juego equitativo. Más concretamente, se centra en el conocimiento común y especializado del contenido y en el conocimiento del contenido y los estudiantes, utilizando la metodología y tipos de consignas sugeridas para estos conocimientos en Godino (2009). A continuación se presentan los antecedentes del trabajo, la metodología utilizada y los resultados obtenidos.

Antecedentes

Comprensión de la idea de juego equitativo en niños y adolescentes

Watson & Collis (1994) estudian las estrategias que siguen los niños para decidir si un dado es o no sesgado, encontrando que, aproximadamente la mitad de los alumnos creían que algunos números tenían más posibilidad que otros de salir, incluso en dados equitativos.

Lidster, Watson, Collis & Pereira-Mendoza (1996) describen un estudio con alumnos de 8 a 14 años en los que se preguntó a los alumnos cuáles, entre una serie de dados, eran o no sesgados. Los autores creen que la noción de equitatividad y sesgo se desarrolla antes del comienzo de la escuela y se preguntan si hay un desajuste entre el aprendizaje previsto por el profesor y el conocimiento construido por el alumno. También cuestionan si la comprensión de la idea de sesgo y equitatividad implica la comprensión previa de la idea de muestreo.

Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz (1999) analizan las concepciones de los niños entre 10 y 14 años. La mayoría de ellos demostraron una adecuada concepción del juego equitativo, aunque hubo una gran variedad en las concepciones de los alumnos, desde los que no diferencian entre sucesos equiprobables y no equiprobables, hasta los que son capaces de resolver correctamente todos los problemas.

Scholttmann & Anderson (1994) consideran que, incluso los niños más jóvenes, tienen una intuición correcta sobre la esperanza matemática, teniendo en cuenta, tanto la probabilidad, como el valor del premio para tomar sus decisiones. Sin embargo, tanto la asignación de probabilidad, como la puesta en relación del premio y la probabilidad de ganar sigue, con frecuencia, estrategias aditivas.

Formación de profesores para enseñar probabilidad

Algunas investigaciones señalan la existencia de concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad en los futuros profesores. Por ejemplo, Azcárate (1995) en un estudio realizado con 57 futuros profesores de Educación Primaria, encontró que muy pocos mostraban una idea clara sobre las características de los fenómenos aleatorios. Se detectó también falta de esquemas combinatorios y ausencia de instrumentos elementales para la asignación de probabilidades, cuantificando las expectativas de ocurrencia de un suceso desde criterios personales.

Ortiz, Mohamed, Serrano y Rodríguez (2009) realizan un estudio con 167 futuros profesores de Educación Primaria proponiendo problemas elementales de comparación de probabilidades. En general, hacen uso de estrategias correctas, multiplicativas y correspondencias, que se corresponde con un buen nivel de razonamiento proporcional, aunque todavía hay un grupo importante que produce errores. Los errores más frecuentes están relacionados con el sesgo de equiprobabilidad, elementos subjetivos y falta de razonamiento proporcional.

Respecto a la idea de juego equitativo, Azcárate (1995) propone tres ítems basados en el lanzamiento de dos dados, preguntando si sería justo apostar a producto par, suma par y suma 5 o 6. Los participantes mostraron mucha dificultad para diferenciar los juegos equitativos y basan su argumento en la equiprobabilidad de los resultados, reglas aritméticas o argumentación combinatoria. En este trabajo completaremos la investigación de la citada autora, analizando, tanto el conocimiento matemático, como el conocimiento profesional en futuros profesores.

Método

La muestra participante estuvo formada por 283 futuros profesores de Educación Primaria, estudiantes de segundo curso de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, España, que cursaban la asignatura *Matemáticas y su Didáctica*. Esta materia está estructurada en diferentes bloques de contenido, entre los que incluye uno sobre estadística descriptiva y probabilidad.

Los datos se recogieron en la mencionada asignatura a lo largo de dos sesiones. De acuerdo con Godino (2009), en la primera sesión se proporcionó a los estudiantes el problema presentado en la Figura 1, tomado de un libro de texto, pidiéndoles que resolvieran por escrito el apartado 1, con el objetivo de evaluar su conocimiento común del contenido matemático. En la segunda sesión, se pidió que resolvieran por escrito el resto de los apartados, trabajando en pequeños grupos de dos o tres alumnos (N =31).

A continuación presentamos un problema tomado de un libro de texto, junto con algunas soluciones dadas por niños.

1. Resuelve el problema
2. Indica el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta
3. Señala cuál o cuáles de las respuestas dadas por alumnos son correctas
4. Para cada una de las respuestas incorrectas señala las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea

Problema: Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:

- Lanzan dos dados y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
- Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2, entonces Carmen gana 1 ficha.
- Si resulta 3, 4, o 5 es Daniel quien gana una ficha.

¿Te parece que este juego es equitativo? ¿Por qué?

Respuestas de los niños:

Ana. "Es equitativo, pues cada uno tiene tres oportunidades de ganar"

Beatriz. "No es equitativo pues Carmen tiene doble oportunidad de ganar que Luis"

Carlos. "Para que fuese equitativo, la diferencia 0 tendría que salir el mismo número de veces que la 3. Pero la diferencia 0 sale 6 veces y la 3 solo 3 veces".

Figura 1. Cuestionario

Para evaluar el conocimiento especializado del contenido, en el apartado 2 se pide analizar el contenido matemático necesario para resolver el problema. En el apartado 3 se debe decidir, entre una serie de respuestas dadas por niños al problema, cuáles de ellas son correctas o incorrectas, y en el 4 indicar las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea evaluando por tanto, el conocimiento del contenido matemático y los estudiantes.

En el apartado 1, la respuesta correcta es que el juego no es equitativo, pues Carmen gana a la larga 2/3 de las veces, mientras Daniel gana 1/3. En el apartado 2, se espera que los futuros profesores identifiquen algunos contenidos matemáticos presentes en el problema como: experimento aleatorio, suceso, espacio muestral, casos favorables y posibles, idea intuitiva de convergencia, equitatividad, variable, valor esperado, razonamiento combinatorio elemental.

En el apartado 3, la respuesta correcta es la que proporciona Beatriz, que considera que el juego no es equitativo. Las respuestas incorrectas son las de Ana y Carlos. En el primer caso, porque Ana no tiene en cuenta la probabilidad de cada uno de los sucesos. El error de Carlos ocurre al no tener en cuenta el orden de los dados, considerando, por ejemplo, indiferentes las soluciones 14 y 41, que está relacionado con la falta de capacidad combinatoria descrita en Azcárate (1995).

En el apartado 4, las posibles dificultades que pueden tener los alumnos son no comprender bien la idea de juego equitativo, no concebir la convergencia a la larga, o manifestar el "Outcome approach" descrito por Konold (1995). También se pueden manifestar sesgos como el de equiprobabilidad referido por Lecoutre (1992) o tener fallos en la idea de esperanza matemática o en el razonamiento combinatorio.

Conocimiento común del contenido

En este apartado se analizan las respuestas de los futuros profesores a la pregunta de si el juego era equitativo, y también los argumentos para justificarlas. Mediante un análisis de contenido de las mismas se han clasificado en respuestas correctas o parcialmente correctas, según que los estudiantes indiquen que el juego no es equitativo calculando correctamente la probabilidad de cada jugador o que los estudiantes indiquen que el juego no es equitativo porque Carmen tiene más posibilidades, pero sin calcular correctamente las posibilidades de cada jugador. El resto de las respuestas son incorrectas.

En la Tabla 1, observamos que han respondido correctamente solo 3 futuros profesores (1 %). De forma parcialmente correcta han contestado 102 futuros profesores (36 %), que indican que el juego no es equitativo porque Carmen tiene más posibilidades, pero no justifican su respuesta o cometen algún error, que se distribuyen en cinco categorías: R2, con 50 futuros profesores que no realizan ningún cálculo para justificar su respuesta; R3, con 18 futuros profesores que cometen algún error en los cálculos; R4, con 27 futuros profesores que cometen un error al identificar los casos posibles; R5, con 4 futuros profesores, que aunque manifiestan cierta percepción de la convergencia, no llegan a cuantificar las posibilidades de cada jugador y por último la categoría R6, con 3 futuros profesores, que no justifican la respuesta.

De forma incorrecta han contestado 120 futuros profesores (42.4 %), de los que 97 responden que el juego es equitativo y 23 que aunque consideran que el juego no es equitativo, sus justificaciones son incorrectas. Entre los que responden que el juego es equitativo hay cuatro categorías: R7, con 87 futuros profesores que manifiestan el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre (1992); R8, con 5 futuros profesores que basan su afirmación en que se trata de un juego aleatorio; R10, con 2 futuros profesores que no aportan ninguna justificación y R11, con 3 futuros profesores que dan otro tipo de respuestas. Entre los que responden que el juego no es equitativo encontramos dos categorías: R9, con 13 futuros profesores que manifiestan una incorrecta percepción de la independencia y R11, con 10 futuros profesores que dan otro tipo de respuestas.

Respuesta	Correctas/ Parc.correctas	Incorrectas		No contesta
	Juego no equitativo	Juego equitativo	Juego no equitativo	
R1. Respuesta correcta	3			
R2. Sin cálculo de probabilidades	50			
R3. Identifican casos posibles, error en cálculos	18			
R4. Cometen error al identificar casos posibles	27			
R5. Carmen gana a la larga	4			
R6. No justifican respuesta	3			
R7. Sesgo equiprobabilidad		87		
R8. El juego es aleatorio		5		
R9. Incorrecta percepción independencia			13	
R10. No justifican su respuesta		2		
R11. Otras respuestas		3	10	
Total	105	97	23	58

Tabla 1. Frecuencia de respuestas correctas o parcialmente correctas e incorrectas

Conocimiento especializado del contenido

A continuación, analizamos los resultados en el segundo apartado en que preguntamos por los conocimientos puestos en juego en la solución.

El contenido matemático mejor identificado por los futuros profesores como necesario para resolver el problema fue el concepto de probabilidad (11 grupos). El azar y la aleatoriedad son citados por pocos grupos (6 grupos), siendo también escasa la mención del razonamiento combinatorio o razonamiento lógico (6 grupos), estadística (5 grupos) o estimación de frecuencias de probabilidad o de frecuencia relativa (4 grupos). Dos grupos en cada caso hicieron referencia a experimentación, posibilidades, fracciones y operaciones numéricas. Por último, citados por un solo grupo, aparecen los conceptos de equidad y tabla. No se identifica el espacio muestral, o sucesos, casos favorables o posibles, idea de juego equitativo, valor esperado o razón, por lo que consideramos que el conocimiento especializado del contenido mostrado por los futuros profesores sería, en consecuencia, muy escaso.

Conocimiento del contenido y de los estudiantes

En los apartados tercero y cuarto se pide a los futuros profesores evaluar las respuestas de estudiantes de Educación Primaria e indicar las causas de sus dificultades.

Los resultados muestran que los futuros profesores han tenido cierta dificultad a la hora de discriminar las respuestas correctas e incorrectas al problema. Así, la respuesta correcta dada por Beatriz ha sido identificada como tal, solo por 14 grupos frente a 17 grupos que consideraron que dicha respuesta es incorrecta. Otro caso difícil de discriminar fue la respuesta incorrecta del alumno Carlos ya que hay 14 grupos que indican que es correcta. El caso más sencillo de discriminar ha sido la respuesta dada por Ana, ya que 27 grupos la identificaron como incorrecta. Entre los participantes hay tres grupos que consideran que hay dos respuestas correctas, que son las dadas por Beatriz y Carlos. Y diez grupos que consideran incorrecta la respuesta correcta de Beatriz, ya que aunque están de acuerdo en que el juego no es equitativo, consideran que la justificación de Beatriz no es adecuada y eligen como respuesta correcta la aportada por Carlos.

Pocos grupos detectan las causas de los razonamientos erróneos. En el caso de la respuesta incorrecta de Ana, las estrategias erróneas que consisten en considerar todos los resultados equiprobables (sesgo de equiprobabilidad) y en la incorrecta estimación de los casos posibles han sido reconocidas por 6 grupos de futuros profesores cada una de ellas, seguida de la de no comprender bien la idea de juego equitativo (3 grupos). Solo dos grupos han reconocido las estrategias de considerar los números en lugar de diferencias y la justificación de que el alumno no comprende el problema. En el caso de la respuesta incorrecta de Carlos, la estrategia errónea más reconocida ha sido considerar que el alumno falla en la estimación de casos posibles (4 grupos), seguida de la estrategia de centrarse solo en la diferencia cero (2 grupos). Menos reconocidas han sido las estrategias de considerar que el alumno no comprende bien la idea de juego equitativo y la justificación de que el alumno no comprende el problema.

En ambos casos destaca el importante número de grupos que no explica la causa del error cometido por el alumno.

Discusión y conclusiones

Los resultados del estudio muestran que la mayoría de los futuros profesores de Educación Primaria de la muestra tienen un escaso conocimiento común del contenido, pues no reconocen ni aplican correctamente la idea de juego equitativo para resolver el problema. Entre los participantes que han respondido de forma incorrecta, el error identificado con más frecuencia ha sido el sesgo de equiprobabilidad, que coincide con los resultados obtenidos en Ortiz et al. (2009), aunque en este caso resolviendo problemas de comparación de probabilidades. Otros errores han sido la realización incorrecta de los cálculos de probabilidad, el sesgo conocido como la falacia del jugador y los que han basado su respuesta en que el juego es aleatorio. Se ha detectado también falta de capacidad combinatoria y una incorrecta percepción de la equitatividad del juego, como en Azcárate (1995), pero en una proporción muy superior. Destaca el hecho de que casi la cuarta parte de los futuros profesores no contesta el problema.

El conocimiento especializado del contenido mostrado por estos futuros profesores al identificar los contenidos matemáticos en la tarea propuesta fue claramente insuficiente, ya que solamente algunos grupos reconocen los conceptos de probabilidad y de aleatoriedad como contenidos matemáticos necesarios para resolver el problema, y fallan en el reconocimiento de otros conceptos matemáticos fundamentales. Nuestros datos apoyan las conclusiones de Chick & Pierce (2008), quienes indican que algunos profesores no son capaces de identificar los conceptos latentes en una situación didáctica, y, en consecuencia, por este motivo podrían fallar en conseguir que los estudiantes aprendan dichos contenidos.

En relación con el conocimiento del contenido y los estudiantes, menos de la mitad de los grupos de futuros profesores acertó que la respuesta correcta era la aportada por la alumna Beatriz y casi la mitad considera que es correcta la respuesta errónea de Carlos. Fue mucho menor el conocimiento mostrado de las posibles razones de los errores en las respuestas de los alumnos, posiblemente porque los futuros profesores carecen de habilidad para explicar los errores de los estudiantes y desconocen los resultados de las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad, que habría que transmitirles mediante una adecuada transposición didáctica previa.

Los resultados apuntan la necesidad de reforzar la formación de los futuros profesores de Educación Primaria, tanto en su conocimiento matemático, como en el conocimiento pedagógico del contenido. Como consecuencia, el formador de profesores debe tener en cuenta estos diversos tipos de conocimiento, al abordar la formación de profesores para enseñar probabilidad.

Agradecimientos: Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20; Proyecto EDU2010-14947 (MCIN) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Cádiz, Cádiz, España.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 37, 37-55.

Chick, H. L., & Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. y Rossman, A. (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. Recuperado el 11 de junio de 2012 de http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics. *Journal of Statistics Education*, 3(1). Recuperado el 12 de julio de 2011, de www.amstat.org/publications/jse/v3n1/konold.html.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics 23*, 557-568.

Lidster, S. T., Watson, J. M., Collis, K. F., & Pereira-Mendoza, L. (1996). The relationship of the concept of fair to the construction of probabilistic understanding. En Clarkson, P. C. (Ed.), *Technology in Mathematics Education, Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne* (pp. 352-359). Sydney: MERGA.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2009). Asignación de probabilidades en profesores en formación. En P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1545-1554. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Scholttmann, A., & Anderson, N. H. (1994). Children's judgements of expected value. *Developmental Psychology* 30 (1), 56-66.

Watson, J., & Collis, K. F. (1994). Multimodal functioning in understanding chance and data concepts. En Ponte, J. P. y Matos, J. P. (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 369-376). Lisboa: Universidad de Lisboa.

REFLEXÕES SOBRE AS CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PRESENTES EM FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Telsuíta L. P. Santos, Mª da Glória B. de F. Mesquita, Suzicássia S. Ribeiro, Ulisses A. Leitão
Universidade Federal de Lavras - UFLA Brasil
telsuita@gmail.com mgbastos@ded.ufla.br suzicassia64@hotmail.com ulisses@dex.ufla.br

Resumo. A problemática deste estudo consiste em refletir sobre as concepções de futuros professores de Matemática, por acreditar que estas influenciam a prática docente. Foram investigadas as concepções de Educação Matemática manifestadas por alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Lavras – UFLA. O estudo teve por objetivo analisar e identificar as possíveis formas de intervenção na formação docente, a partir da análise da compreensão conceitual da Educação Matemática como área do conhecimento, como evidenciada pelos estudantes. Os resultados apontam para a necessidade de promover ações, estudos e discussões sobre Educação Matemática com os licenciandos, visando fomentar o desenvolvimento de uma prática pedagógica mais efetiva, baseada na concepção de que Educação Matemática ultrapassa os limites de métodos para se desenvolver atividades Matemáticas em sala de aula.

Palavras chave: formação de professor, licenciatura em matemática, metodologia de ensino

Abstract.The issue of this study is to reflect on the conceptions of Mathematics Education of future teachers of mathematics, believing that they influence the teaching practice. The conceptions of Mathematics Education expressed by pupils of the course of degree in Mathematics at the Universidade Federal de Lavras-UFLA were investigated. The study aimed to analyze and identify the possible forms of intervention in teacher education, from the analysis of the degree of conceptual understanding of Mathematics Education as a field of knowledge, by the students. The results point to the need to promote actions, studies and discussions on Mathematics Education with the students, in order to foster the development of a more effective pedagogical practice, based on the notion that mathematics education extends beyond the boundaries of methods to develop mathematics classroom activities.

Key words: teacher education, mathematics degree, teaching methodology

Introdução

The issue of this study is to reflect on the conceptions of Mathematics Education of future teachers of mathematics, believing that they influence the teaching practice. The conceptions of Mathematics Education expressed by pupils of the course of degree in Mathematics at the Universidade Federal de Lavras-UFLA were investigated. The study aimed to analyze and identify the possible forms of intervention in teacher education, from the analysis of the degree of conceptual understanding of Mathematics Education as a field of knowledge, by the students. The results point to the need to promote actions, studies and discussions on Mathematics Education with the students, in order to foster the development of a more effective pedagogical practice, based on the notion that mathematics education extends beyond the boundaries of methods to develop mathematics classroom activities.

A partir de nossa experiência como professores, acreditamos na necessidade de se refletir sobre as concepções de futuros professores nos cursos de formação inicial, por considerar que estas interferem diretamente nas ações e decisões dos professores na prática docente. Para Thompson (1997), o conhecimento dos professores para ensinar matemática está ligado às crenças e concepções que eles têm sobre a Matemática e sobre seu ensino. Também Ponte (1992) afirma a existência desta relação quando diz que "os professores de Matemática são os responsáveis pela organização das experiências de aprendizagem dos alunos. Estão, pois, num lugar chave para influenciar suas concepções." (p.2)

Diversos autores que dedicam seus estudos à formação de professores, suas 'crenças' e 'concepções', apresentam diferentes definições para estes termos. A fim de orientar nossas análises, adotaremos a definição de João Pedro da Ponte, quando define que:

> As concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva. Atuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis, pois estruturam o sentido que damos as coisas. Por outro lado, atuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de atuação e compreensão. (Ponte, 1992, p. 1)

Entendemos, a partir do exposto, que as concepções são construções cognitivas, ou seja, são construídas a partir da produção de significados que fazemos sobre nosso meio social. As informações e as experiências vivenciadas no cotidiano, as quais são automaticamente por nós filtradas, conduzem à construção e reconstrução de concepções. Quando temos a oportunidade de tomar conhecimento e refletir sobre estes, nos surge a possibilidade de passar por processos de mudanças, os quais nos auxiliam a enxergar a realidade de diferentes formas, possibilitando maior compreensão e reelaboração das crenças e ou concepções.

A Matemática é uma área de conhecimento e uma disciplina escolar com a possibilidade de inúmeras concepções, sejam estas construídas de formas negativas ou positivas, se a considerar que é uma ciência antiga, sendo, portanto, alvo do convívio social há centenas de anos. Pré-julgamentos e pré-conceitos muitas vezes são criados e construídos a partir de opiniões de indivíduos que por ventura possam ter vivenciado situações negativas na disciplina. Estas conduzem a interferências na construção de concepções que poderiam se diferenciar das construídas através da experiência do próprio indivíduo, ou seja, quando recebemos informações/opiniões já filtradas por outras pessoas, estas interferem na construção de nossas próprias concepções.

Ao se retomar a história da Matemática é possível encontrar diversos fatos que conduziram à criação de rótulos para esta disciplina, como: 'difícil de aprender', 'só pra gênio', 'abstrata', entre outros. Um ponto que pode contribuir para a construção de concepções negativas se encontra na obrigatoriedade do estudo desta disciplina desde a mais tenra idade nas escolas. "Ora o aluno tem que trabalhar em Matemática porque a isso é obrigado pela escola; muitas vezes não tem qualquer interesse especial por este assunto, não sendo fácil ao professor leva-lo a assumir uma outra atitude." (Ponte, 1992, p.4)

Partindo então da obrigatoriedade da matemática, vê-se também obrigados os professores a atuarem na área. Os mesmos podem não ter o gosto ou formação ou até mesmo não terem a concepção da importância da matemática como área interessante e aprazível. Na literatura encontramos estudos que concluíram sobre como as concepções dos professores são, muitas vezes, formadas, tais como:

> Os professores de Matemática concebem a Matemática a partir das experiências que tiveram como alunos e professores, do conhecimento que construíram, das opiniões de seus mestres, enfim das influências socioculturais que sofreram durante suas vidas, influências que vêm sendo construídas passando de geração para geração, a partir de filósofos que refletiram sobre a Matemática. (Cury, 1999, p.40)

Vemos que as concepções são construídas a partir das experiências e dos contatos com a matemática na escola e não a partir do conhecimento e produção de significados que os professores elaboram quando aprendem matemática ou quando estão em seus cursos de formação inicial. Será que os futuros professores não vivenciam a importância da matemática enquanto alunos? Se isto não ocorre como eles podem favorecer a vivência de seus futuros alunos? Por isto justificamos este trabalho como o inicio de uma pesquisa a ser mais elaborada para ser totalmente validada.

> A essas ideias somam-se todas as opiniões que os professores formam sobre a Matemática como disciplina, sobre seu ensino e aprendizagem, sobre seu papel como professores de Matemática, sobre o aluno como aprendiz, ideias essas nem sempre bem justificadas. (Cury, 1999, p.41)

Não temos informações sobre estas 'opiniões' dos professores. A maioria dos relatos que encontramos demonstra contradições e/ou controvérsias. Anais de congressos, encontros e colóquios revelam registros da preocupação de estudiosos da área quanto às dificuldades observadas no processo de ensinar e aprender matemática. Matemáticos, pedagogos e psicólogos sugerem uma nova maneira de aprender: a ideia do aprender pelo prazer, pelo valor, pela necessidade, pela compreensão e não pelo dever, pela obrigação e através da repetição exacerbada de técnicas e algoritmos.

Corroboramos com Borba e Santos (2005, p.294) ao sugerirem que a Educação Matemática seja "uma região de inquérito que mantém intersecções em educação e matemática, na busca da identidade própria". Esta intersecção se estende a diversas áreas abordando questões sociais, culturais, históricas, psicológicas, filosóficas, entre outras. "A Educação Matemática não deve ser vista como 'metodologia de ensino de matemática', embora reconheçamos ser esta uma parte importante de suas preocupações". (Ibid, p.292)

Garnica (1999) afirma que a ação educativa de ensinar uma coisa chamada "matemática" implica em um movimento em que se manifesta a Educação Matemática. Este movimento se transforma em um campo de pesquisa acadêmica, tendo em vista o ambiente propício da Universidade para tais discussões.

Assim, entendemos que a Educação Matemática não se restringe à prática de ensino, à metodologia e sim ao estudo da tríade: ensino, aprendizagem e conhecimento matemático. Partindo destas premissas propomos este trabalho com o objetivo de refletir sobre as concepções de Educação Matemática que futuros professores de matemática apresentam, e também analisar e identificar as possíveis formas de intervenção, caso necessário, para que estes compreendam a amplitude desta área de conhecimento.

O caminho trilhado

Baseado Goldenberg (2004), optou-se por aplicar um questionário padronizado, contendo uma única questão aberta, a um grupo de 29 alunos do primeiro semestre do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Lavras (UFLA). Foi solicitado que conceituassem Educação Matemática. Estes alunos foram escolhidos de modo conveniente, pois, cursaram durante o primeiro semestre de 2012, uma disciplina, sob a responsabilidade de uma das autoras desta pesquisa (Disciplina: Educação, Trabalho, Ciência e Tecnologia).

A intenção não era julgar se as concepções destes alunos, em relação ao que seja Educação Matemática, estavam corretas ou incorretas, tampouco identificar suas origens, pois seria necessário um estudo aprofundado sobre a questão. Pretendia-se apenas analisá-las para melhor compreensão e identificar as possíveis formas de intervenção, caso necessário, para que os alunos realmente compreendam a amplitude desta região de inquérito (Borba e Santos, 2005).

O questionário, aplicado aos 29 alunos (os quais não serão identificados por nome, sexo ou qualquer outra característica) constou de uma única questão, com o espaço restante de uma folha tamanho A4 (sulfite) para resposta dissertativa. A questão foi: O que você concebe como Educação Matemática?

A análise das respostas se deu inicialmente de forma quantitativa, sendo agrupadas em categorias, de acordo com expressões-chave identificadas. Em seguida, foi realizada a análise qualitativa, conduzindo a possíveis motivos e prováveis caminhos a trilhar, visando fomentar o desenvolvimento de uma formação inicial mais efetiva.

Resultados e discussão

Do grupo de 29 alunos, dois não responderam. Entregaram a folha em branco, sem nenhuma justificativa pelo ato. A partir desta observação, começamos a levantar possíveis questões que poderiam estar relacionadas com esta ação, tais como: Estes alunos estão realmente interessados em se graduarem como professores de Matemática? Como concebem a formação de um professor de matemática? Tem interesse pela área de matemática? Pela área pedagógica? Por que estão em um curso de Licenciatura em Matemática? Será que compreendem o objetivo do Curso? Tais questões, e outras que surgirem, pretendemos apresentar a este mesmo grupo de alunos futuramente, pois abrirá campo para pesquisa e compreensão do processo de formação de futuros professores. Como estes alunos estão, em 2012.1, no primeiro semestre, este fato, de entregarem a folha em branco, impulsiona a intenção de acompanhá-los durante todo o curso.

Um aluno apresentou uma resposta ampla e vaga: "*É algo bem complexo que necessita muito esforço e atenção para compreendê-la*". A partir desta entendemos que este aluno ou nunca ouviu falar sobre Educação Matemática e respondeu de forma geral para não deixar sem resposta, (fato este muito observado e comum em nossas experiências como professoras na área pedagógica de cursos de licenciatura); ou, já procurou conhecer, lendo sobre o tema, mas sem aprofundamento em discussões e reflexões, o que não lhe permite formular uma conceituação clara e uma produção de significado concreta.

E outro apresentou uma resposta confusa que se contradiz: "*É a arte de transmitir conhecimentos matemáticos, ela não se preocupa com o saber matemático*". Acreditamos que nesta colocação o aluno possa ter tentado expressar a não preocupação com fórmulas e algoritmos pré-definidos, porém, esta hipótese precisa ser verificada para ser afirmada. Quanto à expressão 'transmitir conhecimentos' por este citada, sugere a concepção conteudista e tradicional onde o professor transmite os conhecimentos aos alunos em oposição ao professor mediador, onde o conhecimento é construído pelos alunos, através da interação.

Os quatro estudantes acima mencionados, na análise quantitativa, classificamos como 'nulos/abstenções', pois as informações não contribuíram significativamente para a identificação de suas concepções quanto à Educação Matemática. Na análise qualitativa, podemos supor que tais alunos não tiveram oportunidade para refletir sobre tal conceito, ou que tenham escutado vagamente algo sobre e preferiram não se expor tecendo considerações não pertinentes, ou até mesmo não se interessam pelo assunto.

A partir das demais respostas procurou-se dividi-las em quatro categorias, quais sejam: 1 - Educação Matemática relacionada a método de ensino; 2 - Educação Matemática relacionada ao professor; 3 - Educação Matemática relacionada a resolução de problemas e; 4 – Educação Matemática relacionada ao processo ensino-aprendizagem.

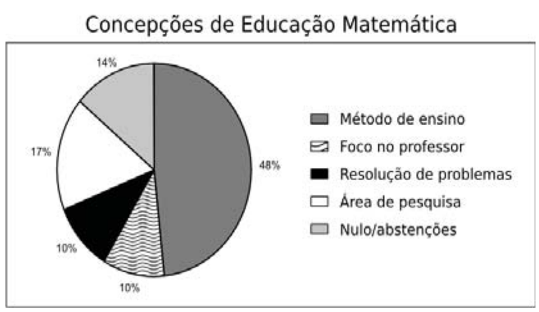


Fig. 1: Distribuição percentual das concepções de Educação Matemática correspondentes à categorização, vide texto.

Na primeira categoria, aninhamos respostas que sugerem concepções relacionando a Educação Matemática com método de ensino. 14 alunos (48,3%) responderam nesta temática. Considerando o termo método conforme definição de Ferreira (2008, p.552) este pode ser "procedimento organizado que conduz a um certo resultado" e/ou "processo ou técnica de ensino". Podemos sugerir que tais alunos concebem que a Educação Matemática seja somente formas de se trabalhar conteúdos matemáticos em sala de aula, um caminho para se chegar a um fim que seja o aprender conteúdos matemáticos. Destacamos uma das respostas mais frequentes, em que um aluno afirma que Educação Matemática "*é a área onde se estuda os métodos para se ensinar Matemática, não se preocupando com conceitos específicos*".

Outra resposta que nos chamou atenção, também relacionando a Educação Matemática com método de ensino é a do aluno que diz ser um "*método que visa simplificar o ensino matemático* *a aqueles menos desprovidos de aprender a matemática e também encontrar uma forma mais simples para o entendimento da sociedade*".

Três alunos (10,3%) acreditam que a Educação Matemática tenha seu foco no professor, preocupando-se com seu posicionamento, sua atitude em sala de aula. Um destes salienta que ela é focada no indivíduo, na formação matemática deste, por nós entendido como sendo o professor, ao dizer que é a "formação do indivíduo voltada para o estudo matemático". Os outros dois alunos citaram ser um "estudo mais aprofundado do ser matemático, ou seja, o professor de matemática como ser, e qual posicionamento deve ter quando se torna um profissional nessa área", "sensibilidade para ensinar matemática". Para estes alunos, e a partir de suas afirmações consideramos que um trabalho mais aprofundado sobre a relação professor/aluno na sociedade, suas funções, interferências, e consequências será necessário. Sugerimos inclusive trabalhar com os autores tais como: Ubiratan D'Ambrosio, João Pedro da Ponte, Inez Maria Gomes Chacon e Antonio Nóvoa, em suas contribuições para o desenvolvimento profissional.

Outros três alunos (10,3%) consideram a Educação Matemática reduzida à resolução de problemas matemáticos. Como atesta um deles é "o uso da sabedoria para resolução de problemas que envolvem números". Na resposta "passar conhecimento em matemática aos alunos para que eles possam resolver problemas" sugere também o tradicionalismo, onde se tem o professor como detentor do saber. Observou-se que estes alunos não tem conhecimento da linha de pesquisa em Educação Matemática: "Resolução de Problemas", com os precursores Polya (1978) e Onuchic (1999). Uma ação que apresente aos futuros professores esta e as demais linhas de pesquisa em Educação Matemática será imprescindível e, poderá inclusive favorecer a formação de licenciandos pesquisadores.

Finalmente, 5 alunos (17,2%) apontam suas definições de Educação Matemática relacionando com compreensão e processo. Um deles menciona a relação com a didática e a psicologia, concebendo ser o "processo de ensino/aprendizagem de todos os conteúdos matemáticos, do qual se utiliza a didática e a psicologia". Outro acredita ser a área que "estuda a maneira de ensinar matemática, analisando os diversos modos de compreender seus conceitos". Seriam as respostas que mais se aproximam de nossas expectativas e concepções, conforme apresenta a literatura no decorrer deste texto.

A formação do professor é assunto de discussões que se estendem por várias décadas, marcado por reivindicações relacionadas à profissionalização e valorização do ofício do ensino.

Segundo Dias-da-Silva (2005) o papel da formação geral básica do professor foi negligenciado em função da necessidade de diminuir o tempo na universidade tendo em vista a grande demanda de alunos. Concordando com a autora e após leitura das respostas dos alunos iniciantes no curso de licenciatura em matemática podemos concluir a necessidade de se estudar Educação Matemática no curso de formação inicial, propiciar seu conhecimento, e aprofundar suas pesquisas.

Em se tratando da formação inicial do professor de Matemática, Ponte (2002) enfatiza categorias de competências que devem ser consideradas nesse processo de preparação para o exercício da profissão com destaque para a Educação Matemática e suas relações.

Considerações finais

Lorenzato e Fiorenti, (2001) descrevem a Educação Matemática como a área do conhecimento cujo objeto de estudo são as múltiplas relações e determinações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático, bem como as investigações dessa tríade, e vêm oferecer embasamento teórico para questões relacionadas à formação do professor. Definição esta que comunga com as de Borba e Santos (2005) com as quais corroboramos. Portanto, enfatizamos que a Educação Matemática ultrapassa os limites de métodos de se desenvolver atividades Matemáticas em sala de aula e/ou resolver problemas. Esta é uma importante preocupação da área, no entanto, é necessário compreenderem que não se resume a isto, por isto, desenvolver estratégias e ações que propiciem aos alunos maior entendimento sobre esta área mostra ser imprescindível.

Reafirmando o embasamento teórico em Thompson (1997), Ponte (1992) e Cury (1999) em relação às concepções dos professores e analisando o questionamento por nós realizado, consideramos haver necessidade de promover estudos e discussões sobre Educação Matemática com os licenciandos. Concebemos que não há possibilidade de que eles venham a trabalhar concepções que lhes são desconhecidas, ou contribuir para a construção das concepções de seus futuros alunos e/ou indivíduos que fazem parte de seu convívio social. É necessário compreender que a Matemática ensinada na escola não pode ser a Matemática do matemático, e sim a união da Matemática com a Educação. Que conheçam as tendências que perpassam pela modelagem, pela psicologia, pela informática, pela história, entre outras. E principalmente que compreendam que a Educação Matemática está em constante movimento, pois, à medida que a sociedade se modifica ocorrem transformações nesta região de inquérito, procurando acompanhar as necessidades sociais.

A partir dos resultados obtidos, podemos considerar que os licenciandos concebem Educação Matemática de forma incompleta, o que indica a necessidade de intervenção. Como sugestões de ações, encaminhamos um estudo das disciplinas elencadas no currículo escolar dos graduandos. Propomos a análise de como a Educação Matemática esta sendo abordada e a necessidade de complementação. Como ações imediatas foram propostas leituras sobre o assunto, participação em eventos e cursos com foco em discussões e reflexões, maior proximidade com professores da Educação Básica e de professores dos Departamentos de Matemática e de Educação da Universidade. A formação de Grupos de Trabalho (estudo, pesquisa, e extensão) envolvendo graduandos dos vários semestres do curso, professores Universitários e professores da Educação Básica, em muito poderá contribuir para a formação inicial do licenciando e para a formação continuada do professor, teorizando as experiências vivenciadas e fomentando o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais efetivas.

Referências bibliográficas

Borba, M.; Santos, S. C. (2005). Educação Matemática: propostas e desafios. *EccoS – Revista Científica,* 7(2), 291-312.

Cury, H. N. (1999). Concepções e crenças dos professores de matemática: pesquisas realizadas e significado dos termos utilizados. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática 12* (13), 29-44.

Dias-Da-Silva, M. H. G. F. (2005). Política de formação de professores no Brasil: as ciladas da reestruturação das licenciaturas. *Perspectiva, 23* (2), 381-406.

Ferreira, A. B. de H. (2008). *Mini Aurélio:* O dicionário da língua portuguesa. Curitiba: Positivo.

Garnica, A. V. M. (1999). Filosofia da educação matemática: algumas ressignificações e uma proposta de pesquisa. In M. A.V, Bicudo (Org.), *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas* (pp.59-74). São Paulo: UNESP.

Goldenberg, M. (2004). *A arte de pesquisar – Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.* São Paulo/Rio de Janeiro: Record.

Lorenzato, S., Fiorentini, D. (2001). *O profissional em Educação Matemática.* Acesso em 19 de janeiro de 2012 em http://sites.unisanta.br/teiadosaber/apostila/matematica

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas.* São Paulo: Interciência.

Onuchic, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas. In M. A.V, Bicudo (Org.), *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP.

Ponte, J. P. (1992) Concepções dos professores de matemática e processos de formação. *Educação Matemática*: temas de investigação. Lisboa: IIE. Acesso 19 de janeiro de 2012 em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htmacesso em 22/02/2012

Ponte, J. P. (2002). A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. *Educação Matemática em Revista.* 1 (11A), 3-8.

Thompson, A. (1997) A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. *Zetetiké*, *5* (8), 9-45.

COMPETENCIA PROFESIONAL DE PROFESORES DE SECUNDARIA EN LA EVALUACIÓN DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS DE LOS ALUMNOS

Norma Rubio, Vicenç Font
Pontificia Universidad Católica del Perú — Perú
Universitat de Barcelona — España
nrubio@pucp.edu.pe, vfont@ub.edu

Resumen. Se presenta una parte de una investigación cuyo objetivo es determinar el nivel de competencia que manifiestan los profesores de secundaria en la evaluación de la competencia matemática. Los participantes no coincidieron entre ellos en las competencias matemáticas que se podían inferir de la solución a los problemas propuestos, y, por otra parte, tampoco coincidieron con los niveles de complejidad que el informe PISA 2003 asigna a los problemas que se les propusieron (reproducción, conexión o reflexión).

Palabras clave: profesores, competencia matemática, evaluación, competencia profesional

Abstract. This study is a part of research aimed at determining the level of competence that secondary –school mathematics teachers show in the evaluation of mathematical competence. Participants did not agree among themselves in math skills that could be inferred from the solution to the problems posed, and on the other hand, neither matched the levels of complexity that the PISA 2003 assigns to the problems are proposed (reproduction, connection or reflection).

Key words service teachers, mathematical competencies, assessment, professional competency

Introducción

La investigación sobre el conocimiento y el desarrollo de las competencias profesionales del profesorado de matemáticas ha adquirido una importante relevancia internacional en los últimos años (Silverman y Thompson, 2008; Even y Ball, 2009) y ha puesto de manifiesto su complejidad y las limitaciones del conocimiento producido por dichas investigaciones (Sullivan y Wood, 2008).

El trabajo que se presenta está relacionado con la problemática del desarrollo de las competencias profesionales del profesor de matemáticas. De acuerdo con Coll y Sánchez (2008) consideramos el término "competencia profesional" como una herramienta para establecer las características principales de los profesores de matemáticas y así poder incorporarlas en procesos de formación. De acuerdo con el informe PISA, entendemos por competencia matemática la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano.

Dado que en algunos países el currículo de la enseñanza secundaria está organizado por competencias, entre ellas la matemática, y el currículo de la Formación de Profesores lo está por competencias profesionales, aparecen las siguientes cuestiones que merecen ser investigadas: ¿Cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar la competencia matemática, prescrita en el currículo de los alumnos? ¿Cómo desarrollarlas y evaluarlas?

Se presenta una parte de una investigación cuyo objetivo es determinar el nivel de competencia profesional que manifiestan los profesores de secundaria en la evaluación analítica de las competencias matemáticas de sus alumnos. Para ello, primero se diseñó e implementó un taller piloto con profesores de secundaria del Perú, con los siguientes resultados: por una parte, los participantes no coincidieron entre ellos en las competencias matemáticas que se inferían de la solución a los problemas propuestos, y, por otra parte, tampoco coincidieron con los niveles de complejidad que el informe PISA 2003 asigna a los problemas que se les propusieron (reproducción, conexión o reflexión). Mostraron, además, dificultades para resolver problemas de contexto extramatemático.

En ese taller se puso de manifiesto:

1. La necesidad de que el profesor tenga competencia matemática para poder evaluar la competencia matemática de sus alumnos.
2. La dificultad que tenían los profesores para aplicar los constructos PISA 2003 al análisis de la actividad matemática necesaria para resolver una tarea. Esta dificultad se podía deber a diferentes razones, podía ser causada por la ambigüedad de los constructos PISA 2003 (opinión mayoritaria de los asistentes) o bien porque los profesores no tuviesen las habilidades necesarias para entenderlos y aplicarlos — por otra parte, a pesar de la diversidad observada en la asignación de los niveles de complejidad a un problema, había un aspecto que permitía ser optimista en cuanto a la posibilidad de poder sobrellevarla. Nos referimos a que la moda coincidía con el nivel de complejidad asignado en el informe PISA 2003 a los tres problemas propuestos (Carpintero y Chatear 1 y 2).
3. Se debían diseñar talleres para colectivos específicos teniendo en cuenta los siguientes aspectos: competencia matemática, experiencia docente y Formación en Didáctica de las Matemáticas a nivel de postgrado (máster, magíster o similar) y había que investigar

en cada colectivo específico si el grupo mayoritario coincidía en el uso de los constructos PISA 2003.

En este reporte de investigación se explica la parte de la investigación que tenía por objetivo determinar el nivel de competencia que manifiestan profesores de secundaria del Perú — con competencia matemática, con experiencia docente y con estudios de postgrado en didáctica de las matemáticas — en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos. Para ello, se diseñó e implementó un taller con profesores que eran estudiantes de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Metodología

Se utilizó una metodología de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004) ya que se observaron variables cualitativas (tipo de competencia inferida y nivel de complejidad competencial del problema) y se realizó un estudio cuantitativo de frecuencias. Se trata de una investigación (1) puntual (la información se obtuvo en un espacio de tres días) y (2) de campo, ya que se realizó como una parte de las actividades de formación permanente de los participantes. Al ser una muestra intencional, no se puede considerar representativa. Desde el punto de vista de la cantidad de los participantes, se trata de un estudio de caso.

Los datos se recogieron por medio de cuestionarios y de un diario de campo. En uno de los cuestionarios, los participantes debían determinar la subescala (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, incertidumbre); situación (personal, educativa o laboral, pública o científica); contexto (intramatemático o extramatemático); y el nivel de complejidad (reproducción, conexión o reflexión) correspondientes a cada uno de los problemas siguientes, propuestos en las pruebas PISA 2003: Interés, Distancia, Tiempo de reacción 1, Tiempo de reacción 2, Chatear 1, Chatear 2 y Carpintero adaptado. En otro cuestionario, se les presentaba la solución de un alumno de secundaria al problema del carpintero (adaptado) para que ellos determinasen qué competencias matemáticas había desarrollado dicho alumno.

Para el análisis de datos se realizó un análisis de contenido. Se utilizaron, por una parte, los constructos del marco teórico del informe PISA 2003 (OECD, 2003). Por otra parte, se utilizó la técnica de análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Gognición en Instrucción Matemática (EOS) (Font y Rubio, 2008; Godino, Batanero y Font, 2007) para inferir competencias (y sus niveles de complejidad) de la respuesta de un alumno a uno de los problemas propuestos en las pruebas PISA 2003 (problema del carpintero). Dicho análisis permitió generar hipótesis sobre las competencias (y sus niveles de complejidad) que se podía esperar que los participantes infiriesen de la respuesta dada por el alumno.

Diseño e implementación del taller

Se diseñó el taller, denominado "Evaluación de las competencias matemáticas de las pruebas PISA 2003". Este taller tuvo una duración de 6 horas y se realizó en el primer semestre académico 2010, durante tres sesiones de clase de la asignatura Análisis de Currículo de Matemáticas en la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas (MEM) de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Las modalidades de trabajo fueron: 1) presentación del informe PISA 2003 por parte de la profesora; 2) trabajo individual de los estudiantes y 3) trabajo en parejas. El contenido principal de las sesiones fue:

1. Respuesta individual a un cuestionario cuyo objetivo era tener información sobre su situación laboral y académica y su nivel de información sobre las competencias matemáticas contempladas en el informe PISA 2003.
2. Información y reflexión sobre los "niveles de complejidad" y la lista de las "competencias y subcompetencias" del informe PISA 2003, utilizando como ejemplos algunos de los problemas propuestos en estas pruebas.
3. Respuesta individual y en parejas a un material diseñado para recoger información sobre su competencia inicial en la evaluación de competencias matemáticas PISA 2003.

Los participantes fueron 12 estudiantes de la MEM del curso de Análisis de Currículo de Matemáticas. Esto nos aseguraba, por una parte, que ellos tenían competencia matemática (para ser más precisos, habían cursado un número de asignaturas de matemáticas en sus estudios que permitía suponer que tenían una nivel razonable de competencia matemática), cierta experiencia docente y, por otra parte, que tenían además cierta formación en Didáctica de la Matemática.

Los participantes eran de diferentes especialidades, ocho de ellos de la especialidad de Educación Secundaria, con mención en Matemáticas, de los cuales, siete enseñaban en educación secundaria y uno en una institución preuniversitaria; uno de la especialidad de Matemáticas y Ciencias, profesor de matemáticas y ciencias en educación secundaria; uno de la especialidad de matemáticas; y dos de la especialidad de ingeniería. Estos cuatro últimos enseñaban en los primeros ciclos de Universidad.

En cuanto a su experiencia docente, dos de ellos tenían una experiencia docente menor de 3 años, dos una experiencia docente entre 3 y menos de 5 años, seis una experiencia docente mayor de cinco años pero menor de 10 y, finalmente, dos tenían una experiencia docente de más de 10 años. Solo dos de ellos laboraban en instituciones estatales y uno en una institución religiosa. Los demás laboraban en instituciones privadas. Incluso alguno de ellos tenía experiencia en cargos de gestión educativa como, por ejemplo, coordinador de área.

Resultados

A continuación se presenta un resumen de los resultados sobre la competencia inicial en la evaluación de competencias matemáticas PISA 2003 de los participantes.

Las matemáticas, como todas las disciplinas, tienen una tradición en el modo de organizar sus contenidos. En el informe PISA se intenta establecer una clasificación de contenidos basada en los fenómenos que estudian y se opta por su estructuración mediante cuatro principales ideas: cantidad, espacio y forma, cambios y relaciones, incertidumbre.

En la Tabla 1 se resume la subescala o ideas principales asignada por los estudiantes de la MEM a los problemas comentados en todo el taller (Interés, Distancia, Tiempo de reacción 1, Tiempo de reacción 2, Chatear 1, Chatear 2 y Carpintero adaptado).

Tabla 1. Ideas principales asignadas a los problemas PISA propuestos

Problema / Ideas Principales	Interés	Distancia	Tiempo Reacción 1	Tiempo Reacción 2	Chatear 1	Chatear 2	Carpintero
Cantidad	8	7	8	7	7	4	1
Espacio y forma	0	7	0	0	0	1	12
Cambio y relaciones	4	1	4	2	5	8	1
Incertidumbre	0	0	0	3	0	1	0

Fuente: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de Currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP.

La situación es aquella parte del mundo del estudiante en la cual se sitúa la tarea. Las situaciones permiten establecer la localización de un problema en términos de los fenómenos de los que surge y que condicionan la cuestión problemática planteada. Los responsables del proyecto PISA/OCDE consideran que la segunda variable, que se refiere a la situación, toma cuatro valores que son: personales, educativas y ocupacionales, públicas y científicas.

En el gráfico 1 se resume el tipo de situación asignada por los estudiantes de la MEM a los problemas comentados en todo el taller.

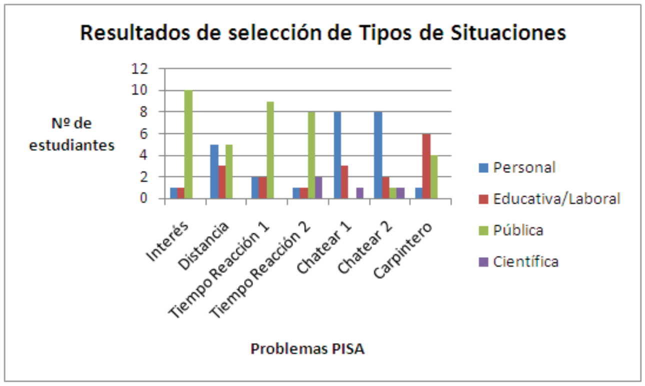


Gráfico 1. Resultados de selección de Tipos de Situaciones asignados a los problemas PISA propuestos.

El proyecto PISA/OCDE considera tres clases de complejidad en los ítems propuestos. De este modo incluye una nueva variable de tarea: el modo en que las distintas competencias son requeridas como respuesta a los distintos tipos y niveles de demandas cognitivas planteados por los diferentes problemas matemáticos. Cada una de las tareas admite tipos diferentes de complejidad, lo cual afecta al modo en que deben ejecutarse los correspondientes procesos. Dichas clases de complejidad para las tareas son: reproducción, conexión y reflexión.

En el gráfico 2 se resume el nivel de complejidad asignado por los estudiantes de la MEM a los problemas comentados en todo el taller.

Al diseñar el taller se pensó en participantes que tuvieran presumiblemente una buena competencia matemática en función de su formación, lo cual era garantizado a priori por ser profesores de matemáticas en ejercicio de educación secundaria o primer año de educación superior. Dicha competencia se verificó cuando los estudiantes de la MEM dieron las respuestas correctas a los problemas planteados. También se pensó en participantes que tuvieran experiencia docente y un cierto conocimiento en Didáctica de las matemáticas, lo cual también se cumplió.

Los principales resultados de este taller fueron que los participantes, por una parte, no coincidieron entre ellos en las competencias matemáticas que se inferían de la solución de un alumno a un problema propuesto, y, por otra parte, tampoco coincidieron con los niveles de complejidad que el informe PISA 2003 asigna a los problemas que se les propusieron, aunque la moda coincidió con los niveles asignados a los problemas propuestos en el informe PISA 2003 excepto en un apartado de uno de los problemas propuestos. Por otra parte, los participantes aplicaron las matemáticas que conocían a los problemas contextualizados sin mayores inconvenientes.

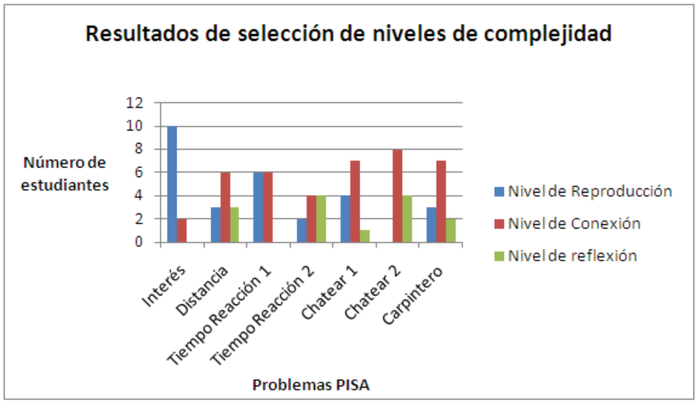


Gráfico 2. Resultados de selección de niveles de complejidad asignados a los problemas PISA propuestos.

Hay como mínimo dos posibles explicaciones a estos resultados, una sería que estos mismos profesores con más práctica en el uso de los constructos teóricos del informe PISA 2003 podrían llegar a un nivel de competencia similar a la que tienen los expertos que evalúan las pruebas PISA 2003. La otra es que la causa no está en la falta de práctica sino que está en la ambigüedad de los constructos teóricos utilizados en el informe PISA 2003 (por ejemplo, las diferentes maneras de entender la competencia; la relación entre las nociones de "proceso" y "competencia" las cuales se presentan como estrechamente relacionadas e incluso, en algunos casos, se utilizan como términos análogos; la superposición de las competencias -casi todas tienen un "territorio en común"- y el hecho de que hay dos que, más que competencias, serían megacompetencias, nos referimos a la resolución de problemas y a la modelización). En este último caso la pregunta que nos deberíamos formular sería ¿qué herramientas teóricas necesitan los profesores para poder evaluar las competencias matemáticas propuestas en el informe PISA 2003?

Agradecimientos. Trabajo realizado en el marco de los siguientes proyectos de investigación: 1) REDICE-10-1001-13 "Una perspectiva competencial sobre el Master de Formación de Profesor de Secundaria de Matemáticas". 2) EDU2009-08120 "Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato". 3) EDU 2012-32644 "Desarrollo de un programa por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas". Por otra parte, esta investigación también ha sido posible mediante la ayuda del ARCE (Agrupació de Recerca en Ciències de l'Educació) 2011 y de la ayuda dada por el Comissionat per a

Universitats i Recerca del DIUE de la Generalitat de Catalunya al grupo de recerca consolidat 2009 SGR 485 "Grup de recerca ensenyament i aprenentage virtual".

Referencias bibliográficas

Coll, C. y Sánchez, E. (2008). El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de Educación*, 346, 15-32.

Even, R. y Ball, D. L. (Eds.) (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI study*. New York: Springer.

Font, V. y Rubio, N. (2008). Onto-semiotic tools for the analysis of our own practice. En B. Czarnocha (ed.), *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment - A Tool for Teacher-Researchers* (pp. 165-180). Poland: University of Rzeszów.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Johnson, R.B. y Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has com. *Educational Research, 33*(7), 14-26.

OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OCDE.

Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(6), 499-511.

Sullivan, P. y Wood, T. (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development.* Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers.

DIFICULTADES QUE ENFRENTAN LOS PROFESORES EN ESCENARIOS DE MODELIZACIÓN

Liber Andrés Aparisi Nielsen, Marcel David Pochulu
Instituto Nacional de Formación Docente Argentina
Universidad Nacional de Villa María
laparisi@unsam.edu.ar, marcelpochulu@hotmail.com

Resumen. El trabajo tiene por objetivo describir algunos obstáculos y desafíos que enfrentan los profesores de Matemática al iniciar actividades de modelización. A su vez, se busca caracterizar las ventajas y desventajas que le encuentran los profesores a esta estrategia de enseñanza cuando la implementan en sus clases habituales en la escuela secundaria. Los profesores realizaron una capacitación virtual, referida a la enseñanza de la Matemática con nuevos recursos, donde la resolución de problemas y las actividades de modelización fueron el eje de curso. Los resultados muestran que a los profesores se les presentan dificultades en el momento de abordar actividades de modelización, lo que conlleva a que no siempre sea vista como una estrategia de enseñanza viable de ser utilizada en las clases.

Palabras clave: modelización matemática, formación de profesores de matemática.

Abstract. The aim of this paper is to describe obstacles and challenges that teachers face when they use modeling activities in secondary classes. We propose, also, to characterize advantages and disadvantages that teachers find when using this teaching strategy. Teachers held a virtual course. In it, the focus was put in problem solving and modeling activities. Along the course, the use of new resources was included. The results show that teachers presente many difficulties when addressing modeling activities. This fact leads them to not always consider modeling as a viable teaching strategy for their classes.

Key words: mathematical modeling, mathematics teacher training

Introducción

The aim of this paper is to describe obstacles and challenges that teachers face when they use modeling activities in secondary classes. We propose, also, to characterize advantages and disadvantages that teachers find when using this teaching strategy. Teachers held a virtual course. In it, the focus was put in problem solving and modeling activities. Along the course, the use of new resources was included. The results show that teachers presente many difficulties when addressing modeling activities. This fact leads them to not always consider modeling as a viable teaching strategy for their classes.

Se dice, y pareciera existir un claro consenso, que la formación de profesores exige algo más que un conocimiento avanzado de Matemática, y se requiere de la adquisición de diferentes tipos de saberes. A su vez, las tendencias actuales en Educación Matemática nos ubican en la problemática de diseñar problemas para la clase de Matemática, atendiendo a los retos y desafíos actuales por los que atraviesa esta ciencia.

Por un lado, aparece la necesidad de trabajar con problemas contextualizados para mostrar el vínculo que tiene la Matemática con la realidad, a través de la resolución de problemas y las actividades de modelización, con la intención de desarrollar competencias matemáticas.

Por el otro, se vuelve prácticamente indispensable vincular las actividades que se presentan en la clase de Matemática con programas computacionales, Internet, y las nuevas tecnologías de la información y comunicación (conocidas como TIC). Así aparece una labor extra a la tarea docente: desarrollar competencias digitales en los alumnos, aunque:

> Hay un desarrollo respecto a lo que son avances de la incorporación de las nuevas tecnologías y sus usos didácticos. Sin embargo, aunque hay un reconocimiento de distintas herramienta como soporte práctico del profesor, se señalan distintas cuestiones que aún permanecen abiertas en la comunidad internacional como las siguientes: ¿Cuál es la matemática que se necesita para la enseñanza en Secundaria? ¿Cuáles son las diferencias entre ésta y aquellas que configuran el currículo de un matemático profesional? (Gómez-Chacón, 2005, p. 19).

Buscar y encontrar buenos problemas que se adecuen a las nuevas tendencias, a los actuales lineamientos curriculares y, al mismo tiempo, se encuadren con cierta postura didáctica, demanda un gran desafío y esfuerzo de los profesores que no puede obviarse. Biembengut y Hein (2004) expresan que:

> La dificultad principal está centrada en la formación de los profesores y en la falta de vivencia del alumno en un trabajo de esta naturaleza. En la formación de profesores de matemáticas, por ejemplo, rara vez se da una orientación de modelización ni cómo utilizar este procedimiento en la enseñanza formal (…). Para los alumnos que tuvieron una vivencia de enseñanza en los moldes tradicionales, la resistencia a la modelización es significativa, ya que este método requiere más empeño en los estudios, la investigación y la interpretación del contexto. (p. 120).

Enmarcado en la problemática mencionada anteriormente, el presente trabajo tiene por objetivos: (a) describir algunos obstáculos y desafíos que enfrentan los profesores de Matemática al iniciar actividades de modelización, y (b) caracterizar las ventajas y desventajas que le encuentran a esta estrategia de enseñanza cuando la implementan en sus clases habituales en la Escuela Secundaria.

Marco referencial

Los distintos diseños curriculares para en nivel secundario y superior de Argentina, remarcan que las tareas y actividades en las que se aborda la estructura formal de la Matemática priorizan una perspectiva vinculada con los procesos de problematización y modelización. Además, en ellos se enfatiza que "problematizar" y "modelizar" son procesos que se implican recíprocamente, reflejando el carácter dinámico de la Matemática y funcionando en forma cíclica e integrada. Esta concepción, lleva a enmarcar al presente trabajo, por un lado, en la línea de la Didáctica de la Matemática denominada *resolución de problemas*, *escuela anglosajona* e incluso *aprendizaje basado en problemas* (Rodríguez 2012), donde:

> El énfasis está puesto en que los estudiantes se conviertan en buenos resolutores de problemas. Al decir esto queremos resaltar el interés en que adquieran herramientas y construyan estrategias para abordar problemas, a la vez que el foco no está puesto en la enseñanza de un contenido específico. (Rodriguez, 2012, p. 154).

Puesto que la intención es aprender estrategias de resolución y formas de pensar matemáticas, en esta línea cobra relevancia el análisis de las heurísticas, o estrategias heurísticas que se ponen en juego en la resolución de los problemas, las cuales no necesariamente son exitosas ni permiten obtener las respuestas buscadas. No obstante, esta forma de trabajo demanda: (1) Una concepción de la Matemática que haga énfasis en los procesos propios del pensamiento matemático; (2) La creación de oportunidades para la realización de tareas intelectualmente exigentes (González, 1998); (3) La generación de un clima que propicie la libertad para pensar; (4) La realización de actividades de mediación cognitiva tanto individual como socializada (González, 1996); y (5) La construcción de un repertorio de herramientas heurísticas (Guzmán, 1991; González, 1997; Polya, 1975; Schoenfeld, 1992).

Por otro lado, el trabajo se enmarca en la *modelización matemática*, como estrategia pedagógica para la enseñanza (Villarreal, Esteley y Smith, 2011). Al igual que las concepciones sustentadas en torno a la resolución de problemas, la modelización matemática suele concebirse desde diferentes ópticas. En particular, para este trabajo se la entenderá como una práctica de enseñanza que relaciona el mundo real y la Matemática, la cual puede motivar el proceso de aprendizaje y ayudar a los alumnos a construir conceptos matemáticos relevantes. Esto significa que de manera implícita o explícita se ha recorrido un proceso para establecer una relación entre alguna idea matemática y una situación real. Blomhoj y Hojgaard Jensen (2003) describen un proceso de modelización matemática a través de 6 sub-procesos:

- Se formula un problema, más o menos explícito, que guía la identificación de ciertas características de la realidad percibida que será modelizada.
- Se hace una selección, o sistematización, de los objetos relevantes y sus relaciones para hacer posible una representación matemática.
- Se traduce esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.
- Se usan métodos matemáticos para arribar a resultados también matemáticos y conclusiones pertinentes al caso.
- Se interpretan los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.
- Se evalúa la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

El proceso de modelización no se lo entiende como lineal, sino más bien, como un proceso cíclico donde las reflexiones sobre el modelo y la intención de uso de éste, conduce a una redefinición del modelo.

Metodología

Metodológicamente en el trabajo se han seguido los lineamientos de una investigación-acción, realizando un proceso cíclico de exploración, actuación y valoración de resultados, de las prácticas operativas y discursivas realizadas por 22 profesores, que se hallaban en un escenario de modelización. En este contexto, se entiende la noción de escenario de modelización, como el "conjunto de situaciones, hechos, materiales, acciones y relaciones involucradas en el proceso de estudio, creación, implementación y evaluación de proyectos de modelización matemática desarrollados en contextos educativos" (Villarreal, Esteley y Smith, 2011, p. 2).

Los profesores realizaron una capacitación virtual de 10 semanas de duración, referida a la enseñanza de la Matemática con nuevos recursos, que se insertó en el programa *Conectar igualdad en la formación docente,* promovido por el Instituto Nacional de Formación Docente del Ministerio de Educación de Argentina, donde la resolución de problemas y las actividades de modelización fueron el eje de curso.

Para este trabajo, sólo se consideraron las producciones y debates realizados por los profesores en torno a una actividad puntual, cuya consigna fue la siguiente:

> Actividad: Cuando se trata de buscar información en Internet sobre las abejas, millones de páginas aparecen en el buscador. Consideremos, por ejemplo, el sitio Hipernova (http://www.hipernova.cl/LibrosResumidos/Ciencias/Entomologia/VidaAbejas/EnjambrazonAbejas.html) el cual aborda aspectos referidos a la enjambrazón de las abejas. Al respecto, cabe mencionar que las páginas dedicadas a la apicultura sugieren a los apicultores estar atentos a la enjambrazón de las abejas, y para ello, hay que sacrificar a la reina. Pero ¿qué es la enjambrazón?
>
> En el sitio Web anteriormente mencionado se expresa:
>
> La enjambrazón, la migración de un sinnúmero de abejas con su reina para formar otra colmena, se produce cuando las princesas están ya prontas a nacer; en aquellos momentos se evidencia un apogeo de la colmena, una superabundancia, una superpoblación, una prosperidad que desemboca en la migración de una parte de la colmena junto a su antigua reina. La reina se va y deja su lugar a una de sus hijas-princesas que deberán luchar por el trono. Cuando vemos un enjambre volando o posado en alguna parte, se trata de una migración de abejas junto a su reina, que se han marchado a fundar una nueva colmena.
>
> Consideremos el último párrafo de esta explicación: "Cuando vemos un enjambre volando o posando en alguna parte, se trata de una migración de abejas junto a su reina, que se han marchado a fundar una nueva colmena". El problema que te proponemos nace precisamente aquí: ¿Cuál es la dinámica poblacional de este nuevo enjambre que se forma con la antigua reina? Esto es, ¿cuántos individuos logrará tener la colmena a medida que transcurren los días? ¿qué cantidad máxima es esperable?
>
> En síntesis, hay que buscar un modelo matemático que permita describir la dinámica poblacional de estas abejas que se marchan con su reina antigua que fue desplazada por una nueva. El trabajo lo podés hacer con un grupo de colegas (no más de 4 integrantes) o en forma individual. Lo dejamos a tu elección. La decisión dependerá de tus posibilidades de interacción con otros colegas y de tus tiempos, pues hay que tener una selección de los objetivos relevantes y sus relaciones, buscar información, y así llevar a cabo una representación matemática para luego traducirlos al lenguaje matemático.

> Para acreditar el trabajo de esta semana, pretendemos que hagas un escrito en el procesador de texto y lo envíes. En ese escrito, además del modelo matemático y las explicaciones del mismo, le anexarás un registro de las acciones que llevaste a cabo, incluyendo todos los sucesos que tuvieron lugar durante la realización de la actividad, las fallas que se produjeron, los cambios que se introdujeron y lo que te significó en términos de aprendizaje.

A su vez, se analizaron 50 producciones escritas referidas a actividades de modelización, y los debates realizados por los profesores en los foros de discusión, llevando a cabo un procesamiento interpretativo, y no estadístico, de toda la información.

Esto permitió distinguir las expresiones y comentarios más representativos que formularon los profesores cuando realizaron la actividad (experiencias que ellos vivieron como estudiantes), las que se enmarcan en algunos de los sub-procesos que proponen Blomhoj y Hojgaard Jensen (2003). Posteriormente, se caracterizaron las ventajas y desventajas que los profesores le encuentran a la modelización como estrategia pedagógica para implementar en el aula con sus alumnos (concepción que tienen como docentes). Por último, se interpretó la información realizando un análisis en conjunto y generando algunas categorías.

Vivencias de los profesores en un escenario de modelización

Se detallan a continuación algunas expresiones que resultaron más representativas de las experiencias vividas por los profesores, discriminándolas en los momentos por los que atravesaron durante el proceso de modelización propuesto.

Selección, o sistematización, de los objetos relevantes y sus relaciones para hacer posible una representación matemática.

- Modelizar la dinámica poblacional de una colmena me pareció algo muy difícil, no podía visualizar para nada cómo sería dicha población. Enseguida imaginé fórmulas exponenciales llenas de variables, y no tenía idea de cómo iba a resolver el problema. Y peor: no me daba cuenta qué era realmente lo que debía resolver.
- En un primer momento todo fue incertidumbre ya que desde el comienzo no se tenían datos y la búsqueda era totalmente libre. Aquí se plantean dos cuestiones, por un lado realizar una búsqueda crítica de información y además decidir sobre qué información resulta relevante para nuestro problema.

- ❖ Al ser tan amplio el problema, el trabajo de modelizar resultó arduo. Teníamos demasiada información para analizar.
- ❖ Me sentí desorientada ante tanta variedad de información: buscaba y buscaba, sin saber qué.
- ❖ La verdad que con esta actividad me sentí muchas veces derrotada o abrumada por tanta información.
- ❖ No supe discriminar fácilmente lo útil y relevante.
- ❖ Hay mucha información sobre el tema, pero lo que más me retrasó fue que la información en general es la misma, pero los valores numéricos difieren en los distintos sitios web.
- ❖ Me topé con un primer problema: no todas las páginas consultadas coinciden en la información que brindan. Por ello, decidí usar un sólo sitio web -que consideré fiable- como fuente de información, para poder pasar a la etapa de modelización. De allí consideré algunos datos iniciales sobre los que hacer el modelo.
- ❖ Fue difícil empezar debido a que es muy variada la información que se encuentra en Internet acerca de la población inicial del enjambre. Así que seleccioné datos y opté por elegir un valor inicial intermedio.

Se usan métodos matemáticos para arribar a resultados también matemáticos y conclusiones pertinentes al caso.

- ❖ Al buscar un modelo, no me pareció muy complicado por el hecho de que una población crece por lo general de manera exponencial o logística (por lo menos eso es lo que se enseña).
- ❖ Tardamos en decidirnos qué modelo era más conveniente porque según como tomábamos los datos se formaba uno u otro. Finalmente, nos decidimos por un modelo logístico, que no pareció el más adecuado.
- ❖ No logro llegar a un modelo logístico, sólo a modelos lineales a tramos, seguiré investigando y veré qué pasa.
- ❖ Me llama la atención que el modelo termina siendo lineal, a tramos, pero tramos lineales. Esperaba alguna función exponencial, o logarítmica. Pero llegué a un modelo lineal.

- La verdad me desconcierta un poco lo que proponen los demás sobre modelos logísticos porque yo sigo hallando únicamente modelos lineales (a tramos).
- Cuando visualicé el problema desde el punto de vista del crecimiento de una población, todo se simplificó. Lo que hice fue evaluarlo y adaptarlo lo mejor posible a la situación real. Lo más importante fue buscar algunos datos iniciales.

Se interpretan los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.

- Una vez que creí resuelto el problema, vino una etapa de desconcierto. En el foro, mis compañeros habían obtenido modelos exponenciales, logísticos, y yo: uno lineal. Todos coincidíamos en que obteníamos una función a tramos, pero no había consenso en qué tipo de función era cada tramo. Lo que más me desconcertaba era no encontrar un visto bueno de alguien que validara mi producción. Aquí me sentí totalmente en el papel de aquel alumno que hace algo y enseguida pregunta: ¿profe, está bien?
- Si bien fomentamos el aprendizaje autónomo de nuestros alumnos: ¡Qué difícil es vivirlo en carne propia! Y aceptar que hay problemas que pueden ser abiertos, cuya solución tal vez no es la única, y que su riqueza está en el camino transitado y no en la solución acabada del mismo.
- Esta clase de actividades te llevan mucho tiempo por el razonamiento que tienes que realizar y en este caso me demandó demasiado tiempo y tuve demasiados datos para trabajar.
- Acostumbrados a la enseñanza tradicional, es comprensible que cueste tanto romper con los esquemas que uno viene arrastrando, donde no existen situaciones abiertas sino mas bien se enseñan/aprenden fórmulas que resuelven.
- Sentí agobio ante los obstáculos que se presentaron. También ansiedad ante las ganas de hacer rápido la actividad y encontrar la solución correcta. Y angustia por no tener ningún tipo de guía.

Ventajas y desventajas de la modelización para implementar en la clase

Analizando las respuestas que brindaron los profesores y el propio trayecto que recorrieron durante la resolución de la actividad, se pueden recuperar características de la modelización como estrategia de enseñanza, que son destacadas por los propios lineamientos curriculares e investigaciones realizadas sobre la temática (Biembengut y Hein, 2004; Blomhoj & Hojgaar Jensen, 2003; González, 1997, 1998; Villarreal, Esteley y Smith, 2011) tales como:

- ❖ Se trabaja con una Matemática vinculada a la realidad, lo que permite un trabajo áulico basado en situaciones reales.
- ❖ Se fomenta la independencia del estudiante, el descubrimiento autónomo y la autogestión del propio aprendizaje.
- ❖ Se permite al estudiante hacer una búsqueda crítica de la información, tomar decisiones, opinar, reflexionar, debatir, equivocarse, etc.
- ❖ Se le da sentido al quehacer matemático en el aula, pues cobra relevancia lo que se descubre, apreciándose la potencia del conocimiento mismo que se construye.
- ❖ Se obtienen buenos resultados áulicos y autoconfianza del estudiante.

En cuanto a las desventajas que encontraron los profesores, tanto en su trayecto como resolutores de una actividad de modelización, como las perspectivas que le ven a la misma para implementar en las clases de Matemática, se pueden agrupar en tres grandes categorías: mediacionales, instruccionales y cognitivas. Cada una de ella se ejemplifica con frases que dejaron escritas los profesores en los foros de discusión.

Desventajas mediacionales

(a) El tiempo didáctico: *Al trabajarse con situaciones abiertas, los estudiantes esperan que se les brinden orientaciones, pues les cuesta saber recortar la información útil de la que no lo es. Por otra parte, los docentes no disponen del tiempo necesario para trabajar con problemas abiertos en la clase (hay que completar los contenidos propuestos; existen otras prioridades que atender dentro del aula; insume mucho tiempo la preparación de la clase, etc.)*

(b) El uso de recursos tecnológicos: *Las aulas, o los estudiantes, no disponen de equipamiento tecnológico, o de conocimientos sobre el manejo de programas.*

Desventajas instruccionales

(a) El modelo de enseñanza: *Un modelo tradicional de enseñanza genera seguridad al docente, pues primero explica la teoría y luego se hacen ejercicios. El trabajo con modelización, pone al profesor en una zona de incertidumbre, donde no necesariamente se saben todas las respuestas ni los posibles acercamientos que realizarán los alumnos.*

(b) La interacción en el aula*: La matrícula elevada imposibilita trabajar en forma personalizada, y también dependerá de la disciplina que tengan los alumnos.*

Desventajas cognitivas

(a) El tiempo de aprendizaje: *Los alumnos deben tener ya incorporados una serie de conocimientos que les sean útiles para solucionar el problema que se les plantea. Además, ante situaciones desafiantes los estudiantes no quieren investigar y es el docente quien termina trabajando en clase. El trabajo con modelización impone mayores exigencias para los alumnos.*

(b) Profesores sin formación específica*: La formación de los profesores es más tradicional y no se los formó para trabajar con actividades de modelización en las aulas.*

Conclusiones

Con el trabajo se pone en evidencia que a los profesores se les presentan dificultades en el momento de abordar actividades de modelización, fundamentalmente cuando deben tomar algún tipo de decisión, seleccionar objetos claves de la situación, delimitar y recortar un problema para convertirlo en un caso particular que permita analizar sus relaciones, buscar patrones y características, y para realizar una formulación matemática del modelo que subyace. Esta situación, conlleva a que no siempre sea vista la modelización como una estrategia de enseñanza viable de ser utilizada en las clases, a pesar de que los profesores reconocen las ventajas que remarca el currículo escolar.

La experiencia realizada parece mostrar, además, que sigue siendo dificultoso instaurar propuestas innovadoras en las aulas, y al mismo tiempo, cambiar la visión del profesor acerca de la Matemática y su enseñanza. Aún sigue primando la experiencia y vivencias del profesor por encima de criterios y recomendaciones curriculares, lo que lleva a reflexionar sobre la distancia que puede existir entre los principios que se sustentan en el currículo escolar y los que efectivamente se traducen en una propuesta para la clase.

Referencias bibliográficas

Biembengut, M. S. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar Matemática. *Educación Matemática 16(2),* 105-125.

Blomhoj, M. & Hojgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications 22(3)*, 123-139.

Gómez-Chacón, I. (2005). Tendencias y retos en formación de profesores en Matemáticas. Vivir el presente y crear el futuro en la cooperación Europa-Latinoamérica. En I. Gómez-Chacón y E. Plancart (Eds). *Educación Matemática y formación de profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica* (pp. 15-31). España: HumanitarianNet.

González, F. (1996). El Sistema de Mediación Tutorial. *Enfoques 1(2)*, 56-71.

González, F. (1997). *Procesos Cognitivos y Metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos*. Tesis Doctoral No Publicada. Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela.

González, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos. *Zetetiké 6(9)*, 59-87.

Guzmán, M. de. (1991). *Para Pensar Mejor*. Barcelona: Editorial Labor.

Polya, G. (1975). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México: Editorial Trillas.

Rodríguez, M. (2012). Resolución de Problemas. En M. Pochulu y R. Rodríguez (Comps.). *Educación Matemática – Aportes a la formación docentes desde distintos enfoques teóricos,* (pp. 153-174). Buenos Aires: EDUVIM y Ediciones UNGS.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition an Sense-Making in Mathematics. En D. Grows (Ed.). *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Villarreal, M.; Esteley, C. y Smith, S. (2011). Desafíos y decisiones de profesores de matemática en escenarios de modelización: el diseño de un proyecto para el aula. Recuperado el 2 de diciembre de 2011 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/973/772

CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Suzicássia Silva Ribeiro, Maria da Glória Bastos de F. Mesquita, Telsuíta L. Pereira Santos
Universidade Federal de Lavras Brasil
suzicassia64@hotmail.com, mgbastos@ded.ufla.br, telsuita@gmail.com

Resumen. Este trabalho teve como objetivo a investigação sobre as concepções de professores de matemática acerca da Educação Matemática. Ao se refletir sobre as questões propostas, pretendeu-se também despertar no professor em exercício, o espírito de pesquisa sobre um assunto relevante que poderá contribuir para ampliar o seu olhar sobre essa área do conhecimento. A pesquisa foi realizada com dez professores de Matemática que atuam na educação básica e ensino superior na cidade de Formiga - MG - Brasil. Teóricos da Educação Matemática embasam essa discussão, cuja temática, formação de professores é considerada a função máxima desse campo de estudo. Ao analisar as informações contidas nos questionários, constatou-se que parte significativa dos professores apresenta pouco conhecimento sobre esse assunto. Os resultados deste estudo apontam para a necessidade de se pensar em formas que possam estreitar os laços entre Educação Matemática e educação básica.

Palabras clave: investigação, desenvolvimento profissional, educação matemática

Abstract This study aimed to research into the conceptions of mathematics teachers about mathematics education. In reflecting on the questions, it was also intended to awaken the spirit of research on the professor in exercise as a relevant topic that can help to broaden their perspective on this area of knowledge. The research was conducted with ten mathematics teachers working in basic education and higher education in Formiga city - MG- Brazil. Theoretical Mathematics Education underlie this discussion, whose theme, teacher training, is considered the maximum function of this field of study. By analyzing the information contained in the questionnaires, it was found that a significant proportion of teachers have little knowledge on this subject. The results of this study point to the need of thinking of ways they can strengthen the ties between mathematics education and basic education.

Key words investigation, professional development, mathematics education

Introdução

Breve introdução sobre o contexto que motivou este estudo

Por atuar como professora de Matemática da educação básica da rede pública e de uma instituição de ensino superior percebo que parte dos meus colegas de área apresenta certa resistência quando se discute assuntos relacionados à Educação Matemática. As estruturas curriculares das instituições de ensino superior não enfatizam a pesquisa e priorizam a transmissão de conhecimentos técnico-científicos, preterindo pela própria formação do professor formador, o estudo consistente das relações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático. Com isso, a investigação, a reflexão e a problematização presentes na cultura do trabalho colaborativo e ausentes no processo de formação inicial desses professores, dificultam a articulação da teoria com a prática e, em consequência, o despertar de um professor crítico - reflexivo.

Pela oportunidade de estar cursando um Mestrado em Educação e iniciar o processo de mergulho no mundo da pesquisa, desenvolvi esse trabalho tendo como objetivo a investigação sobre as concepções de professores de matemática acerca da Educação Matemática. Ao refletir sobre as questões propostas, pretendi também despertar no professor em exercício, o espírito de pesquisa sobre um assunto relevante que poderá contribuir para ampliar o seu olhar a respeito dessa área do conhecimento.

O embrião desta investigação emergiu das discussões do grupo de estudo do Mestrado Profissional em Educação da Universidade Federal de Lavras - Minas Gerais-Brasil, cujos diálogos são embasados pelas contribuições dos teóricos da Educação Matemática. Por esse motivo, justifico a apresentação das próximas seções na primeira pessoa do plural.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2001) a Educação Matemática é a área do conhecimento que tem como objeto de estudo as múltiplas relações e determinações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático, bem como as investigações dessa tríade. Nesse sentido, como exigir que o professor tenha uma visão de que o processo ensino-aprendizagem constitui-se em um manancial de recursos para estudos e pesquisas que possam contribuir para minimização dos desafios encontrados na sua prática docente, se, na realidade, ele não concebe a Educação Matemática como um campo de estudo?

Outra questão que deve ser levada em consideração é o processo de formação inicial do professor. Sobre esse assunto, Ponte (1996) levanta uma discussão, ao afirmar que:

> O conceito de desenvolvimento profissional é relativamente recente nos debates sobre a formação de docentes dos diversos níveis de ensino. A sua importância resulta da constatação que uma sociedade em constante mudança impõe à escola responsabilidades cada vez mais pesadas. Os conhecimentos e competências adquiridos pelos professores antes e durante a formação inicial tornam-se manifestamente insuficientes para o exercício das suas funções ao longo de toda a sua carreira. (Ponte, 1996, p. 1)

O autor assegura que os conhecimentos adquiridos antes e durante a formação inicial do professor não atendem às exigências da sociedade e são insuficientes para o exercício da profissão docente, na sua complexidade.

Dias-da-Silva (2005) considera que no Brasil, os processos aligeirados de certificação de profissionais da educação, provenientes da expansão do acesso ao ensino fundamental nos anos 70, transformou-os em verdadeiros executores de pacotes pedagógicos. Segundo a autora, o papel da formação geral básica do professor foi negligenciado em função da necessidade de diminuir o tempo na universidade, tendo em vista a grande demanda de alunos. Diante desse quadro, a maior parte dos professores que atuam na educação básica não teve na fase inicial de seu processo de formação, o despertar do espírito crítico/reflexivo para fomentar discussões sobre currículos, intervenções pedagógicas, planos de ensino, avaliações e outras exigências do sistema educacional.

Nesse contexto, especificamente, o professor de Matemática na sua tarefa de explicar o significado dos números e suas operações tem a função desafiadora de problematizar o processo ensino-aprendizagem através das reflexões: “o que devo saber para ensinar”- conhecimento matemático -, “para que ensinar” - aplicação do conhecimento matemático - “o que ensinar” – currículo - e “como ensinar” - metodologia de ensino -.

Em se tratando do período inicial de formação do professor de Matemática, Ponte (2002) destaca cinco categorias de competências que devem ser consideradas nesse processo de preparação para o exercício da profissão. A primeira está relacionada à formação pessoal, social e cultural no sentido de desenvolver capacidades de reflexão, autonomia, cooperação e participação. A segunda identifica-se com a formação científica, tecnológica, técnica ou artística na respectiva especialidade. A terceira categoria diz respeito à formação educacional que se constrói com as contribuições da Pedagogia. Na quarta categoria, o autor destaca as competências de ordem prática, que se constitui na capacidade de criar soluções adequadas para os diversos desafios da ação profissional. Finalmente, a quinta categoria se refere às capacidades e atitudes de análise crítica, de inovação e investigação pedagógica.

Fiorentini (2008) considera que, atualmente, a formação inicial do professor de Matemática é influenciada por alguns fatores, como: desarticulação entre teoria e prática, entre formação específica e pedagógica e entre formação e realidade escolar; menor prestígio da licenciatura em relação ao bacharelado; ausência de estudos histórico-filosóficos e epistemológicos do saber matemático; predominância de uma abordagem técnico/formal das disciplinas específicas; falta de formação teórico/prática em Educação Matemática dos formadores de professores.

A formação teórico-prática do professor de matemática é preterida em função da abordagem técnico formal de disciplinas específicas desarticuladas com a prática pedagógica e com as diferentes realidades do cotidiano escolar. O saber matemático e o saber pedagógico devem caminhar juntos na superação das dificuldades que envolvem o ensinar e o aprender Matemática. A ausência de discussões sobre a Educação Matemática como campo profissional e científico, no início da formação docente impedem a inserção do professor nessa área do conhecimento. A percepção das dimensões filosóficas, epistemológicas e pedagógicas da Educação Matemática poderia ampliar o olhar do professor sobre aspectos importantes da complexidade do ensinar e aprender matemática. Diante disso, apresentamos a questão norteadora do processo de investigação com o intuito de dar continuidade a essa discussão: De que maneira os professores de Matemática concebem a Educação Matemática?

Percurso metodológico

Para desenvolver essa investigação tomamos com instrumento de coleta de informação, o questionário semiestruturado. A pesquisa foi realizada com dez professores de Matemática que atuam na educação básica e ensino superior. Ao elaborar as questões sobre as concepções acerca da Educação Matemática, levamos em consideração três aspectos:

a) o desenvolvimento profissional: formação acadêmica, situação funcional, tempo de atuação e formação contínua (cursos de atualização);

b) o espírito de investigação: leitura de artigos, livros ou textos relacionados ao assunto;

c) a concepção sobre a Educação Matemática: metodologia de ensino ou área do conhecimento

A seguir, mostramos o texto explicativo inserido antes dos itens do questionário, elaborado com o propósito de permitir a interação do professor com o tema e o objetivo da investigação:

> Prezado(a) Professor(a) de Matemática,
>
> Pela oportunidade de estar cursando um Mestrado em Educação e iniciar o processo de mergulho do mundo da pesquisa, este trabalho tem como objetivo a investigação sobre as concepções de professores de matemática acerca da Educação Matemática. Ao se refletir sobre as questões propostas, pretende-se também despertar no professor em exercício, o espírito de pesquisa sobre um assunto relevante que poderá contribuir para ampliar o seu campo de visão nessa área do conhecimento.

> O questionário será usado como instrumento de obtenção de informações, apresentando como tema central as concepções sobre a Educação Matemática.
>
> Importante ressaltar que não é necessária a identificação do professor(a), por se tratar de uma investigação que tem como proposta somente a verificação acerca do conhecimento sobre esse campo de estudo.
>
> Certa de contar com sua colaboração, agradeço a sua contribuição e aguardo a devolução do questionário, lembrando que as questões devem ser respondidas sem a preocupação de estar sendo avaliado. Para que uma pesquisa tenha validade é necessário que os dados retratem a realidade de uma situação.
>
> Vale lembrar que este trabalho será submetido para apresentação em congresso de Educação Matemática, na forma de pôster, com o intuito de fomentar discussões que possam trazer contribuições para a complexidade do processo de transmitir, receber e elaborar o conhecimento matemático.

Ressaltamos que o grupo de professores respondeu o questionário com presteza e boa vontade. Posteriormente, pretendemos retornar o resultado dessa investigação ao grupo, para assim, dar prosseguimento ao que os teóricos da Educação Matemática consideram relevante: trabalhar com os professores e não sobre os professores.

O olhar dos docentes em relação à educação matemática

Seguem os relatos de seis professores a respeito da questão:

Escreva um pequeno parágrafo sobre o seu conhecimento acerca da Educação Matemática.

> 1) Eu não sei dizer o que é Educação Matemática, sei trabalhar com a Matemática, buscando alternativas diversas e diferentes recursos que levem o aluno a compreender a Matemática e usá-la no seu dia a dia.(9 anos de atuação na Educação Básica)
>
> 2) A Educação Matemática relaciona-se com a aprendizagem significativa da Matemática. Consideram-se os métodos de ensino, conteúdo matemático, os conhecimentos prévios para construção do conhecimento matemático. (19 anos de atuação na Educação Básica)
>
> 3) Penso que a Educação Matemática caminha nas áreas da Matemática como conhecimento específico, da Educação como prática social, da Pedagógica como

metodologia de ensino, da Psicologia como sendo o homem um ser que se relaciona, da Antropologia como sendo o homem pertencente a uma sociedade em suas várias dimensões. Enfim, a Educação Matemática deve ser interpretada sob um ponto de vista holístico. (30 anos de atuação na Educação Básica e Ensino Superior)

4) Como foi dito anteriormente, a Educação Matemática, para mim, é uma ramificação de tudo o que envolve matemática, com a intenção de melhorar a aprendizagem e o aprimoramento de novas técnicas de ensino, com o intuito de harmonizar a relação com alunos, profissionais da educação, pais, escola, ou seja, toda a comunidade escolar.A Educação Matemática veio para ser uma facilitadora de uma relação aluno X professor do século XXI, com a finalidade de uma melhor interação da Matemática e suas aplicações diárias.(20 anos de atuação na Educação Básica e Ensino Superior)

5) Devido à deficiência no conhecimento da disciplina Educação Matemática, não me sinto segura para fazer comentários. (7 anos de atuação na Educação Básica)

6) A Educação Matemática é o estudo de todos os aspectos que envolvem o processo ensino-aprendizagem da matemática."Não me sinto habilitada a discorrer sobre o tema."(9 anos de atuação na Educação Básica)

Análise das enunciações dos professores

Ao organizar e agrupar as informações contidas nos questionários dos dez professores, observamos que:

1) em relação ao desenvolvimento profissional, apenas dois professores do grupo pesquisado não fizeram algum tipo de curso de atualização, formação ou capacitação nos últimos cinco anos;

2) no que se refere à leitura de artigos, textos, livros ou contato com algum autor que desenvolve pesquisa em Educação Matemática, sete professores relataram que, em algum momento da sua trajetória profissional, buscaram informações sobre o assunto;

3) nesse grupo, apenas dois professores concebem a Educação Matemática como área de estudo que se dedica à investigação das relações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático.

Diante disso, consideramos alguns fatores que podem agravar essa situação: as deficiências formativas na etapa inicial de preparação para a profissão de professor, as condições atuais de trabalho docente e a acomodação em relação ao aperfeiçoamento profissional.

Percebemos por parte dos professores investigados, um estado de letargia, de acomodação, de falta de entusiasmo com o seu desenvolvimento profissional; os quais consideramos decorrentes das condições atuais do trabalho docente. A escola atual exige que o professor se envolva em outras atividades, além da função de preparar e ministrar as suas aulas e de ter que cumprir uma carga horária pesada em instituições de ensino distintas.

Por outro lado, a facilidade de acesso à informação, a oferta de cursos de atualização profissional à distância e a socialização do conhecimento propiciado pela internet constituem-se em formas para promover o desenvolvimento profissional em todos os segmentos da sociedade. Nem é preciso sair de casa para buscar o conhecimento que antes estava concentrado nas bibliotecas.

Assim, problematizamos a seguinte questão: o que leva o professor de Matemática da educação básica a não investir na sua formação continuada? Ou a não procurar meios para ampliar a sua visão sobre os aspectos que envolvem os desafios do ensinar e aprender Matemática? Entendemos que o processo de investigação tem a função de provocar dentro da mesma pesquisa, outras perguntas, outras inquietações. Assim, arquivamos essas inquirições para outro momento.

Considerações finais

Com este estudo, constatamos que parte significativa dos professores de Matemática investigados apresenta pouco conhecimento sobre a Educação Matemática. A ausência de formação teórico – crítica, a falta de formação em Educação Matemática dos formadores de professores, ou mesmo, a acomodação advinda das reais condições de trabalho docente, podem se constituir em fatores que interferem nesta situação. O campo educacional é o segmento da sociedade mais propício para se estimular a cultura do desenvolvimento profissional, por ser o professor o principal agente das transformações sociais.

Vale ressaltar a sinceridade de dois professores ao relatarem que não se sentem habilitados em discorrer sobre o assunto. Essa afirmação pode remeter à questão da ausência desse tema na etapa inicial de formação ou em cursos de aperfeiçoamento profissional. Ou também ao próprio comodismo em não buscar fontes de informação e atualização a respeito das novidades da área de atuação.

Ao evidenciar o desconhecimento sobre o assunto, este trabalho não pretende colocar um ponto final nessa discussão, e sim, incentivar a comunidade científica ao fomento de estudos e pesquisas que possam estreitar os laços entre a Educação Matemática e a educação básica. É necessário tornar esse debate público para fazer emergir as dimensões de um campo de estudo que busca o diálogo com outras áreas do conhecimento no sentido de ampliar a compreensão acerca da complexidade do ensinar, aprender e elaborar o conhecimento matemático.

Referências bibliográficas

Dias-Da-Silva, M. H. G. F. (2005). Política de formação de professores no Brasil: as ciladas da reestruturação das licenciaturas. *Perspectiva.* 23 (2), 381-406.

Fiorentini, D. (2008). A pesquisa e as práticas de formação de professores de Matemática em face das políticas públicas educacionais no Brasil. *Bolema, 29*, 43-70.

Fiorentini, D.,Lorenzato, S. (2001). *O profissional em Educação Matemática.* Recuperado em 19 de janeiro de 2012 de http://sites.unisanta.br/teiadosaber/apostila/matematica

Ponte, J. P. (1996). Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: J. P. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, C. Loureiro. *Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática.* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciência da Educação.

Ponte, J. P. (2002). A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. *Educação Matemática em Revista, 1* (11A), 3-8.

PROJETOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA E SISTEMAS LINEARES: CONTRIBUIÇÕES PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Walter Sérvulo Araújo Rangel, Frederico da Silva Reis
Universidade Federal de Ouro Preto. Brasil
wsarangel@yahoo.com.br; fredsilvareis@yahoo.com.br

Resumo. O trabalho investigou as contribuições da elaboração de Projetos de Modelagem Matemática para a formação de Professores de Matemática, a partir do desenvolvimento de projetos envolvendo Sistemas Lineares. A pesquisa de campo foi realizada com alunos de Licenciatura em Matemática. As considerações finais apontam que o desenvolvimento de projetos contribui para formar um professor crítico e reflexivo, ao proporcionar o desafio de realizar a junção entre a teoria matemática com a prática da sala de aula e também contribui para transformar a sala de aula num ambiente propício à geração e construção coletiva de conhecimentos.

Palavras chave: projetos modelagem matemática, sistemas, educação

Abstract. The study investigated the contributions of the development of Mathematical Modeling Projects for the formation of Teachers of Mathematics, from the development of projects involving Linear Systems. The field research was conducted with students in Mathematics. The conclusions point to the development of projects contributes to form a critical and reflective teacher, by providing the challenge of making the junction between the mathematical theory with practice in the classroom and also helps to transform the classroom in an environment conducive to generation and collective construction of knowledge.

Key words: mathematical modeling projects, systems, education

Introducción

Um pouco sobre Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática é uma realidade que tem crescido a cada ano no Brasil, desde a década de 1970, com os primeiros trabalhos orientados pelo Professor Aristides Camargos Barreto, da PUC – Rio de Janeiro. A sua inserção e discussão na Educação Matemática vêm colaborando para um repensar do ensino da Matemática purista e para um ensino direcionado à sua aplicação. Inicialmente, a proposta de Barreto "implicava apresentar uma situação problema capaz de motivar os estudantes a aprender a teoria matemática; ensinar a teoria e então retornar à situação problema para matematizá-la (modelar) e respondê-la" (Biembengut, 2009, p. 11).

Ao pesquisarmos a palavra "modelar" num dicionário da língua portuguesa, podemos encontrar significados como "fazer o modelo ou o molde de uma peça". Entretanto, no ensino, estamos tratando do processo da elaboração e criação do modelo matemático relacionado à representação de um objeto ou fato concreto da realidade, de acordo com Bassanezi (2009).

A Modelagem Matemática, enquanto processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de um modelo, é uma metodologia cujo propósito é estudar uma situação-problema da realidade, conduzindo o pesquisador a abstrair e generalizá-la, possibilitando fazer estudos dessa situação. Como resultado dessa generalização, obtém-se uma representação escrita em códigos e símbolos matemáticos caracterizando assim o modelo matemático.

Nas perspectivas de alguns pesquisadores e educadores matemáticos, encontramos algumas concepções diferenciadas de Modelagem Matemática. Julgamos importante conhecer algumas dessas concepções. Aqui, destacamos duas delas aplicadas ao ensino e aprendizagem de Matemática. Uma primeira concepção apresenta a Modelagem Matemática como um processo metodológico caracterizado por reconhecer a situação-problema, matematizá-la e, a seguir, obter um modelo matemático e validá-lo (Bassanezi, 2009; Biembengut e Hein, 2009); uma segunda concepção concebe a Modelagem como um ambiente de aprendizagem e destaca o processo de modelagem como mais importante do que o próprio modelo obtido, tendo seus pressupostos fundamentados nos aspectos filosóficos e epistemológicos da Modelagem Matemática (Burak, 1987; Barbosa, 2001).

Nesse contexto, citamos alguns pesquisadores que têm investigado sobre Modelagem Matemática e, consequentemente, têm trazidos colaborações efetivas a esse campo de pesquisa da Educação Matemática. Para Bassanezi (2009, p. 24), a "Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências". Bassanezi (2009, p. 16) entende por processo, as fases de elaboração do modelo matemático que delineia a sua concepção: "A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

Para Biembengut e Hein (2009, p. 12-13), "Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo [...] sendo uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias".

Na visão de Biembengut e Hein, a elaboração do modelo matemático depende do conhecimento matemático que o modelador possui. Assim, de acordo com os pesquisadores, o conhecimento matemático está diretamente ligado a elaboração "sofisticada" do modelo. Contudo, o valor do modelo nos meios educacionais não está restrito à sofisticação matemática utilizada, mas na criatividade e a abstração para interpretar o contexto onde será aplicada a Modelagem.

Burak (1987, p. 21) defende que a Modelagem Matemática "constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões".

Já Barbosa (2001, p. 31) entende a Modelagem Matemática como "um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade".

Ainda para Barbosa (2001, p. 32), "indagar significa assumir um incômodo com algo, procurar enunciá-lo e buscar uma compreensão ou explicação" e a investigação "trata-se da busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas".

Assim, entenderemos a Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino e aprendizagem, na perspectiva de Reis (2008), permitindo que os alunos investiguem e transformem problemas da realidade ou situações-problema em expressões matemáticas (por meio de modelos matemáticos), motivando-os a buscar respostas, exploradas através de uma linguagem matemática simbólica e conduzindo-os a interpretar os dados obtidos usando a linguagem usual.

A pesquisa

Dentro dessa perspectiva, elaboramos a seguinte questão de investigação, norteadora de nossa pesquisa: Como o desenvolvimento de Projetos de Modelagem Matemática que abordam / exploram Sistemas Lineares pode contribuir para a formação de professores em cursos de Licenciatura em Matemática?

A pesquisa foi realizada numa abordagem metodológica qualitativa, a partir do desenvolvimento de três Projetos de Modelagem Matemática. A pesquisa documental se limitou à análise de livros didáticos de Álgebra Linear utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática de algumas universidades. A pesquisa de campo foi realizada tendo como participantes, quinze alunos do 3º período de Licenciatura em Matemática da Faculdade Pereira de Freitas, em Ipatinga – MG, no 2º semestre letivo de 2010. Os dados foram coletados a partir dos registros do diário de campo elaborados e pela observação do desenvolvimento dos Projetos de Modelagem Matemática pelos grupos, além da aplicação de três questionários.

Os Projetos de Modelagem Matemática desenvolvidos eram relacionados a diversos temas do dia a dia que abordam / exploram Sistemas Lineares. Os temas abordados nesses projetos foram:

Tema 1) Nutrição Balanceada: Alimentação diária equilibrada;

Tema 2) Condicionamento Físico: Academias de ginástica;

Tema 3) Circuitos Elétricos: Correntes e redes elétricas.

A descrição completa do desenvolvimento dos projetos, bem como a uma análise dos diversos aspectos observados podem ser encontradas em Rangel (2011).

Considerações finais

A partir de nossa pesquisa, podemos apontar algumas categorias de contribuições do desenvolvimento de Projetos de Modelagem Matemática que abordam / exploram Sistemas Lineares para a formação de professores em cursos de Licenciatura em Matemática:

- *A contribuição para a formação de um Professor de Matemática que valoriza a realização de pesquisas em sua formação inicial bem como o desenvolvimento de atividades em grupo: Segundo os participantes, o desenvolvimento em grupo dos Projetos de Modelagem proporcionou a interação dos seus integrantes com as atividades de pesquisas, além proporcionar experiências de elaboração e apresentação de projetos, criando um ambiente educacional que contribui para que os futuros professores possam compreender o fenômeno educativo na sua multiplicidade;*
- *A contribuição para a formação de um Professor de Matemática que busca despertar o interesse em seus alunos e se preocupa com a questão da aprendizagem matemática: Os participantes destacaram como o interesse é relevante à aprendizagem, baseando-se na experiência proporcionada pelos projetos, de se trazer temas do cotidiano, propostos pelos alunos, contribuindo assim para uma "desmistificação do Monstro da Matemática". A partir do desenvolvimento dos projetos, os participantes puderam refletir sobre o papel que o aluno deve exercer na construção de seus conhecimentos, sendo norteado pelos seus interesses e mediado pela participação do professor;*

- *A contribuição para a formação de um Professor de Matemática com outra visão sobre a importância e perspectivas de utilização das aplicações da Matemática em seus processos de ensino e aprendizagem: A partir do desenvolvimento dos projetos, os participantes puderam refletir sobre vários conteúdos matemáticos que podem e devem ser relacionados ao cotidiano do aluno tornando, assim, o ensino e a aprendizagem mais significativos. A partir do desenvolvimento dos projetos, eles destacaram o aspecto da "experiência adquirida", desde a etapa da escolha do tema até a apresentação do projeto para a classe, o que contribuiu para sua formação inicial, já que tiveram a oportunidade de vivenciar, na prática formativa, a elaboração e implementação de uma atividade de Modelagem Matemática;*

- *A contribuição para a formação de um Professor de Matemática que procura elucidar para seus alunos a importância de se estudar Matemática e se esforça para que estes o façam de forma prazerosa: Segundo os participantes, muitas indagações dos alunos acerca da importância / utilidade do estudo da Matemática podem ser respondidas com a prática de projetos, pois as aplicações matemáticas abordadas com Projetos de Modelagem Matemática podem desenvolver a habilidade para resolver problemas encontrados em situações reais vivenciadas pelos próprios alunos, mas aparentemente desvinculadas de um contexto matemático. A partir do desenvolvimento dos projetos, os participantes, professores em formação, manifestaram a sua preocupação, quando em exercício da profissão docente, com o envolvimento dos alunos nas atividades em sala de aula para que se tenha um ambiente de aprendizagem prazeroso, tanto para os alunos ao serem convidados a indagar e pesquisar, quanto para o professor, mediador desse ambiente.*

Por fim, destacamos de uma forma geral, a contribuição para a formação de um Professor de Matemática com competências teórica e prática, de forma coerente entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor.

Acreditamos, portanto, que o trabalho com Projetos de Modelagem Matemática contribui tanto para a o desenvolvimento de uma competência teórica, na medida em que relaciona / ressignifica o objeto matemático à luz de suas aplicações, quanto para o desenvolvimento de uma competência prática no futuro Professor de Matemática, possibilitando-lhe vislumbrar seu exercício profissional num ambiente escolar, de uma forma consistente e realista.

Referências bibliográficas

Barbosa, J. C. (2001). *Modelagem Matemática: Concepções e experiências de futuros professores.* Tese de Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

Bassanezi, R. C. (2009). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. S. (2009). 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia 2(2),* 7-32.

Biembengut, M. S.; Hein, N. (2009). *Modelagem Matemática no ensino.* São Paulo: Contexto.

Burak, D. (1987). *Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática na 5ª série.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

Rangel, W. S. A. (2011). *Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares: Contribuições para a formação de Professores de Matemática.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, Brasil.

Reis, F. S. (2008). *A Modelagem Matemática na Educação Matemática: Algumas considerações e perspectivas.* In: Encontro Regional de Educação Matemática, I, Anais (pp. 1-6). Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

ACTITUDES QUE PRODUCEN LOS PROBLEMAS PLANTEADOS EN LOS LIBROS DE TEXTOS DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA. UNA EXPERIENCIA CON PROFESORES Y ALUMNOS

Santiago Ramiro Velázquez, Josip Slisko Ignjatov, Hermes Nolasco Hesiquio
Universidad Autónoma de Guerrero México
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
sramiro@prodigy.net.mx, jslisko@fcfm.buap,nolascohh.@hotmail.com

Resumen. En este artículo se hace un estudio de las actitudes que pueden generar en los alumnos, los problemas planteados en los libros de texto de matemáticas en educación secundaria. En el que se hace una breve explicación de las actitudes hacia el estudio de esta asignatura al constatar su escaso desarrollo, en comparación con el de los conocimientos conceptuales y procedimentales. También incluye un reconocimiento de los referidos problemas por los profesores, quienes comparten la tesis de que los problemas en contextos auténticos producen actitudes positivas, en tanto que los que se ubican en contextos artificiales producen actitudes negativas. Los alumnos al resolver dichos problemas afirman que los del primer tipo son interesantes porque los hacen pensar y los de contextos artificiales los enredan. Además se hacen consideraciones sobre la actualización de los libros de los alumnos, en términos de plantear problemas en contextos auténticos que generen actitudes positivas hacia las matemáticas.

Palabras clave: explicaciones, actitudes matemáticas, contextos auténticos

Abstract. This paper is a study of the attitudes that students have when faced with the problems outlined in textbooks of mathematics in secondary education. There is a brief explanation of attitudes toward the study of this subject in identifying their underdeveloped in comparison with that of conceptual and procedural knowledge. It is also included a recognition of those problems by teachers who share the view that the problems in authentic contexts produce positive attitudes, while those located in artificial contexts produce negative attitudes. Students to solve these problems say that the first type is interesting because they think and the tangle of artificial contexts. Considerations are also updating the books of the students, in terms of present problems in authentic contexts that generate positive attitudes towards mathematics.

Key words: explanations, attitudes towards mathematics, authentic contexts

Introducción

En este trabajo se dan a conocer los primeros resultados de una investigación en la que por una parte, algunos profesores reconocen problemas o ejercicios de los libros de texto de educación secundaria, que pueden producir actitudes positivas (A+) o negativas (A-) en los alumnos, por otra los alumnos resuelven dichos problemas o ejercicios para constatar las afirmaciones de los profesores. De manera que el estudio se enfoca a las explicaciones de los profesores donde expresan las razones por las que esos problemas o ejercicios pueden producir las referidas actitudes. También al análisis de las soluciones que hacen los alumnos, acompañadas de sus razones para afirmar que los problemas que resolvieron son interesantes y recomendables, o por el contrario son aburridos, tediosos y no contribuyen a mejorar sus saberes matemáticos.

Consideramos que reconocer las actitudes que producen en los alumnos los problemas planteados en los libros de matemáticas es relevante, ya que los saberes actitudinales integrados con los conceptuales y procedimentales se encaminan al desarrollo de competencias, en este caso la de resolver problemas. No obstante, en la práctica se da prioridad a la construcción de saberes conceptuales y procedimentales en detrimento de los actitudinales. Así lo evidencian los planes y programas de estudio que se implementan desde 1993, en los que se hace referencia a la importancia de las actitudes pero no se propone la manera de formarlas, salvo en el programa 2011 en el que se pretende que las matemáticas formen parte de la vida del estudiante, por lo que se orienta a los profesores a analizar con sus alumnos, anécdotas históricas y noticias de interés para desarrollar actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas.

De acuerdo al Diccionario Enciclopédico Grijalbo Panton (1995), una actitud es postura, situación y disposición de los estados anímicos de una persona. Esta idea de actitud

es adecuada pero refleja parcialmente sus componentes. Compartimos con Gómez (2002) la afirmación de que los aspectos que componen una actitud son el cognitivo, el afectivo y el conductual. El primero se refiere a las preconcepciones e ideas que tiene el alumno acerca de las matemáticas, el afectivo consiste en los sentimientos que esta asignatura produce y el conductual está formado por las disposiciones y acciones de los estudiantes hacia las matemáticas.

El objetivo de esta investigación consiste en que los profesores reconozcan problemas planteados en los libros de texto que puedan producir uno u otro tipo de actitudes y que los alumnos los resuelvan para constatar estas suposiciones. Se consideran tres criterios para reconocer que un problema pueda generar A+, estos son que esté en contextos auténticos (Alsina, 2010; Palm, 2006; Santanero y Eslisko, 2010), que responda a la naturaleza del eje matemático al que pertenece y que active procesos cognitivos (Velázquez y Nolasco, 2009). Podrá producir A- cuando infrinja alguno de estos criterios. El cumplimiento del primer criterio implica que se cumplan los otros, lo inverso no necesariamente es verdadero.

Con los avances de esta investigación se realizó un taller en la 26 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, cuyo propósito es que los participantes apliquen los criterios antes referidos para reconocer problemas en los libros de texto oficiales, que puedan generar uno u otro tipo de actitudes y expliquen sus argumentos al respecto. Los contenidos abordados son: A) Relación funcional (Cantoral, Farfán, Montiel, Lezama, Cabañas, Castañeda, Martínez, y Ferrari, 2008). B) Funciones de crecimiento lineal y exponencial (García, Páez y Alejandro, 2008). C) Problemas multiplicativos con números fraccionarios (Waldegg, Vllaseñor y García, 2008). La dinámica estuvo regida por el trabajo colaborativo y los procesos y resultados se expresaron en un organizador lógico de argumentación.

En este taller participaron nueve profesores de diversos países de América Latina que centraron sus argumentos sobre los problemas de contextos auténticos, estos son de tres tipos. 1. Argumentos personales como los problemas son "Bonitos", interesantes y apropiados porque hacen referencia a los entornos en los que vivimos. 2. Argumentos empíricos al decir, en nuestras clases lo general proponemos problemas auténticos, en los que una ilustración adecuada o inadecuada hace la diferencia. 3. Teóricos, en los que consideran aquellos que se expresan en fuentes especializadas, "Problematizar conocimientos matemáticos da lugar a la construcción social de saberes", los problemas auténticos tienen potencialidades para esta problematización.

Antecedentes

Este apartado comprende dos aspectos uno sobre el estudio de las actitudes principalmente hacia el estudio de las matemáticas, a fin de orientar a los profesores sobre la relevancia de estos saberes en la formación de los alumnos como personas críticas, responsables y colaborativas. Otro referente a la importancia del libro de texto como recurso básico para profesores y alumnos, en donde los problemas planteados conforman una de sus partes principales.

Alsina, Fortuny y Pérez (1997) consideran que las actitudes pueden ser sobre apreciación de las matemáticas y la organización y hábitos de trabajo en esta asignatura. Desde nuestro punto de vista esta posición está en consonancia con las ideas expresadas en líneas anteriores, y va más allá puesto que en la apreciación están incluidas la disposición del alumno para hacer matemáticas, el reconocimiento de las matemáticas en su formación y en el desarrollo de la sociedad, así como la valoración positiva de las matemáticas en las prácticas sociales y una postura crítica al leer y practicar diversas situaciones. En tanto que en los hábitos de trabajo se considera la perseverancia en la construcción o búsqueda de estrategias de solución, la búsqueda asidua del conocimiento por medio del trabajo colaborativo, el interés y el respeto por los opiniones de los demás y el aprecio por formarse un pensamiento abierto, reflexivo y crítico.

En este sentido Callejo, Goñi, Alsini, Civil, Giménez, Gómez, Planas, y Vanegas (2010) estructuran una propuesta de aprender y enseñar matemáticas para la ciudadanía en términos de formar estudiantes comprometidos, críticos y con condiciones para exigir sus derechos y cumplir sus responsabilidades. Por su parte López (2012) sostiene que cuando una persona, en este caso el alumno logra comprender su razón de ser y estar en un grupo de estudio de las matemáticas, ejerce su responsabilidad de contribuir al mejoramiento del grupo y de la sociedad.

Schoenfeld (2006) considera que mirar a las matemáticas como útiles, importantes, dinámicas y eficaces, es condición necesaria para desempeñarse con éxito en la solución de problemas.

Polya (1974) expresa, la precisión y el rigor como actitudes matemáticas que se caracterizan por lo válido, coherente y comunicable de los procesos y producciones de los alumnos. En el libro para el maestro SEP (1994) se propone la formación de actitudes positivas en el ámbito de las matemáticas, estas actitudes las denomina de colaboración, respeto, investigación, perseverancia, autonomía y autoestima.

Por su parte los programas de estudio de matemáticas de educación secundaria sostienen que "mediante el estudio de las matemáticas se busca que los niños y jóvenes asuman una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina" (SEP, 2006, p. 7). En tanto que los programas de estudio SEP (2011) incluyen actitudes hacia el estudio de las matemáticas de manera amplia, al considerar que el alumno desarrolle una concepción positiva de sí mismo en el ámbito de las matemáticas incluyendo el gusto y la inclinación por el discurso y los procesos matemáticos. De igual modo la formación de un pensamiento matemático en términos de conceptos, juicios, razonamientos e intercambio de saberes y experiencias. Nosotros afirmamos que el interés de los alumnos por construir, aplicar y difundir saberes matemáticos, la búsqueda permanente del conocimiento y la responsabilidad de sus acciones, constituyen actitudes positivas. Al contrario, la indiferencia, la escolarización, el rechazo y la imposición de criterios dan cuenta de actitudes negativas.

> Mediante el estudio de las matemáticas se busca que los niños y jóvenes desarrollen una forma de pensamiento que les permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales, así como utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas; al

> mismo tiempo, se busca que asuman una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina y de colaboración y crítica, tanto en el ámbito social y cultural en que se desempeñen como en otros diferentes. (SEP, 2006, p.7)

Por otra parte la importancia del libro de texto, en general, y el de matemáticas en particular, como recurso básico para el profesor y los alumnos, queda de manifiesto en las diversas investigaciones que se han desarrollado en los últimos años, que explican la relevancia de estos materiales en la actividad que se desarrolla en el aula (Monterrubio y Ortega, 2011). De manera que las limitaciones o errores que tengan pueden ser reproducidos por miles de alumnos y profesores, quienes son los principales usuarios. De ahí la trascendencia de leerlos con mirada crítica a fin de evitar esa reproducción y contribuir a su perfeccionamiento. Los ejercicios y problemas propuestos en los libros de texto conforman una de sus partes principales, por tal razón el presente trabajo se enfoca al análisis de dicha parte considerando las actitudes que producen.

Palm (2006) hace una clasificación de los problemas contextualizados y explica una teoría de las situaciones de tareas auténticas, de tal forma que se revelan las maneras de cómo la situación real debe estar inmersa en el problema propuesto. Es decir una concordancia entre el problema y las situaciones de la vida real, que se consideran. Las referidas situaciones deben ser interesantes y de importancia para las personas a quienes se proponga el problema y por supuesto para la sociedad.

Santanero y Slisko (2010) constatan que lo artificial está presente en los libros de texto y es de dos tipos. El primero consiste en que los problemas se enmarcan en una situación posible, pero los números o datos que contienen y las relaciones entre ellos son irreales, imposibles o improbables en el mundo real. En el segundo tipo se plantean problemas que consideran escenarios y actuaciones que las personas jamás imaginarían o llevarían a cabo.

Velázquez, Slisko y Nolasco (2012) postulan que los problemas en contextos artificiales generan una falsa idea de lo que son las prácticas matemáticas, porque muestran una acción repetitiva sin ningún significado para los alumnos, contraria a lo que se hace con las tareas y problemas matemáticos, donde hay que buscar el conocimiento planteando conjeturas y asegurarlo con argumentos. Si se trabaja con sentido matemático los alumno activan procesos cognitivos, sociales y emocionales, encaminados al desarrollo de su pensamiento.

Alsina (2010) describe la relevancia de las matemáticas para la vida cotidiana al considerar que en la escuela deben instrumentarse prácticas sociales sobre aplicar matemáticas como personas saludables, como consumidores y como ciudadanos. En estas prácticas está inmerso el sentido numérico y el pensamiento algebraico, el manejo de la información y la forma, el espacio y la medida –estos son tres ejes que vertebran las matemáticas en educación secundaria- . De igual modo en el estudio de los alimentos, drogas y condiciones del organismo humano para una vida saludable, en lo referente a consumo, ofertas y demandas, y en la relación actitudes-valores con la calidad de vida.

Se ve en los párrafos anteriores la concreción de posiciones sobre contextos auténticos que deben abordar los problemas planteados como condición para producir actitudes positivas.

Escenarios de investigación

1. *Estudio y selección de problemas en los libros de texto por los profesores*. En la realización de este estudio se comparten con ocho profesores de este nivel educativo de Acapulco, Guerrero, las explicaciones sobre contextos auténticos y artificiales consideradas en líneas anteriores. Se parte del supuesto de que los problemas en contextos auténticos a la vez responden a la naturaleza del eje matemático de la situación que abordan y activan procesos cognitivos en los alumnos. De manera que este tipo de problemas puede producir A+ y aquellos que incluyen contextos artificiales producirían A- .

En el primer tipo de problemas, los profesores ubican aquellos que modelan situaciones de la física como movimiento rectilíneo uniforme, uniformemente acelerado y caída libre de los cuerpos. De la misma manera consideran los problemas que requieren de una solución para la toma de decisiones, los referentes a la lectura de gráficas, ofertas-opciones de pago, impuestos y vida saludable. Señalan que en los libros de texto son escasos los problemas que se plantean sobre estas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo:

> La familia Montes, necesita comprar un colchón nuevo para su casa. En la tienda de colchones eligen los tres que más les gustan. Deciden que van a comprar el más barato, pero no es tan sencillo como esperaban, estas son las opciones.
>
> 1. $570.40 (IVA incluido). 2. $490.00 (más IVA). 3.$620.00 (pague solo el 75% más IVA). ¿Cuál de los tres colchones es el más barato?,
>
> ¿Cuál es el valor de los tres colchones, antes de aumentar el impuesto?
>
> ¿Cómo calculas cuánto costará un colchón, después de aumentarle el impuesto?¿Cómo calculas el descuento en el colchón de la opción 3?. (Waldegg, Villaseñor y García, 2008, p. 160).

Lo profesores que hacen este reconocimiento afirman que es un problema donde los alumnos ven la utilidad de lo que están aprendiendo y su relación con la vida cotidiana, cómo las matemáticas están presentes en todo lo que hacen. El problema es muy sencillo pero creemos que da pie al pensamiento matemático, ya que el alumno tiene que reflexionar, deducir y buscar por si solo la idea de solución y resolverlo.

En los problemas en contextos artificiales consideran los que son repetitivos y los que se acompañan de pistas para resolverlos. Como ejemplo tenemos:

> La familia de Josué acaba de ganar una enorme casa de campo en un sorteo, la parte construida ocupa 2/5 partes del terreno. De la parte restante, 1/3 lo ocupa una alberca y el resto, un jardín. ¿Qué parte del total del terreno ocupa el jardín? (Waldegg *et al*, p. 74).

Los profesores que reconocieron este problema afirman que genera una actitud negativa porque no da lugar a una búsqueda, ni orienta a proponer conjeturas y posibles soluciones, es planteado con una leyenda "De un nuevo reto" pero es repetitivo ya que antes se plantearon problemas bajo "Acepta el reto", de ahí se pierde el interés. Además es resuelto por los autores, lo que resulta contradictorio pues no logra que los alumnos problematicen, ni desarrollen el pensamiento.

Por nuestra parte sostenemos que este planteamiento muestra una idea distorsionada de la solución de problemas, ya que presenta todo resuelto por lo que da lugar a que el alumno piense que resolver problemas no exige ningún esfuerzo. Por otra parte al decir que es una enorme casa que abarca 2/5 del terreno y que del resto 1/3 lo ocupa la alberca, significa que esta alberca también es enorme, para ubicarse con más fuerza en un contexto artificial.

2. *Solución de problemas por los alumnos.* Cuando los alumnos resuelven los problemas reconocidos por los profesores y se les cuestiona, afirman para el primer tipo, que son interesantes y los recomiendan porque mantienen la atención, activan el conocimiento y agilizan la mente. En tanto que para el segundo tipo señalan que las pistas agregan demasiado texto, que muchas veces confunden y que son tediosos.

Al alumno A después de que resuelve un problema en contexto auténtico en el que se da el plano de una cancha de basquetbol a escala y se le pide que determine las dimensiones reales de la cancha, se le pregunta si lo considera interesante y por qué. Su respuesta es afirmativa y el argumento que da es el siguiente:

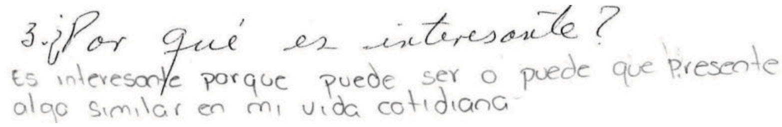


Figura 1

Por su parte al alumno B después de resolver un problema en el referido contexto que aborda una situación de compra de muebles con diversas opciones de pago y descuentos en el que se pide determinar la opción óptima para el comprador, se le cuestiona al igual que al alumno anterior, su respuesta es positiva y el argumente se mira a continuación.

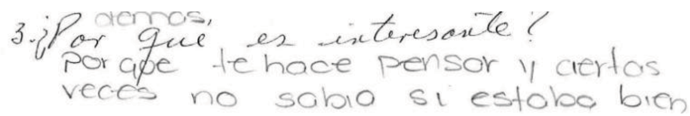


Figura 2

La alumna C resuelve un problema en contexto artificial sobre una situación en la que hay distintas rutas para ir de un lugar a otro, se quiere saber cuántas rutas hay. En dicho problema se dan pistas para resolverlo. A la alumna se le pregunta si es interesante y por qué, su respuesta es negativa y el argumento que da es el siguiente.

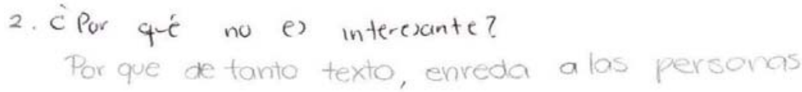


Figura 3

En virtud de que estamos iniciando el análisis de lo que hacen los alumnos, los resultados que presentamos son preliminares y parciales, suponemos que con el análisis completo se verificarán las afirmaciones de los profesores sobre las actitudes que producen los tipos de problemas.

A manera de conclusión

Consideramos que la conceptualización que hacemos sobre las actitudes hacia el estudio de las matemáticas y la descripción de sus componentes afectivo, cognitivo y conductual, así como su relevancia en la formación del alumno a fin de que las matemáticas formen parte de su vida, constituyen una base de orientación para su desarrollo. Esta base de orientación se concreta en el reconocimiento de los problemas planteados en los libros de texto, que generan en los alumnos actitudes positivas o negativas en función de los contextos que abordan. De manera que los problemas en contextos auténticos al generar actitudes positivas, contribuyen a que los alumnos y profesores superen el control que ejercen los libros sobre ellos y lo revierten a su favor.

Sobresale el trabajo de profesores y alumnos participantes en esta investigación con el propósito de reconocer o resolver los problemas referidos, y argumentar en términos de que los problemas en contextos auténticos generan actitudes positivas en tanto que los de contextos artificiales producen actitudes negativas. Los contextos auténticos pueden ser las diversas prácticas sociales en las que participan los alumnos, como las referentes a los usos y significados de las matemáticas para ser personas saludables, ahorrativas, consumidores responsables y ciudadanos cultos y comprometidos. O bien aquellas prácticas de modelación de diversas situaciones del medio físico y social. Conjeturamos que estas posiciones pueden o deben ser incorporadas al currículum de educación básica, particularmente en la secundaria mexicana.

Desarrollar competencias positivas hacia el estudio de las matemáticas a través de la participación de profesores y alumnos, en el reconocimiento de problemas en contextos autênticos planteados en los libros de texto, puede ser un elemento relevante en la actualización continua de estos materiales de apoyo. A fin de que no lo pasen por alto los responsables de elaborar y validar los libros de texto para los alumnos.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2010). Matemáticas para la ciudadanía. En M. Callejo y J. Goñi (Coords.). *Educación matemática y ciudadanía* (pp. 89-102). Barcelona, España: Graó.

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría?. Propuestas didácticas*

para la ESO. Madrid, España: Síntesis.

Cantoral, R., Farfán, R., Montiel, G., Lezama, J., Cabañas, G., Castañeda, A., Martínez, G. y Ferrari, M. (2008). *Matemáticas 3º*. D. F, México: Mcgraw-Hill.

Callejo, M., Goñi, J., Alsini, C., Civil, M. , Giménez, J. , Gómez. I., Planas, N. y Vanegas, Y. (2010). *Educación matemática y ciudadanía*. Barcelona, España: Graó.

García, M. , Páez, R. y Alejandro, M. (2008). *Matemáticas 3*. D. F, México: Larousse.

Gómez, I. (2002). *Matemática emocional*. Madrid, España: Narcea.

López, E. (2012, 16 de Junio). Corrupción y moral. *La Jornada, Guerrero*, p. 2.

Monterrubio, M. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA 5*(3), 105-127.

Palm, T. (2006). Word problems as simulation of real-world situations. A proposed framework. *For the Learning of Mathematics 26* (1), 42 – 47.

Pantón, G. (1995). *Diccionario enciclopédico Grijalbo*. Bogotá, Colombia: Grijalbo.

Polya, G. (1974). *Cómo plantear y resolver problemas*. D.F, México: Trillas.

Santanero, J. y Slisko, J. (2010, Noviembre). Contextualización de los problemas en los libros de texto de matemáticas para secundaria. Cartel presentado en el 43 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, realizado en Tuxtla-Gutiérrez.

Secretaría de Educación Pública. (1994). *Libro para el maestro de matemáticas, educación secundaria*. D.F, México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2006). *Programas de estudio de matemáticas en educación secundaria*. D. F, México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio de matemáticas en educación secundaria*. D.F, México: Autor.

Schoenfeld, A. (2006). Method. In F Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1-64). New York, USA: MacMillan.

Velázquez, S., Slisko, J. y Nolasco, H. (2012). Concepciones de los profesores acerca de las actitudes que producen los problemas planteados en los libros de textos de matemáticas de educación secundaria. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 1221-1229. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Velázquez, S. y Nolasco, H. (2009). Rediseño del discurso matemático escolar en la educación secundaria. *Sinergia* 1 (2), 26-31.

Waldegg, G., Villaseñor, R. y García, V. (2008). *Matemáticas en contexto1*. D. F, México: Esfinge.

UN MODELO DE ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO: EL CASO DE LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES SOBRE LA DERIVADA

Luis R. Pino-Fan, Juan D. Godino, Walter F. Castro, Vicenç Font
Universidad de Granada España
Universidad de Antioquia Colombia
Universitat de Barcelona España
lrpino@ugr.es, jgodino@ugr.es, wfcastro82@gmail.com, vicencfont@ono.com

Resumen. En este trabajo se presenta una propuesta de caracterización del conocimiento didáctico-matemático, sobre la derivada, que un profesor de matemáticas necesita para efectuar eficientemente su práctica. Se ilustra el uso del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) para responder a cuestiones tales como: *¿Cómo o bajo qué criterios puede ser evaluado el Conocimiento Didáctico-Matemático? ¿Cómo se relacionan los distintos componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático? ¿Cómo los formadores de profesores pueden ayudar a los futuros profesores a desarrollar los distintos componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático?* En este trabajo, se responde, aunque de manera parcial, a dichas preguntas, mediante el planteamiento de criterios específicos que, por medio de un cuestionario, permiten explorar el conocimiento común, especializado y ampliado del contenido de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.

Palabras clave: conocimiento del profesor, enfoque ontosemiótico, derivada

Abstract. In this paper it´s presented a characterization for the didactic-mathematical knowledge (DMK) that a teacher of mathematics required to carry out effectively his/her practice. It is shown the use of the onto-semiotic approach (OSA) to mathematics knowledge and instruction to answer questions such as: How or under which criteria can the DMK be assessed? How are related, among them, the different features of the DMK? How the teachers' educators can help the prospective teachers to develop the DMK manifold features? This work respond, though partially, such questions, by advancing specific criteria which, through a questionnaire, have allowed to explore the prospective teachers' common, specialized and extended knowledge on the derivative.

Key words: teacher's knowledge, onto-semiotic approach, derivative

Introducción

Una de las problemáticas que más ha interesado tanto a la comunidad de investigadores en Matemática Educativa como a las administraciones educativas, es determinar y caracterizar los componentes del complejo de conocimientos que un profesor de Matemáticas debería tener para llevar a cabo eficazmente su práctica y facilitar el aprendizaje de sus alumnos sobre tópicos específicos de Matemáticas.

Una de las propuestas sobre el conocimiento de los profesores que ha tenido mayor impacto, es la denominada "Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)", desarrollada por Ball y colaboradores (Hill, Ball & Schilling, 2008), la cual supone avances en la caracterización de los componentes del conocimiento que debe tener un profesor para enseñar matemáticas.

Sin embargo, a pesar de los avances que dicho modelo supone, aún quedan cuestiones fundamentales por responder, como por ejemplo, ¿Cómo determinar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores con modelos que incluyen categorías demasiado globales? (Godino, 2009). Concretamente, ¿De qué forma o bajo qué criterios se puede evaluar o medir el MKT? ¿Cómo se puede ayudar a los profesores a adquirir o a desarrollar los distintos componentes del MKT? En palabras de Silverman y Thompson (2008): "Aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de lo que sea, cómo se puede reconocer, y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores" (p. 499).

En general, como señala Godino (2009), tanto el modelo MKT de Ball como los diversos modelos propuestos desde el campo de investigación en Educación Matemática, incluyen categorías demasiado globales y disjuntas, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, lo anterior permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor de matemáticas.

Así, en este trabajo se presenta una propuesta, con base en los desarrollos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), que responde a la necesidad de encontrar y proporcionar pautas y criterios que permitan analizar y caracterizar el conocimiento didáctico-matemático requerido por los profesores para la enseñanza de temas específicos de matemáticas.

Una propuesta de modelo del conocimiento didáctico-matemático

En este trabajo se explica las principales características del modelo de *Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)* propuesto por Godino (2009) aplicándolo al caso del contenido específico de la noción de derivada. Dicho modelo para el CDM incluye seis facetas o dimensiones del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza y el aprendizaje de temas específicos:

1) *Epistémica:* componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos) y su distribución, a lo largo del tiempo de enseñanza; 2) *Cognitiva:* desarrollo de los significados personales (aprendizajes); 3) *Afectiva:* los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno en relación con los objetos matemáticos y con el proceso de estudio seguido y su distribución temporal;

4) *Interaccional*: secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados; 5) *Mediacional*: distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos; y 6) *Ecológica:* sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, entre otros, que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Para cada una de estas facetas se contemplan, a su vez, cuatro niveles que permiten el análisis del CDM del profesor de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales. Estos niveles son: 1) *Prácticas matemáticas y didácticas*, descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes; 2) *Configuraciones de objetos y procesos* (matemáticos y didácticos), descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de los objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas. Tal complejidad es un elemento explicativo tanto de los conflictos de significado como de la progresión del aprendizaje; 3) *Normas y metanormas*, identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan cada faceta y sus interacciones; y 4) *Idoneidad didáctica*, identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la pertinencia y adecuación de los distintos componentes y factores condicionantes.

Las indagaciones se han realizado con profesores de secundaria en formación inicial, y por tanto se centran principalmente en la faceta epistémica; en el análisis de las respuestas que dieron los estudiantes a las tareas del cuestionario (que a continuación se describirá), se consideran aspectos de la faceta cognitiva. En este estudio no se considera la exploración de los niveles de análisis tres y cuatro.

El cuestionario

El cuestionario, que hemos denominado *Cuestionario sobre la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de la Derivada (Cuestionario FE-CDM-Derivada)*, consta de siete tareas y fue diseñado con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009). Se centra, fundamentalmente, en la evaluación de aspectos parciales de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de futuros profesores de bachillerato sobre el objeto derivada. Dicha faceta incluye, en congruencia con el modelo de Ball y colaboradores (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Ball & Schilling, 2008) tres tipos de conocimiento: *conocimiento común, conocimiento ampliado (o conocimiento en el horizonte matemático, en la terminología de Ball y cols.) y conocimiento especializado*.

En el proceso de construcción del cuestionario se consideraron tres criterios para la selección de las tareas que lo conforman. El primer criterio considera que las tareas deben proporcionar información sobre el grado de ajuste del significado personal de los futuros profesores respecto del significado global u holístico del objeto derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Para lograrlo, se incluyeron ítems que activan distintos sentidos para el objeto derivada (pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio y tasa instantánea de variación).

El segundo criterio fue que los ítems seleccionados respondan a los diferentes tipos de representaciones activadas en los tres subprocesos, que según Font (1999), intervienen en el cálculo de la función derivada: 1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$; 2) El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$; y 3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$. En este sentido, las tareas incluidas en el cuestionario ponen en juego los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos: descripción verbal, gráfica, simbólica y tabular; tanto para la función como para su derivada.

El tercer criterio considera la inclusión de tres tipos de tareas: (1) aquellas que requieren poner en juego el *conocimiento común del contenido* (resolver la tarea matemática propia de las matemáticas de bachillerato); (2) aquellas que requieren del *conocimiento especializado* (usar distintas representaciones, distintos significados parciales de un objeto matemático, resolver el problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática, etc.); y (3) aquellas que requieren del *conocimiento ampliado* (generalizar tareas sobre conocimiento común y/o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo).

La descripción y análisis sobre los contenidos que evalúan y sobre los resultados obtenidos para cada una de las tareas incluidas en el cuestionario *FE-CDM-Derivada*, puede encontrarse en Pino-Fan, Godino, Font y Castro (2012).

Algunos resultados

El cuestionario se aplicó a una muestra de 53 futuros profesores quienes estudiaban el sexto y octavo semestre de la licenciatura en enseñanza de la matemática en la Universidad Autónoma de Yucatán en México. Todos los estudiantes para profesor habían cursado cálculo diferencial, integral y otras asignaturas del área del análisis matemático. También habían cursado asignaturas sobre el cálculo y su didáctica.

Para el análisis de los datos obtenidos mediante la aplicación del cuestionario, se consideraron dos variables: *tipo de configuración cognitiva* (i.e. tipo de solución propuesta por los futuros profesores) y *grado de corrección de las tareas* (i.e. correcta, parcialmente correcta e incorrecta). La técnica de análisis usada para la primera variable es el análisis semiótico (Godino, 2002), la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los futuros profesores al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/ definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas realizadas en la resolución de las tareas (Godino, Batanero y Font, 2007).

Respecto a la segunda variable, grado de corrección, se asignó las puntuaciones de 2, 1 ó 0, para las respuestas correctas, parcialmente correctas o incorrectas respectivamente. Así la puntuación máxima que podía obtener un estudiante era 26 puntos. Veinticuatro de los futuros profesores (45.3%), obtuvo una puntuación superior a los 13 puntos de los 26 puntos posibles en el cuestionario. De estos 24 estudiantes, solamente 9 (17%) respondieron correctamente más del 67% del cuestionario. Lo anterior evidencia que más de 50% de los estudiantes presentaron dificultades para resolver las tareas del cuestionario. La puntuación media obtenida por los 53 estudiantes fue de 12,3 puntos sobre un total de 26.

En cuanto a los resultados de nuestro análisis cualitativo (tipo de configuración cognitiva), no es posible desarrollar un ejemplo del análisis realizado con alguna de las tareas debido a las limitaciones de espacio. Sin embargo, en los trabajos de Pino-Fan, Godino, Castro y Font (2012), Pino-Fan, Godino, Font y Castro (2012), Pino-Fan, Godino y Font (2012) y Pino-Fan (2011), se presenta en detalle el análisis cuantitativo y se incluyen también ejemplos del análisis cualitativo que hemos realizado con cada una de las tareas.

Los resultados obtenidos de la implementación de cuestionario *FE-CDM-Derivada*, muestran que los futuros profesores tienen dificultades para resolver tareas relacionadas, no sólo con el conocimiento especializado y ampliado, sino también con el conocimiento común. Se evidenció que los futuros profesores se desempeñan mejor cuando resuelven tareas que involucran el uso de la derivada como pendiente de la recta tangente. Esto se confirma cuando resuelven tareas como la 5 (Pino-Fan, Godino, Font y Castro 2012, p. 300) en la que las respuestas muestran desconexiones entre los distintos significados de la derivada. Dicha tarea (Figura 1), tomada de Delos Santos (2006), a simple vista, podría aparentar ser uno de los ejercicios que comúnmente se encuentran en los Libros de Cálculo diferencial de nivel bachillerato, en los que basta aplicar algunos teoremas o proposiciones sobre derivadas para su resolución. Por esta razón, tanto el ítem a) como el b), de forma individual, evalúan aspectos del conocimiento común de los futuros profesores relacionados con la derivada en su acepción como pendiente de la recta tangente y razón instantánea de cambio. Sin embargo, el objetivo central de la tarea es explorar, globalmente, la actividad matemática desarrollada por los futuros profesores, y si en dicha actividad los futuros profesores logran hacer conexiones o asociaciones entre los distintos significados de la derivada. En este sentido, la tarea 5 evalúa aspectos del conocimiento especializado, en tanto que indaga acerca de la asociación que los futuros profesores establecen entre los distintos significados de un objeto matemático concreto: la derivada.

Tarea 5

Dada la función $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$

a) Encuentra los puntos de la gráfica de la función para los que su tangente es horizontal.

b) ¿En qué puntos la razón instantánea de cambio de *y* con respecto a *x* es cero?

Figura 1. Tarea 5 del Cuestionario *FE-CDM-Derivada*

Las insuficiencias manifestadas justifican la pertinencia de diseñar acciones formativas específicas para desarrollar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. El desarrollo podría lograrse, de un lado, mediante el diseño de procesos de enseñanza de la derivada, distintos a los habituales, que se focalicen en el significado global de la derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Por otro lado, debe tenerse en cuenta, en el diseño de dichas acciones formativas, los dos niveles del conocimiento especializado, tanto en su nivel de aplicación (uso de diversos elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos), así como en el de identificación y uso de distintos significados parciales de la derivada, para la resolución de una tarea.

La identificación y uso de los distintos significados refiere a desarrollo de competencias para la identificación de objetos matemáticos, sus significados y vínculos entre ellos, lo que permitiría una futura gestión idónea de los aprendizajes de sus estudiantes.

Los dos niveles propuestos para el conocimiento especializado están íntimamente vinculados, en el modelo CDM, con las otras facetas del conocimiento de los profesores. Por un lado, el nivel uno, de aplicación, se relaciona con las facetas interaccional y mediacional (Knowledge of content and teaching), puesto que un buen dominio de este nivel del conocimiento especializado sobre un tópico específico, como la derivada, proporciona al profesor los medios para un desempeño idóneo de su práctica futura de enseñanza. El nivel dos, de identificación, está vinculado con las facetas cognitiva y afectiva puesto que faculta al profesor para identificar de manera previa, durante y posterior a la implementación de una actividad de enseñanza, conocimientos matemáticos involucrados y significados de los objetos matemáticos, así como conflictos y errores que se pueden presentar a sus futuros alumnos. Esta identificación favorece la gestión eficaz del aprendizaje de sus futuros alumnos.

Conclusiones y cuestiones abiertas

El tipo de conocimiento didáctico-matemático se encuentra estrechamente vinculado con la variable *tipo de configuración cognitiva* asociada a las respuestas de los estudiantes, puesto que la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático depende de la presencia o ausencia de los objetos matemáticos, sus significados y relaciones entre ellos. Estas configuraciones cognitivas son de naturaleza didáctico-matemática debido a que las tareas presentadas tienen dicho carácter, y por tanto los sujetos deben movilizar conocimientos matemáticos y didácticos. El análisis de tales configuraciones, por parte del formador, puede ayudar a definir acciones formativas para que los maestros en formación se "den cuenta" de la profunda relación entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico.

El modelo para el conocimiento didáctico-matemático ofrece la herramienta "*configuración de objetos matemáticos primarios*" que favorece el análisis y la categorización de algunas características de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático, manifestadas por los maestros en formación.

Este trabajo se ha centrado en el conocimiento especializado, en estrategias para analizarlo y en sugerencias para potenciarlo. Cuestiones sobre la evaluación y el desarrollo de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático, son factibles de responder con nuestra propuesta. Además se plantea una posible manera de vincular algunos de los componentes del MKT.

Finalmente, el modelo CDM puede aplicarse a la enseñanza de diversos temas matemáticos, sin embargo cada tema matemático conlleva especificidades vinculadas a la faceta epistémica, que se desconocen a priori pero que surgen durante la implementación de las actividades de enseñanza y aprendizaje. El uso del modelo en otros temas matemáticos es un tema de investigación abierto.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido desarrollado en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores EDU2012-32644 (Universidad de Barcelona) y EDU2012-31869 (Universidad de Granada) y de una beca de investigación doctoral del Ministerio de Asuntos Exteriores y de Cooperación, Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (MAEC-AECID).

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Delos Santos, A. (2006). *An investigation of students' understanding and representation of derivative in a graphic calculator-mediated teaching and learning environment.* Tesis Doctoral no publicada, University of Auckland, New Zealand.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Pino-Fan, L. (2011). *Conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre la derivada: clarificando los significados de la derivada desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje*. Alemania: Editorial Académica Española.

Pino-Fan, L.R., Godino, J.D., Castro, W.F., y Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: explorando el conocimiento especializado sobre la derivada. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 427 - 434). Jaén: SEIEM.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2012). Clarificando criterios para evaluar el conocimiento especializado de futuros profesores sobre la derivada. En Marín Rodríguez, M., y Climent Rodríguez, N. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 181-192). Ciudad Real: SEIEM.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matematica Pesquisa*, 13(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Font, V. y Castro, W.F. (2012). Key Epistemic Features of Mathematical Knowledge for Teaching the Derivative. En Tso, T.Y. (Ed). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297-304). Taipei, Taiwan: PME.

Silverman, J., y Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(6), 499-511.

CONCEPÇÕES DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: UM EXAME ATÉ A DÉCADA DE 1960

Maria Ednéia Martins-Salandim
Universidade Estadual Paulista - UNESP Brasil
edneia_martins@yahoo.com.br

Resumo. Parte de uma pesquisa de doutorado cujo objetivo foi estudar o movimento de expansão dos cursos de Matemática pelo interior do estado de São Paulo na década de 1960, este texto contempla discussões sobre concepções de formação de professores de Matemática. Tais discussões foram disparadas por estudos de documentos oficiais, referências bibliográficas e narrativas de professores de Matemática que estudaram e/ou se formaram nos cursos criados naquele período.

Palavras chave: formação de professores; concepções

Abstract. This is part of a PhD research whose aim was to study the movement of expansion of the mathematics courses in the state of São Paulo in the 1960s. This text shows discussions about conceptions about Math teachers formation. Such discussions were based on studies of official documents, references and narratives of mathematics teachers who have studied and/or graduated in the courses created during that period.

Key words: teacher training; conceptions

Introdução

Um mapeamento dos cursos de Matemática

Em nossa pesquisa de doutorado (Martins-Salandim, 2012), na qual estudamos o movimento de expansão dos cursos de Matemática pelo interior do estado de São Paulo, detectamos que foi na década de 1960 que tal movimento intensificou-se. Para aquela pesquisa, produzimos nossos dados tanto a partir de entrevista de História Oral, de documentos escritos e de elementos cartográficos. Nesse movimento de expansão, tanto quantitativo quanto geográfico, diferentes concepções de formação de professores também se manifestaram, as quais destacaremos neste texto - ressalte-se que as concepções não estão disponíveis, como um dado, nas narrativas de nossos depoentes, elas são leituras e, portanto, significados atribuídos.

Os cursos de formação de professores em nível superior, no Brasil, surgiram a partir dos anos 1930, tendo sido alocados nas Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras - FFCL. Estas instituições, no Brasil, foram criadas inicialmente no interior de universidades e a elas atribuída, além de outras, a função de oferecer cursos superiores de formação de professores para o ensino secundário, como já previa o Estatuto das Universidades Brasileiras, de 1931. Vale destacar que a estruturação do ensino superior brasileiro foi tardia devido à política de colonização portuguesa, adotando-se um modelo de cursos/escolas isolados - instituições escolares que não integram uma universidade. A criação de universidades foi escassa e ainda mais tardia, em geral estruturadas pela simples junção de faculdades e escolas já existentes (Cunha, 2007a; Rossato, 1998). No entanto, em décadas posteriores manteve-se a tendência de criação de FFCL isoladas, o que ocorreu também na década de 1960, período em que, dos nove cursos de Matemática criados no estado de São Paulo, apenas um foi instalado no interior de uma universidade. Este modo de organização, certamente, teve implicações nos modos de formar professores.

Fazendo um retrospecto dos cursos de Matemática instalados no estado de São Paulo, antes dos anos 1960, foi na Universidade de São Paulo - USP, que se deu a criação primeiro curso desta natureza. Naquele curso, ainda que dentre os objetivos estivesse a formação de professores para o ensino secundário, a atenção voltou-se mais à pesquisa, tanto que foram contratados professores estrangeiros, visando à formação de alunos interessados em atuar no ensino superior e na pesquisa (Cunha, 2007b). A formação do professor, de acordo com Bernardo (1989), foi marginalizada dentro do ambiente universitário da USP-SP.

Cronologicamente, após a USP-SP, as instituições paulistas a oferecerem cursos de graduação em Matemática foram as FFCL de São Bento e a Sede Sapientiae, instituições instaladas na capital e que, posteriormente, foram incorporadas à Universidade Católica de São Paulo (que tornou-se Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP – quando a FFCL de São Bento, de São Paulo, foi a ela incorporada). De acordo com Ziccardi (2009), o curso de Matemática da atual PUC-SP deve ser compreendido a partir dos cursos de Matemática oferecidos por estas duas faculdades no fim dos anos de 1930 e começo dos de 1940. A FFCL de São Bento instalou seu curso de Matemática em 1940, mas devido a uma interpretação equivocada sobre a autorização de seu funcionamento, registra-se sua criação em 1941. Já a FFCL do Instituto Sedes Sapientiae teve sua seção de Matemática e Física instalada em 1939, iniciando com aulas que visavam a corrigir deficiências oriundas dos níveis de formação anteriores. Efetivamente, o curso de Matemática e Física foi reconhecido em 1943 e a separação entre as duas disciplinas, constituindo dois novos cursos superiores – o de Matemática e o de Física – ocorreu em 1967. Ainda que estas duas faculdades estivessem vinculadas à Universidade Católica de São Paulo desde 1946, foi apenas em 1971 que passaram a constituir um curso único. Desse modo, podemos compreender que haviam dois cursos de Matemática criados no limiar da década de 1940 vinculados à atual PUC-SP.

O quarto curso de Matemática criado no estado de São Paulo, foi também o primeiro instalado no interior do estado, o que ocorreu na década de 1940, na cidade de Campinas.

Conforme estudo realizado por Bortoli (2003), este curso pertencia à FFCL de Campinas e foi criado em 1942. Inicialmente oferecia-se o curso na modalidade bacharelado, uma vez que o currículo não apresentava disciplinas pedagógicas. A partir de 1945 passou a ser oferecida a disciplina "Didática" que, cursada após o bacharelado, conferia ao estudante o título de licenciado em Matemática.

Nesta mesma década, no ano de 1947, outro curso de Matemática foi instalado na capital, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras Mackenzie, no primeiro ano de funcionamento da Faculdade. O curso de Matemática dessa instituição era, inicialmente, oferecido juntamente com o curso de Física, nas modalidades licenciatura e bacharelado, tendo sido reconhecido em 1949.

O segundo curso de Matemática no interior do estado de São Paulo foi criado na FFCL na cidade de Rio Claro, em 1959, e foi o sexto criado no estado. Em relação aos docentes que atuaram nesta faculdade, Mauro (1999), que estudou suas contribuições para a Educação Matemática, destaca que a direção e boa parte do quadro docente foram compostos por docentes da USP, instituição com a qual eram mantidas intensas relações, tanto na forma de convites para realização de seminários, palestras e conferências quanto para a obtenção de titulação acadêmica, à época uma atribuição da Universidade de São Paulo. Mas o quadro docente para o curso de Matemática da FFCL de Rio Claro foi complementado com professores de outros centros universitários, além de São Paulo, também do Rio de Janeiro e de Brasília, alguns deles contratados em caráter provisório. Logo após a criação do curso foram contratados professores assistentes para auxiliar nas atividades e laboratórios, um contingente de profissionais desde cedo preparado para dar continuidade aos trabalhos quando da saída dos professores efetivos. O curso de licenciatura em Matemática foi instituído nesta FFCL em 1974.

Após trinta anos da criação do curso de Matemática na FFCL da USP, já iniciada a década de 1960, apenas dois cursos de Matemática haviam sido criados no interior paulista, ambos em FFCL - nas cidades de Campinas em 1942 e em Rio Claro em 1959. Na década de 1960, dentre os nove cursos de Matemática por nós detectados (Martins-Salandim, 2012), apenas um, o da UNICAMP, surgiu inscrito já em uma universidade - este na modalidade apenas de bacharelado; os demais vinculavam-se a FFCL, instituições isoladas pertencentes à esfera pública (4 deles) e privada (5 deles), oito deles oferecendo a modalidade licenciatura. Foi nesta década, portanto, que ocorreu uma maior expansão quantitativa destes cursos pelo interior paulista, com a instalação de oito novos cursos, nos municípios de Presidente Prudente (1963), Araraquara (1966), Santo André (1966), Campinas (1966), Tupã (1967), Taubaté (1967), São José do Rio Preto (1968), São Paulo - capital (1969) e Dracena (1969) (entre parênteses o ano de criação do curso).

Concepções de formação de professores de Matemática

Neste movimento de expansão dos cursos de Matemática pelo interior paulista, percebemos que diferentes foram os modos de estruturá-los e conduzi-los. Para alguns o curso da USP configurou como modelo, para outros o modelo foi o curso de Matemática instalado em Guaxupé - Minas Gerais, já para outros, o modelo foi um destes cursos instalados, anteriormente, na mesma década de 1960. De todo modo, a partir desta breve apresentação, defendemos que o modelo de estruturação do ensino superior brasileiro foi determinante nos modos de conduzir e conceber tanto os cursos de licenciatura em Matemática quanto as instituições que os acolheram. Mesmo que os programas de ensino fossem implantados de formas distintas, eram regidos por uma mesma disposição e regulados a partir de um currículo inicial composto por disciplinas específicas de conteúdo matemático seguidas de disciplinas pedagógicas.

Nesta década também foi promulgada a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a qual separou os cursos de bacharelado e licenciatura e estabeleceu seus currículos mínimos, incluindo as disciplinas pedagógicas para as Licenciaturas. O termo licenciado, até então associado a todo graduado em qualquer das seções da FFCL, passou a ser associado apenas ao professor formado em nível superior para atuar nos níveis de ensino básico (Castro, 1974). No entanto, as determinações legais não necessariamente causaram mudanças imediatas na condução das licenciaturas, cujo currículo inicial era composto por disciplinas específicas de conteúdo matemático seguidas de disciplinas pedagógicas.

A formação de professores na FFCL da USP-São Paulo foi secundarizada em relação à necessidade de criar, no Brasil, um campo de pesquisa científica nas diversas áreas do conhecimento e foi no modelo curricular da USP que muitos outros cursos basearam-se, ainda que oferecessem apenas a modalidade licenciatura. Nos cursos oferecidos pelas instituições públicas, no interior, em seus anos iniciais (na década de 1960), não houve preocupação em facultar aos professores que já exerciam a profissão, com a certificação da CADES - Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário -, o acesso aos cursos: além do horário incompatível com as atividades de docência nas escolas da região, não foi implantado nenhum mecanismo para priorizar o ingresso destes professores. Nas licenciaturas em Matemática cujos professores foram cursar pós-graduação em Matemática Pura, buscava-se ampliar ainda mais a formação em Matemática, tornando a pesquisa ainda mais que em tempos anteriores, o modelo no qual os cursos procuravam espelhar-se. Vinculado a isso, deve-se perceber que havia uma nova demanda estabelecendo-se (ou criaram-se estratégias para que tal demanda se criasse): atrair e encaminhar graduados, bacharéis ou licenciados, para a pós-graduação em Matemática Pura. Desse modo, a licenciatura em Matemática serviu ao próprio desenvolvimento da Matemática no país, uma vez que se tornava inviável a criação de cursos apenas de bacharelado em Matemática, pela pouca procura e pequena quantidade de formados por turma, o que implica terem sido os cursos de licenciatura grandes formadores de um público específico, com o qual, por sua própria natureza, esses cursos não deveriam se ocupar: aquele manancial de profissionais que criaria e sustentaria as comunidades de pesquisa em Matemática.

Torna-se evidente que os objetivos iniciais destas licenciaturas em formar professores para o ensino secundário concorreram com a formação tanto do quadro docente para o próprio curso – uma vez que muitos dos alunos eram convidados a permanecer como professores –, quanto para outros cursos em fase de criação, um estado de coisas que nos permite reiterar que as carências e urgências caracterizam também a constituição dos cursos de Matemática no Brasil. Para atender a demanda de formar professores para o ensino secundário - argumento que justificava a necessidade de instalação de FFCL pelo interior paulista (Vaidergorn, 2003; Bernardo, 1989) - criou-se uma demanda paralela, de formar os quadros docentes para o ensino superior - um ciclo de necessidades que interferia significativamente no modelo dos cursos de licenciatura em Matemática.

Por outro lado, detectamos cursos cujo foco dirigia-se à Matemática Aplicada - um novo campo de atuação, alavancado tanto pelas Matemáticas Modernas, pelos novos conteúdos que passaram a ser incorporados à Matemática escolar (reflexo de uma Matemática superior), quanto como decorrência da necessidade de atender diretamente ao mercado e à indústria, que começavam a conviver com os computadores.

Identificamos, ainda, um outro modelo de formação: aquele que visava a uma formação muito próxima, em suas intenções, daquela pretendida anteriormente pela CADES - Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário - em atender os professores em efetivo exercício do magistério, “formalizando" sua experiência de docência. Esta concepção de formação de professores de Matemática centra-se no argumento de que o professor em atuação já estava formado, dominava os conteúdos, faltando-lhe apenas o diploma formal para continuar professor. Mesmo nesses cursos, as disciplinas de formação pedagógica são posteriores às de conteúdo propriamente matemático e, também nesses cursos, alguns ex-alunos tornaram-se professores no próprio curso ou em outro também em constituição inicial.

No entanto, em todos os cursos criados após a Lei de Diretrizes e Bases, LDB, de 1961 – que estabelecia a separação dos cursos de bacharelado e licenciatura em Matemática, extinguindo o modelo de formação "3+1" (Castro, 1974) –, a formação em Matemática foi mantida nos anos iniciais e a formação pedagógica nos anos finais do curso. Neste sentido, a concepção de formação de professores centrada na formação matemática fica camuflada sob a denominação "licenciatura", mesmo em um período no qual a legislação já determinava um currículo mínimo para esta modalidade voltada à formação de professores.

Assim, percebemos que a manutenção desta estrutura na formação de professores não significa que se pretendesse, sempre, formar o bacharel em detrimento do professor. Alguns destes cursos, embora estruturados segundo esse modelo, tiveram ou o objetivo de certificar o professor já em atuação ou o de formar um profissional apto a atuar em diferentes ramos. Alguns, ainda, voltaram-se, ao seu modo e segundo seus interesses, ao professor de Matemática do ensino secundário. Parece-nos que os cursos, por sua própria natureza, embora todos na modalidade licenciatura, foram conduzidos a partir das expectativas que se tinha sobre os futuros alunos.

Nos vários modelos de formação, pudemos perceber que graduar-se é um modo de diferenciar-se. E não são únicos os modos como esta diferenciação se apresenta:

i) o professor graduado diferenciava-se daqueles que tinham apenas o registro para lecionar, provisório, da CADES (já que aos graduados era dada prioridade na escolha de aulas);

ii) como os cursos oferecidos nas instituições públicas eram diurnos, não podiam ser frequentados pelos professores em exercício e como a legislação passou a exigir o diploma de graduação, criaram-se condições favoráveis para a instalação de cursos voltados apenas à certificação: outra diferenciação, portanto, surge entre esses dois grupos de estudantes e suas instituições formadoras;

iii) aos alunos formados por instituições públicas, surgiam mais oportunidades de ingresso nos cursos de pós-graduação, principalmente para aqueles que se tornam professores do ensino superior, uma vez que estas instituições prezavam pela pesquisa e incentivavam a inscrição de seus alunos em cursos de pós-graduação, o mesmo não ocorrendo com aqueles professores que atuavam no ensino particular, que, inclusive, eram contratados apenas para lecionar;

iv) se o título de graduado diferenciava o professor, este não era suficiente para vencer uma outra diferenciação: aquela entre os professores formados no interior e os formados nos "centros de referência" ou nos "centros velhos"; mesmo o diploma de graduação, obtido em qualquer que fosse o centro formador, não podia comparar-se aos títulos de mestre e doutor, sempre muito valorizados, mas principalmente reverenciados num momento em que se criava a possibilidade de formar uma comunidade de pesquisa no Brasil.

Na história da formação de professores no Brasil pode-se perceber a frequência com que são mobilizados os verbos "graduar", "certificar" e "formar", o que deve significar alguma coisa: no mínimo, a flexibilidade que caracteriza a formação docente e, como decorrência, marca a inexistência de uma identidade mais estável dos cursos de licenciatura. Desse modo, a licenciatura como instância de formação profissional do professor não foi assumida efetivamente pela maioria dos cursos, e a formação do professor mostrou-se ora como decorrência de uma formação em nível superior, ora como apêndice do bacharelado, ora como mero resultado de uma série de experiências práticas do cotidiano, não se constituindo, efetivamente, como um ambiente específico para esta formação.

Este movimento, de expansão de cursos de Matemática pelo interior do Estado de São Paulo, que examinamos, revela-nos que, em relação aos cursos de Matemática, não havia uma intenção clara de formar os professores que atuariam no ensino secundário, também ele em fase de expansão naquele período. A especificidade da formação de professores de Matemática, envolto por outros movimentos, não encontrou seu espaço e caracterizou-se como decorrência de outras formações, como uma opção a mais ao formado e/ou como mero atendimento a imposições legais.

Referências bibliográficas

Bernardo, M. V. C. (1989). O surgimento e a trajetória da formação do professor secundário nas universidades estaduais paulistas. In: Bernardo, M. V. C. (Ed.), *Formação de professores*: atualizando o debate (pp. 11-61), São Paulo: EPUC.

Bortoli, A. (2003). *História da Criação do Curso de Matemática na Pontifícia Universidade Católica de Campinas*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil

Castro, A.D. de. (1974). A licenciatura no Brasil. *Revista de História* 100 (II), 627-652.

Cunha, L. A. (2007a). *A Universidade Temporã*: o ensino superior da colônia à Era de Vargas. São Paulo: Editora UNESP.

Cunha, L. A. (2007b). *A Universidade Crítica*: o ensino superior na república populista. São Paulo: Editora UNESP.

Martins-Salandim, M. E. (2012). *A interiorização dos cursos de Matemática no Estado de São Paulo*: um exame da década de 1960. Tese de Doutorado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Mauro, S. (1999). *A História da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro e suas Contribuições para o Movimento de Educação Matemática*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Rossato, R. (1998). *Universidade*: nove séculos de história. Passo Fundo: Ediupf.

Vaidergorn, J. (2003). *As Seis Irmãs*: as FFCL do interior paulista. São Paulo: Cultura Acadêmica Editora.

Ziccardi, L. R. N. (2009). *O Curso de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*: uma história de sua construção/desenvolvimento/legitimação. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, Brasil.

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS SOBRE O CONTEÚDO DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Neura Maria De Rossi Giusti, Jutta Cornelia Reuwsaat Justo
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA Brasil
neurajusti@ibest.com.br, jcrjusto@gmail.com

Resumo. O presente trabalho apresenta parte dos resultados finais de uma pesquisa de mestrado que buscou investigar as ações e contribuições que uma formação continuada em serviço nos anos iniciais do Ensino Fundamental envolvendo os conteúdos de Tratamento da Informação pode oferecer para a prática pedagógica de 18 professores do município de Vacaria/RS. As referências que fundamentaram as ideias discutidas encontram-se nos temas Formação Continuada de Professores e o bloco de conteúdos de Tratamento da Informação para os anos iniciais. Os resultados apontaram que os conhecimentos didáticos e pedagógicos dos professores sobre o conteúdo eram incertos e precários e que a formação permitiu aos professores uma (re)construção e ressignificação dos conhecimentos teóricos e práticos; que o saber dos professores serve como ponto de partida para reflexões das práticas pedagógicas e que o desenvolvimento profissional e de mudança dependerá, em última instância, da pessoa do professor.

Palabras clave formação continuada de professores, tratamento da informação

Abstract This paper presents part of the final results of a Master thesis that investigated the actions and contributions that a continuous formation in the early years of elementary school involving the courses of Treatment of Information can offer to the pedagogical practice of 18 teachers in the municipality of Vacaria / RS. The references that supported the ideas discussed can be found in the themes of Teachers Continuous Formation and block of contents of Treatment of Information for the early years. The results showed that the didactic and pedagogical knowledge from the teachers about the contents were unsure and insecure, and that the formation allowed teachers to a (re)construction and reframing of theoretical and practical knowledge; the teachers knowledge serves as the starting point for considerations of pedagogical practices and the professional development and change will depends ultimately, of the teacher.

Key words: continuing training of teachers, treatment of information

Introdução

A experiência de formação continuada sobre a qual trata este artigo motivou a construção de um projeto de pesquisa para o curso de mestrado do Programa de Pós-Graduação no Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Luterana do Brasil.

A ideia para a realização do projeto surgiu a partir de reflexões realizadas no grupo de estudos do curso de Pró-Letramento em Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, na cidade de Vacaria/RS, vinculado ao Programa de Formação Continuada de Professores da Secretaria de Educação Básica (SEB) do Ministério de Educação (MEC). O programa Pró-Letramento é uma parceria entre o MEC e universidades públicas e comunitárias que integram a Rede Nacional de Formação Continuada.

A pesquisa foi desenvolvida com uma abordagem qualitativa em que utilizou o estudo de caso como modalidade. Para obtenção dos dados que contribuíram para a busca de respostas ao problema da pesquisa, foram adotados quatro instrumentos: questionários, entrevistas, gravações em áudio e análise documental.

Os professores que participam do grupo de estudos desenvolvem atividades presenciais de formação com carga horária de 80 horas e estudos à distância com a carga horária de 40 horas, realizando atividades individuais e em grupos, tendo como discussão principal o saber pedagógico dos professores e os benefícios para a mudança da prática pedagógica.

Neste artigo, buscamos evidenciar os conhecimentos prévios dos professores sobre o conteúdo de Tratamento da Informação no que se refere aos conhecimentos didáticos e das práticas pedagógicas e relacionar diferentes aspectos que contribuíram para a prática docente através da experiência de formação continuada sobre o conteúdo de Tratamento da Informação.

A formação de professores e o conteúdo de tratamento da informação

Diferentes pesquisadores como Lopes, Carvalho e Nacarato (2005), Mandarino (2010),

Batanero, Ottaviani e Truran (2000), Cazorla e Santana (2006) investigam questões relacionadas com a formação continuada de professores e o bloco de conteúdos de Matemática Tratamento da Informação, porém, com enfoques diferentes, constroem mosaicos de pesquisas e reflexões acerca dos temas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam que "É cada vez mais frequente a necessidade de se compreender as informações veiculadas, especialmente pelos meios de comunicação, para tomar decisões e fazer previsões que terão influência não apenas na vida pessoal, como na de toda a comunidade." (Brasil, 1997, p.84).

Saber ler e interpretar dados de maneira organizada e construir representações para construir e resolver problemas que incluem o levantamento de dados e análise de informações tornou-se imprescindível nessas últimas décadas. Essa demanda abarca para o currículo de Matemática a abordagem de elementos da estatística, da combinatória e da probabilidade para a Educação Básica e em especial nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No documento relativo ao conteúdo de Tratamento da Informação, integram estudos relativos a noções de estatística, de probabilidade e de combinatória em que os objetivos evidenciados são:

> Estatística: [...] a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia.
>
> Combinatória: [...] o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.
>
> Probabilidade: [...] a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (Brasil, 1997, p. 40)

Neste sentido, o ensino da matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental é desafiador para o professor, pois os alunos se encontram em uma fase de descobertas sobre os acontecimentos que os cercam. Dependendo como o ensino da Matemática é apresentado, ele pode contribuir para a formação de cidadãos autônomos e capazes de pensar por conta própria. A proposta de trabalhar com o bloco de conteúdo Tratamento da Informação apresenta-se como um desafio para quem aprende e para quem ensina.

Nos dias atuais fica evidente que a formação dos professores sobre o conteúdo de Tratamento da Informação é indispensável, pois já se passaram mais de 10 anos após a implantação do documento Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e,

> Em conformidade com os PCN, noções de probabilidade, estatística e análise combinatória podem ser vistos desde o primeiro ciclo. É claro que a abordagem não deve ter por base as definições dos termos e das fórmulas intrínsecas a essas áreas. A pretensão maior é despertar na criança o espírito crítico de investigação e organização de informações justificando o uso cada vez maior de informações desse tipo em nossa sociedade. (Brasil, 2008, p.117).

A abordagem desses conteúdos nos anos iniciais poderá ser realizada de vários modos. O fascículo do tutor do programa (Brasil, 2008, p.117-118) sugere algumas dessas abordagens em relação à:

- Probabilidade: Será que vai chover hoje?; Se lançarmos uma moeda no ar, dará cara ou coroa?; Se lançarmos um dado, qual face cairá?; Uma urna contém 5 fichas amarelas, 2 pretas e 1 rosa. Qual tem a maior chance de ser sorteada? Por quê?

- ❖ Estatística: A matéria preferida dos alunos; Qual a brincadeira favorita dos alunos?; O programa de TV preferido?
- ❖ Combinatória: De quantas maneiras distintas pode-se agrupar 5 crianças de 2 em 2?; Encontrar todas as maneiras possíveis de agrupar objetos a partir de características diferentes, como cor, forma, etc.

Ao refletir a importância do conteúdo para os anos iniciais do Ensino Fundamental e em que momento esse conteúdo deverá ser trabalhado, podemos discorrer que qualquer conteúdo terá sua importância se estiver relacionado à vida real do aluno. Aprendemos somente aquilo que é significativo. "Ler o mundo é ler as informações que o circundam." (Brasil, 2008, p.23).

Lopes (1998) vem desenvolvendo ao longo dos anos pesquisas e reflexões a cerca do tema Estatística e Probabilidade para o ensino da Matemática na Educação Básica e na Educação Infantil. Lopes explica:

> Acreditamos que é necessário desenvolver uma prática pedagógica na qual sejam propostas situações em que os estudantes realizem atividades, as quais considerem seus contextos e possam observar e construir os eventos possíveis, por meio de experimentação concreta, de coleta e de organização de dados. A aprendizagem da estocástica só complementará a formação dos alunos se for significativa, se considerar situações familiares a eles, que sejam contextualizadas, investigadas e analisadas (Lopes, 2008, p. 58).

Assim sendo, o professor tem papel fundamental ao ensinar esses conteúdos aos alunos. Ao propor nas discussões de formação de professores o tema de Tratamento da Informação, tivemos a oportunidade de ressignificar o olhar sobre os conteúdos propostos na Matriz de Referência da Avaliação para o Ensino Fundamental/anos iniciais (Brasil, 2008, p. 9). Isso implica dizer que o professor deve estar comprometido permanentemente com a construção dos seus conhecimentos, com a escola e com os alunos, na procura de garantir a todos uma educação de qualidade.

Nóvoa (1992) afirma que o desafio do profissional da área escolar é o de manter-se atualizado sobre as novas metodologias de ensino e desenvolver práticas pedagógicas eficientes, a fim de atender as exigências e responsabilidades que a profissão impõe atualmente. Ou seja, a formação de cidadãos críticos para atuarem na sociedade do conhecimento e de constantes transformações.

O autor defende práticas de formação coletivas que possam contribuir para a emancipação profissional e a autonomia dos professores. Enfatiza que é necessário articular a formação dos professores com os projetos da escola e, que as mudanças devem ocorrer não só na pessoa do professor, mas também no seu local de trabalho: "A formação não se faz antes da mudança, faz-se durante, produz-se nesse esforço de inovação e de procura dos melhores percursos para a transformação da escola". (Nóvoa, 1992, p.28).

Justo (2009) também defende a formação continuada de professores em serviço fundamentada na prática reflexiva. Afirma que esta "é uma temática que preocupa os formadores de professores pela responsabilidade que estes possuem perante a sociedade." (2009, p.64). Por isso, cada vez mais, "[...] procuram-se estratégias para formar professores competentes e comprometidos, que saibam articular a teoria e a prática [...]". (2009, p.64).

Discorrendo sobre o tema, Pimenta e Ghedin (2002) apontam que o saber docente não é só formado de práticas. A teoria tem importância fundamental na formação de docentes, pois dota os sujeitos de variados pontos de vista para uma ação contextualizada, oferecendo perspectivas de análise para que os professores compreendam os diferentes contextos que se inserem e de si próprios como profissionais.

Conhecimentos didáticos e pedagógicos dos professores sobre o conteúdo de tratamento da informação

Para a análise dos dados da pesquisa buscamos verificar os conhecimentos matemáticos do professor sobre o conteúdo de Tratamento da Informação e o conhecimento didático sobre como ensinar esse conteúdo. Os professores tiveram a oportunidade de destacar as dificuldades e facilidades encontradas no desenvolvimento do conteúdo, as intervenções em sala de aula, as mudanças de prática pedagógica, as atividades que apresentaram bons resultados e os problemas enfrentados.

A análise de dados permitiu a categorização em que evidenciamos as concepções e benefícios sobre formação continuada que os professores possuíam, seus conhecimentos sobre o conteúdo, bem como a compreensão teórica e prática. Também evidenciamos situações práticas de sala de aula, aspectos importantes e a avaliação sobre o conteúdo.

Entre as questões apontadas pelos professores registramos alguns relatos sobre conhecimento matemáticos sobre o conteúdo de Tratamento da Informação:

- Professora J: Falando em tratamento da informação nos anos iniciais não se tinha um conhecimento significativo, apesar de já ter trabalhado algumas vezes com atividades relacionadas ao assunto. O assunto tratamento da informação chegou em boa hora, para conseguirmos compreender bem todas as informações em que somos envolvidos. Os gráficos e tabelas nos auxiliam a coletar, a organizar, comunicar e interpretar dados utilizados em diversos registros. Esses conhecimentos além de fornecerem os processos de crescimento pessoal, objetivam dotar os alunos de habilidades que os ajudarão no ambiente em que estão inseridos.
- Professora L: Eu acreditava que a probabilidade e a estatística eram conteúdos para grandes estudiosos, hoje, na verdade, eu percebo que eles estão bem presentes em nosso dia a dia e especialmente que eles podem ser bem trabalhados com os alunos de anos iniciais, e que estes conteúdos podem ir de encontro da realidade dos alunos.

  Os relatos das professoras J e L evidenciam que os conhecimentos didáticos e pedagógicos sobre o conteúdo de Tratamento da Informação eram incertos e precários. Isso pode caracterizar a resistência de trabalhar o conteúdo em sala de aula, e sem conhecer profundamente ficaria difícil pensar em formas de ensiná-lo. Outro aspecto que pode ser percebido nos relatos é a falta de informação e experiência para o desenvolvimento do conteúdo, fazendo com que, muitas vezes, o professor prefira não trabalhar com esses temas em suas aulas.

  O relato da professora C contribui neste aspecto:

- Professora C: Basicamente você não tem a noção do conteúdo tratamento da informação. São complicados, difíceis e que dão trabalho, não vou fazer! Porém você percebe durante o curso que se você utiliza dados reais de situações reais e cotidianas tudo fica mais coerente e prático. Você desafia o aluno a observar, analisar, perceber a diferença e a semelhança e agrupar respostas. Exemplo: meninas com cabelo curto; meninos com olhos claros... Você tem várias práticas para questionar e fazê-los concluir sobre os resultados. Hoje considero o conteúdo fácil.

É possível identificar na fala da professora C indícios da deficiência de conhecimentos sobre o conteúdo de Tratamento da Informação. Neste caso, a formação continuada pode ter contribuído para a apropriação do conteúdo no que se refere aos conceitos matemáticos, compreensão e prática educativa.

Evidenciamos se os assuntos discutidos na formação continuada sobre o conteúdo de Tratamento da Informação contribuíram ou não para ampliar e/ou transformar os conhecimentos do professor no que se refere ao processo educativo. Nesse sentido, relatamos algumas falas em que os professores participantes da pesquisa manifestam suas reflexões sobre a compreensão teórica e prática sobre o conteúdo.

- Professora C: Sim. A prática, o fazer, torna a teoria menos alheia à sala de aula. É uma prova de que a nossa prática pedagógica precisa ter uma base teórica e uma fundamentação correta.
- Professor I: Com certeza. Pois além de compreendermos teoricamente, tivemos oportunidade de por em prática com atividades de sala de aula.
- Professora F: Sim. Pois foram abertas novas janelas de como trabalhar os conteúdos que até então eram vistos como complicados de ensinar pela dificuldade que os alunos tinham em compreendê-los.
- Professora O: Sim, pois cada dia, mês e ano que passa, mais aprendo e chego à conclusão que tenho muito a aprender e vivenciar.

Os relatos descritos registram que a formação continuada pode ter contribuído para uma compreensão teórica e prática sobre o conteúdo de Tratamento da Informação. Nos chama a atenção o registro da professora F em que descreve que o conteúdo era visto como "complicado de ensinar pela dificuldade que os alunos tinham em entendê-los". Presumimos que a ausência do conhecimento específico e didático tenha contribuído para a dificuldade de compreensão do conteúdo por parte desses alunos e da própria professora.

Entendemos que o conhecimento específico do conteúdo incide sobre o conhecimento pedagógico. Mas faz-se necessário refletir que a formação não se consolida só por meio da transmissão de conteúdos. Segundo Perrenoud (2002), a formação se dá por meio do envolvimento crítico, da construção de experiências formativas, pela aplicação e estimulação de situações de aprendizagem. Se tomarmos essa postura reflexiva sobre a ação e sobre os saberes teóricos e metodológicos podemos revelar algumas atitudes positivas e seguras frente ao conteúdo a ser desenvolvido. A apropriação do conhecimento específico e do conhecimento pedagógico pode consolidar o que a professora I relata: "[...] compreendermos teoricamente, tivemos oportunidade de pôr em prática com atividades de sala de aula." (Perrenoud, 2002, p.78).

Outro aspecto a ser revelado foram as falas paralelas dos professores. Nos momentos presenciais da formação foi evidenciado o desejo de os professores se apropriarem de informações sobre o conteúdo de Tratamento da Informação, ou seja, o desejo de conhecer o tema. Entre as falas, destacamos o relato das professoras E e I:

- Professora E: [...] para começar a valorizar esses conteúdos, que antes eram vistos superficialmente, e agora percebi que posso trabalhar os conteúdos do currículo envolvendo o tratamento da informação.
- Professora I: [...] o assunto faz parte do nosso dia a dia e pode ser aplicado em diversas situações.

Percebemos nos relatos as lacunas relativas ao conteúdo, o desejo de se apropriar do conhecimento específico e pedagógico. Entretanto, os professores, conscientes de suas limitações, buscam oportunidades de formação que permitam compreender melhor os conteúdos que ensinam, como no caso dos professores envolvidos nesse estudo.

Considerações finais

Entre os resultados finais apontamos que a implantação do bloco de conteúdos de Tratamento da Informação nas aulas de Matemática ainda é um desafio para os professores. As dificuldades na abordagem desse conteúdo ainda são muitas na formação docente e que os conhecimentos didáticos e pedagógicos sobre o conteúdo de Tratamento da Informação eram incertos e precários. A formação possibilitou atitudes mais seguras das práticas pedagógicas sobre o conteúdo, ao mesmo tempo, a reflexão sobre a prática permitiu aos professores a (re)construção e ressignificação dos conhecimentos teóricos e práticos sobre o bloco de conteúdo em estudo. Os aspectos significativos dos conhecimentos matemáticos no que se refere ao bloco de conteúdos em questão foram resultantes do estudo entre os professores num processo colaborativo de reflexões sobre a prática.

A formação continuada sobre o conteúdo de Tratamento da Informação para os anos iniciais do Ensino Fundamental constituiu-se em um momento privilegiado de reflexão coletiva sobre a prática docente e o compartilhamento de experiências a partir de novas atividades e diferentes maneiras de se trabalhar Matemática com os alunos.

Referências bibliográficas

Batanero, C., Ottaviani, G. & Truran, J. (2000). *Investigación en educación estadística: Algunas cuestones prioritárias.* Disponível em: http://www.ugr.es/ ~ Batanero / sergroup.htm

Brasil (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Brasil (2008). *Pró-letramento: Programa de formação continuada de professores dos Anos/Séries Iniciais do Ensino Fundamental: matemática*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Carzola, I. e Santana, E. (2006). *Tratamento da informação para o ensino fundamental e médio*. Itabuna: Via Litterarum.

Justo, J. (2009). *Resolução de problemas matemáticos aditivos: possibilidades da ação docente*. Tese de Doutorado. Porto Alegre: UFRGS.

Lopes, C. (1998). *A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular.* Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP.

Lopes, C. e Carvalho, C. (2005). Literácia Estatística na educação básica. In: Nacarato, A. M.; Lopes C. E. (Org.). *Escritas e leituras na Educação Matemática*. São Paulo: Autêntica.

Lopes, C. (2008). *O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores*, *28* (74), 57-73.

Mandarino, M. (2010). *A Análise de Soluções dos Alunos na Formação de Professores que Ensinam Matemática.* In: Anais 33ª ANPED – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação.

Nóvoa, A. (1992). *Formação de professores e profissão docente. In: Nóvoa, A. (Coord). Os professores e a sua formação*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Perrenoud, P. (2002). *A prática reflexiva no ofício do professor*. Editora Artmed: Porto Alegre.

Pimenta, S. e Ghedin, E. (2002). *Professor Reflexivo no Brasil: gênese e crítica de um conceito.* São Paulo: Cortez.

ENSINO MÉDIO: UM OLHAR SOBRE O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Luísa Silva Andrade, Carmen Teresa Kaiber
Universidade Luterana do Brasil- ULBRA Brasil
luisaandrade1@yahoo.com.br; kaiber@ulbra.br

Resumo. Essa comunicação apresenta uma pesquisa em desenvolvimento que busca investigar o currículo de Matemática das escolas estaduais de Ensino Médio do Estado do Rio Grande do Sul, sob a ótica das representações semióticas como possibilidade teórica, didática e metodológica para o desenvolvimento dos conhecimentos e procedimentos matemáticos que fazem parte desse nível de escolaridade. No presente momento, a investigação de cunho qualitativo está centrada na análise do currículo de Ensino Médio e nos projetos pedagógicos das escolas pertencentes à área de abrangência da pesquisa. Também fazem parte do estudo as avaliações nacionais propostas para os egressos do Ensino Médio. Resultados preliminares apontam a necessidade de se trabalhar com "outras representações", principalmente quando os documentos analisados consideram a resolução de problemas como princípio para a organização das atividades escolares, o que, entende-se, indica uma abertura para o trabalho com semiótica na matemática escolar do Ensino Médio.

Palavras chave: currículo, representações semióticas, ensino médio

Abstract. This short communication introduces research in progress that aims to investigate the math curriculum adopted in high schools in the state of Rio Grande do Sul, Brazil, considering semiotic representations as theoretical, didactic and methodological possibilities in the development of mathematical knowledge and procedures that are integral to this literacy level. At the moment, the qualitative investigation is focused on the analysis of the high school curriculum and pedagogical projects of the schools that are taking part in this research. Nationwide assessments of students who finished high school are also taken into account. The preliminary results point to the need to work with "other representations", especially when the documents analyzed consider problem solving as the starting point to organize school activities, which, as understood, indicates a way to work with semiotics in the teaching of mathematics in high school.

Key words: curriculum, semiotic representations, high school

Introdução

O presente estudo toma como referência resultados obtidos em uma investigação realizada por Andrade (2008) acerca da utilização da teoria dos registros de representação semiótica, em um curso de formação de professores em Matemática.

De acordo com a autora, a pesquisa realizada, no âmbito do desenvolvimento de duas disciplinas do referido curso e a partir dos construtos teóricos de Raymond Duval, apontou dificuldades de trânsito entre distintas formas de representação de objetos matemáticos por parte dos professores em processo de formação que estavam sendo investigados. Permitiu, ainda, identificar que o cotidiano escolar continua fortemente pautado em aulas expositivas/dialogadas. Porém, foi possível perceber a utilização de procedimentos, notadamente com o intuito de diversificar o processo de ensino e aprendizagem, que se referem à análise e discussão de soluções e, particularmente na introdução de um novo conceito, o recurso a diferentes formas de apresentá-lo (noção intuitiva, aplicações, representação gráfica), o que favorece o uso de diferentes formas de representação.

Concordando com Duval (2004), acredita-se que as representações semióticas são essenciais para o processo de elaboração e compreensão do conhecimento matemático e devem ser fonte de exploração a partir de uma estruturação curricular que as considerem. As representações semióticas são destacadas, uma vez que a Matemática se faz compreensível somente por meio de representações, as quais servem de suporte para que exista comunicação no universo matemático. Para compreender um objeto matemático, faz-se necessário considerá-lo através de suas diversas formas de representação, onde a aquisição do conhecimento passa pela coordenação de diferentes registros (Duval, 2004).

Essa visão está presente nos trabalhos desenvolvidos por Raymond Duval (2004) sobre a teoria dos registros de representação semiótica, conforme já apontado, e por Godino (1994, 2006) que, juntamente com seus colaboradores, desenvolveram um modelo teórico denominado "enfoque ontosemiótico da cognição e instrução matemática", que busca articular múltiplas facetas: semióticas, epistemológicas, antropológicas e psicológicas, integrando, assim, o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Nesse contexto, a presente pesquisa busca investigar o currículo de Matemática das escolas estaduais de Ensino Médio do Estado do Rio Grande do Sul sob a ótica das representações semióticas como possibilidade teórica, didática e metodológica para o desenvolvimento dos conhecimentos e procedimentos matemáticos que fazem parte desse nível de escolaridade.

Caracterizado como a etapa final da Educação Básica, o Ensino Médio tem como propósito formar cidadãos que possam aprender a se relacionar com os conhecimentos e, nesse sentido, considera-se necessário refletir sobre como identificar e compreender o conhecimento matemático que é ensinado e aprendido nos ambientes escolares de Ensino Médio.

As representações semióticas e o processo de ensino e aprendizagem da matemática

A Matemática abrange uma diversidade de registros e diferencia-se de outras áreas do conhecimento por trabalhar com objetos abstratos, ou seja, objetos que não são perceptíveis ou observáveis. Logo, o estudante terá que, necessariamente, trabalhar com representações desses objetos. Para Godino e Batanero (1994), a representação não aparece unicamente como um modo de pensar e produzir o saber matemático, pois, a atividade matemática passa a ser resultado da comunicação de suas representações/produções.

No entanto, Duval (2004) afirma que há uma grande diferença entre os níveis de funcionamento cognitivo exigidos pela Matemática e aqueles que são necessários em outros domínios do conhecimento. Também considera que a explicação para essa diferença não está na complexidade de conceitos que são trabalhados em Matemática, pois todo domínio de conhecimento aborda conceitos mais ou menos complexos, mas sim, em duas características: a importância das representações semióticas na Matemática e, em segundo lugar, a grande variedade de representações semióticas utilizadas intrinsecamente pela disciplina. Damm (2002), em consonância com Duval, também afirma que "não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa sem o auxílio de uma representação" (p. 137). A autora justifica sua afirmação, garantindo que a Matemática trabalha com objetos abstratos (conceitos, propriedades, estruturas), que são compreensíveis somente por meio de representações.

Com relação à aprendizagem da Matemática, Duval (2004) pondera que a mesma é constituída por um campo de estudo privilegiado para a análise das atividades cognitivas de pensamento, as quais necessitam, para seu desenvolvimento, da utilização de diversos sistemas de expressão e de representação sobre um determinado objeto que, quando coordenados pelo indivíduo, propiciam a aquisição do objeto matemático em estudo.

De acordo com Godino e Batanero (1994), a aprendizagem da Matemática é concebida como o resultado dos padrões de interação entre os modelos ontológicos e semióticos da cognição que proporcionam critérios para identificar as trajetórias epistêmica e cognitiva. Para contemplar a interação desses modelos, Godino, Contreras e Font (2006), desenvolveram um conjunto de noções teóricas que configuram um enfoque ontosemiótico da cognição e da instrução matemática, devido ao papel que a linguagem exerce nos processos de comunicação e interpretação e na variedade de objetos envolvidos.

Assim, entende-se que, por meio da ontosemiótica, é possível discutir a noção de configuração de objetos e significados como recursos para produzir os conhecimentos matemáticos. A noção de objeto matemático é ampliada, de acordo com os autores, a fim de descrever a atividade matemática, seus produtos resultantes e os processos de comunicação matemática. Dessa forma, para Godino, Contreras e Font (2006), os objetos matemáticos envolvem qualquer entidade ou coisa sobre a qual é possível fazer referência, seja real ou imaginária, desde que intervenha na atividade matemática. Pode-se, então, entender que, conceitos, propriedades, procedimentos e as próprias representações podem ser denominados objetos matemáticos.

Dentro desta perspectiva, para Godino e Batanero (1994), o enfoque ontosemiótico surge de uma ontologia de objetos matemáticos que abordam três características da Matemática: como atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas, como linguagem simbólica e como sistema conceitual logicamente organizado. Dessa forma, diante de uma determinada situação problema definem-se conceitos teóricos de prática, objeto (pessoal e institucional) e significado com a finalidade de tornar evidente o conhecimento matemático.

Assim, considera-se que, por meio destes referenciais, os quais consideram as representações semióticas como essenciais para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, vislumbra-se uma alternativa de trabalho teórico/metodológico para organização de um currículo que propicie o desenvolvimento cognitivo do aluno, uma interação com os objetos matemáticos que conduza a apropriação dos mesmos e a um ensino de Matemática qualificado, que interligue e dê significado aos saberes e ao currículo.

Os caminhos metodológicos que conduzem a investigação

Embasada nos pressupostos da pesquisa qualitativa, esta investigação considera que o objeto em estudo busca, a partir da organização do ambiente escolar, expor como se desenvolve e se concretiza seus anseios, suas perspectivas, o desenvolvimento dos conhecimentos e onde se encontram suas dificuldades, lacunas e como influenciam e constituem esse ambiente.

Chizzotti (1991) diz que, na abordagem qualitativa, há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, uma dependência viva entre o sujeito e o objeto, um vínculo entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito. Bogdan e Biklen (1982 como citado em Ludke & André, 1986, pp. 12-13), indicam características a serem tomadas como básicas, para uma pesquisa qualitativa. Entre essas, salientam-se as que norteiam este estudo:

- a preocupação com o processo - o pesquisador percebe os indivíduos e as situações como um todo, sem preocupar-se em quantificar dados e diminuir as variáveis;
- abordagem indutiva - o pesquisador não possui um modelo pronto onde possa testar previamente as informações coletadas. Ele tenta entender os focos de interesse que existem para fazer categorias de análise, que são predominantemente descritivas.

Dentro da perspectiva metodológica proposta, o estudo será realizado em escolas estaduais de Ensino Médio do Estado do Rio Grande do Sul. No entanto, como o Estado possui 1053 escolas de Ensino Médio, que estão sob a supervisão de trinta Coordenadorias Regionais de

Educação, as quais representam a Secretaria de Educação na área de sua jurisdição, optou-se por conduzir a investigação por regiões.

Geograficamente, o Estado do Rio Grande do Sul está dividido em quatro grandes regiões: a) metropolitana: que envolve, entre outras, as cidades de Porto Alegre, Canoas, Novo Hamburgo, Gravataí e São Leopoldo; b) serra gaúcha: onde se destacam as cidades de Caxias do Sul, Bento Gonçalves, Farroupilha, Flores da Cunha, Gramado e Canela; c) noroeste colonial: onde se localizam as cidades de Passo Fundo, Carazinho, Cruz Alta, Erechim, Ijuí, Panambi, Santo Ângelo, Santa Rosa, Três Passos e Horizontina; d) campanha: onde se apontam as cidades de Pelotas, Rio Grande, Santa Maria, Bagé, São Gabriel, Alegrete, Uruguaiana e Santana do Livramento. Assim, considerando essa divisão, serão investigadas, em cada uma das regiões citadas, cinco escolas estaduais de Ensino Médio (mais representativas populacionalmente) que, além de pertencerem a diferentes coordenadorias, englobam várias cidades, perfazendo um total de vinte escolas pesquisadas.

Nessas escolas, o proposto é investigar os documentos vigentes: Projeto Político Pedagógico, Orientações Curriculares e os docentes que atuam na área de Matemática, no que se refere a: planejamento, metodologia, orientações didáticas, entre outras. Também faz parte do estudo a avaliação nacional proposta para os egressos do Ensino Médio, que se constitui no Exame Nacional de Ensino Médio.

Para contemplar a análise desses dados, serão usadas técnicas de investigação como mecanismos que correspondem a uma tradução dos problemas e/ou objetivos mencionados na pesquisa, tendo em vista as questões que a norteiam. Assim, essa investigação baseia-se na utilização de três formas de coletas de dados: questionário, análise documental e entrevista, todos articulados entre si.

No presente momento, a investigação está centrada na análise do currículo de Ensino Médio e nos Projetos Pedagógicos das escolas na área de abrangência da pesquisa. No entanto, ao imergir neste universo, percebeu-se que esses documentos estão embasados por diretrizes elaboradas pelo Governo Federal, que orientam a educação. Dessa forma, fez-se necessário focar, primeiramente, nos Parâmetros Curriculares Nacionais, buscando indicações e possibilidades para o trabalho com representações semióticas.

Justifica-se a escolha desses documentos oficiais no fato de que os mesmos fazem referência a um processo de discussão para sua formulação, no qual se consideram as experiências de reformas curriculares ocorridas ou em andamento em vários estados e municípios de capitais brasileiras.

Para essa investigação documental, utiliza-se a análise de conteúdo de Bardin (2004), pois é necessário descrever discursos, tratando e interpretando informações contidas nas mensagens.

Algumas marcas já presentes nesta trajetória investigativa de representações semióticas

Uma analise preliminar nos documentos que norteiam a organização e a estruturação curricular das escolas de Ensino Médio permitiu perceber que, de fato, as escolas lançam mão do que preconizam os documentos oficiais para tais elaborações. Entre esses documentos, destacam-se os Parâmetros Curriculares Nacionais para área da Matemática (Brasil, 1998), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Brasil, 2000), PCN+ Ensino Médio (Brasil, 2002) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006).

Especificamente, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Brasil, 2000) são uma referência para a organização de propostas curriculares das secretarias de educação estaduais desde sua elaboração. Neles constam filosofias e indicadores que influenciam a elaboração de propostas específicas de Estados, Municípios e de escolas. Este documento foi ampliado e aprofundado com orientações educacionais complementares, através do documento PCN+ Ensino Médio (Brasil, 2002), trazendo norteadores acerca da construção de currículos que atendam as necessidades locais. Nestes indicadores complementares destaca-se que os currículos: "Não configuram, portanto, um modelo curricular homogêneo e impositivo, que se sobreporia à competência político-executiva dos Estados e Municípios, à diversidade sociocultural das diferentes regiões do País ou à autonomia de professores e equipes pedagógicas" (Brasil, 2002, p. 07).

Entre outros aspectos, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Brasil, 2000) consideram que o estudante deve perceber o conhecimento matemático como sendo um sistema de códigos e regras que o tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permitem modelar a realidade e interpretá-la. Nesse contexto, "a linguagem é considerada como a capacidade humana de articular significados coletivos e compartilhá-los, em sistemas arbitrários de representação, que variam de acordo com as necessidades e experiências da vida em sociedade" (Brasil, 2000, p. 05), devendo a linguagem estar sempre vinculada à produção de sentido.

Já, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006) foram elaboradas com a intenção de desenvolver indicativos que pudessem oferecer alternativas didáticas para a organização do trabalho pedagógico, visando atender às necessidades e às expectativas das escolas e dos professores na estruturação do currículo para o Ensino Médio.

Ao traçar o panorama sobre o ensino da Matemática no Brasil, essas Orientações Curriculares para o Ensino Médio apontam que, em termos escolares, um dos entraves comuns é o fato dos conteúdos matemáticos serem tratados de forma isolada, apresentados exaustivamente num único momento e, quando retomados, geralmente não se estabelecem as devidas conexões. São apresentados apenas como ferramentas para a compreensão de novas noções, e, muitas vezes, como sendo outro objeto matemático e não como outra representação de um mesmo objeto, em muitos casos.

Na compreensão de como se superaria tal situação, aparece o primeiro traço que se relaciona à ideia das representações semióticas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, quando apontam os objetivos para ensino dos conhecimentos matemáticos:

> [...] Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações; expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática; desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo (Brasil, 2000, p. 42).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio também expressam a necessidade de se constituir um olhar para o currículo focado em ações pedagógicas que envolvam todas as áreas, buscando o desenvolvimento de habilidades e competências que possibilitem ao educando apropriar-se de um determinado conhecimento, bem como atuar em sociedade e no mundo do trabalho.

Já na área específica para Matemática - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias - são indicadas como metas pelos PCN+ Ensino Médio (Brasil, 2002), três grandes competências: representação e comunicação; investigação e compreensão e contextualização das Ciências no âmbito sociocultural. Observando os pressupostos apontados por esse documento, compreende-se que a competência de leitura, representação e interpretação é fortemente indicada.

Da mesma forma, as representações se fazem presentes no documento referente ao Ensino Fundamental, quando mencionam que, "de modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos" (Brasil, 1998, pp. 22-23).

Ainda, os Parâmetros Curriculares Nacionais para área da Matemática tratam da concepção do saber matemático que se pretende desenvolver na escola, indicando que, o papel da Matemática será o de instrumentar o aluno (sujeito) a exercer a sua cidadania. Para isso, a resolução de problemas é tomada "como ponto de partida da atividade Matemática" (Brasil, 1998, p. 16).

Assim, pode-se inferir que, tanto os Parâmetros Curriculares Nacionais para área da Matemática quanto do Ensino Médio, não tratam explicitamente de noções teóricas sobre representações semióticas. A representação não aparece como um modo de pensar e produzir o conhecimento matemático. Não há nenhuma referência às operações cognitivas de tratamento e conversão que, segundo Duval (2004), são essenciais para a compreensão em Matemática. Também não é feita alusão ao enfoque ontosemiótico do conhecimento e da instrução matemática proposto por Godino, Contreras e Font (2006).

Contudo, os documentos apresentam elementos que indicam uma abertura para o trabalho com esta noção de representação na Matemática escolar, quando consideram a necessidade de trabalhar com "outras representações" e percebem a atividade matemática como resultado da comunicação de representações/produções; e, principalmente, ao considerar a resolução de problemas como princípio para a organização das atividades escolares. Isso porque, ao resolver um problema, o aluno estará, no mínimo, realizando conexões representativas ao interpretar, operar com os dados e resolver um problema.

Dessa forma, compreende-se que, a análise desses documentos abre espaço para a elaboração de indicadores curriculares para a Matemática baseados em representações semióticas, ampliando a concepção e prática pedagógica, na tentativa de encontrar caminhos que qualifiquem o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Considerações finais

Lopes e Macedo (2002) ressaltam que, as discussões sobre currículo vêm assumindo, nos últimos anos, maior importância, especialmente em função de variadas mudanças que as propostas curriculares oficiais trazem às escolas, fomentando uma multiplicidade de referências ao campo do currículo. Nessa visão, tornar os currículos educacionais maiores e mais pesados já não é uma alternativa possível, nem mesmo adequada.

Essa perspectiva adapta-se aos currículos das áreas específicas do conhecimento, como por exemplo, aos de Matemática, considerando que conceber um currículo de matemática fechado e sem significado ao discente não se adapta à realidade vivenciada hoje. Da mesma forma, não vai ao encontro dos pressupostos preconizados pelos documentos oficiais que norteiam a Educação Básica Brasileira.

Pondera-se, ainda, que as representações semióticas desempenham um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem da matemática, pois possibilitam um intercâmbio entre os sujeitos envolvidos e as atividades cognitivas do pensamento. Assim, entende-se que, essas representações devem ocupar um papel em destaque no trabalho com a Matemática.

No momento, considera-se viável apenas afirmar que esta investigação busca um "lugar" para as representações semióticas nos currículos de Matemática, no sentido de que um objeto matemático seja, de fato, diferenciando de sua representação, possibilitando a compreensão em Matemática, como proposto por Duval (2004). Porém, análises preliminares apontam para a necessidade de se trabalhar com "outras representações", principalmente quando os documentos analisados consideram a resolução de problemas como princípio para a organização das atividades escolares, o que, entende-se, indica uma abertura para o trabalho com semiótica na matemática escolar do Ensino Médio.

Referências bibliográficas

Andrade, L. (2008). *Registros de representação semiótica e a formação de professores em Matemática.* Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil. Canoas.

Bardin, L. (2004). *Análise de Conteúdo* (3a ed.). Lisboa: Edições 70.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: MEC.

______. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília: MEC.

______. (2002). *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais.* Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC.

______. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio.* Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC. Recuperado em 14 maio de 2012 de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf.

Chizzotti, A. (1991). *Pesquisa em Ciência Humana e Sociedade.* São Paulo: Cortez.

Damm, R. F. (2002). Registros de Representação. En S. D. A. Machado (Ed), *Educação Matemática: uma introdução* (pp. 135 – 153). São Paulo: Educ.

D'Amore, B. (2005). *Epistemologia* e *Didática da Matemática.* São Paulo: Escrituras.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Universidad del Valle: PeterLang.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14(3), 325-355.

Godino, J., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de processos de instrucción basado em el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 26(1), 39-88.

Lopes, A., & Macedo, E. (2002). *Currículo: debates contemporâneos.* São Paulo: Cortez.

Ludke, M., & André, M. (1986). *A Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU.

TRABALHO EM GRUPO COLABORATIVO E A MUDANÇA NA PRÁTICA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Luciana Caroline Kilpp Fernandes, Maria Madalena Dullius
Centro Universitário UNIVATES. Brasil
lucianaf@univates.br, madalena@univates.br

Resumo Este trabalho tem por objetivo apresentar um resumo das atividades desenvolvidas e as propostas de intervenção previstas para este ano no projeto "Relação entre a formação inicial e continuada de professores de Matemática da Educação Básica e as competências e habilidades necessárias para um bom desempenho nas provas de Matemática do SAEB, Prova Brasil, PISA, ENEM e ENADE", integrante do Programa Observatório da Educação da CAPES/INEP, bem como detalhar uma das ações do projeto. A proposta está em fase inicial de aplicação e visa compreender as possíveis mudanças ocorridas na prática pedagógica de professores de Matemática após terem integrado um grupo colaborativo para estudar e trocar ideias a respeito do uso de tecnologias nas aulas da referida disciplina. O desenvolvimento da pesquisa ocorre de 2011 a 2014 no Centro Universitário UNIVATES, em Lajeado, Rio Grande do Sul.

Palabras clave: : grupo colaborativo, ferramentas de matemática

Abstract. The purpose of this work is showing a summary of the activities developed and the intervention purposes expected for this year in the project "Relationship between the initial and continuing training of Mathematics teachers of basic education and the skills and abilities that are necessary to have a better perform on mathematics tests. SAEB, Brazil Exam, PISA, ENEM and ENASE", the Observatory Education Program of CAPES/INEP, as well as to detail one of the project's actions. The proposal is in early stage of application and aims to understand the possible changes in the pedagogical practice of math teachers after having composed a collaborative group to study and exchanged ideas about the use of technology in lessons of that discipline. The development of the research occurs from 2011 to 2014 in the University Center Univates, Lajeado, Rio Grande do Sul.

Key words: collaborative group, mathematical tools

Introdução

Os meios de comunicação têm veiculado notícias que apontam que a aprendizagem da Matemática no Rio Grande do Sul e no Brasil, encontra-se em uma situação desconfortável. Atualmente, voltamo-nos para o desafio de melhorar a qualidade dos processos de ensino e de aprendizagem. Melhorar essa condição implica numa investigação detalhada para poder propor ações. É preciso rediscutir qual Matemática ensinar, e como ensiná-la, para possibilitar a compreensão do mundo e uma formação mais adequada para a cidadania.

No âmbito desta problemática, a CAPES/INEP (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior/ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) lançou o Programa Observatório da Educação, com o objetivo de promover estudos e pesquisas buscando melhorar a qualidade da Educação Básica no Brasil. Aprovado neste programa, o projeto "Relação entre a formação inicial e continuada de professores de Matemática da Educação Básica e as competências e habilidades necessárias para um bom desempenho nas provas de Matemática do SAEB, Prova Brasil, PISA, ENEM e ENADE", está sendo desenvolvido no Centro Universitário UNIVATES em Lajeado/RS/Brasil. Ele é vinculado ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática e ao Curso de Licenciatura em Ciências Exatas dessa instituição.

O objetivo do projeto é analisar as habilidades e competências necessárias para um bom desempenho, no âmbito da Matemática, nas avaliações externas do SAEB, Prova Brasil, PISA, ENEM e ENADE, e também verificar se a formação inicial e continuada dos professores contemplam tais habilidades e competências. A partir desses resultados proporemos ações e desenvolveremos atividades de intervenção pedagógica que poderão contribuir para a melhoria dos índices de desempenho nas referidas provas.

O grupo que realiza a pesquisa é constituído por docentes e discentes de vários de ensino. São seis professoras da Educação Básica de seis diferentes municípios do Vale do Taquari, chamadas de Escolas Parceiras, seis graduandos do curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Univates, três mestrandas do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da instituição e dois doutores, também professores no Centro Universitário UNIVATES.

Durante o primeiro ano de atividades da pesquisa os participantes do grupo de trabalho priorizaram conhecer as avaliações externas do SAEB, Prova Brasil, PISA, ENEM e ENADE, em seus mais variados aspectos, incluindo seu histórico, objetivos, órgãos responsáveis pela elaboração e aplicação e alunos participantes. Em seguida, resolvemos algumas das questões disponíveis e, posteriormente, realizamos o estudo das matrizes e documentos de referência de cada sistema avaliativo, para conhecer melhor nosso objeto de estudo. Identificamos, a partir disto, que o foco das provas é a resolução de problemas e, de posse deste dado, iniciamos a elaboração de ações de intervenção que visam investigar este tema, tanto no trabalho com alunos da Educação Básica, quanto com seus professores. Algumas destas ações constituir-se-ão em dissertações de mestrado das bolsistas deste nível de ensino, envolvidas na pesquisa. Tais ideias foram apresentadas e discutidas com os demais professores de Matemática das escolas participantes do projeto, com intuito de aperfeiçoá-las e identificar em qual dos cenários escolares, seu desenvolvimento será mais pertinente.

Uma das propostas está relacionada à utilização, por parte dos alunos, de diferentes estratégias de resolução de problemas, como alternativa ao cálculo formal. Também estamos desenvolvendo uma formação continuada com os professores de Matemática das escolas parceiras, para discutir e experimentar formas de se trabalhar a resolução de problemas com os alunos.

Queremos também realizar um estudo sobre o impacto da nova proposta do estado do Rio Grande do Sul, chamada Ensino Médio Politécnico, em ações interdisciplinares e índices de evasão escolar na 1ª série do Ensino Médio. Outra proposta, desenvolvida pela bolsista autora deste trabalho, avaliará as mudanças ocorridas na prática docente de professores de Matemática após participarem de um grupo colaborativo cujo tema trabalhado será o uso de diferentes ferramentas no ensino da disciplina já mencionada. A última proposta citada será relatada de forma mais detalhada ao longo desse trabalho.

Abordagem teórica

A teoria interacionista de Vygotsky (apud Moreira e Ostermann, 1999) afirma que a aprendizagem ocorre quando nos deparamos com situações que não conseguimos resolver sozinhos, para as quais precisamos da interação com outras pessoas ou conhecimentos para encontrar uma solução. Sob a sua ótica, aquilo que resolvemos com a ajuda de alguém será, de alguma forma, muito mais indicativo do nosso nível de desenvolvimento mental do que aquilo que fazemos sozinhos. Esse nível de desenvolvimento recebeu o nome de zona de desenvolvimento proximal.

Acreditamos que os estudos realizados no grupo colaborativo ocorrerão seguindo a ideia da zona de desenvolvimento proximal. Entendemos que as ferramentas didáticas apresentados pelo, e ao, grupo, não poderão ser "fáceis" no sentido de serem recursos já conhecidos dos integrantes, como também não poderão ser "difíceis" ao ponto de desestimularem os integrantes.

Vygotsky (apud Moreira e Ostermann, 1999) aborda o desenvolvimento cognitivo como um processo de orientação, onde há troca, interação, relação. O objetivo de sua pesquisa não era o final do processo de desenvolvimento, mas sim o processo em si e para isso analisou a participação do sujeito nas atividades sociais. Em sua teoria, as estruturas e as relações sociais levam ao desenvolvimento das funções mentais. Por esse motivo a troca de experiências torna-se tão importate na prática pedagógica dos professores.

Na região do Vale do Taquari, contexto de investigação dessa pesquisa, é comum ouvirmos relatos de alunos dos últimos anos do Ensino Fundamental, e também do Ensino Médio, dizendo: "detesto Matemática". O gosto e o interesse pela disciplina, decrescem proporcionalmente, conforme o estudante avança em seus estudos. Talvez a falta de contextualização e problematização no ensino da disciplina possam contribuir para tal aversão. Em conversas prévias as professoras das escolas, relatam o uso do computador como importante, pois essa ferramenta proporciona o acesso rápido a uma grande quantidade de informações que são apresentadas de forma rápida e dinâmica, que é uma das formas como parece que nossos alunos aprendem ou estão habituados a estudar atualmente.

É possível percebermos que, na tentativa de melhorar a prática pedagógica e consequentemente a aprendizagem, os professores fazem uso do computador que tornou-se fundamental. Para Borba (1999), os aplicativos informáticos dinamizam os conteúdos curriculares e potencializam o processo pedagógico no contexto da Educação Matemática. Ainda de acordo com o autor, o uso de mídias tem suscitado novas questões, sejam elas em relação ao currículo, à experimentação matemática, às possibilidades do surgimento de novos conceitos ou de novas teorias matemáticas. Essa ferramenta proporciona o acesso rápido a uma excessiva quantidade de informações que são apresentadas de forma rápida e dinâmica, que é uma das formas como parece que nossos alunos aprendem ou estão habituados a estudar atualmente. O uso deste recurso, contempla a proposta pedagógica dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), que indicam que:

> O computador, em particular, permite novas e diferentes formas de trabalho, possibilitando a criação de ambientes de aprendizagem em que os alunos possam pesquisar, fazer antecipações e simulações, confirmar idéias prévias, experimentar, criar soluções e construir novas formas de representação mental. (Brasil, 1998, p.141)

As necessidades dos nossos alunos também indicam outras possibilidades e, neste sentido pretendemos explorar o uso de mais recursos que possam auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Neste contexto incluímos jogos de estratégia e alguns específicos para o desenvolvimento de determinados conteúdos de Matemática. De acordo com Starepravo (2006):

> Os jogos colocam os alunos constantemente diante de situações de resolução de problemas e, como essas situações se apresentam de uma forma diferenciada dos "problemas" em geral trabalhados na escola (enunciados com formatação padrão (apresentados por escrito), acabam encorajando o aluno a usar procedimentos pessoais, os quais podem ser posteriormente objetos de discussão com toda a classe. (Starepravo, 2006, p. 42)

Fazendo uso de ferramentas de apoio, os professores estarão tentando atender as diferentes necessidades que os alunos apresentam promover a aprendizagem de Matemática. Dessa forma também farão do ensino um processo diversificado.

Metodologia

A base metodológica da pesquisa será composta por elementos conceituais, instrumentos de coleta de dados e de pesquisa de campo, contemplando a metodologia qualitativa. Para Moreira e Caleffe (2006) a pesquisa qualitativa explora as características dos indivíduos e cenários que não podem ser facilmente descritos numericamente.

A primeira etapa da proposta, já ocorreu e consistiu-se em visitar as seis escolas parceiras da pesquisa para verificar quais são as ferramentas didáticas, virtuais ou não, que estão disponíveis nessas instituições e que podem ser utilizadas no desenvolvimento das aulas de Matemática, bem como jogos que ocasionalmente possibilitem o desenvolvimento de habilidades que auxiliem os alunos na resolução de problemas e situações que envolvam a disciplina em questão. Essa mesma ação aconteceu na Univates com a finalidade de elencar os recursos presentes nesta instituição. Neste centro, visitamos o Laboratório de Matemática e um dos laboratórios de informática para a realização do levantamento de dados.

As informações obtidas na oportunidade dessa primeira visita apontam alguns fatores comuns. Percebemos que, por exemplo, independentemente de sua localização ou número de alunos, as escolas possuem laboratório de informática, vários materiais didáticos específicos ao ensino e aprendizagem de Matemática e outros voltados ao desenvolvimento de estratégias e do raciocínio lógico. Os aspectos que as diferem, estão associados aos dados físicos das instituições, como por exemplo, o número de alunos, suas localizações e os turnos de funcionamento das mesmas. Quanto aos materiais disponíveis na Univates, podemos afirmar que a instituição apresenta um bom acervo de jogos e *softwares* voltados especificamente ao ensino e à aprendizagem de Matemática.

De posse desses dados, retornamos às escolas para apresentarmos os resultados obtidos nessa fase inicial da pesquisa. Nesse encontro com os professores de Matemática de cada escola, conversamos sobre as práticas desenvolvidas pelos docentes para obter um melhor entendimento sobre a forma como, e em que situação, são usadas as ferramentas didáticas disponíveis nas instituições. Para a realização dessa etapa do trabalho utilizamos entrevistas semi-estruturadas, em grupo, que foram gravadas com a finalidade de analisar detalhadamente o discurso dos docentes. As questões que foram abordadas na discussão de grupo são: Q.1-

Observando os recursos disponíveis na sua escola, você poderia apontar quais são aqueles que você usa, quando e para que faz uso deles?, Q. 2- Conte-nos alguma experiência com o uso de ferramentas em uma aula de Matemática., Q. 3- Qual a importância que o professor percebe em usar o recurso? e Q. 4- Quais são as necessidades em relação ao uso?

A entrevista semi-estruturada contempla uma das formas de coleta de dados da pesquisa qualitativa, na qual, de acordo com Moreira e Caleffe (2006) o dado é frequentemente verbal é coletado pela observação, descrição e gravação. Na ocasião dessa segunda visita às escolas, e primeiro encontro com os professores de Matemática das mesmas, pretendemos, além de determinar a forma como eles utilizam as ferramentas disponíveis, também compreender quais são os aspectos que os professores apontam como principal dificuldade quanto ao uso de diferentes tecnologias e recursos didáticos durante suas aulas e também qual é a importância que acreditam haver no uso de ferramentas didáticas no ensino de Matemática. Nesse encontro com os docentes, em suas escolas, além de compreendermos os aspectos já citados, objetivamos convidá-los a participarem de momentos de trocas de experiência.

Esses momentos de troca de experiências serão caracterizados como um trabalho de grupo colaborativo. Em alguns contextos, colaboração é entendida como sinônimo de cooperação. De acordo com Fiorentini e Gama (2008), o termo colaboração pode assumir diferentes significados. No entanto, cooperação e colaboração possuem significados diferentes ao relacioná-los com os objetivos individuais dos membros e o objetivo comum do grupo. Para Fiorentini (2006) diferentemente do que pode ocorrer na cooperação, na colaboração as relações tendem a ser não-hierarquizadas, havendo liderança compartilhada e co-responsabilidade pela condução das ações. Essa liderança compartilhada ocorre quando, por exemplo, o próprio grupo define quem coordena determinada atividade, podendo haver um rodízio entre os membros do grupo, para que todos participem efetivamente do trabalho. Quando se trata de um processo essencialmente colaborativo, todos do grupo "assumem a responsabilidade de cumprir e fazer cumprir os acordos do grupo" (Fiorentini, 2006, p. 58).

Como o trabalho colaborativo envolve diálogo, troca de experiências, liderança e tomada de decisões em conjunto, será muito importante que os professores sejam atuantes no grupo e que haja um objetivo comum sobre o que se pretende alcançar com o trabalho, isto é, qual a melhor forma de chegar a esse resultado. Acreditamos, e desejamos, que integrar o grupo colaborativo propiciará aos professores, momentos de reflexão sobre a sua própria prática. Sob o nosso ponto de vista a participação no grupo permitirá que seja feita uma análise acerca de como as aulas de Matemática estão sendo desenvolvidas, estimulando a troca de experiências e o contato com novas metodologias, que poderão ser incorporadas as já existentes, ou ainda, de uma forma mais ampla, proporcionará a criação de novas metodologias de ensino, geradas pela colaboração entre os membros do grupo.

Temos como ideia inicial a de que neste grupo cada professor integrante inicialmente apresentará aos demais alguma ferramenta tecnológica ou recurso didático da qual faça uso em suas aulas, ou que esteja disponível em sua escola, proporcionando momentos de troca de aprendizagem e experiências docentes. Conforme Fiorentini e Gama (2008), os grupos colaborativos proporcionam a construção conjunta e compartilhamento de aprendizagens que foram construídas através do olhar para si como trajetória, do olhar para o outro e do olhar do outro sobre seu trabalho.

A partir do interesse do grupo buscaremos estudar outras ferramentas a fim de que estas sejam de fato utilizadas pelos integrantes do grupo colaborativo. Sempre que julgarmos necessário seremos auxiliados pelo grupo da pesquisa em Metodologias de Ensino de Ciências Exatas com foco em Tecnologias no Ensino, para explorarmos as potencialidades dos Laboratórios de Matemática e de Informática da Univates. Os encontros ocorrerão em dia a ser definido pelo grupo a fim de contemplar o maior número possível de integrantes. Ao final das atividades do grupo, alcançando o objetivo geral, verificaremos quais mudanças ocorreram na prática docente dos integrantes do grupo colaborativo.

Conclusões

Em todas as entrevistas, com os diferentes grupos de professores, a necessidade pela troca de experiências e ideias sobre o uso de ferramentas no ensino e aprendizagem foi mencionada com ênfase. Os docentes relataram excelentes atividades envolvendo o uso de ferramentas, surpreendendo, em alguns momentos, até os próprios colegas com suas ideias. Também demonstraram, algumas vezes, certo receio em fazer uso dos recursos computacionais disponíveis em suas escolas, por diferentes motivos. Em geral, na opinião dos professores, usar alguma ferramenta de apoio ao ensino e aprendizagem de Matemática facilita a compreensão dos conteúdos trabalhados na disciplina. A forma como isso ocorre, na perspectiva dos docentes, está associada ao fato de que pode-se fazer associações das questões de sala de aula com a situação desenvolvida na oportunidade do uso da ferramenta. Ainda como conclusão de uma breve análise das entrevistas, podemos afirmar que o uso de ferramentas aparece muito associado à introdução de conteúdos que envolvem geometria e são pouquíssimo utilizados para o desenvolvimento da álgebra. Percebemos que os professores utilizam os materiais disponíveis nas escolas de diferentes formas e em diferentes momentos. Alguns afirmam que utilizam as ferramentas para introduzir um determinado conteúdo, outros como forma de promover atividades de revisão e outros como propostas de fechamento para uma unidade estudada.

Como última questão da entrevista, pedimos aos docentes que apontassem algumas dificuldades associadas às ferramentas e o ensino de Matemática, da seguinte maneira "Quais são as necessidades em relação ao uso?". Para essa questão, assim como nas demais, não houve uma única resposta, mas sim, respostas que foram se repetindo nas diferentes escolas. Os professores apontam necessidade de tempo, de troca de experiências, de momentos para formação, para estudar e ouvir o que os colegas estão desenvolvendo em suas aulas. Também citam que precisam de apoio para que os recursos de informática possam ser melhor explorados.

Uma conclusão que podemos fazer a respeito das entrevistas é que os professores apresentam muito interesse por aprender a fazer uso de diferentes ferramentas que colaborem com o ensino e aprendizagem de Matemática. Dessa forma, a realização dos encontros do grupo colaborativo poderá contribuir para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais importantes para professores e alunos.

A constituição do grupo colaborativo não aconteceu formalmente. Contudo, os assuntos que podem vir a compor o estudo deste grupo já estão sendo discutidos entre as professoras da Educação Básica, envolvidas no projeto do observatório. Em nossas discussões percebemos que nossas ideias são convergentes e que, portanto, tratar do uso de ferramentas no ensino da Matemática atenderá algumas necessidades dos futuros integrantes deste grupo.

Acreditamos, e desejamos, que integrar o grupo colaborativo propiciará aos professores, momentos de reflexão sobre a sua própria prática. Sob o nosso ponto de vista a participação no grupo permitirá que seja feita uma análise acerca de como as aulas de Matemática estão sendo desenvolvidas, estimulando a troca de experiências e o contato com novas metodologias, que poderão ser incorporadas as já existentes, ou ainda, de uma forma mais ampla, proporcionará a criação de novas metodologias de ensino, geradas pela colaboração entre os membros do grupo.

As propostas aqui apresentadas serão socializadas e divulgadas a outros professores e escolas que tenham interesse, para que contribuam efetivamente na melhoria da qualidade do ensino de Matemática.

Referências bibliográficas

Borba, M. C. (1999). Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. En: M. A. V. Bicudo (org). *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas* (pp. 285-295). São Paulo: UNESP.

Brasil, Ministério da educação Secretaria de Educação, de Educação Média e Tecnologia (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática* e *suas Tecnologias.* Brasília: SMT/MEC.

Fiorentini, D. (2006). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? En: M.C. Borba, J. L. Araújo (Org.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática.* (pp. 49-78) Belo Horizonte: Autêntica.

Fiorentini, D., & Gama, R. (2008). Identidade de professores iniciantes de matemática que participam de grupos colaborativos. *Revista Horizontes, 26*(2), 31-43.

Moreira, H., & Caleffe, L. G. (2006). *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador*. Rio de Janeiro: DP&A.

Moreira, M. A., Ostermann, F.(1999). *Teorias Construtivistas* (pp. 21-32). Porto Alegre:IFUFRGS.

DIVISÃO: UM ESTUDO DO CONHECIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE NAS SÉRIES INICIAIS

Edvonete Souza de Alencar , Angélica da Fontoura Garcia Silva
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
edvonete.s.alencar@hotmail.com , angelicafontoura@gmail.com

Resumo:. Este artigo relata dados parciais de uma pesquisa qualitativa de Mestrado, realizada em uma Escola Pública do Estado de São Paulo que obteve excelente índice em uma avaliação externa. O objetivo desta pesquisa foi identificar o Conhecimento Profissional Docente de professores que ensinam Matemática que lecionam para os anos iniciais. Apoiamo-nos em estudos que versam sobre a formação de professores como em estudos que investigam questões didáticas sobre o objeto matemático: Divisão e Multiplicação. Quanto ao primeiro enfoque, nos apoiamos em estudos que discutem o Conhecimento Profissional Docente – Shulman e Ball. Em relação às questões didáticas associadas ao objeto matemático, utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Realizamos entrevistas com os professores e gestores, além de questionários, recolhimento de atividades e observações de aula. Percebemos necessidade de reflexão sobre a temática e mudança na formação continuada.

Palavras chave: **:** divisão, series iniciais e formação de professores

Abstract. This article reports partial data from the Master qualitative research, held in a public school in the State of São Paulo which got excellent content on an external evaluation government department. The objective of this research was to identify the Professional Teaching Knowledge of teachers who teach mathematics in Elementary School. We support on studies regarding teacher formation as well as didactic questions investigative studies about the mathematical subject: Multiplication and Division. On the first approach we support on studies that discuss the Professional Teaching Knowledge - Shulman and Ball. Regarding didactic questions associated with mathematical subject, it was used the Vergnaud Conceptual Fields Theory. We conducted interviews with teachers and administrators, as well as questionnaires, gathering activities and classroom observations. We realized the necessity of reflection about the theme and changing on continuous formation application.

Key words: division, elementary school e teachers training

Introdução

Este artigo relata dados parciais de uma pesquisa qualitativa de Mestrado em Educação Matemática na linha de pesquisa de Formação de Professores. O estudo foi realizado em uma Escola Pública do Estado de São Paulo que saiu de um índice desfavorável, para no ano posterior obter um excelente desempenho em uma avaliação externa na disciplina de Matemática. A escola no ano de 2008 obteve índice de 3,1788 e em 2009 índice de 7,4580, em uma escala de 0 a 10.

O objetivo desta pesquisa foi identificar o Conhecimento Profissional Docente de professores que ensinam Matemática que lecionam para os anos iniciais.

Fundamentação teórica

Quanto aos conhecimentos necessários ao professor, destacamos as pesquisas desenvolvidas por Shulman (1986) e Ball (2003). Essa base teórica foi escolhida tanto para a elaboração dos instrumentos de coleta de dados como para servir como parâmetros para a análise dos resultados obtidos ao longo de nosso estudo.

Dessa forma nos ativemos às três vertentes estabelecidas por Shulman: conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular.

Tais categorias foram refinadas por Ball (2003) em: conhecimento do conteúdo (comum/especializado); conhecimento do conteúdo e dos estudantes e finalmente, conhecimento do conteúdo e do ensino. A autora indica o que o professor precisa saber para ensinar matemática com eficiência. Seus estudos apresentama relação entre o conhecimento matemático do professor e o exercício da docência, indicando como o aluno pode refletir sobre as situações matemáticas e as resolve, e como o professor compreende essas produções e as diferentes resoluções.

Quanto ao objeto matemático, nos apoiamos em Vergnaud (1990) que relata sobre a Teoria dos Campos Conceituais. Este autor nos permite refletir sobre as concepções que os alunos trazem para a escola. No tocante a teoria dos Campos Conceituais Vergnaud defende que as competências dos alunos são desenvolvidas ao longo do tempo, sendo necessário para as vivencias de diferentes situações.

Apoia-se nos estudos de Piaget para definir esquemas o autor afirma:

> [...] a organização invariante da conduta para uma classe de situações dadas. É nos esquemas onde se deve investigar os conhecimentos em ação do sujeito, e decidir, os elementos cognitivos que permitam a ação do sujeito ser operatória (Vergnaud, 1990, p.134)

Para o autor os esquemas são compostos por objetivos, os invariantes operatórios e as antecipações.

Metodologia

Nosso estudo possui enfoque de pesquisa qualitativa e interpretativa conforme as características definidas por Bogdan e Biklen (1994, pp. 47-50) a pesquisa apresentou caráter descritivo e utilizamos o ambiente natural como fonte direta de dados- a escola, procuramos também nos interessar mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos e estabelecer estratégias e procedimentos que nos permitisse tomar em consideração as experiências do ponto de vista dos nossos sujeitos. Para coleta de dados utilizamos um questionário no qual foram apresentadas algumas questões do Campo Multiplicativo que apresentaram um alto grau de dificuldade uma avaliação externa realizada no estado de São Paulo- Brasil, no ano de 2009 por 5 professores do 5º ano . Escolhemos, para esta comunicação apresentar a análise da situação que envolve a resolução do algoritmo da divisão.

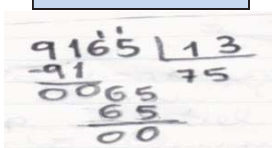
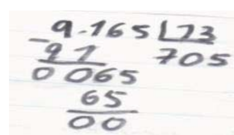
A questão apresentada procurava verificar a habilidade de cálculo de uma divisão de um número na ordem de unidade de milhar por uma dezena e obteve índice 38% de acertos, o que nos parece preocupante uma vez que é uma temática comumente trabalhada no contexto escolar.

H11. Calcular o resultado de uma multiplicação ou divisão de números naturais.

O resultado da divisão 9165 ÷ 13 é

A) Explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a resolução da operação indicada.

B) Dê sugestões para a aprendizagem nos diferentes casos: qual seria sua intervenção

ALUNO 1	ALUNO 2
	

Quadro 1 Questão de divisão com resoluções de alunos fictícios . (Alencar, 2012, p. 99)

Análise

Em uma primeira análise observamos que Aluno 1 realiza a divisão e a subtração do resto de modo correto, porém comete erro quando não realiza a divisão das seis dezenas pelo divisor treze e dessa forma, não representa o algoritmo zero na ordem da dezena do quociente. Verificamos que o aluno sabe o procedimento da divisão, mas não estabelece relação com o Sistema de Numeração Decimal (SND).

O aluno 2 acerta a questão e realiza a divisão utilizando-se de um procedimento correto, demonstrando dominar um algoritmo da divisão.

Observamos que os depoimentos dos professores indicaram que:

Observa-se que o 1.º aluno não conseguiu absorver o conteúdo – os passos da divisão [referindo-se ao algoritmo da divisão] onde na divisão há necessidade de colocar um 0 no resultado – produto [referindo-se ao quociente] (Professor A).

O segundo entendeu processo da divisão usando o recurso de que quando você abaixa 2 números deve-se lançar o zero no quociente(Professor B).

O aluno 1 não tem conhecimento da tabuada e se perdeu na subtração (Professor C).

O aluno teve um raciocínio lógico ele soube a tabuada [referindo-se ao aluno 1].

O aluno soube fazer a conta com a tabuada ele também fez a prova real o método para fazer a conta exata [referindo-se ao aluno 2] (Professor D).

Se encontra no processo, porém falta compreender que quando se desce um número e não dá para dividir, acrescenta-se o zero no quociente [referindo-se ao aluno 1].

Compreendeu o processo [referindo-se ao aluno2] (Professor E).

Em análise dos depoimentos, identificamos que os professores apesar de demonstrarem domínio o algoritmo da divisão, indicam dificuldade em justificar o ocorrido do ponto de vista da matemática. Isso nos remete aos estudos de Shulman (1986) e de Ball (2003) ao observarem que a ausência de domínio de um determinado conteúdo específico implicaria igualmente na falta de conhecimentos para o seu ensino.

Consideramos que o protocolo apresentado indica um exemplo de atividade bastante explorado pelos professores brasileiros, todavia não observamos indícios de uma compreensão das ideias matemáticas envolvidas no algoritmo.

Nos depoimentos analisados fica evidenciado que esses professores justificam seus relatos pelo uso das regras que compõe o algoritmo. Há também uma predisposição a supervalorização do uso da tabuada. No estudo de Nürnberg (2008) identificamos esta relação que os professores estabelecem com a necessidade do domínio da tabuada para o ensino das operações da multiplicação e divisão. Fato este observado no depoimento dos professores.

Vale ressaltar ainda que tal lacuna no conhecimento profissional docente pode ser mais um entrave uma vez que dificultaria também a análise do esquema de resolução dos alunos (Vergnaud, 1990).

Em complemento a análise acima, os professores sugeriram como possíveis intervenções:

A intervenção seria no campo da observação. O aluno deverá observar se necessário fazer a prova real onde ele verá de imediato o valor [...] chegará a conclusão que é necessário arrumar – desde que ele tenha absorvido todos os passos da divisão (Professor A).

Quanto ao 1.º, ele está caminhando para o entendimento do processo, usou corretamente o recurso da subtração, abaixou os dois números precisos (6 e 5), porém faltou lançar o zero no quociente. Sugestão – utilizar como recurso a prova real, possibilitando assim que o próprio aluno venha a perceber que o resultado foi diferente, fazendo com que ele retorne a operação inicial (Professor B).

Na divisão o aluno poderá fazer a prova real (Professor C).

Mostraria que sem saber a tabuada e prova real sem fazer ele não chegaria no resultado.

Fazendo o processo de número por número caminhando para resposta correta de uma divisão (Professor D).

Usar a prova real como recurso, de forma que o aluno, ao verificar a diferença dos resultados, reflita e busque alternativas para solucionar o problema.

O professor poderá dar dicas (Professor E).

Observamos, pelos relatos dos professores, que quatro deles, utilizariam a prova real, pois acreditam ser uma maneira de o aluno comprovar que o resultado está correto, usando-se a operação inversa.

Nesse sentido, acreditamos assim como Ball (2003) que propostas como essa, em que se apresenta ao professor situações similares as encontradas em sala de aula podem favorecer a reflexão sobre o *conhecimento do conteúdo especializado.*Para a autora esse conhecimento é distinto do especializado necessário ao matemático, uma vez que tem estreita ligação com a prática docente. A autora afirma ainda que tal conhecimento pressupõe mais do que perceber os erros dos estudantes, mas também analisar e identificar prováveis causas e identificar quais seriam as melhores formas de intervenção: esclarecimentos precisos e respostas convincentes, que possibilitassem ajudar os alunos a enfrentar e superar suas dificuldades.

Considerações finais

Em conclusão, verificamos que as respostas ao questionário indicaram que os professores analisados resolvem a divisão utilizando-se do procedimento indicado, mas nem sempre parece que o compreendem. Identificamos também a dificuldade dos sujeitos aqui analisado para justificar os procedimentos dos estudantes. Observamos haver lacunas nos conhecimentos dos professores, em relação à compreensão das ideias matemáticas envolvidas na resolução por meio do algoritmo.

Destacamos a necessidade de reflexão e mudanças nos processos de formação- tanto inicial como continuada, de forma a favorecer a discussão e reflexão sobre as ideias matemáticas envolvidas nos processos de cálculo. Nesse sentido, observamos a necessidade de um enfoque mais amplo do conceito de divisão.

Referências bibliográficas

Alencar, E. S. (2012). *Conhecimento Profissional Docente de professores do 5º ano de uma escola com bom desempenho em Matemática : o caso das Estruturas Multiplicativas.* Dissertação de Mestrado,São Paulo: UNIBAN- SP.

Ball, D. L. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowlegde for teaching. In: B. S. Davis, *Procedings of the 2002 Anual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton: AB:CMESG/GCEDM.

Nürnberg, J. (2008). *Tabuada : significados e sentidos produzidos pelos professores das séries iniciais do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado,Criciúma: UNESC SC.

São Paulo (Estado), S. D. (2009). *Relatório do Saresp.* Governo do Estado de São Paulo, São Paulo.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand : Knowledge Growth in Teaching. *Education Researcher, 15*(2), 4-14.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10* (2-3), 133-170

REFLEXÕES SOBRE O PROCESSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: UMA PARCERIA ENTRE UNIVERSIDADE E ESCOLA NO CONTEXTO DAS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E DA COMUNICAÇÃO

Vanessa Cerignoni Benites; Rosana Giaretta Sguerra Miskulin
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP Brasil
vanessa.benites@gmail.com, misk@rc.unesp.br

Resumo. O trabalho aqui apresentado é uma pesquisa de mestrado que está sendo desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP/Rio Claro, com o apoio financeiro da Capes. A presente pesquisa objetiva investigar dimensões teórico-metodológicas que podem emergir de processos de formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática em uma parceria entre Universidade e escola, no contexto das Tecnologias da Informação e da Comunicação. Esta parceria acontece por meio do "Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID", que envolve licenciandos em Matemática, professores da Rede Estadual de Ensino e pesquisadores da Universidade, vinculados à UNESP, campus Rio Claro.

Palavras chave: : formação de professores de matemática, comunidade de prática

Abstract. The work presented here is a master's degree research that is being developed at the Graduate Program in Mathematics Education, UNESP/Rio Claro, with financial support from CAPES. This research aims to investigate theoretical and methodological dimensions that can emerge from processes of initial and continuing education of the teachers who teach mathematics in a partnership between school and university, in the context of Information Technologies and Communication. This partnership happens through the "Institutional Scholarship Program Initiation to Teaching - ISPIT" which involves undergraduates in mathematics, teachers of State Schools and University researchers, linked to UNESP/Rio Claro.

Key words: : teacher education of mathematics, community of practice.

Introdução

O presente trabalho tem como foco o processo de formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática no contexto de um Projeto de parceria entre Universidade e escola. Entendemos por formação inicial aquela que acontece durante o período de Graduação, com o aprendizado de metodologias de ensino, e o início de uma prática pedagógica, durante os primeiros anos de docência. Este processo é marcado por tensões, desafios, insegurança, e descobertas, tanto profissional como pessoal. A esse respeito vemos que para "avançar na qualidade do ensino-aprendizagem e nos resultados escolares dos alunos há de se conhecer e repensar princípios necessários para o desenvolvimento profissional" (Gama, 2009, p. 102)

Esta preocupação também acontece com professores já experientes, pois muitas são as novidades no âmbito da Educação, as pesquisas são crescentes, e estas facilmente se sobrepõem sobre àquelas vivenciadas no período de graduação do professor.

Neste sentido, buscamos o contexto de formação que se estabelece na parceria entre a Universidade e Escola, para que este ir-e-vir constante da formação docente seja vivido em um laço estreito entre teoria e prática. Muitas são as iniciativas e ações das políticas públicas para a formação de professores, assim, encontramos no subprojeto "Licenciatura em Matemática" do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID um caminho a ser percorrido, afinal o licenciando terá oportunidade de familiarizar-se com o ambiente escolar.

O conhecimento profissional é o produto de um longo processo de adaptação da escola, e requer uma imersão na cultura da escola, na qual o futuro docente se socializa dentro da instituição, aceitando a cultura profissional herdada e os papéis profissionais correspondentes. Este processo será ainda mais eficaz mediante práticas colaborativas entre os participantes, pois "o isolamento impede o estímulo à criatividade, à busca por alternativas originais, e impede a colaboração e enriquecimento mútuo dos docentes" (Perez Gomez, 2001, p.169)

Desta forma, observamos uma proximidade com nosso contexto de pesquisa, pois este projeto será desenvolvido em um ambiente de colaboração marcado pelo trabalho coletivo, pois percebemos que no contexto escolar ainda permeia uma cultura individualizada, na qual cada professor exerce sua função sem dialogar ou discutir ideias com os colegas de trabalho. Num ambiente colaborativo é possível refletir sobre o trabalho que está sendo desenvolvido, e ampliar o desenvolvimento profissional,

> [...] a colaboração transporta o desenvolvimento profissional dos docentes mais além dos reduzidos e locais horizontes do individualismo e isolamento, da dependência dos especialistas externos, para um cenário em que os docentes podem aprender uns dos outros ao compartilhar suas experiências, temores, propósitos e pensamentos. (Perez Gomez, 2001, p. 171)

Então, propomos a reflexão compartilhada de professores que ensinam Matemática, constituindo-se em uma comunidade de prática, termo definido por Wenger (2001) como sendo práticas realizadas em um grupo, por pessoas engajadas em um processo conjunto de aprendizagem, na qual os indivíduos participantes possuem os mesmos objetivos, mas partem de experiências e expectativas individuais, e junto com a interação dos membros vão construindo o conhecimento. Assim, uma comunidade de prática requer envolvimento comprometido dos participantes, num processo de interação na qual aprender é um ato social, e por isso as pessoas devem buscar juntas formas de solucionar ou entender um determinado problema em ações compartilhadas.

A vivência de situações colaborativas poderá acontecer em um ambiente virtual de interatividade, na qual esta proporciona o envolvimento dos participantes na atividade de interesse, de forma a confrontar os pontos de vistas diferentes, ampliando as perspectivas de atuação docente. Encontramos uma experiência com comunidades de prática, na qual os autores afirmam que

> [...] foi possível constituir uma comunidade de prática em um ambiente computacional no processo de formação continuada de professores de Matemática, fornecendo subsídios para a compreensão de como as histórias compartilhadas pelos professores, por meio de repertórios comuns, criados na comunidade, possibilitaram a re-significação da prática docente, concebida como um processo social e interativo, no qual as pessoas interagem, fazem coisas juntas, negociam novos significados e aprendem uns com os outros, por meio dos processos de participação e de reificação. (Miskulin, Silva & Rosa, 2006, p. 10)

Sendo assim, aliar o universo virtual, inserido no Projeto PIBID formado por uma comunidade de colaboração, a qual chamaremos de comunidade de prática, acaba sendo um diferencial na formação de professores e objeto desta pesquisa.

Formação de Professores e o Pibid

O processo de Formação de Professores tem sido foco de diversas pesquisas, e sob diferentes perspectivas, inclusive na Educação Matemática. Este processo de formação inicial e continuada do professor tem suas origens desde sua atuação na escola enquanto alunos, e se intensifica no período de Graduação. Porém, não termina com a colação de grau, esta acontece durante todo o exercício da docência, em um processo de ir e vir, que nunca se acaba, e que está em constante (trans) formação, pois "a formação inicial não deve gerar produtos acabados, mas, sim, deve ser encarada como a primeira fase de um longo processo de desenvolvimento profissional" (Perez, 2005, p.261).

A formação e seu contexto possibilitam refletir sobre a prática pedagógica, aprendizagem, saberes docentes, entre outros elementos. Neste contínuo Cochran-Smith e Lytle (1999), apontam três concepções de aprendizagem dos professores. A primeira concepção é a de "conhecimento para a prática", na qual entende-se que o professor utilizará informações de pesquisadores, e teorias reconhecidas como formais, para melhorar sua prática profissional. Já a segunda concepção, "conhecimento na prática", envolve a ideia do conhecimento gerado a partir da prática profissional e de suas reflexões sobre ela. E a terceira, e última, concepção é a de "conhecimento da prática" que alia o conhecimento teórico e prático, e concebe que o conhecimento que os professores precisam para ensinar bem é gerado quando eles "consideram suas próprias salas de aula locais propícios à uma investigação intencional, ao mesmo tempo em que consideram o conhecimento e a teoria produzidos por outros, como uma fonte gerador de distintas interpretações e questionamentos". (Cochran-Smith & Lytle, 1999, p. 250)

Esta concepção de "conhecimento da prática" é interessante, pois de acordo com as autoras, este conhecimento não é construído individualmente, mas em consonância com outras pessoas, evidenciando o papel da comunicação e da troca de experiências compartilhadas, em comunidades de investigação. Desta forma, para propiciar o conhecimento da prática, aponta-se o projeto PIBID como um possível caminho a ser seguido para professores e futuros professores em seus processos de formação. Assim, a participação dos licenciandos neste projeto pode possibilitar o estreitamento entre a teoria e a prática, na medida em que alia o contexto da universidade e a escola. As disciplinas frequentadas pelos futuros professores poderão adquirir sentido quando inseridos no ambiente escolar. Este pode ser um ponto chave no processo de formação inicial, afinal, pesquisadores como Fiorentini, Nacarato, Ferreira, Lopes, Freitas e Miskulin (2002) apontam para a dificuldade em articular a teoria e a prática, a formação específica e pedagógica, e a formação e a realidade escolar. Sendo assim, compreende-se que este tipo de ação minimiza a insegurança vivido pelos professores recém formados.

O estudo apresentado por Rocha e Fiorentini (2009) com professores iniciantes aponta os desafios encontrados no início da carreira e a forma com estes foram enfrentados. Concluem o estudo com uma reflexão que devemos ter quanto a formação inicial e continuada de professores. Estes autores indicam um "repensar para a formação inicial numa perspectiva de formação contínua, tendo como contextos de formação práticas colaborativas e investigativas desenvolvidas conjuntamente com professores experientes". (Rocha & Fiorentini, 2009, p.144) E ainda, nos remete a uma valorização dos programas de formação continuada e apelam às políticas públicas que apoiem e estimulem as instituições formadoras a desenvolver iniciativas dessa natureza. As políticas de formação continuada de professores devem caminhar na direção do modelo construtivo indicado por Nóvoa (1992 como citado em Fiorentini, 2008, p. 60). Este modelo valoriza a reflexão interativa e contextualizada sobre as práticas pedagógicas, estreita as relações entre teoria e prática, implica em uma parceria entre formadores e formandos que pode acontecer colaborativamente.

O PIBID foi criado com a finalidade de valorizar o magistério e apoiar estudantes de licenciatura plena, das instituições públicas. Esta parceria objetiva aprimorar a formação docente, com a inserção do licenciando no cotidiano escolar, e contribuir para elevação do padrão de qualidade da educação básica. Os futuros professores terão oportunidade de participação em experiências metodológicas, tecnológicas e práticas docentes de caráter inovador e interdisciplinar e que busquem a superação de problemas identificados no processo de ensino-aprendizagem.

Este programa tem como subprojeto a Licenciatura em Matemática, que integra os cursos de Licenciatura em Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da Unesp campus Rio Claro e do campus Guaratinguetá na Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá (FEG), e professores da rede estadual de ensino de ambas as cidades. Este subprojeto de matemática ainda conta com a colaboração do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Matemática Universitária do IGCE e dos Laboratórios de Ensino do IGCE e da FEG para estreitar as relações entre graduandos e pós-graduandos.

Para atingir o objetivo do programa, professores das escolas parceiras, alunos da licenciatura e pesquisadores da universidade, constituem um grupo para organizar ações de articulação entre a teoria e a prática em Educação Matemática no âmbito da sala de aula do ensino fundamental ou médio. A meta é fazer um mapeamento para identificar os principais problemas do ensino e aprendizagem em matemática, para assim, delinear estratégias de ação, envolvendo o uso de novas metodologias e práticas no ensino de matemática. Entre as ações e resultados pretendidos aos licenciandos, encontra-se a participação em eventos científicos de Educação Matemática, o acompanhamento dos licenciandos às aulas e às reuniões semanais da escola. Para os professores das escolas parceiras, as vantagens se concentram no fortalecimento para o enfrentamento dos problemas do ensino, e na possibilidade do uso de metodologias inovadoras, contribuindo para sua formação continuada.

Objetivo e metodologia de pesquisa

A presente pesquisa objetiva investigar, compreender e evidenciar dimensões teórico-metodológicas que podem emergir de processos de formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática em uma parceria entre Universidade e escola. Compreender as dimensões do processo de formação significa explicitar como as possíveis inter-relações entre professores e futuros professores estão acontecendo nesta comunidade de colaboração, a qual abordaremos como momentos de uma comunidade de aprendizagem/prática.

Assim, para atingir o objetivo da pesquisa usaremos os princípios da pesquisa qualitativa, na qual esta tem o ambiente natural como sua fonte direta dos dados e o pesquisador como o seu principal instrumento, e consequentemente oferece oportunidade de um contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo estudada. E ainda,

> (...) a pesquisa qualitativa é uma atividade que localiza o observador no mundo. Consistem em um conjunto de práticas materiais e interpretativas que dão

> visibilidade ao mundo. (...) a pesquisa qualitativa envolve uma abordagem naturalista, interpretativa, para mundo, o que significa que seus pesquisadores estudam as coisas em seus cenários naturais, tentando entender, ou interpretar, os fenômenos em termos dos significados que as pessoas a eles conferem. (Denzin & Lincoln, 2006, p. 17)

Este tipo de pesquisa, segundo Goldenberg (2004), apresenta o contexto em uma série de representações, através de dados qualitativos, que não são padronizáveis, e por isso cabe ao pesquisador flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los.

Na busca em investigar o objetivo da pesquisa, e entender melhor o contexto, serão utilizado os seguintes procedimentos metodológicos: a Análise Documental, a Entrevista e a Observação. Complementando esta ideia,

> A pesquisa qualitativa envolve o estudo do uso e a coleta de uma variedade de materiais empíricos – estudo de caso; experiência pessoal; introspecção; história de vida; entrevista; artefatos; textos e produções culturais; textos observacionais, históricos, interativos e visuais – que descrevem momentos e significados rotineiros e problemáticos na vida dos indivíduos (Denzin & Lincoln, 2006, p. 17)

Durante esta investigação, estamos fazendo o acompanhamento das reuniões do grupo, por meio de encontros presenciais, realizados quinzenalmente na universidade, na qual observa-se o tipo de interação, e os momentos em que é possível verificar indícios de uma comunidade de prática. Além disso, busca-se um maior contato com o grupo a fim de delinear o perfil dos participantes.

Além disso, realizamos um curso de extensão semipresencial, no primeiro semestre deste ano, com os participantes do PIBID, que teve por finalidade produzir uma aprendizagem colaborativa que fortalecesse os laços entre licenciandos, e também a possibilidade de reflexão da prática docente frente as tecnologias da informação e comunicação.

Para tanto, optou-se pelo *software* de Geometria Espacial Cabri 3D, e pelo desenvolvimento de atividades de natureza exploratório-investigativa, para possibilitar a colaboração entre os participantes. Utilizamos a plataforma virtual Moodle, considerada como um ambiente virtual de aprendizagem, que foi criado com a finalidade de proporcionar aprendizagem colaborativa em comunidades.

Foram nove encontros presenciais, na qual abordamos as ferramentas do *software* e também discutíamos textos e publicações divididos em quatro temas como: as possibilidades da utilização das TIC no processo de ensino e aprendizagem de Matemática; a formação de professores no contexto das tecnologias; a utilização da plataforma Moodle e; experiências com o uso do *software* Cabri 3D. Estes quatro eixos de discussão foram importantes para compor uma base teórica para o desenvolvimento do Curso.

As atividades que foram trabalhadas, durante os encontros presenciais, versam sobre conteúdos da Geometria Espacial: Ponto, Reta, Plano, Sólidos Geométricos, Poliedros de Platão, Poliedros Arquimedianos, Vetores, Princípio de Cavalieri, Sólidos Não Poliédricos, e Transformações Geométricas. Algumas delas trabalhamos de maneira exploratória-investigativa, na qual entendemos como atividades ou problemas nos quais os alunos envolvem-se em processo de investigação de soluções, buscando estratégias próprias, experimentando conjecturas e hipóteses a respeito das diversas partes que compõem o problema, discutindo-as com seus colegas e reelaborando-as no contexto prático no qual se insere o problema. (Miskulin, Escher & Silva, 2007). Outras vezes deixávamos os próprios participantes irem construindo os passos da resolução, sem nenhuma interferência. Essa dinâmica foi importante pois determinadas tarefas exigiam um pouco mais de esclarecimento em sua resolução e na medida em que surgiam dúvidas íamos auxiliando e fornecendo dicas para a conclusão das mesmas. Nesta perspectiva, cada integrante teve o compromisso com o trabalho a ser desenvolvido, e a figura do professor tornou-se essencial como um mediador deste processo, orientando os alunos em atividades de aprendizagem significativa, e não apenas transmitindo informações.

Assim, alguns aspectos didático-pedagógicos foram salientados, tais como o papel do professor como orientador do processo, e mediador da interação, a maneira da exposição dos conteúdos, e também a possibilidade de atitudes criativas e versáteis envolvendo os participantes.

Após a conclusão do curso realizamos uma Entrevista com os participantes do PIBID, a fim de verificar o perfil de cada participante, assim como, a concepção de cada um perante a participação e desenvolvimento das atividades neste grupo.

O próximo passo será o processo de análise e a interpretação dos dados constituídos, na qual se dará através da análise de conteúdo, cujo objetivo é a busca do sentido ou dos sentidos de um texto. Segundo Bardin (1979), para que o processo de análise de conteúdo seja bem sucedido, recomenda-se que o pesquisador faça reiteradas leituras dos registros escritos (textos), de modo que evidencie os elementos comuns e divergentes subjacentes aos discursos, os quais permitem estabelecer relações e promover compreensões acerca do objeto de estudo.

Considerações finais

Até o presente momento não realizamos uma análise profunda dos dados coletados, então traremos aqui alguns apontamentos e reflexões que pudemos obter através da nossa participação com o grupo, pela experiência vivenciada no curso de extensão e também pela Entrevista realizada com os participantes.

Pudemos perceber alguns indícios de colaboração entre o grupo, não em todos os momentos, afinal, colaboração significa trabalhar junto, e não necessariamente isto era realizado de maneira voluntária. Porém, os próprios alunos, durante as Entrevistas apontaram alguns momentos de colaboração, na qual acreditamos como sendo a possibilidade de aprendizagem compartilhada. Esta é uma dimensão importante no processo de formação de professores, como foi apontado por alguns autores em nosso referencial teórico.

Durante o curso de extensão, os licenciandos refletiram sobre a prática docente frente as tecnologias, visto que durante as discussões se mostraram críticos a esta proposta metodológica, e também produziram trabalhos interessantes como conclusão do curso. Isto é fruto também da participação desses alunos em atividades de intervenção/formação através do PIBID, na qual temos conhecimento por acompanhar o grupo.

Assim, esperamos que esta pesquisa possa evidenciar outros aspectos implícitos nos processos formativos, embora seja um processo complexo, pretendendo apontar possibilidades e limitações da formação de professores de Matemática imersos neste projeto.

Referências bibliográficas

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*(Reto, L. A. & Pinheiro, A., Trads.). São Paulo: Edições 70, Livraria Martins Fontes (Obra original publicada em 1977).

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. (1999) Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education 24*, 251-307.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2006). *O Planejamento da Pesquisa Qualitativa: teorias e abordagens.* Porto Alegre: Artmed.

Fiorentini, D. (2008) A Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil. *Bolema, 29*, 43-70.

Fiorentini, D., Nacarato, A. M., Ferreira, A. C., Lopes, C. S., Freitas, M. T. M., & Miskulin, R. G. S. (2002) Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira. *Educação em Revista, 36*, 137-160.

Gama, R. P. (2009) Professores iniciantes e o desenvolvimento profissional: um olhar sobre pesquisas acadêmicas brasileiras. In D. Fiorentini; R. C. Grando & R. G. S. Miskulin (Orgs.). *Práticas de Formação e de Pesquisa de Professores que Ensinam Matemática* (pp. 101-123). Campinas: Mercado de Letras.

Goldenberg, M. (2004). *A Arte de Pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record.

Miskulin, R.G.S., Escher, M.A., & Silva, C.R.M. (2007). A Prática Docente do Professor de Matemática no Contexto das TICs: uma experiência com a utilização do MAPLE em Cálculo Diferencial. *Revista de Educação Matemática 10*, 29-37.

Miskulin, R. G. S., Silva, M. R. C., & Rosa, M. (2006, outubro). Comunidades de Prática Baseadas na Tecnologia Como Histórias Compartilhadas na Formação Continuada de Professores de Matemática. Anais da *VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul*, Águas de Lindóia, SP, Brasil.

Perez, G. (2005). Prática reflexiva do professor de matemática. In M. A. V. Bicudo & M. C. Borba (Orgs.), *Educação Matemática: pesquisa em movimento* (pp. 250-263). São Paulo: Cortez.

Perez Gomez, A. I. (2001). *A Cultura Escolar na sociedade Neoliberal*. Porto Alegre: Artmed.

Rocha, L. P., & Fiorentini, D. (2009). Percepções e reflexões de professores de matemática em início de carreira sobre seu desenvolvimento profissional. In D. Fiorentini; R. C. Grando & R. G. S. Miskulin (Orgs.), *Práticas de Formação e de Pesquisa de Professores que Ensinam Matemática* (pp. 125-146). Campinas: Mercado de Letras.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica: Aprendizaje, Significado* e *Identidad –Cognición* e *Desarrollo Humano*. Barcelona: Paidós.

PENSAMIENTO GEOMÉTRICO DE ESTUDIANTES DE PROFESORADO

Marco Antonio Rosales Riady, Leonora Díaz Moreno
Universidad del Bío-Bío Chile
Universidad de Los Lagos
mrosales@ubiobio.cl, leonora.diaz@ulagos.cl

Resumen. Se reportan evidencias de Pensamiento Geométrico en estudiantes de Pedagogía en Educación Básica, con particular atención a las construcciones geométricas en el plano con y sin el uso de un procesador geométrico. Se aplicó dos reactivos a estudiantes, elegidos al azar, que cursan una segunda asignatura semestral de geometría. Ante cada actividad describieron los procedimientos utilizados, pudiendo usar en cada situación la mano alzada, instrumentos para la construcción y/o un procesador geométrico. Sus producciones dan evidencia de que no todos efectúan una construcción geométrica y que presentan dificultades para argumentar los procedimientos utilizados. Privilegiaron la demostración por sobre la verificación.

Palabras clave: formación docente, pensamiento geométrico

Abstract. Evidence of geometric thinking of students of Pedagogy in Elementary Education is reported, with a focus on geometric construction in the plane with and without the use of a geometry processor. Two reagents were applied to students, chosen randomly enrolled in a second semester course in Euclidean geometry. Before each activity they described the used procedures, being able in each procedure to: freehand drawing, use tools for the construction and/or a geometry processor. Their productions are evidence that not all of them execute a geometric construction, and have difficulties to argue the used procedures. Demonstration was privileged over verification.

Key words: teacher training, geometrical thinking

Introducción

El estudio preliminar, que informa este artículo, explora conocimientos disciplinares en lo conceptual y procedimental en el Eje Geometría, en particular, en lo referido a problemas de construcción con uso de un procesador geométrico.

La literatura muestra la necesidad de que los estudiantes den significados a las entidades geométricas con base en su construcción (Fritzler, 1997, citado en López, 2004) a la vez que releva el aporte didáctico del uso de un software geométrico dinámico con ese propósito, visión asumida hoy en día a nivel ministerial y de la institución formadora.

Molina, Rosas y Castañeda (2011) sostienen que con acceso a nuevas tecnologías, los estudiantes exploran la geometría y estudian objetos y propiedades geométricas, para redescubrir teoremas por ellos mismos, generar ideas matemáticas, sus propias estrategias y formas de resolución de un problema.

Este estudio preliminar forma parte de una investigación mayor, la que busca responder a la pregunta ¿Cómo evoluciona el pensamiento geométrico en estudiantes que cursan una carrera de Pedagogía en Educación Básica? cuya respuesta aporte antecedentes a quienes toman decisiones en la formación docente respecto a las competencias que debe desarrollar un futuro profesor de matemática para la educación básica, en el área de la geometría.

Antecedentes

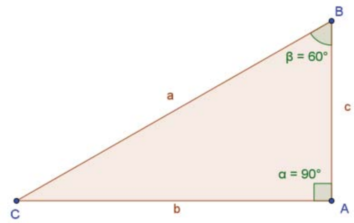
El Ministerio de Educación, en julio de 2011, hace públicos los Estándares Orientadores para Egresados de Pedagogía en Educación Básica, tanto pedagógicos como disciplinarios. En particular, en la descripción e indicadores que se señalan para los estándares pedagógicos, para el caso del Estándar 4, se requiere de manifestaciones tecnológicas. A su vez, por tratarse de estándares transversales, estas manifestaciones debiesen plasmarse también al seno de la asignatura de matemáticas. Específicamente el Estándar 4 señala que el futuro profesor o profesora: "Sabe cómo diseñar e implementar estrategias de enseñanza aprendizaje, adecuadas a los objetivos de aprendizaje y de acuerdo al contexto" (MINEDUC, 2011, p. 30). En su descripción se menciona: "Incorpora recursos TICS en los diseños, en la implementación curricular y en la evaluación educativa, seleccionando los que son apropiados para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje" (MINEDUC, 2011, p. 30). Tres indicadores para este estándar se vinculan a las TICS, en particular, uno de ellos está directamente relacionado con el desarrollo de habilidades superiores: "Selecciona TIC que potencian el desarrollo de la enseñanza en cada área curricular fundamentándose en criterios como su aporte al aprendizaje y al desarrollo de habilidades de orden superior (cognitivas, de comunicación, de expresión y de creación)" (MINEDUC, 2011, p.31). Por tanto si desde el punto de vista pedagógico el futuro profesor tiene que dar cuenta de este estándar, satisfaciendo indicadores relacionados a las TICS.

Por su parte en cada uno de los Ejes disciplinarios de matemáticas, hay al menos un estándar que habla del uso de las TICS. En particular, para el caso del Eje de Geometría, el cual consta de cinco estándares, dos de ellos refieren al uso de tecnología, a saber, en el Estándar 7, el indicador 10 señala: "incorpora TICS como medio de apoyo para desarrollar en los estudiantes la capacidad de visualizar" (MINEDUC, 2011, p. 96). En tanto que, en el Estándar 10, el indicador 13 señala: "utiliza TICS para conducir actividades de indagación en el tema de áreas y perímetros" (MINEDUC, 2011, p. 102).

Cabe destacar además que, en los estándares 8 y 11 de este Eje, entre sus indicadores se exige el uso de regla y compás (MINEDUC, 2011, p. 97, p. 103). En este caso, tomando en consideración las exigencias tecnológicas anteriormente mencionadas en el marco de los estándares pedagógicos y disciplinarios, los estudiantes debiesen contar también como vía alternativa, entre sus estrategias de acción, el uso de recursos tecnológicos para construcciones geométricas.

Problemática

Se ha podido constatar en clases en asignaturas de geometría que los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío, presentan diversas dificultades ante situaciones problemáticas simples que les son propuestas.

Así por ejemplo: Dado el triángulo ABC rectángulo y el ángulo ABC con una amplitud de 60° ¿Qué conclusiones se pueden extraer sobre los elementos del triángulo ABC?	 Figura 1

Al abordar la situación propuesta, algunos estudiantes pudieron fácilmente determinar la medida del tercer ángulo (30°), pero no fueron capaces de determinar algunas propiedades relacionadas con la medida de los lados, a partir de la representación figural del enunciado.

En efecto, si bien conocen el Teorema de Pitágoras, no reconocieron propiedades que relacionen las medidas de los catetos con la medida de la hipotenusa, en este caso que el cateto adyacente al ángulo de 60° mide la mitad de la hipotenusa. Así, podría determinar la medida del tercer lado en función del otro cateto o hipotenusa. Lo que deja en evidencia el nivel deficitario de la geometría escolar que ellos poseen. No descubrieron propiedades inherentes a la situación en estudio. En algunos casos presentaron dificultades para elaborar códigos pertinentes; no analizaron la información proporcionada; no argumentaron, no fundamentaron y no explicaron sus afirmaciones. Con el objeto de pesquisar estas dificultades, el estudio preliminar que se reporta se planteó el propósito que sigue.

Propósito del estúdio

Explorar facetas del pensamiento geométrico, con particular atención a las construcciones geométricas en el plano con y sin el uso de un procesador geométrico. Más específicamente, caracterizar conocimientos disciplinares y habilidades que los estudiantes movilizan en torno a, por una parte, propiedades de la circunferencia y sus elementos y, por otra, propiedades de triángulo y circunferencia cuando resuelven problemas de construcción geométrica.

Marco teórico conceptual

El marco referencial del presente reporte está centrado en el modelo teórico propuesto por Duval (1998) y desarrollado por otros investigadores como Torregrosa y Quesada (2007), y también por Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Estos últimos autores manifiestan que el aprendizaje de la geometría es un proceso complejo y directamente relacionado con el desarrollo cognitivo. Duval (1998) establece que para la operación cognitiva de la aprehensión, existen tres tipos aprehensiones. La aprehensión perceptiva se refiere a la identificación simple de una configuración, es un proceso básicamente intuitivo. La aprehensión discursiva es la actividad cognitiva que produce una asociación de la configuración con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Esta asociación es bidireccional, de lo visual a lo discursivo, y viceversa. La aprehensión operativa consiste en la modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Ésta puede ser un cambio figural en la que se le añaden o quitan elementos a la configuración original, generándose nuevas subconfiguraciones. También, la aprehensión operativa puede ser de reconfiguración en la cual hay una manipulación como piezas de un puzle. Se concuerda con Castiblanco et al. (2005) en que: (1) los procesos de argumentación pueden influir sobre la percepción visual, (2) la justificación o argumentación puede ser informal y formal, generalmente de carácter deductivo, (3) el trabajo complementario entre los procesos de visualización y los procesos de justificación puede favorecer una organización deductiva, y (4) al establecer conexiones entre los procesos de justificación y los procesos de visualización, el razonamiento deductivo adquiere sentido para los alumnos como posibilidad de explicación, de comprensión y de argumentación.

Diseño metodológico

Respecto a la muestra

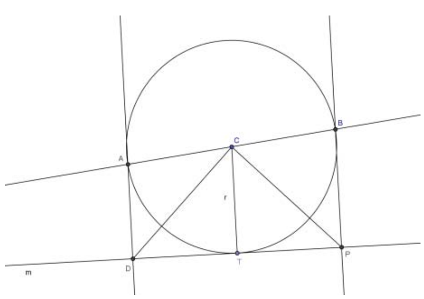
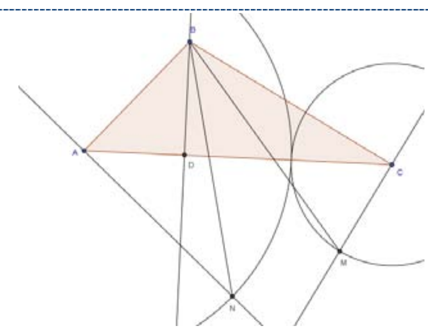
Cuatro estudiantes fueron elegidos al azar. Debían ya tener cursada una segunda asignatura semestral de geometría euclidiana. Así ya habrían abordado la temática de construcciones geométricas por medio de regla y compás y, también, mediante el procesador geométrico GeoGebra u otro. De los cuatro estudiantes, circunstancialmente por el azar, tres de ellos tenían estudios universitarios previos inconclusos, con 2, 4 y 5 semestres de Pedagogía en Educación Matemática, carrera conducente a formar profesores de educación media, cuya malla curricular considera dos asignaturas de geometría euclidiana, Geometría Plana y Geometría del Espacio, y que se imparten en el segundo y tercer semestre respectivamente. Por aspectos curriculares de formación y de los destinatarios a los que están dirigidas ambas carreras, educación básica y educación media, las correspondientes asignaturas no son convalidables entre los planes de estudio, por lo que todos los estudiantes debían cursar todas las asignaturas del eje temático de Geometría. El cuarto estudiante no tenía estudios previos de matemática.

Respecto a las condiciones de aplicación

Se fijó de común acuerdo el día y la hora para la aplicación del instrumento. Posteriormente, al entregarles la hoja que presenta los reactivos, se indicó el objetivo de la experiencia. Se acordó que el desarrollo de cada reactivo sería llevado a cabo de manera completamente individual, sin comunicación entre ellos, y sin supervisión del profesor. Además, se les indicó que podían tardar todo el tiempo que estimasen necesario, y que tenían la libertad de utilizar todos los recursos que ellos consideraran pertinentes, sin darle opciones concretas, como por ejemplo dibujar a mano alzada, usar regla y compás, o bien, un procesador geométrico. Disponían de las salas de estudio y laboratorios informáticos con que cuenta la carrera.

Respecto al diseño de los reactivos

Tal como se expresó anteriormente, el diseño de los reactivos consideró que las construcciones geométricas fueran abordables por parte de los estudiantes, bajo las condiciones de mano alzada, o con instrumentos para la construcción, o bien con un procesador geométrico.

El **primer reactivo** señala:	El **segundo reactivo** señala:
Se traza una recta tangente m por un punto T a una circunferencia de diámetro AB con centro en C. Sobre la recta m se localizan los puntos D y P de modo que los segmentos AD y BP son respectivamente perpendiculares a m. Probar que CD = CP.	*En un triángulo ABC está trazada la altura BD, AN es la perpendicular a AB y CM la perpendicular a BC; además |AN|=|DC|, |CM| = |AD|. Mostrar que M y N son equidistantes del vértice B.*
 Figura 2	 Figura 3

Respecto al análisis de las respuestas

El análisis se efectuó por reactivos, elaborando descripciones de lo puesto en escena por los estudiantes, a partir de sus producciones escritas y, posteriormente, efectuando un análisis por construcción y demostración. Luego, se profundizó el análisis prestando especial atención a la movilización de conocimientos previos, las estrategias de resolución y habilidades puestas en juego por los estudiantes.

Resultados de la experimentación

Descripción de lo puesto en escena por los estudiantes vía sus producciones escritas

Reactivo 1

Estudiante 1: Muestra una representación a lápiz y papel. Realizó una transferencia adecuada de anclaje, del discursivo al visual, dando cuenta de la consigna. Utiliza una aprehensión discursiva apropiada al utilizar las hipótesis dadas en la prueba. Usa el Teorema de Thales pero no lo menciona. Concluye correctamente la prueba de la tesis.

Estudiante 2: Aplicó una aprehensión discursiva, cambiando del anclaje discursivo al visual a mano alzada representando la consigna. Utiliza una asignación de letras griegas para dar medidas de ángulos, pero no da cuenta del uso de ellas. Deja en evidencia un razonamiento discursivo natural de dos párrafos para dar cuenta de la prueba de la tesis.

Estudiante 3: El proceso de aprehensión discursiva con anclaje visual aplicado por la estudiante no da cuenta de la perpendicularidad. Evidencia un razonamiento como proceso discursivo teórico, realizando una demostración de la consigna con uso del Teorema de Thales, con un apoyo visual incorrecto, ya que el triángulo PCD no es isósceles, según la configuración que determinó.

Estudiante 4: Muestra una configuración construida a mano alzada que da cuenta de la consigna. Presenta un razonamiento discursivo teórico adecuado, donde aplica el Teorema de Thales. Concluye correctamente la prueba solicitada.

Reactivo 2

Estudiante 1: Presenta la configuración asociada a la consigna a mano alzada. Se evidencia un razonamiento discursivo teórico inconcluso, ya que escribe solo las hipótesis, pero no demuestra.

Estudiante 2: Muestra una configuración construida solo con regla e inconclusa. No aborda el problema propuesto.

Estudiante 3: La configuración utilizada da cuenta del enunciado, por lo que se manifiesta una aprehensión discursiva con anclaje hacia lo visual. Inicia la demostración de la propiedad escribiendo las hipótesis correspondientes. Construye las alturas del triángulo MBN, por lo que manifiesta aprehensión operativa de cambio figural, y también, al utilizar la transversal del vértice B con un punto auxiliar E', punto medio.

Afirma que por propiedad de los triángulos isósceles se tiene la igualdad, de esta manera se evidencia la aprehensión discursiva. Aparece un razonamiento discursivo natural al hacer mención al GeoGebra y el teorema de Apolonio de los nueve puntos. No hace mención como éstos justifican el enunciado.

Estudiante 4: Muestra una configuración hecha con el GeoGebra. Se evidencia una aprehensión discursiva adecuada al dar cuenta de la consigna. Al demostrar, utiliza apropiadamente las hipótesis dadas, usa el Teorema de Apolonio de los nueve puntos, y concluye correctamente la demostración, quedando en evidencia la interacción de las aprehensiones discursiva y operativa, y el razonamiento discursivo natural aplicado por el estudiante.

Análisis por construcción y demostración

Reactivo 1

Por construcción. En el primer reactivo, todos los estudiantes dan cuenta de una construcción a lápiz en papel, por lo que se evidencia en cada uno de ellos una aprehensión discursiva con cambio de anclaje, de lo discursivo a lo visual. Tres de ellos usan regla y compás, pero no trazan utilizando construcciones básicas (trazado de perpendiculares), en este caso, no se manifiesta la aprehensión operativa figural. Tres de los cuatro estudiantes hacen una construcción muy cercana a la que se podía hacer con un procesador geométrico. Uno de los estudiantes lo hace a mano alzada. Otro, a pesar de usar instrumentos, su construcción no da cuenta de la perpendicularidad, quedando su representación distorsionada.

Por demostración. Todos presentan una demostración basada en el Teorema de Thales, en congruencia de triángulos y relaciones métricas en una circunferencia. Los procesos discursivos desarrollados por ellos, particularmente son los discursivos natural y teórico.

Reactivo 2

Por construcción. Dos estudiantes muestran una construcción mixta, las configuraciones están hechas a mano alzada y con instrumentos. Uno inicia la construcción, pero no la concluye. Sólo el último de los estudiantes utiliza el procesador geométrico. Éste último, construye el teorema de los nueve puntos de Apolonio para mostrar tangencia y congruencia de triángulos evidenciando la aplicación de las aprehensiones discursiva y operativa, y el razonamiento discursivo natural.

Análisis con foco en los conocimientos previos, las estrategias de resolución y las habilidades puestas en juego por los estudiantes

Respecto al primer reactivo, todos los contenidos que se esperaba fuesen puestos en escena, efectivamente aparecieron. Los estudiantes en su conjunto privilegiaron la demostración por sobre la verificación. Sin embargo, no argumentaron sus procedimientos.

Respecto al segundo reactivo, se pudo evidenciar la presencia de los siguientes estadios: un estudiante no abordó el problema; otro sólo representó la consigna; el tercero lo enfrentó representando la consigna y argumentando el uso del procesador geométrico y el Teorema de Apolonio de los Nueve Puntos, pero no menciona cómo éstos justifican el enunciado; por último, el cuarto hace la construcción con el procesador geométrico, y demuestra la consigna usando el Teorema de Apolonio de los Nueve Puntos, aunque muestra sólo ocho de los nueve puntos.

Los estudiantes evidenciaron la movilización de conocimientos previos en torno a las propiedades de la circunferencia y sus elementos, así como a las propiedades de triángulo y circunferencia, en distintos grados de profundidad, y acorde a las experiencias adquiridas en estudios previos en Pedagogía en Educación Matemática. Esto no se manifiesta en el caso del estudiante que ingresó directamente a la carrera de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad. Esto demuestra la necesidad de desarrollar el pensamiento geométrico progresivamente.

Respecto a las habilidades de comunicación escrita, los estudiantes no explicaron paso a paso el procedimiento de construcción geométrica, sino de manera sintética. No detallan su desarrollo. No explican su raciocinio ni dan cuenta del proceso que llevaron a cabo.

Respecto a las habilidades para dibujar con instrumentos como la regla y el compás, se ocupan con inexactitud, demostrando, en algunos casos, que no tienen claridad sobre algunos conceptos, como por ejemplo el estudiante 3, que evidencia un desconocimiento del concepto de perpendicularidad.

Sólo uno de los estudiantes participantes, quien tiene estudios previos de Arquitectura, demostró tener habilidades para usar un procesador geométrico. Lo usó para desarrollar sólo el reactivo 2. Esto evidencia habilidades primarias de los estudiantes en el uso del procesador geométrico, razón que se justifica con el hecho de que su primer acercamiento al uso de un procesador geométrico como GeoGebra, fue en la última asignatura.

En los estudiantes participantes, el uso del procesador no fue privilegiado, sólo uno de los estudiantes lo utilizó. Respecto a las habilidades para visualizar conceptos y propiedades geométricas se evidencia que uno de los estudiantes expone construcciones geométricas inconsistentes con los conceptos involucrados en dicha construcción, a saber, perpendicularidad, paralelismo y congruencia de triángulos (Figura 3).

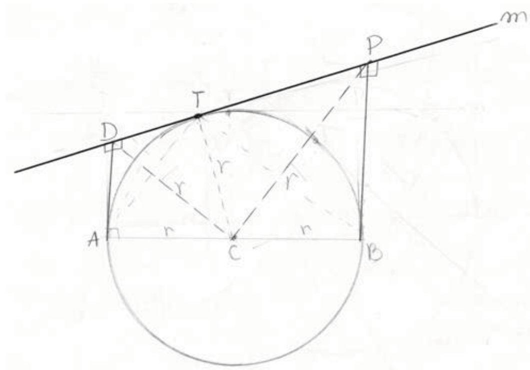


Figura 3

Respecto a la validación de las respuestas

A raíz de la falta de argumentación de los procedimientos utilizados por los estudiantes, y como una forma de validar las respuestas, se procedió a hacer una entrevista grabada en la que cada uno de ellos expresaba en forma oral las razones de sus desarrollos. Quedó en evidencia que las experiencias previas condicionaban tales respuestas. El estudiante que no tenía estudios en Pedagogía en Educación Matemática, manifiesta que su experiencia sólo es la obtenida en la carrera. Los otros tres estudiantes, con estudios previos de Pedagogía en Educación Matemática, expresan que "la representación gráfica no es tan importante, sino que lo importante es la demostración". Por otro lado, al preguntarles que les sería más fácil para ellos, el probar o el demostrar, indicaron que probar, pues "probar se asocia más a algo aritmético" y que "demostrar requiere más que una justificación", y que "lo tecnológico permite visualizar", pero "el trasfondo va más en la demostración". A pesar de que en ambos reactivos se les solicita probar, optaron por demostrar. Sus producciones relegaron el uso de la tecnología a un segundo plano. Hechos concurrentes con la experiencia en sus estudios anteriores.

A modo de cierre

De la aplicación de ambos reactivos, los estudiantes presentan dificultades para argumentar los procedimientos utilizados, privilegiando la demostración por sobre la verificación, y sin priorizar el uso del procesador geométrico.La exploración reportada evidencia la necesidad de fortalecer la generación de aprendizajes geométricos con diseños didácticos que recurren a las TICS.

Los resultados globales de la aplicación del instrumento dejaron en evidencia que no todos efectúan una construcción geométrica, independiente del recurso didáctico con el que se lleven a cabo. Ello podría deberse más que a un tema de recursos, al poco uso y magra comprensión de aspectos conceptuales y procedimentales. En cuanto a los procesos cognitivos, los estudiantes muestran diferentes niveles de razonamiento, privilegiando el proceso discursivo natural, si bien comunican describiendo o argumentando sus procedimientos no adecuadamente.

Referências bibliográficas

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Recuperado el 3 de octubre de 2011 de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.*), Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

López, A. (2004). Geometría dinámica en un curso remedial. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 480–485. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

MINEDUC. (2011). *Estándares Orientadores para Egresados de Pedagogía en Educación Básica*. Ministerio de Educación. Santiago de Chile.

Molina, G., Rosas, A. y Castañeda, A. (2011).Construcción geométrica dinámica y modelo de Van Hiele. Una experiencia de formación de profesores. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 1150–1158. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.

EL ESTADO DE LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DE AULA. UNA MUESTRA POR CONVENIENCIA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN BOGOTÁ

Diana Piedra Moreno, Erika Hernández Hernández, Jorge Rodríguez Bejarano
Universidad Distrital Francisco José de Caldas Colombia
dppiedram@correo.udistrital.edu.co, erika-col@hotmail.com, yoburo@yahoo.com

Resumen. Es lugar común en la comunidad de educadores matemáticos, que las prácticas profesionales de los docentes para efectos de cualificar los procesos de formación en educación matemática, particular y especialmente los escolares, han de incorporar investigación de las propias prácticas. En este documento, se reporta un estudio en el marco del Proyecto de Investigación "formación en y hacia la investigación para profesores de matemáticas en ejercicio", en el cual se describe el estado de una muestra de docentes de Bogotá, seleccionada por conveniencia, respecto de la incorporación de reflexionar sobre sus propias prácticas de aula. El estudio que se reporta servirá a futuro al proyecto de investigación para seleccionar un grupo de maestros que develarían sus necesidades de formación en investigación, las cuales se considerarían en un plan de formación.

Palabras clave: práctica docente, reflexión, formación en investigación

Abstract. It is common for mathematics educators, that their professional practices, for purposes of qualifying training processes in mathematics education, particularly and especially, schoolchildren, have to incorporate research into their own practices. In this paper, we report a study under the research project "training on and for research for practicing mathematics teachers", which describes the status of a sample of teachers in Bogotá, selected by desirability, in respect of applying critical thinking on their own classroom practices. This study will serve to a future research project where a selected group of teachers will reveal their research training needs, and ultimately will be considered in a training plan.

Key words: teaching practice, reflection, research training

Introducción

El Proyecto de Investigación "Formación en y hacia la investigación para profesores de matemáticas en ejercicio" (Colciencias, contrato 484), en la búsqueda de encontrar información verificable y confiable sobre las necesidades de formación en investigación que se podrían tener en el universo de profesores de matemáticas en el ámbito escolar bogotano (Educación básica y media), decidió realizar una búsqueda documental de reportes de trabajos de docentes en ese universo, que tuvieran alguna vinculación con sus prácticas mismas, para ubicar desde la información obtenida, los nombres y localización de algunos docentes a los que se les pudiera observar en su propia práctica, para establecer tales necesidades, bajo el supuesto que el escribir es manifestación de su interés por sus prácticas.

Dicha búsqueda obedece a que el objetivo último en tal investigación es concebir un programa de formación en investigación para esa "Bogotá docente", y al hecho de que concebirlo con base en las necesidades de quienes efectivamente se interesan por hacer de su práctica objeto de estudio, permite establecer con mayor pertinencia y adecuación un tal programa, independientemente de la conciencia que tengan, de la profundidad y rigor intelectuales que alcancen estos profesores y del tipo de publicación en la que aparezcan sus reflexiones.

Se construyó entonces una base de datos de 523 trabajos, que además de ubicar nombres de profesores, se constituyó en un ejercicio rico en conclusiones respecto del estado de la reflexión sobre la propia práctica en profesores de matemáticas en Bogotá, pues el estudio basado en el ciclo de reflexión de Smyth (1991), rebasó el ámbito escolar, hasta llegar al estudiantil y profesoral universitarios.

El presente trabajo, pretende compartir las conclusiones sobre el estado de la reflexión sobre la propia práctica en profesores de matemáticas en Bogotá, ya que esto permitió ratificar la necesidad de una propuesta de formación en y hacia la investigación para profesores de matemáticas de básica y media.

Marco de referencia

Para la consolidación de la base de datos, con la que se pretendía ubicar profesores de matemáticas de básica y media interesados en reflexionar sobre su propia práctica, bajo el supuesto que ellos lograrían exteriorizar o expresar sus necesidades de formación en investigación, lo cual aportaría elementos de juicio para una propuesta de formación en investigación en el Distrito Capital, estructurada por el grupo de investigación Crisálida de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Para la consolidación de la base de datos fue necesario conceptualizar y complejizar criterios para establecer algo como manifestación de interés y pronunciarse sobre el estado de la reflexión aludido.

Asumiendo el interés de reflexionar en la propia práctica como un acto volitivo, que según Rodríguez, Lascano, Arévalo y González (2012) corresponde a una decisión que surge de manera libre y autónoma sin la participación de alguien distinto a quien toma la decisión, entonces ¿Qué podría constituirse como muestra tangible de dicho que hacer? Una posibilidad sería considerar que dicha acción requiere un comportamiento coherente con el interés del profesor, el cual, no sólo debe quedar en la introspección o pensamiento, sino que en favor de desarrollar sus reflexiones adopta un comportamiento ajustado a su interés por lo cual surge de manera natural la interacción comunicativa, que según Rodríguez et al, (2012, p.50) resulta indispensable porque es el lenguaje una forma de poner en el mundo compartido el mundo íntimo de los pensamientos, de los sentimientos, de la emociones.

Así, una muestra tangible de dicha decisión expresada en la acción, sería la elaboración de un escrito en relación a la práctica profesional del profesor de matemáticas, que muestre el inquietarse o el interrogarse por "algo", ligando éste "algo" a hechos de aula, descripción de experiencias, entre otros.

Dichos escritos no sólo servirían como "muestra tangible" del interés por reflexionar sobre su conocimiento profesional sino que a su vez, dependiendo de la complejidad del escrito, revelaría algunos indicios de actitud investigativa caracterizada, según Rodríguez et al, (2012, p. 25) como:

- ❖ Deseo indeclinable de "reinstalar en el mundo" como interpretación posible entre interpretaciones el "algo" que lo admira.
- ❖ Reconocimiento de la necesidad de concebir una forma de realización de ese deseo.
- ❖ Apertura dialogante a las múltiples y diversas interpretaciones que se hacen de "ese algo" que genera admiración.
- ❖ Compromiso decidido de escuchar otras versiones, de comprenderlas.

Ahora bien, en tanto la reflexión sobre la propia práctica constituye un componente esencial para hablar de profesor investigador de ésta, fue claro que si se quería elaborar un pronunciamiento sobre el estado de esa reflexión, se tendría que plantear, en primer lugar, una conceptualización de reflexión. Para ello se asumió lo propuesto por Schön (1992), quien rescata que la reflexión es un proceso sistemático y constante que ocurre en la acción o sobre la acción. La reflexión en la acción es un proceso que permitirá actuar frente a una situación que necesita solución en el presente, es decir en un momento dado y la reflexión sobre la acción es otro proceso sistemático que permite pensar constantemente acerca de una situación del pasado, que ya ocurrió.

En segundo lugar, unos criterios para pronunciarse sobre el estado de esas reflexiones, para lo cual se acudió a Smyth (1991), para quien el proceso de reflexión docente tiene cuatro fases:

Describir:	¿Cuáles son mis prácticas?
Informar:	¿Qué teorías se expresan en mis prácticas? ¿Qué significado tiene lo que hago?
Confrontar:	¿Cómo he llegado a ser de esta manera? ¿Cuáles son las causas?
Reconstruir:	¿Cómo podría cambiar?

Adicionalmente, se afirma que la reflexión debe estar abierta a las nuevas aportaciones, razón por la cual se forma un ciclo denominado "el ciclo de Smyth". En la figura N° 1, se ilustra dicho ciclo, que inicia cuando el docente detecta un problema profesional que reluce en el transcurso de la práctica.

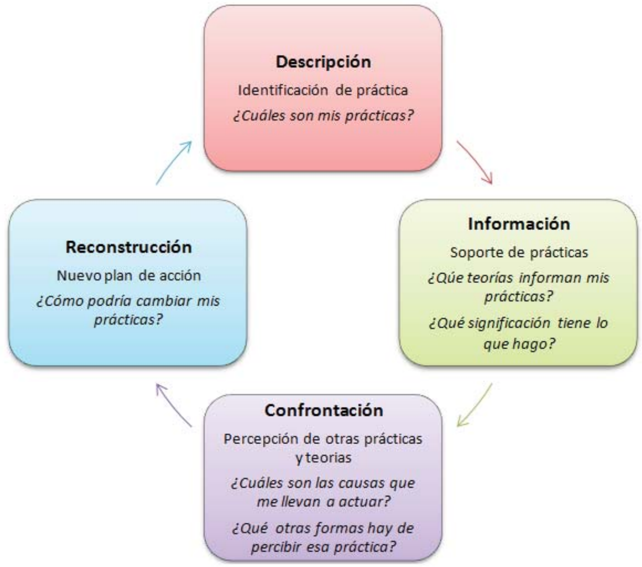


Figura 2. Ciclo de reflexión de Smyth (1991)

Por otro lado, Flores (2000, p.116), aborda la reflexión desde el terreno de la formación de profesores, por lo cual enuncia que el ser reflexivo refiere a la actitud del profesional de convertir su propia práctica en objeto de estudio.

Es por ello que las investigaciones son el desarrollo de dicho objeto de estudio, que es reconocido por el profesor tras un proceso de reflexión, mediado por su interés en el momento o por alguna situación que le generó un conflicto.

Descripción del método

Tras afirmar que escribir es una manifestación del interés en la propia práctica, se buscó por diferentes medios, trabajos que a partir de 1998 hasta el 2011 hubiesen sido publicados por profesores que de forma individual o colectiva, develaran dicho interés, independientemente del grado de formalidad. La búsqueda se realizó principalmente en:

- Memorias de encuentros de Geometría y Aritmética.
- Memorias de ASOCOLME (Asociación Colombiana de matemática educativa).
- Memorias del encuentro regional de matemáticas.
- Referencias en la página del premio compartir al maestro.
- Escritos de profesores en la página de Colombia aprende.
- Registro rutas saber hacer 07-09-11 del Ministerio de Educación Nacional.
- Experiencias significativas en el IDEP (Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico).

Una vez detectadas las fuentes, para seleccionar los docentes a observar de una lista de 523 trabajos ubicados, en el marco de un estudio para conceptualizar aquello denominado profesor investigador de su propia práctica, se acudió a dos aspectos fundamentales, uno, la categoría profesor reflexivo, empleando como referente principal a Flores (2000), y dos, a los tipos de reflexión que se manifiestan en la acción de reflexionar sobre la práctica, considerando para ello los aportes de Smyth (1991) como un horizonte teórico desde el cual hacer un pronunciamiento sobre el estado inicial de esa población respecto de lo que se entendería por investigar la propia práctica, como insumo previo para abordar la observación de profesores.

Soportado en tal horizonte se realizó un análisis cualitativo orientado a establecer relaciones entre los tipos de trabajo encontrados, los tipos de reflexión sobre la propia práctica inferida del análisis de los trabajos y la formación académica de los publicadores. Este análisis se basó en una determinación porcentual de la presencia de dichos aspectos en el universo estudiado.

Estado de la reflexión sobre la propia práctica de docentes de Matemáticas en Bogotá

El trabajo de selección aportó información importante y relevante para el proyecto de investigación, por cuanto las relaciones establecidas se constituyen efectivamente en un insumo inicial para abordar una observación de las prácticas de aula de los docentes seleccionados. A continuación se presenta los gráficos porcentuales de los tipos de trabajo (Gráfico 1) y de la formación académica (Gráfico 2).

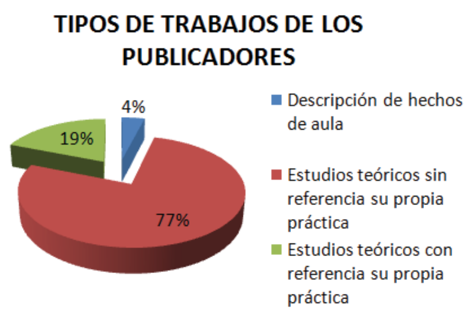


Gráfico 1. Tipos de trabajos

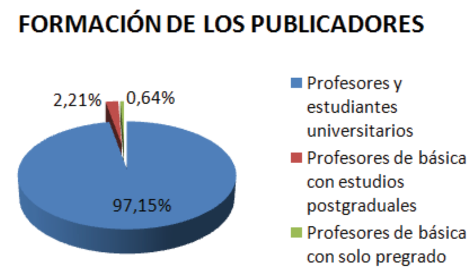


Gráfico 2. Formación académica

A partir de estos resultados se encontró que: De los 523 trabajos, el 4% hacían referencia a relatos de la práctica de aula en los que no se involucraban ideas que correlacionaran el quehacer del profesor y la presencia de algún enfoque teórico en él, por ese motivo, fueron categorizados de acuerdo al ciclo de Smyth (1991) en una etapa de descripción, además, se reveló que dichos relatos fueron 100% escritos por *profesores de básica y media con sólo pregrado.*

Otro tipo de trabajo encontrado, fue el que refería a estudios teóricos sin alusión alguna a la práctica de aula, en los que de manera general se privilegia el uso de la teoría para evidenciar nuevas formas de proceder frente a la enseñanza de las matemáticas o el estudio de objetos matemáticos, frente a los cuales se plantean posibles caminos de acción. Razón por la cual se les puede atribuir realizaciones de confrontación ó reconstrucción. Éste tipo de trabajos corresponde al 77% de los documentos analizados y son elaborados en su totalidad por *profesores en formación y docentes universitarios.*

Además de los tipos de trabajos nombrados anteriormente, se detectó un grupo en el que se hacía mención a estudios teóricos con alusión a la práctica de aula, en los cuales por el uso que dan a la teoría, son clasificados en fase de confrontación ó reconstrucción; dichos trabajos se encuentran 20% escritos por *profesores de básica y media con estudios postgraduales y 80% por profesores universitarios.*

Finalmente, puede decirse con respecto al estado de la reflexión, que solo del 23% de todos los trabajos, se puede inferir interés en reflexionar sobre la propia práctica de aula, y que el 0,64% de la población, conformado por profesores de básica y media con solo formación de pregrado, lo hacen y optan en bajo grado, por hacer un trabajo en colectivo.

Tras hacer referencia a dicho estado, se resalta el trabajo en grupos porque fue un aspecto que durante la lectura de trabajos emergió y según Abello, Calvo, Franco,Vergara y Londoño (2008), la formación en trabajo en equipo es necesaria para mejorar la práctica docente, pasando de un ejercicio aislado, a otro en el cual prima el diálogo y la discusión profesional.

Siguiendo con esta idea, el trabajo en equipo es fundamental para desarrollar una propuesta de formación, idea que defiende Porlán, Martín del Pozo, Martín y Rivero (2001) ya que posibilita la construcción colectiva del conocimiento profesional del profesor y el vínculo entre la teoría y la práctica en la formación continuada para la actualización científica que incide en los recursos didácticos y estrategias de enseñanza que tendrá el maestro.

Conclusión

Se logró detectar un grupo de maestros que se interesan en reflexionar sobre su propia práctica de aula, que estando en una etapa de descripción, aún no realizan procesos de investigación, éstos son docentes que laboran en la educación básica y media y que por distintas circunstancias, no tienen estudios post-graduales.

Ellos serían fundamentales para hacer estudios de caso, que permitieran detectar sus necesidades de formación en investigación y que posteriormente fueran ratificadas en la ciudad de Bogotá por medio de un estudio cuantitativo. Dichas necesidades deberían ser insumo para diseñar la propuesta de formación en y hacia la investigación de profesores de matemáticas en ejercicio.

Los resultados anteriores, si se comparte que la reflexión propicia la transformación de la práctica (Cruz, 2007), son indicio de la necesidad de una propuesta de formación en investigación para Bogotá, que fomente entre otros, el ser reflexivo como esa "actitud del profesional de convertir su propia práctica en objeto de estudio" (Flores, 2000, p.116)**,** más aún si se considera la política educativa en Colombia [plan decenal de educación (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y Colombia al filo de la oportunidad (Aldana, Chaparro, García, Gutiérrez, Llinás y Palacios, 1996)].

Adicionalmente se encontró que las muestras de interés en reflexionar sobre la propia práctica, de manera colectiva, tienen influencia en la transformación de las prácticas profesionales, entonces el trabajo en equipo es un aspecto importante en la formación en investigación de los profesores y más a la hora de plantear una propuesta para dicha formación.

Referencias bibliográficas

Abello,M., Calvo, G., Franco,M., Vergara M., y Londoño S. (2008). *La formación de profesores en Colombia: Necesidades y perspectivas*. Bogotá: Universidad de la Sabana.

Aldana, E., Chaparro, L., García, G., Gutiérrez, R., Llinás, R., Palacios, M. (1996). *Colombia al filo de la oportunidad*. Recuperado el 20 de enero de 2012 de http://www.umng.edu.co/www/resources/cdq_colombia%20al%20filo%20de%20la%20°portunidad.pdf

Cruz, M. (2007). *La formación del docente reflexivo*. Recuperado el 27 de febrero de 2012 de http://actualizacion.sev.gob.mx/pdf/el_docente_reflexivo.pdf.

Flores, P. (2000). Reflexión sobre problemas profesionales surgidos durante las prácticas de enseñanza. *Revista EMA. Investigación e Innovación en Educación Matemática, 5 (2)*, 113-138.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Plan decenal de educación 2006 – 2016*. Recuperado el 18 de marzo de 2010 de www.mineducacion.gov.co

Rodríguez, J., Lascano, M., Arevalo, S y Gonzalez, M. (2012). *Creesiendo en la investigación*. Bogotá: Colección Diálogos. Centro de investigaciones y desarrollo científico Universidad Distrital Francisco José De Caldas.

Porlán, R., Martín del Pozo, R., Martín, J., y Rivero, A. (2001). *La relación teoría-práctica en la formación permanente del profesorado*. Sevilla: Díada

Schön, D. (1992), *La formación de Profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Barcelona: Paidós.

Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista de Educación, 294*, 275-300.

ELEMENTOS DE IDENTIDAD PROFESIONAL ORIENTADOS A APRENDIZAJES MATEMÁTICOS

Gastón Guerrero Arcos, Leonora Díaz Moreno
Universidad de Los Lagos Chile
gguerreroblog@hotmail.com, leonora.diaz@ulagos.cl

Resumen. Se indagan características de docentes que se manifiestan con una orientación explícita al cambio para la mejora de los aprendizajes en sus estudiantes. Profesores de matemática de la escolaridad obligatoria respondieron preguntas respecto de sus proyecciones y de su opción vocacional por la profesión docente. Revelan experiencias positivas como estudiantes. Pero solo algunos expresan orientación al cambio de sus prácticas para los aprendizajes en el contexto escolar. Con base en sus respuestas, se levanta una primera sistematización de características, que ostentan los profesores, sea que expliciten o no una orientación por el cambio de sus prácticas docentes.

Palabras clave: configuraciones de identidad profesional docente

Abstract. Teachers characteristics related to an explicit orientation to changes in order to improve the learning process of their students are researched. Math teachers of mandatory education were asked to answer some questions related to their vocational option and projections in their future teaching career. Reveal positive experiences as students. But only some of them express an orientation to change their practices for the learning in the school context. Based on their answers, develops a first systematization of features that teachers hold, whether explicit or not an orientation by changing their teaching practices.

Key words: configuration of teacher professional identity

Antecedentes

Citando a Habermas, Larraín (2001, p. 47) indica que “la identidad no es algo ya dado, sino también, y simultáneamente, nuestro propio proyecto”, con esto quiere decir que la identidad se va estructurando paso a paso. La persona decide sobre su proyección, lo que mantiene, lo que cambia o modifica, y lo que desecha. Es protagonista en la construcción de su identidad, y esto también es válido para la identidad profesional del profesor.

En la identidad del profesorado confluyen varios elementos que la determinan y la pueden modificar. Es una construcción que se prolonga durante toda la vida, en periodos sucesivos e incidentes complejos y difíciles de ubicar linealmente (Galaz, 2007). En este proceso se integran las vivencias y experiencias que se tienen de las interacciones con el medio en que se desenvuelven las personas, con lo cual se conforma un conjunto de fases complejas y dinámicas de construcción, marcadas por quiebres. Es un proceso y por consiguiente esta en continuo desarrollo. En el transcurso de la vida del individuo acontecen crisis identitarias como consecuencia de los cambios que se suceden, en ámbitos tales como: lo social, lo cultural, lo laboral, entre otros. También, en este proceso, interviene la búsqueda de estabilidad y coherencia con su definición e imagen personal, lo que la persona piensa de sí mismo y lo que proyecta hacia los demás (Galaz, 2007).

Para los profesores, en nuestro país, han surgido nuevas exigencias, y desde ámbitos diferentes. Requerimientos provenientes de los niveles de logro estudiantil en pruebas estandarizadas nacionales, tales como: las del Sistema Nacional para la Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), e internacionales, tales como PISA, TIMMS y SERCE. Requerimientos directos desde el Ministerio de Educación como son las: modificaciones en los programas de estudio ligados a políticas de los distintos gobiernos, evaluaciones de desempeño docente regulares ligadas a la relación laboral contractual, pruebas al egreso de la formación profesional docente (Prueba Inicia). Dando por resultado la clasificación competitiva no solo de docentes sino que también de estudiantes y de colegios, que responden como unidades educativas a instrumentos ad hoc, que incluyen a las evaluaciones referidas. Además de la imposición de una enseñanza relacionada con estándares de competencias. Por otro lado está la relativización de los valores, el individualismo y un grupo escolar más complejo en sus aprendizajes. Todo esto ha influido en la identidad profesional del profesorado, de tal forma que esta ha ido sufriendo cambios.

Hace unos decenios, la identidad del profesorado, era bastante estable ya que la institución otorgaba una identidad a los que trabajaban en ella, por el solo hecho de desempeñarse en esa entidad, ahora debe "ganársela" en el quehacer diario (Bolívar, 2007). El profesorado se ha visto exigido a adaptarse a esta nueva realidad, plasmada de incertidumbres y donde la certeza es cada vez más difusa, procediendo de forma estratégica, ya que debe asumir el discurso oficial y a la vez desarrollar nuevas formas de realizar su labor. Lo anterior causa tensión entre sus creencias, concepciones y su actuar; por ende su identidad profesional se siente cuestionada, generando una resistencia y pudiendo causar una crisis. Hace mucho tiempo dejó de ser preponderante el saber disciplinar lo que configura la identidad del profesional. Actualmente se integra lo social, lo afectivo y lo emocional.

Siguiendo a Bolívar (2007), la identidad profesional no es inmediata, es un largo proceso que dota de sentido a la práctica cotidiana así como a los modos de vivenciar su profesión.

La identidad profesional es una entidad compleja que presenta varios aspectos imbricados, entre estos: la dimensión personal y biográfica: su actuar y proceder, su historia, vivencias y proyectos personales; la dimensión social: su identificación como profesional, su rol y la pertenencia a un grupo específico; los saberes y competencias profesionales. Estos se desarrollan en marcos institucionales, donde el profesor de matemática se desenvuelve profesionalmente en una determinada cultura con un conjunto de normas y redes de afinidad por especializaciones y que son propias de su profesión. La identidad profesional se inicia con la formación del profesorado y sigue en el proceso de socialización profesional (Bolívar 2007; Galaz 2007).

Como sostienen Díaz y Ochoa (2007, p. 2) "(…) para la identidad profesional docente, las alteraciones en sus elementos constituyentes no implican necesariamente que una identidad profesional se haya perdido, sino más bien que ha cambiado, que se va construyendo…", con esto quieren decir que esta está "en proceso de". Los profesores deben determinar lo que quieren ser, cuál es su proyección y cómo se relacionarán con los cambios que se produzcan en su medio. Esto significa un nivel de compromiso y acción del profesorado. La construcción de su identidad, por parte del profesional docente, tiene además de las dimensiones personales y sociales, las afectivas y cognitivas, que lo hacen continuamente recordar sus experiencias pasadas, pero que principalmente lo hacen proyectarse al futuro (Galaz, 2007).

Son las satisfacciones e insatisfacciones, que se dan en el ejercicio diario de la profesión, las que marcan su biografía y le dan sentido a su labor. Esta identidad del profesorado, que no está dada y que no es fija, es una construcción que se estructura en las instituciones donde se desempeña, las que demandan un tipo de profesional con un perfil establecido y relacionado con su biografía personal. Esta relación tiene que ver con los grados de libertad, que tiene el profesorado al establecer espacios de movilidad, que definen sus actuaciones, en el marco de lo que pide la institución. Por consiguiente, debe generar estrategias de negociación para compatibilizar su proceder con lo que exige la institución, preservando de esta forma su identidad (Bolívar, 2007; Galaz, 2007). Algunas de estas vivencias producen quiebres en su identidad profesional, y a partir de estos quiebres y de los remanentes que quedan se vuelve a estructurar su identidad.

Los saberes disciplinares del profesorado, les hace adscribir y compartir un conjunto de teorías, definiciones, supuestos, valores, entre otros, referidos al saber disciplinar, al didáctico y al ético-afectivo, que se relacionan con su profesión, marcando y determinando fuertemente su identidad (Galaz, 2007)

Por otro lado el contexto histórico, social, cultural, permite que la identidad del profesorado se materialice y se desenvuelva, por cuanto este se verá inmerso en un sustrato que coincide con la visión que se tiene de sí mismo, de su función y que le permite proyectarse en el tiempo (Díaz y Ochoa, 2007). Es el profesor, a decir de Pinto (2010), el que debe tomar un rol protagónico y crítico de su labor, no puede ser neutro, debe dialogar con sus pares, como una forma de mejorar sus conocimientos y prácticas y así producir un cambio que impacte en su identidad. Este cambio surge en el profesional docente como una necesidad interna, dejando de ser pasivo, con una preocupación por el otro, y que es parte de su identidad y lo caracteriza (Pinto, 2010).

Preguntas que orientan el estudio

Como se señaló anteriormente, los profesores deben responder a nuevas exigencias y requerimientos y para lograr esto deben modificar sus formas de proceder, adaptándose de alguna forma a estos nuevos escenarios. Lo antedicho lleva a conjeturar que profesores de matemática, pueden manifestar unas características propias que concurren con actitudes proactivas en su labor. Tales rasgos podrían estar aportando a la configuración de una identidad profesional, a tener en cuenta en la formación docente y en las instituciones educativas.

Considerando lo complejo de la identidad profesional docente, la diversidad de los elementos que intervienen en ella, uno de los cuales es la visión a futuro que el profesorado tiene de su labor profesional, este reporte se centra en responder la pregunta ¿Cuáles son las proyecciones que tienen los profesores de matemática en el ejercicio de su profesión?

Metodología

Se trata de un estudio cualitativo exploratorio que indaga, a partir de las textualidades de los profesores de matemática, acerca de características docentes que tienen relación con su identidad, reportándose una primera aproximación a esta.

Se aplicó un cuestionario de preguntas abiertas a un grupo de profesores de matemática de la escolaridad obligatoria. Tales reactivos se eligieron desde las dimensiones temporales de sus biografías estudiantiles y de sus proyecciones en la profesión, ambas aportando a los rasgos de identidad personal-profesional (Díaz y Ochoa, 2007). A partir de las respuestas de los profesores, y del análisis de estas, se levantaron categorías (Hernández, Fernández y Baptista, 2006), en orden a sistematizar características que puedan asociarse a configuraciones identitarias (Galaz, 2007), en tanto estas se relacionan con el cambio de sus prácticas para los aprendizajes.

Resultados

El estudio indagó sobre las características de los profesores de matemática de la escolaridad obligatoria (correspondiente a enseñanza Básica y Media en Chile), arrojando resultados interesantes. En la tabla N°1 se muestran textualidades de los profesores, a modo de ejemplo desde el profesor 1 (P1) al profesor 6 (P6), que justifican las categorías elaboradas, y son de interés para este estudio.

	Pasado	Proyección	Categorías
P1	"Recuerdo a muy buenos profesores, pero también a otros no tanto"	"Conocer experiencias que permitan profundizar en metodologías que favorezcan el aprendizaje de mis alumnos"	Apertura al cambio
P2	"Algunos años fue mala o mejor dicho deficiente porque había profesores que no sabían enseñar y una como estudiante queda llena de dudas y después en las pruebas se obtienen malos resultados"	"Ser una profesional capaz de realizar clases novedosas y didácticas"	
P3	"Buen alumno, me gustaban todos los ramos pero mi fijación hacia las matemáticas se debió al desafío que implicaba por su nivel de dificultad"	"Transformarme en un referente en Matemática, en aspectos didácticos y pedagógicos"	Querer ser líder
P4	"Bastante conflictiva, no fue fácil adaptarme al modo de aprendizaje de los profesores, siempre presente problemas"	"lograr formar un departamento de matemática potente en el colegio"	
P5	"En la escuela enseñanza básica fue buena experiencia aprendí con facilidad y me gustaba mucho, los profesores eran dedicados y pacientes. En la enseñanza media cambio un poco la situación dejo de gustarme un poco y el sistema era distinto, me costó un poco más aprender que en la básica"	"Mis proyecciones es trabajar solo un par de años más como profesora y luego estudiar algo como finanzas, Ingeniería Comercial, o algo así"	Cambiar de contexto
P6	"Fue realmente buena, ya que solo recuerdo desde 8° básico cuando mi profesora fue Orieta Vil. Ella me marco para toda la vida reforzándome positivamente lo buena que yo era para resolver los problemas matemáticos y siempre me decía 'damita que inteligente es, seguro llegara a la universidad y será una gran profesional' desde entonces me he destacado en esta área"	"Quiero ser una profesora particular que sea el remedio de los niños que no aprenden en el colegio y que desean hacerlo. Los que no quieren aprender que no aprendan es su decisión y su responsabilidad"	

Tabla N°1. Tabla Formulación de Categorías. Guerrero

Las palabras Apertura, Líder y Cambio son consideradas desde las dimensiones que se plantean en el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2012). Para Apertura son: disposición, acción y transigencia, mientras que para Líder son: Guía, conductor y al que siguen. Por otro lado, para Cambiar son: modificar, dejar una situación para tomar otra, mudar y alterar; y para Contexto son: orden y entorno.

De las categorías que emergieron, a partir del análisis de discursos, se destacan dos:

Apertura al cambio, como una preocupación por poner novedad y enseñanza en sus prácticas de aula, con una disposición a cambiar sus metodologías, centrada en el aprendizaje de los alumnos. Como se evidencia en las textualidades de P1 cuando escribe "Conocer experiencias que permitan profundizar en metodologías que favorezcan el aprendizaje de mis alumnos" y de P2 cuando escribe "Ser una profesional capaz de realizar clases novedosas y didácticas".

Querer ser líder, relacionada con una intención de destacarse en el ámbito de la enseñanza de su disciplina y que surge en las textualidades de P3 cuando escribe "Transformarme en un referente en Matemática, en aspectos didácticos y pedagógicos" y de P4 cuando escribe "lograr formar un departamento de matemática potente en el colegio".

En ambos casos hay un deseo explicito por cambiar y mejorar en el ámbito de la educación matemática, es un rasgo que los identifica. En la categoría Apertura al cambio se muestra una disposición personal a cambiar, centrada en el aprendizaje de sus estudiantes, por consiguiente este rasgo identitario se puede entender como una búsqueda de la mejor forma de enseñar, de acuerdo a su realidad. Es plausible inferir que el profesorado relacionado en las categorías mencionadas, visualiza necesidades a abordar desde su práctica en el cauce de los aprendizajes de sus estudiantes.

Por otro lado, surge la categoría Cambiar de contexto, dando cuenta de un grupo de profesores que no están dispuestos, explícitamente, a cambiar sus metodologías, incluso algunos interesados en cambiar de profesión. Se puede inferir que hacen lecturas diferentes, respecto de lo reportado en las categorías mencionadas anteriormente, de lo que pasa en el aula y del proceso de enseñanza aprendizaje. Como se evidencia en la textualidad de P6 que escribe "Quiero ser una profesora particular que sea el remedio de los niños que no aprenden en el colegio y que desean hacerlo. Los que no quieren aprender que no aprendan es su decisión y su responsabilidad". Mostrando un rasgo identitario diferente de los ya reportados. Esta visión refleja una forma de enseñar y de ver a sus discentes, muy distinta de otros profesores, la responsabilidad del aprendizaje es solamente de los estudiantes. Por otro lado, en esta categoría se consideran a aquellos profesores que no desean seguir en su profesión como se muestra en la textualidad de P5 que escribe "Mis proyecciones es trabajar solo un par de años más como profesora y luego estudiar algo como finanzas, Ingeniería Comercial, o algo así". Este rasgo identitario evidencia una situación que requiere de una mayor indagación respecto de su dedicación a la educación como profesor de matemática. Es importante hacer notar que la categoría Cambiar de contexto se manifiesta en mucha menor cantidad, en el profesorado de matemática, que las reportadas en un principio y que son el principal objeto de este estudio.

Otro aspecto interesante de considerar, que surgió en este estudio, es la diferencia manifiesta entre profesores de 1° al 8° grado y los de 9° al 12° grado de la educación obligatoria (Educación Básica y Media en Chile). Sus textualidades así lo confirman. Son mundos distintos, partiendo por la formación y la base matemática que tienen (Díaz 2012, exposición en RELME 26).

Conclusiones

Algunos profesores de matemática, de la escolaridad obligatoria, manifiestan explícitamente que desean mejorar sus prácticas docentes como una forma de lograr un mejor aprendizaje en sus alumnos, evidenciando ciertos rasgos identitarios que son parte de ellos y los caracterizan, haciéndolos vivenciar de una forma distinta su profesión docente, se proyectan trabajando con alumnos en la sala de clases. Estos rasgos surgen en las categorías Apertura al cambio y Querer ser líder. Interesará indagar y pesquisar en estos rasgos encontrados acerca de la identidad del profesor de matemáticas y poder identificarlos de mejor manera, como una forma de aportar: al conocimiento del profesional que se está formando, a las instituciones formadoras de profesores y a las entidades que desarrollan perfeccionamientos. Las proyecciones de los profesores de matemática indagados son variadas y no solo en el ámbito del aprendizaje de sus alumnos, también manifiestan intereses que no tiene relación directa con su preparación profesional.

Varios autores han reportado cómo algunos profesores tienen una identidad que los mueve a buscar nuevas formas de enseñar y preocuparse por mejorar su enseñanza en el aula (Ríos, 2004, 2009; Martín 2008; Galaz 2007, 2011; Bolívar 2005,2007; entre otros). Sin embargo, mediante una revisión bibliográfica inicial hemos podido constatar que hay solo algunos reportes de la identidad de los profesores de matemática, del 9° al 12° de enseñanza obligatoria, específicamente relacionadas con los aprendizajes matemáticos en sus estudiantes, ni tampoco a su interés y deseo por cambiar sus prácticas docentes en el aula, y cómo esto tiene relación con su biografía y experiencias personales. No obstante la vasta producción que hay sobre la identidad del profesor y como esta se configura (Bolívar 2005, 2007; Costa, 2011; Galaz 2007, 2011; Ríos 2004, 2009, entre otros)

Es necesario estudiar, por separado, las identidades de los profesores de enseñanza básica y media, basándose en los resultados preliminares obtenidos. Se plantea profundizar el estudio en profesores que enseñan desde el 9° a 12° año de la escolaridad obligatoria.

Referencias bibliográficas

Beijaard, D., Meijer, P., Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education* 20(2), 107-128.

Bolívar, A. (2007). La formación inicial del profesorado de secundaria y su identidad profesional. *Revista Estudios sobre Educación 12*, 13-30.

Bolívar, A., Fernández, M. y Molina, E. (2005). *Investigar la identidad profesional del profesorado: Una triangulación secuencial*. Recuperado el 29 de mayo de 2012 de http://www.qualitative-research.net/fqs/.

Costa, W. y Pamplona, A. (2011). *A constituição da identidade do professor de matemática: análise de algumas influencias*. Recuperado el 16 de enero de 2012 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/404.

Díaz, L. y Ochoa, J. (2007). *Comprensiones de la identidad profesional docente*. Documento de trabajo de circulación restringida. Facilitado por los autores.

DRAE (2013). *Diccionario de la Real Academia Española.* Extraído el 4 de marzo de 2013 de http://lema.rae.es/drae/.

Ezpeleta, J. (2004). Innovaciones Educativas. Reflexiones sobre los contextos en su implementación. *Revista mexicana de investigación educativa,* 9 (021), 403-424.

Galaz, A. (2007). *Desarrollo profesional docente y (re)construcción de la identidad profesional de los profesores de enseñanza media: El caso de los grupos profesionales de trabajo*. Tesis de Doctorado no publicada, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Galaz, A. (2011). El profesor y su identidad profesional ¿facilitadores u obstáculos del cambio educativo? *Revista Estúdios Pedagógicos, 37 (2),* 89-107

García, A. (2008). Identidades y representaciones sociales: La construcción de las minorías. *Revista Crítica de las Ciencias Sociales y Jurídicas*, *18* (2), 211 - 222

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw-Hill Interamericana.

Hurtado, E. (2001). *Representaciones del profesor en la integración de la computación a las prácticas docentes*. Tesis de Doctorado no publicada, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Larraín, J. (2001). *Identidad Chilena*. Santiago de Chile: Lom.

Martín, M. y Génova, G. (2008). Innovación Docente a la luz de Bolonia: Trabajo en equipo y revisiones cruzadas para convertir al alumno en protagonista de su proceso de aprendizaje. *Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, 9*(1), 126 – 141.

Pinto, R. (2010). En América Latina Innovar en Educación es posible gracias al esfuerzo crítico de sus educadores. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, *9*(17), 65 – 83.

Ríos, D. (2004). Rasgos de personalidad de profesores innovadores: Autonomía, Persistencia y Orden. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 34*(2), 95 – 112.

Ríos, D. (2009). Características personales y profesionales de profesores innovadores. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, *39* (1-2), 153 – 169.

MATEMÁTICA FINACEIRA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Geneci Alves de Sousa, Marcelo André A. Torraca e Lilian Nasser
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ Brasil
prof.geneci@yahoo.com.br, pfundão@im.ufrj.br

Resumo. O estudo de Matemática Financeira é altamente motivador e fundamental para formar cidadãos mais críticos. Mas, quando abordada na Escola Básica, a Matemática Financeira enfoca apenas porcentagem e fórmulas de juros simples e compostos, sem aplicações que envolvam problemas do dia-a-dia. A pesquisa relatada neste trabalho indica que o professor da Escola Básica não tem, em geral, a formação necessária para abordar a Matemática Financeira de forma eficaz em suas aulas. São analisadas soluções apresentadas por professores e futuros professores para um problema real, do pagamento do imposto IPVA, mostrando os tipos de erros cometidos. Como consequência dessa pesquisa, foi desenvolvida uma proposta prática e visual para auxiliar o professor no ensino de Matemática Financeira, que incentiva a representação das situações do cotidiano no eixo das setas, permitindo a compreensão da variação do dinheiro no tempo.

Palavras chave: matemática financeira, formação de professores, visualização

Abstract. Students are highly motivated to study Business Mathematics, which is a fundamental topic for the formation of critical citizens. But, at Secondary School, the teaching of this topic focuses only on percentages and formulas to calculate simple and compound interest rates, without applications involving real problems. The piece of research reported in this work suggests that, in general, school teachers are not prepared to address Business Mathematics in an efficient approach. In several workshops, teachers and future teachers were asked to solve a real problem about the payment of the 'IPVA' tax. These solutions are analyzed, exploring the kinds of mistakes presented. As a consequence of this research, a practical and visual proposal has been designed to support the teaching of Business Mathematics at secondary school. In this approach, real financial situations are represented in an arrow axis, which allows the comprehension of the variation of the value of money along the time.

Key words business mathematics, teacher education, visualization.

Introdução

Com a economia em crescimento, aumenta a oferta de crédito e as pessoas estão se endividando cada vez mais, pois cometem erros básicos como comparar quantias referentes a datas distintas ou somar (em vez de multiplicar) índices sucessivos de aumento ou desconto.

Diante de ofertas enganosas do tipo "preço à vista igual ao preço a prazo, em 10 vezes sem juros", a proposta deste trabalho é investigar se o professor da Escola Básica está preparado para abordar a Matemática Financeira de forma eficaz, estimulando os alunos a identificar o que há por trás dessas propostas veiculadas na mídia. Como decidir qual a forma mais vantajosa de pagar nossos impostos? E as compras, será melhor pagar à vista, ou aproveitar as ofertas de financiamento? As respostas a essas perguntas deveriam fazer parte do ensino de Matemática Financeira na Escola Básica, mas, na realidade, esse tipo de situação não é abordado em sala de aula.

Este trabalho investiga a prontidão dos professores de Matemática para um ensino eficaz da Matemática Financeira e apresenta a proposta de um material didático voltado para o professor (Nasser, 2010).

Observa-se uma carência de material didático adequado para o ensino de Matemática Financeira na Escola Básica. Os livros sobre o tema são voltados para a preparação de concursos ou para cursos superiores de Contabilidade ou Administração de Empresas. Quanto aos livros textos do Ensino Médio, a grande maioria trata o tema por meio da aplicação de fórmulas para juros simples e compostos (Novaes, 2009), e não prepara o aluno para exercer a cidadania, capacitando-o a escolher a maneira mais vantajosa de efetuar pagamentos de compras e impostos.

Descrição da pesquisa

Este trabalho relata parte de uma pesquisa desenvolvida por um grupo do Projeto Fundão (IM/UFRJ) com os objetivos de investigar a prontidão dos professores de Matemática para o ensino eficaz da Matemática Financeira e desenvolver um material didático voltado para o professor, apropriado para a Escola Básica (Nasser, 2010).

Ao longo de 5 anos de estudos e pesquisas, o grupo ofereceu diversas oficinas para professores e licenciandos de Matemática, constatando suas dificuldades na resolução de situações financeiras do cotidiano (Sousa, Pereira, Nasser, Medina, Torraca, Santos, Dias e Simões, 2008).

Neste trabalho são analisadas soluções incorretas apresentadas por professores e futuros professores no cálculo da taxa de juros embutida no pagamento parcelado do Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA). O problema proposto foi o seguinte:

> O Estado do Rio de Janeiro oferece duas possibilidades para o pagamento anual do IPVA: em cota única com desconto de 10%, com vencimento no dia 15/01 ou em 3 parcelas mensais iguais, com vencimentos nos dias 15/01, 15/02 e 15/03. Qual a taxa de juros embutida no pagamento parcelado de um IPVA de R$900,00?

De acordo com artigo publicado no jornal O GLOBO na coluna de Roberto Zentgraf (31/01/2011), os juros pagos por quem opta pelo pagamento parcelado são muito altos, sugerindo que vale a pena sacar dinheiro da poupança ou até mesmo fazer um empréstimo e efetuar o pagamento à vista, aproveitando o desconto de 10%.

Metodologia

Esse problema foi proposto a professores e futuros professores de Matemática, em diversas oficinas oferecidas em Universidades ou em congressos de Educação Matemática. Logo no início da oficina, os participantes recebiam uma folha com o problema proposto, que deveriam solucionar em quinze minutos, podendo usar calculadora, se julgassem necessário. Essas soluções, em sua grande maioria erradas, eram recolhidas e a oficina com a proposta visual para o ensino de Matemática Financeira era, então, desenvolvida. Em algumas ocasiões, foi possível solicitar que os participantes resolvessem novamente o mesmo problema ao final da oficina. As duas soluções de um mesmo professor eram, então, comparadas. Exemplos de primeiras resoluções erradas dos professores são apresentados mais adiante.

Os resultados coletados indicam que grande parte dos professores e futuros professores pesquisados não têm a formação necessária para ensinar seus alunos como resolver esse tipo de problema. Isso pode explicar porque muitos professores não abordam esse tipo de situações financeiras reais em suas aulas, restringindo-se à aplicação de fórmulas de juros simples ou compostos.

Como fruto dos estudos do grupo, foi desenvolvida uma proposta prática e visual para o ensino de Matemática Financeira, para os ensinos Fundamental e Médio, levando em conta seus princípios básicos: o uso da taxa como fator e o deslocamento de quantias no tempo. A abordagem visual ocorre pela representação no eixo de setas, e o prático, pela exploração de situações reais que se apresentam na prática dos investimentos e das vendas a prazo.

Referencial teórico

A Matemática Financeira não fazia parte do currículo da Escola Básica até bem pouco tempo. Mas, na prática, os cidadãos se deparam constantemente com situações financeiras. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) incluem procedimentos de Matemática Financeira tanto para o terceiro (6° e 7° anos) quanto para o quarto ciclo (8° e 9° anos) do Ensino Fundamental:

> resolução de situações problema que envolve a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não convencionais (...) resolução de situações problema que envolve juros simples e alguns casos de juros compostos, construindo estratégias variadas, particularmente as que fazem uso de calculadoras. (pp.72 e 87)

Além disso, as orientações didáticas dos PCN (Brasil, 1998) apresentam um exemplo de Matemática Financeira, ilustrando as vantagens do uso de planilhas, concluindo que "seu contexto possibilita que os alunos pesquisem e ampliem seus conhecimentos sobre matemática comercial e financeira: taxas, juros, descontos, fatores de conversão, impostos, etc." (Brasil, 1998, pp. 119 a 121).

Zot (1996) conceitua Matemática Financeira como o

> estudo da determinação do valor da remuneração de empréstimos (cálculo de juros) e de sua rentabilidade (cálculo da taxa de juros). O primeiro cálculo é fundamental para a caracterização dos contratos, enquanto o segundo diz respeito à tomada de decisão, processo importante para a orientação dos agentes econômicos nos rumos dos negócios financeiros. (pp. 21-22)

Assim como Zot (1996, p.21), diversos pesquisadores chamam atenção para o objetivo principal da Matemática Financeira, que é estudar a evolução do valor do dinheiro ao longo do tempo, como alertam os professores Ilydio e Vinicius P. de Sá (2009):

> Fundamental, em matemática comercial e financeira, é o valor do dinheiro no tempo, conceito tão simples quanto negligenciado pela maioria das pessoas. Não podemos operar diretamente com valores monetários referentes a datas distintas. É necessário que coloquemos todos os valores numa mesma data, valorizando-os ou desvalorizando-os na linha do tempo. (p. 15)

Devido à crescente necessidade de preparar os jovens para enfrentar as situações financeiras, o tópico de Matemática Financeira tem sido incluído na grade curricular de várias redes de ensino, como na do Ensino Médio da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro (BRASIL, SEE-RJ, 2005). No entanto, a maioria dos professores em exercício não sente segurança para abordar esse tópico. Pinto (2011) fez um levantamento dos currículos de 9 cursos de licenciatura em Matemática do Rio de Janeiro. Seu estudo mostra que apenas 2 incluem a Matemática Financeira como disciplina obrigatória, enquanto em outros 3 cursos esta é oferecida como disciplina optativa. Em 4 outras universidades, a Matemática Financeira não aparece na grade curricular. Isso explica a grande demanda por cursos de atualização para professores em Matemática Financeira.

Análise das soluções dos professores

Serão analisados a seguir os resultados de pesquisa realizada com licenciandos e professores de Matemática sobre o pagamento do Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA) no estado Rio de Janeiro. O governo estadual dá a possibilidade de pagamento à vista, com 10% de desconto, ou em 3 parcelas mensais e iguais, vencendo a primeira na mesma data da cota única. Além de investigar o desempenho dos professores e futuros professores na determinação da taxa de juros, esta pesquisa enfatiza que o pagamento à vista (com desconto) é a forma mais vantajosa de efetuar o pagamento desse imposto.

O problema do IPVA

Este é um bom exercício para alertar que em pagamentos futuros sempre há juros embutidos, pois como os pagamentos não são feitos na mesma data e sempre há a possibilidade de se aplicar o dinheiro referente às prestações futuras, pode-se concluir que o valor pago não é equivalente ao preço à vista. Em alguns casos, dependendo do público-alvo, este problema pode ser aplicado para um valor genérico, já que o valor da taxa de juros não é alterado.

No primeiro grupo de professores a que foi apresentado este problema, dos 27 participantes, somente um acertou e dentre as 26 respostas erradas, houve grande diversidade de raciocínios. Numa segunda aplicação foram avaliados 22 licenciandos, dos quais 8 não acharam resposta alguma, pois não conseguiram concluir o raciocínio, e os 14 que chegaram até o fim não acertaram.

No total foram examinados cinco grupos, compostos de licenciandos, professores, e alunos de pós-graduação. Um erro muito comum é utilizar juros simples ao invés de compostos e não relacionar os juros ao valor financiado e sim ao valor total.

As resoluções incorretas apresentadas a seguir reforçam a necessidade de aprimorar o ensino de Matemática Financeira, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Após a realização da oficina, quase todos os participantes conseguiram resolver o problema proposto, utilizando a ferramenta da visualização e deixando de cometer os erros iniciais.

1º Resolução:

À vista: R$900,00

Com 10% de desconto: R$810,00

Juros compostos: 900 = 810.(1 + i)3

$(1 + i)^3 = 90 \Rightarrow 1 + i = \sqrt[3]{90} \Rightarrow i = 3{,}48\ \%\ \text{a.m.}$

O erro desta solução foi comparar o pagamento à vista com um pagamento único de 900 reais três meses após, aplicando a fórmula dos juros compostos.

2° Resolução:

Parcelado: 3x 300 = R$900,00

10% de desconto = R$ 90,00

Pagamento à vista: R$810,00

$$J = C.i.n$$

$$i = \frac{J}{C.n} = \frac{90}{810.3} = \frac{90}{2430} = 0{,}0037 ou 3{,}7\% a.m.$$

Nesta resolução foi novamente usado o raciocínio de um pagamento único três meses após, além de aplicar equivocadamente a fórmula dos juros simples, e ainda há um erro na divisão.

3º Resolução:

À vista: 900,00 x 0,9 = 810,00

A prazo: 3 x 300,00 = 900,00

Juros: 810,00 ______ 100%

90,00 ______ x

810 x = 9000

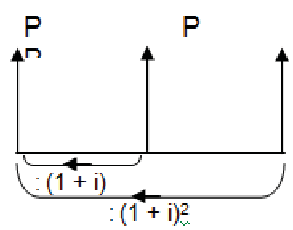
x = =11,1 % de juros ao trimestre.

Esta solução foi apresentada por grande parte dos professores que cursam mestrado em Ensino de Matemática. Denota uma prática comum dos alunos, de tentar usar a regra de três para resolver o problema. Esta seria a taxa de juros embutidos no pagamento em uma única parcela, um mês após o vencimento do pagamento à vista com desconto.

Em resumo, foram analisadas 73 soluções, sendo que somente duas estavam corretas, o que corresponde a uma porcentagem muito alta de erros.

A seguir é apresentada uma solução correta para um valor genérico, com a representação visual.

Para calcular a taxa de juros praticada no pagamento parcelado, a situação será representada no eixo das setas, onde P representa o valor de cada parcela. O valor total de 3P, quando pago à vista com desconto de 10%, é de 0,9 x 3P.



$$0{,}9 \times 3P = P + \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2}$$

$$2{,}7 = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2}$$

$1{,}7\,(1 + i)^2 = 1 + 1 + i$

$17\,i^2 + 24\,i - 3 = 0$

Resolvendo esta equação do2° grau, obtém-se o valor aproximado i = 0,115.

Portanto, a taxa é de 11,5%.

Esta taxa mensal de juros é mais alta até do que a do cheque especial, o que enfatiza a conclusão de que o pagamento à vista é sempre mais vantajoso.

Conjugando o eixo das setas com o uso da porcentagem como fator e o uso da calculadora, é possível estabelecer um método de raciocínio que pode ser aplicado a qualquer problema. Essa proposta para o ensino de Matemática Financeira foi consolidada num livro dirigido a professores (Nasser, 2010). Os pontos principais da sequencia didática são:

- uso da porcentagem como fator, na notação decimal, de modo que, para encontrar um valor com acréscimo de i%, multiplica-se a quantia original por (1+i) e se for desconto de i %, multiplica-se a quantia original por (1- i);
- representação da situação no eixo das setas e transposição dos valores para uma mesma data para que possam ser comparados e/ou somados;
- exploração de problemas práticos, do dia-a-dia dos cidadãos;
- incentivo ao uso de calculadoras (não financeiras) e desencorajamento ao uso de fórmulas;
- integração com outros conteúdos como progressões e gráficos das funções afim e exponencial;
- análise de diversas estratégias para resolver um mesmo problema, exemplificando com soluções apresentadas por alunos de Ensino Médio.

Comentários finais

Este trabalho sugere que a Matemática Financeira abordada na Escola Básica deve ensinar a resolver problemas práticos, que ocorrem no dia-a-dia do cidadão. Será que os alunos egressos do Ensino Médio estão preparados para enfrentar situações desse tipo? A análise das resoluções apresentadas por professores e futuros professores a uma situação financeira do cotidiano sugere que, em geral, os professores não dominam suficientemente o conteúdo para abordar a Matemática Financeira de modo eficaz.

É preciso alertar os cidadãos e os professores para alguns erros comuns no trato com situações financeiras, como:

- acréscimos ou descontos acumulados devem ser multiplicados e não somados;
- pagamentos da mesma quantia em datas distintas não têm o mesmo valor;
- quantias que se referem a datas distintas não podem ser somadas;
- só é possível comparar formas diferentes de pagamento se as quantias forem calculadas com referência à mesma data.
- os juros nas compras a prazo devem ser calculados sobre o valor financiado e não sobre o preço total.

O ensino de Matemática Financeira deve esclarecer essas dúvidas, ajudando os alunos a evitar as armadilhas anunciadas na mídia. E isso pode e deve ser feito de modo dinâmico e visual, usando a notação decimal e o eixo das setas, como proposto por Nasser (2010). A animação do power-point ajuda os alunos a compreender a variação do dinheiro no tempo e facilita o desenvolvimento de estratégias próprias na resolução de problemas.

Em relação à educação financeira, Cerbasi (2006) afirma que "um canal importante a desenvolver para a boa formação financeira de nossos filhos é a divulgação deste tipo de conhecimento entre os professores". No entanto, referindo-se ao professor, alerta que:

> além de não ser orientado e motivado para isso, ele, como todo brasileiro adulto, não recebeu esse tipo de informação em sua infância. Se possui algum interesse por finanças, seus conhecimentos na área são recentes e sua insegurança ao utilizá-los é provavelmente grande. (p.38)

Como foi mostrado neste trabalho, pode-se afirmar que o professor não recebeu esse tipo de capacitação nem nos cursos de formação para o magistério, e que esse quadro precisa ser revertido urgentemente.

Referências bibliográficas

Cerbasi, G. (2006). *Filhos inteligentes enriquecem sozinhos*. Brasil: Ed. Gente.

Nasser, L (coord.) (2010). *Matemática Financeira na Escola Básica: uma abordagem prática e visual*. Brasil: Ed. IM-UFRJ.

Novaes, Rosa C. N. (2009). *Uma abordagem visual para o ensino de Matemática Financeira no Ensino Médio*. Dissertação de mestrado, UFRJ, Brasil.

Parâmetros Curriculares Nacionais de 1998. Brasil, Ministério da Educação (1998).

Pinto, M. C. (2011). *A importância da Matemática Financeira na formação de professores*. Monografia, UFRJ, Brasil

Reorientação Curricular (Livro II). Brasil, Secretaria de Educação do Estado do RJ (2005).

Sá, Ilydio P. e Sá, V. G. P. (2009). *Duas vezes 100 é igual a 200?*. Revista do Professor de Matemática, nº 70, pp.13-16. Rio de Janeiro: SBM.

Sousa, G. et al (2008). Capacitando professores para o ensino de Matemática Financeira. Atas do VI Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Rio de Janeiro (em CD), realizado na UniRio, RJ: SBEM-RJ.

Zot, W. D. (2006). *Matemática Financeira*. Porto Alegre: Ed. da UFRGS.

RECUERDOS, EXPECTATIVAS Y CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA MEDIA

Cristina Arceo, Debora Chan, Alejandro Rossetti
Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico. U.T.N. Argentina
cristinaarceo@yahoo.com, debiechan@gmail.com, rossetti_alejandro@yahoo.com.ar

Resumen. Diversos trabajos de investigación han puesto de manifiesto la importancia de analizar las concepciones de los docentes. Éstas se forman y desarrollan en su etapa escolar y son muy resistentes a los cambios. Un análisis de las estructuras de las concepciones y creencias de los docentes puede proporcionar información que permita mejorar los programas de educación de profesores. El objetivo de nuestra investigación fue describir y analizar concepciones, recuerdos y expectativas de los docentes de matemática sobre la enseñanza de la geometría en la escuela media y cómo influyen éstas en sus prácticas docentes. La información obtenida con diferentes instrumentos de recolección fue analizada en primera instancia por separado y luego en forma conjunta buscando resultados coincidentes y disidencias. Inspeccionamos además dependencia e independencia entre las diferentes variables analizadas.

Palabras clave: concepciones, docentes, formación de profesores, geometría

Abstract. Several researches have pointed out the importance of analyzing teachers' conceptions. These conceptions are developed during the schooling period and they are very resistant to changes. The study of teachers' conceptions and believes can provide important information to be used on the improvement of undergraduate teachers curriculums. The purpose of our investigation was to describe and analyze the conceptions, experiences and beliefs of mathematics teachers about geometry in middle school teaching and how they influence in their teaching practice. The survey was performed using different methods of gathering information and the results were examined individually first, and as a whole afterwards, trying to find out agreements and disagreements among the different results. We also studied the dependence and independence of the different variables analyzed.

Key words: conceptions, teachers, teachers training, geometry

Antecedentes y marco teórico

Desde el paradigma del conocimiento del profesor se centra la atención en el estudio del pensamiento del docente sobre la enseñanza del contenido de una disciplina. Se tiene en cuenta que todo proceso de enseñanza y aprendizaje tiene una componente teórica que son las creencias y teorías implícitas que orientan sus ideas sobre el conocimiento, y una componente práctica basada en la repercusión de la actuación del alumno existiendo una relación de interdependencia entre ambas.

Bromme (1988), Ernest (1989), Fennema y Loef (1992) y Marks (1990) caracterizan las concepciones que los individuos tienen sobre la Matemática y su enseñanza y aprendizaje como referencia del conocimiento de los profesores. En el conocimiento didáctico del contenido se parte de las concepciones de los profesores sobre para qué enseñar un contenido.

En el presente trabajo se han considerado las concepciones como el conjunto de posicionamientos que un profesor tiene sobre su propia práctica en relación con los temas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Contreras, 1999).

Fernández y Vale (1994) consideran que las concepciones de los docentes sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas son una de las causas para que persistan propuestas tradicionales más coherentes con la experiencia educativa vivida por ellos en su proceso de formación en lugar de nuevas propuestas.

Barrantes y Blanco (2005), al analizar las concepciones de los profesores en formación, descubren una disociación entre la cultura, de tendencia clásica, de la que proceden los estudiantes y la cultura constructivista. Sostienen que debe revalorizarse el proceso de formación inicial como paso necesario para iniciar procesos de cambio.

Distintas orientaciones teóricas tienen como base de sus estudios que la actuación de los profesores "depende notablemente de cómo interpretan su entorno escolar, qué metas persiguen y cómo aprovechan y califican las informaciones que se ponen a su disposición". (Bromme, 1988, p.22).

Ernest (1989) señala que los conocimientos, las actitudes y las creencias de los profesores sobre las matemáticas condicionan toda su actividad profesional.

De acuerdo a Itzcovich (2005, p.13), un problema habilita un quehacer geométrico genuino cuando para resolver el problema se pone en juego las propiedades de los objetos geométricos. Entre las particularidades para que una situación sea caracterizada como problema geométrico destaca:

- El problema pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico sino a un espacio conceptualizado; las figuras – dibujos trazados por este sujeto quien no hace más que representarlo.
- Las funciones que cumplen los dibujos en la resolución del problema no es la de permitir arribar a las respuestas por simple constatación espacial.
- La validación de la respuesta dada al problema – es decir, la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de su respuesta – no se establece empíricamente, sino que se apoya en las propiedades de los objetos geométricos.
- Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras producen nuevo conocimiento sobre los mismos.

El trabajo escolar debe exceder lo meramente perceptual para constituirse en invitación a la reflexión. El trabajo geométrico debe ir más allá del tratamiento empírico para invitar al despliegue de razonamientos deductivos.

> No se trata de hacer que los alumnos reinventen las matemáticas que ya existen sino de comprometerlos en un proceso de producción matemática donde la actividad que ellos desarrollen tenga el mismo sentido que el de los matemáticos que forjaron los conceptos matemáticos nuevos. (Charlot, 1986, p.1).

Metodología

Nuestro estudio estuvo centrado en los siguientes ejes:

- Indagar acerca de los contenidos geométricos que los profesores dicen impartir y/o imparten en los cursos de las escuelas medias de la C.A.B.A. explorando qué contenidos geométricos se priorizan y cuál es su ubicación en la planificación anual.
- Analizar las actividades que el docente propone en sus clases con el objetivo de que sus alumnos construyan los conceptos geométricos.
- Describir las concepciones docentes acerca de lo que deben saber sus alumnos en el área de geometría
- Determinar la importancia otorgada por el docente a las demostraciones en geometría.
- Identificar la importancia otorgada por el docente a las construcciones geométricas
- Explorar recuerdos de los docentes sobre su propio aprendizaje de la geometría en la escuela media y en el nivel superior.
- Indagar sobre el uso de nuevas tecnologías por parte de los docentes ya sea para la preparación de sus prácticas como para el desarrollo de las mismas.
- Investigar la influencia de las concepciones y creencias en las prácticas áulicas.

La población de estudio estuvo compuesta por docentes de matemática de escuelas públicas o privadas de Capital Federal a cargo de primer o segundo año de enseñanza media en las modalidades bachillerato o técnica. Se seleccionó una muestra intencional de 50 docentes.

Las estrategias e instrumentos de recolección de información fueron: entrevistas semiestructuradas, aplicación de un cuestionario y tratamiento de documentación provista por los docentes (planificaciones y guías de trabajos prácticos).

Se diseñó un sistema de categorías como punto de partida para la elaboración del cuestionario. Luego de la implementación en una prueba piloto, se establecieron finalmente las siguientes categorías con las que se elaboró el cuestionario suministrado a los docentes. Estas categorías fueron determinadas con el objeto de vincular el pensamiento docente con la selección de contenidos, la modalidad del trabajo áulico y la influencia de sus recuerdos, expectativas y concepciones en sus prácticas.

- Enseñanza y aprendizaje de la geometría en la escuela media.
- Actividades propuestas por el docente.
- Recursos utilizados en la gestión de la clase.
- Recuerdos del docente en su rol de alumno.

Se relevaron además datos personales y de formación académica.

El análisis de las planificaciones permitió obtener información sobre:

- Cantidad de contenidos geométricos en relación a la totalidad y ubicación de los mismos en las planificaciones.
- Explicitación de los objetivos, formas de evaluación y criterios mínimos para la aprobación.
- Sugerencia de bibliografía de consulta para el alumno.

El análisis de las guías de trabajos que los docentes proponen para el trabajo de los contenidos geométricos se centró en los siguientes aspectos:

- Analizar si las actividades propuestas por el docente habilitan la construcción de cuerpos teóricos por parte del alumno o se basan en la aplicación de cuerpos teóricos ya disponibles.
- Determinar la existencia o no de secuencias de actividades cuyo recorrido otorguen condición necesaria a las propiedades gestionadas.
- Observar si la adquisición del conocimiento de las propiedades de las figuras es producto de las reflexiones sobre las entidades geométricas involucradas o son el resultado de instancias empíricas sobre las representaciones de las mismas.
- Distinguir si las actividades propuestas involucran quehaceres geométricos genuinos o responden a otras ramas de la matemática en meros contextos geométricos.

El análisis cuantitativo de los datos obtenidos en el cuestionario, planificaciones y guías de trabajos prácticos nos permitió determinar cuáles son las expectativas y concepciones más frecuentes.

Para estudiar la asociación entre variables cualitativas y ordinales se aplicaron los test exacto de Fischer, de homogeneidad e independencia de Chi cuadrado y de análisis de la varianza no paramétrico en bloques de Friedman.

Se realizaron entrevistas semiestructuradas a tres de los docentes participantes del estudio.

Finalmente se realizó un análisis cruzado comparando la información obtenida en los diferentes instrumentos de recolección.

El análisis conjunto de la documentación, el cuestionario y las entrevistas nos dio información sobre los recuerdos, las expectativas y las concepciones de los docentes.

Resultados

En general, los docentes tienen recuerdos de haber aprendido geometría de una manera mecánica y conductista en su etapa escolar. Consideran haber aprendido poca geometría en la escuela media pero todos coinciden en que en la actualidad imparten menos contenidos que los vistos en su etapa escolar o que los que dictaban cuando recién egresaron del profesorado.

Hemos identificado discrepancias entre las concepciones docentes respecto de la importancia que le otorgan a la enseñanza de la geometría en la escuela media y las características de las actividades y tiempo dedicados a la misma.

La falta de tiempo para impartir los contenidos ha sido señalada como la principal dificultad para la enseñanza.

En las guías de trabajos prácticos se observan:

- Pocas actividades que involucren construcciones. La evaluación de las mismas está más centrada en la precisión, prolijidad, procedimiento y adecuado uso de los elementos que en la validación mediante la aplicación de las propiedades de las figuras.
- Muchas actividades en las que se llega a las propiedades de las figuras por relevamiento empírico y no por deducción.
- Un alto porcentaje de ejercicios involucra quehaceres que responden a otras ramas de la matemática en meros contextos geométricos.
- Pocas actividades habilitan la construcción de cuerpos teóricos y en la mayoría son la aplicación de cuerpos teóricos ya disponibles.

Las propuestas de trabajo relevadas en las guías y las respuestas de los docentes entrevistados evidencian la creencia por parte de los docentes de que la geometría se aprende mediante la secuencia repetitiva de ejercicios de aplicación de fórmulas, en la mayoría de los casos tendientes al cálculo de medidas.

El 52% de los profesores considera que los conocimientos didácticos para la enseñanza de la geometría con que egresó del profesorado son escasos o nulos.

Los docentes entrevistados también hacen referencia a una enseñanza tradicional de la geometría en toda su historia escolar.

Hemos observado que aunque los recuerdos de su propio aprendizaje sean negativos, las expectativas sobre la enseñanza – aprendizaje respecto de sus alumnos son similares a las recordadas.

A pesar de las debilidades reconocidas en su formación, un alto porcentaje de los docentes reconoce haber realizado pocos o ningún curso de perfeccionamiento, lo que lleva a pensar en un escaso nivel de reflexión respecto de la enseñanza de la geometría.

Tanto en las respuestas al cuestionario como en las entrevistas se revelan concepciones elitistas del aprendizaje geométrico. Los docentes se autocensuran no enseñando demostraciones por creer que sus alumnos no son capaces de realizarlas o aprenderlas. Tienen presentes las demostraciones, pero sólo forman parte (y en muy pocos casos) de sus exposiciones y no de las tareas esperadas por el alumno. Esto acarrea un tratamiento de la geometría plagada de técnica con poca presencia de teoría que la sustente.

Las actividades propuestas están centradas más en la precisión en el uso de los materiales y en la prolijidad del dibujo que en el descubrimiento y aplicación de propiedades geométricas o un contexto geométrico.

Menos del 10% de los docentes incorporó TICS en sus prácticas. Se halló asociación estadística entre la aplicación de tics en el aula y el uso de tics en los cursos de perfeccionamiento realizados por el docente, no registrándose asociación con aquellos que realizaron cursos de perfeccionamiento en los que no se aplicaron.

No se encontraron diferencias significativas en el uso de software según el desempeño del docente en gestión pública o privada como tampoco respecto de los niveles de enseñanza en los que se desempeñan.

Si bien los docentes reconocen la posibilidad de otra forma de enseñanza y aprendizaje, en general no la suponen posible para el común de los alumnos y la consideran compleja para su aplicación en el aula. Sus expectativas en cuanto los logros de los estudiantes influye en un enfoque mayormente conductista al proponer las actividades. Su experiencia como alumnos es también un referente fuerte al momento de pensar sus prácticas.

Conclusiones

Hemos hallado coincidencias con lo expresado por Fernandes & Vale (1994), sobre que las concepciones de los docentes sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas son una de las causas para que persistan propuestas tradicionales más coherentes con la experiencia educativa vivida por ellos en su proceso de formación en lugar de nuevas propuestas.

La casi inexistente presencia de geometría espacial en la escuela secundaria y los recuerdos de estos docentes sobre su escaso aprendizaje en su etapa escolar coinciden con lo observado por Blanco y Borrahlo (1999) sobre la incidencia de las imágenes y modelos formados en los años transcurridos como alumnos en forma consciente o inconsciente de lo que significa aprender y enseñar Matemática.

A pesar de los nuevos enfoques sobre la enseñanza – aprendizaje de la matemática y en particular la geometría, prevalece en los docentes consultados un enfoque conductista. Sus concepciones y las experiencias vividas como alumnos condicionan sus prácticas.

Consideramos entonces necesario un análisis crítico sobre la formación docente en los institutos terciarios y la necesidad y posibilidad de implementar cambios que proporcionen a los docentes herramienta y estrategias que permitan mejorar sus prácticas.

Referencias bibliográficas

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números 62*, 33 - 44.

Bromme, R. (1988). Conocimientos profesionales de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias 6* (1),19-29.

Charlot, B. (1986, marzo). La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. *Conferencia dictada en Cannes*. Recuperado el 26 de junio de 2012 de http://musicaba.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/cepa/epistemologia_charlot.pdf.

Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.*

Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Ernest, P. (1989). The knowledge, belief and attitudes of the mathematic teacher. A model. *Journal of Educational for Teaching 15,* 13-33.

Fennema, E. & Loef, M. (1992). Teachers' Knowledge and its impact. En D.A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 147-163). New York: MacMillan.

Fernandes, D. & Vale, I. (1994). Two young teachers' conceptions and practices about problem solving. En J.P. da Ponte & J.F. Matos (Eds.) *Proceedings of Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. II, (pp.328-335). Lisbon: Program Committee of 18th. PME Conference. (July 29- August 3, 1994)

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to modified conception. *Journal of Teacher Education 41 (3),* 3-11.

UMA REFLEXÃO SOBRE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA PARA A EDUCAÇÃO INCLUSIVA POR MEIO DE MEMORIAIS DE FORMAÇÃO

Fernanda Malinosky C. da Rosa, Ivete Maria Baraldi
UNESP, PPGEM – UNESP/ Rio Claro Brasil
malinosky20@hotmail.com, ivete.baraldi@fc.unesp.br

Resumo. Apresenta-se uma pesquisa, de caráter qualitativo, em desenvolvimento com o objetivo de elaborar um entendimento acerca da formação dos professores de matemática no Estado do Rio de Janeiro, abrangendo a sua construção histórica, social e política, apontando as suas propagações e suas limitações, no que diz respeito à preparação desses docentes para a educação inclusiva de deficientes visuais. Nesta pesquisa, os professores colaboradores foram convidados a escrever suas narrativas (auto)biográficas, os memoriais de formação, em um blog restrito criado exclusivamente para este fim. A partir dessas narrativas, pretende-se também refletir sobre a formação, as experiências, as práticas inclusivas, entre outras. Além dos memoriais, utilizaremos a fundamentação da formação de professores estabelecida nos documentos oficiais, livros e artigos sobre o tema.

Palavras chave: formação de Professores, inclusão, memoriais

Abstract. It presents a qualitative research, in development, the goal to elaborate an understanding of the mathematics teacher education in the state of Rio de Janeiro, including its historical, social and political, pointing to their propagations and its limitations with regard to the preparation of these teachers for inclusive education of the visual deficiency students. In this research, collaborating teachers were asked to write their (auto) biographical narratives, memorials, in a blog created solely for this purpose and, from these narratives, we intends also to reflect on the teacher education, experience, inclusive practices, among others. In addition to the memorial, we will use the reasoning of teacher education established in official documents, books and articles on the subject.

Key words teacher education, inclusion, memorials

Introdução

Uma pesquisa em andamento

A discussão e reflexão em relação à formação continuada do professor para a inclusão é necessária, visto que a inserção do aluno com deficiência nas classes regulares já está ocorrendo e já há orientações internacionais que a recomendam, como a Declaração de Salamanca e leis brasileiras que a preveem, como a Lei de Diretrizes e Bases (9394/96), a Resolução CNE/CEB nº 2/2001 e seu Parecer nº 17/2001. Estas leis recomendam a matrícula compulsória do aluno com deficiência, a adaptação de currículos e instituições, bem como a capacitação docente. Segundo Cunha, não se pode falar em inclusão escolar sem se referir ao papel do professor, pois o processo inicia-se nele que deve ter condições para trabalhar com a inclusão e na inclusão (Cunha, 2011).

A formação docente continuada aparece associada ao processo de melhoria das práticas pedagógicas desenvolvidas na rotina do professor. A criança com deficiência visual "carece da capacidade de coordenar e organizar os elementos para formar níveis mais altos de abstração; sua capacidade de verificar as informações fica severamente limitada" (Santin & Simmons, 1996, p. 07). Para que as dificuldades sejam superadas, há a necessidade de recursos humanos capacitados ou especializados, materiais específicos, como menciona a Resolução nº 02/2001 e seu parecer. Sendo assim, a intenção desta pesquisa é refletir, a partir do relato dos professores participantes, sobre essas práticas e condições proporcionadas para o trabalho com o deficiente visual. Neste caso, entendemos os cursos de formação inicial e continuada, apoio na escola, sala de recursos, como condições facilitadoras desse trabalho.

Em sua formação (inicial ou continuada), o professor de matemática deve ter oportunidade de refletir e reformular suas concepções educacionais. Para isso, utilizaremos na pesquisa um tipo de narrativa (auto) biográfica, os memoriais de formação, que defendemos ser meios facilitadores para essa ação de reflexão e reformulação. A riqueza de informações presentes nos memoriais de formação e as possibilidades de interpretações que eles promovem levam a compreender os diferentes aspectos da formação docente e encadear acontecimentos relacionados à experiência profissional e, até mesmo, à vida onde o autor é ao mesmo tempo escritor/ narrador/ personagem da história.

Apoiamos-nos em pesquisadores como Prado e Soligo que definem memorial de formação como:

> [...] um gênero textual privilegiado para que os educadores – enfrentando o desafio de assumir a palavra e tornar públicas as suas opiniões, as suas inquietações, as suas experiências e as suas memórias – escrevam sobre o processo de formação e a prática profissional. (Prado & Soligo, 2007, p. 46)
>
> Um memorial de formação é acima de tudo uma forma de narrar nossa história por escrito para preservá-la do esquecimento. É o lugar de contar uma história nunca contada até então – a da experiência vivida por cada um de nós. (Prado & Soligo, 2007, p. 54)

Nessa perspectiva, o propósito deste projeto é olhar para a formação inicial e continuada do professor de matemática frente ao processo de inclusão de educandos com deficiência visual que já está ocorrendo nas escolas regulares, bem como favorecer que o docente, a partir dessa escrita, reflita suas concepções.

A fim de ratificar o que foi dito sobre narrativa dos professores, trazemos o pesquisador Elizeu Souza que diz que:

> Na escrita da narrativa a arte de evocar e de lembrar remete o sujeito a eleger e avaliar a importância das representações sobre sua identidade, sobre as práticas formativas que viveu, de domínios exercidos por outros sobre si, de situações fortes que marcaram escolhas e questionamentos sobre suas aprendizagens, da função do outro e do contexto sobre suas escolhas, dos padrões construídos em sua história e de barreiras que precisam ser superadas para viver de forma mais intensa e comprometida consigo próprio. (Souza, 2006, p. 143)

Diante das perspectivas que os professores têm sobre o seu papel, suas práticas e seu cotidiano escolar, os mesmos poderão, através dos memoriais de formação, expor sua trajetória até a formação, suas experiências após a formação, como se deu o processo de inclusão escolar em seu ambiente de trabalho, como eles lidam com o assunto e quais são suas práticas. E por meio destes memoriais, espera-se poder constituir tramas da formação de professores de matemática de uma região específica do Brasil, Rio de Janeiro, e numa determinada especificidade (educação inclusiva).

No que se refere à construção dos memoriais, foram selecionados os professores de matemática (já em exercício) que participaram do curso de Braille- Módulo Básico oferecido pela Universidade Federal Fluminense (localizada em Niterói, Rio de Janeiro), na modalidade semipresencial. Cabe enfatizar que os professores que fizeram o curso são formados em diversas áreas e o buscaram visando suprir um interesse ou necessidade pessoal/ profissional, que era aprender a ler e escrever em braille, pois alguns já tinham alunos deficientes visuais incluídos em suas classes ou nas escolas nas quais trabalhavam.

Para a escrita dessas narrativas (auto)biográficas, foi criado um blog (www.narrativadeprofessores.com.br/jcow) – registro eletrônico que apresenta um caráter dinâmico e de interação possibilitados pela facilidade de acesso e de utilização – cuja finalidade não será só de manter o contato e direcionar os docentes pesquisados, mas também de compartilhar ideias, dúvidas e experiências acerca do que está sendo produzido.

> Um blog (ou weblog) é um registro publicado na Internet relativo a algum assunto e organizado cronologicamente (como um diário). Pode ainda permitir comentários dos leitores aos textos publicados (denominados posts). Tem como grande vantagem o fato de o autor do blog não necessitar de saber construir páginas para a Internet, ou trabalhar com código. (Vendruscolo, Ferreira, & Rossato, 2008, p.5)

Esta pesquisa utilizando memoriais de formação como fontes narrativas é uma vertente ainda pouco explorada nas pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de História Oral e Educação

Matemática (GHOEM) ao qual fazemos parte. O uso de um blog para a constituição também não foi assunto explorado por essas pesquisas e é uma ferramenta educacional muito recente, no âmbito geral da Educação Matemática.

Sendo assim, este exercício de pesquisa se torna relevante, pois é um assunto em evidência e pouco explorado da forma em que está sendo realizado. Entendemos que são aspectos que devem ser constantemente investigados justamente por colaborar com a reflexão sobre a necessidade de cursos para o desenvolvimento profissional docente, bem como de se verificar a possibilidade de utilização das narrativas (memoriais de formação) em cursos de formação continuada em Educação Matemática (inclusiva).

Por fim, usando estes memoriais, espera-se constituir tramas da formação de professores de matemática de uma região específica do Brasil, Rio de Janeiro, e numa determinada especificidade (educação inclusiva).

Algumas considerações

Esta pesquisa, em andamento, terá em seu final um arremate, o que significa, em muitos trabalhos do GHOEM, "identificar evidências" o que é uma forma de análise.

Compreende-se como processo de análise dos resultados, não a análise do que se foi escrito com o objetivo de julgá-los (professores). Abrahão cita os autores Jovchelovitch e Bauer que falam sobre esse julgamento:

> As narrativas não copiam a realidade do mundo fora delas: elas propõem representações/interpretações particulares do mundo. As narrativas não estão abertas à comprovação e não podem ser simplesmente julgadas como verdadeiras ou falsas: elas expressam a verdade de um ponto de vista, de uma situação específica no tempo e no espaço. (Abrahão, 2006, p.150).

De acordo com Garnica:

> Uma análise não é um julgamento de valor acerca do outro por meio do que foi relatado. Uma análise é um arrazoado das compreensões que conseguimos costurar nessa trama de escuta atenta ao que foi dito. Também não é a fixação de uma versão definitiva do cenário que uma pesquisa pretendeu traçar. O pesquisador defrontar-se-á com várias versões, que são sempre lacunares e entoadas ora em sincronia, ora em desarmonia, e deve trabalhar cada uma delas considerando-as como os modos de os depoentes narrarem-se e, assim, construírem suas verdades como sujeitos históricos, vendo-as registradas. (Garnica, 2010, p. 37)

Dessa maneira, pretendemos elaborar uma compreensão acerca da formação de professores de matemática sob a perspectivada formação para a inclusão como as leis recomendam, colaborando com o projeto de pesquisa mais amplo em que este projeto está inserido, como ressaltado anteriormente.

Alertamos que essa pesquisa encontra-se em sua fase inicial, portanto, não possuímos resultados para apresentar.

Pretende-se por meio dos memoriais, compreender aspectos da formação do professor de matemática da escola básica e a necessidade da formação continuada para uma educação inclusiva.

Cumpre lembrar que esse trabalho está inserido num projeto maior desenvolvido pelo GHOEM que visa efetuar um mapeamento nas diversas regiões brasileiras sobre a formação de professores (Garnica, Silva, & Fernandes, 2010)

Referências bibliográficas

Abrahão, M. (2006). As narrativas de si ressignificadas pelo emprego do método autobiográfico. In: E. Souza, e M. Abrahão, *Tempos, narrativas e ficções: a invenção de si* (pp. 149-170). Porto Alegre: EDIPUCRS.

Cunha, A. (2011). *Práticas Pedagógicas para Inclusão e Diversidade.* Rio de Janeiro: Wak Editora.

Garnica, A. (2010). Registrar oralidades, analisar narrativas: sobre pressupostos da História Oral em Educação Matemática. *Ciências Humanas e Sociais em Revista, 32*, 20-35.

Garnica, A., Silva, H., & Fernandes, D. (2010). História Oral: pensando uma metodologia para a Educação Matemática. *V Congresso Internacional de Ensino da Matemática (V CIEM).* Canoas, RS: ULBRA.

Prado, G., & Soligo, R. (2007). Memorial de Formação: quando as memórias narram a história de formação. In: G. Prado, & R. Soligo, *Porque escrever é fazer história: revelações, subversões e superações* (pp. 45-49). Campinas, SP: Alínea.

Santin, S., & Simmons, J. (1996). Problemas das crianças portadoras de deficiência visual congênita na construção da realidade. *Revista Benjamin Constant*, 07-11.

Souza, E. (2006). Pesquisa narrativa e escrita (auto) biográfica: interfaces metodológicas e formativas. In: E. Souza, & M. Abrahão, *Tempos, narrativas e ficções: a invenção de si* (pp. 135-147). Porto Alegre: EDIPUCRS.

Vendruscolo, F., Ferreira, K., & Rossato, M. (2008). O uso do blog no processo educacional: relato de experiência da escola municipal de ensino fundamental professora Cândida

Zasso de Nova Palma. *14ª Jornada Nacional de Educação: a educação na sociedade dos meios virtuais* (pp. 1-8). Santa Maria, RS: UNIFRA.

FORMAÇÃO CONTINUADA: ESPAÇO REFLEXIVO DAS PRÁTICAS NUMÉRICAS NOS ANOS INICIAIS

Maria das Graças Bezerra Barreto, Maria Elisabette Brisola Brito Prado
NIBAN – Universidade Bandeirante de São Paulo. Brasil
magrabela@uol.com.br, bette.prado@gmail.com

Resumo. Este artigo objetiva dialogar com educadores matemáticos sobre os resultados parciais de uma pesquisa que promoveu estudos reflexivos, observação de práticas e mediações realizadas pelos professores que ensinam Matemática em relação aos saberes numéricos dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A participação de sete professoras de escolas públicas municipais de São Paulo envolveu Formação Continuada de Matemática, no horário coletivo de estudo nas escolas, sessões individuais de planejamento e observação da prática. Os dados coletados destacaram as negociações e propostas ocorridas durante o processo estratégico de retroalimentação, propiciando estudos teóricos e práticas diferenciadas em sala de aula. Os resultados evidenciaram avanços no discurso do professor e uma compreensão maior de como se aprende e de como se ensina Matemática. Concluímos que o processo formador para propiciar mudanças, precisa dar maior atenção às reais necessidades dos envolvidos, as atividades vivenciadas e aprendizados estimulados.

Palavra chave: reflexão, diagnóstico, contagem, números

Abstract. This article aims to dialogue with mathematics educators on the partial results of a research study, which promoted reflexive studies, practices observation and mediations conducted by teachers who teach mathematics in relation to the numerical knowledge of the students in the early years of elementary school. The participation of seven teachers from São Paulo (Brazil) municipality´s public schools included Mathematics Continuing Education in school´s collective study hours, individual sessions for planning and the observation of classroom practices. The collected data highlighted the negotiations and proposals made during the strategic process of feedback, providing theoretical study and a differentiated classroom practice. The results showed improvements on teacher´s speech, a greater understanding of how one learns and how to teach mathematics. We conclude that the continued education process, to introduce changes, need to pay more attention to the true needs of those involved, to the activities experienced and to the stimulated learning.

Key words:reflection, diagnosis, counting, numbers

Introdução

O ensino de Matemática nos anos inicias, do Ensino Fundamental tem sido uma das preocupações apontadas em muitas pesquisas, instigando a compreender como as formações devem ser estabelecidas/organizadas de maneira a contribuir efetivamente com o professor em seu fazer matemático, e favorecer pensares e repensares, construções e desconstruções em/entre seus participantes. O fazer matemático dos professores não especialistas que ensinam Matemática tem atraído a atenção de vários autores, principalmente em relação às situações nas quais práticas cheias de dúvidas e incertezas são responsáveis por tolher a imaginação e a criatividade em sala de aula. Muitas vezes, elas são responsáveis por retardar ou mesmo excluir o direito de seus alunos navegarem pelo mundo mágico do falar, ler, produzir e interpretar a Matemática na vida ou no cotidiano escolar. O espaço da sala de aula no qual deveria ser permitido conjecturar, elaborar as próprias regras, descobrir procedimentos, refletir sobre os resultados, generalizar e abstrair, é subutilizado, onde a técnica, o treino e o "faça igual" imperam. Durante as experiências vivenciadas, ouvindo os professores nas Formações Continuadas e observando as práticas, percebemos que esses momentos de descobertas deveriam estar mais presentes nas salas de aula, no entanto não é uma constante nas escolas. Temos encontrado, ao mesmo tempo, alguns professores desanimados, desmotivados, repletos de dúvidas e amedrontados com a Matemática e outros, esperançosos em poder ensiná-la com mais desenvoltura. Diante desse cenário, nossa investigação abrangeu o como a Matemática adentrava as salas de aulas, nos anos iniciais, principalmente em relação ao tratamento dado ao ensino do Sistema de Numeração. Os argumentos iniciais foram de que o aluno sabe número quando lê e escreve convencionalmente. Para os alunos desenvolverem essas habilidades acreditava-se (ainda acreditam) no preenchimento de páginas e páginas repletas de números ordenados, mesmo que durante a realização da tarefa ficassem evidenciados os conflitos com relação às escritas numéricas pedidas. Nos diálogos estabelecidos com as professoras, percebemos as dúvidas e a falta de compreensão sobre as hipóteses criadas pelos alunos com relação ao funcionamento dos números. Por isso, elas deixavam de investigar como seus alunos pensavam e sabiam números, e de entender conflitos e certezas apresentados por eles. Nesse sentido, este artigo apresenta resultados parciais de uma pesquisa realizada no contexto escolar que analisou as reflexões compartilhadas dos professores que ensinam Matemática, com relação aos saberes e às produções numéricas de alunos dos anos iniciais, durante a Formação Continuada.

Formação continuada

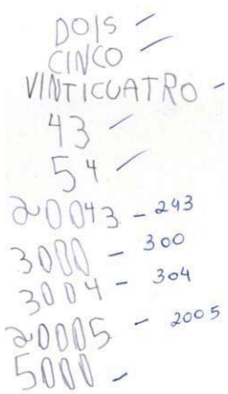
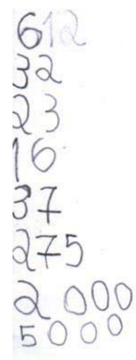
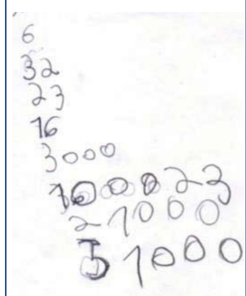
Acreditamos que o professor revela, na prática de sala aula, os estudos realizados em suas formações, as experiências vivenciadas e compartilhadas e as negociações realizadas entre seus pares. Entendemos que o desempenho dos alunos é a somatória do conhecimento matemático do professor e do conhecimento pedagógico utilizado no ensino da Matemática, tal qual nos evidenciou Shulman (1986). Diante dessas certezas, realizamos a formação amparada pelas ideias de Zeichner (2000) e Imbernón (2009), no interior da escola e que permitiu potencializar o intercâmbio entre professores e pesquisadores. A formação favoreceu efetivar relações afetivas, na qual ouvir o outro e ouvir do outro boas práticas tiveram grande influência na compreensão de fazeres e de caminhos traçados, a serem escolhidos e percorridos. Grupos-escola produtivos, constituídos em grupos de estudos e fóruns, coordenados e destacados por Nacarato & Paiva (2008); Fiorentini (2009) e Serrazina & Monteiro (2004) com a finalidade de discutir Matemática e de potencializar o intercâmbio entre professores e pesquisadores, propagando seus estudos e discussões em periódicos ou em artigos acadêmicos. A realização da formação na escola foi interpretada como um espaço de aplicação do conhecimento adquirido e a oportunidade de analisar e refletir as práticas ali ocorridas.

Metodologia

A metodologia da pesquisa de natureza qualitativa envolveu sete professoras dos anos iniciais, do Ensino Fundamental pertencentes às escolas públicas municipais de São Paulo, em Formação Continuada de Matemática. A formação ocorreu dentro do horário coletivo de estudo da escola, abrangendo sessões individuais de elaboração e planejamento da prática, observação e análise da prática e posteriormente, discussão do observado no individual e no coletivo. O levantamento dos dados teve como base questionários, entrevistas semiestruturadas, narrativas sobre a trajetória profissional e os registros de acompanhamento da elaboração de atividades e observação da prática. No processo de estudo durante a formação, o professor tal qual o aluno vivenciou, investigou e discutiu atividades didáticas, sendo impelido a repensar sobre a aplicação delas e as possíveis intervenções na sala de aula. Consideramos a Formação Continuada um ambiente propício de revelar e transformar teorias em subsídios às diferentes escolhas realizadas pelos professores e permite a análise dos caminhos percorridos pelos alunos, de forma a ampliar entendimentos e percepções. Os dados registrados refletiram as discussões, negociações e as propostas realizadas no decorrer da pesquisa/formação e produzidas por um processo estratégico de retroalimentação. O ponto de partida foi o diagnóstico/problematização cujo resultado abalizou a organização da formação/estudo. O estudo individualizado com as professoras constituiu apoio para a elaboração ou escolha de uma atividade matemática para ser aplicada em sala de aula. Essa prática foi objeto de observação e análise reflexiva realizada em dois momentos: no individual, com a professora e no coletivo, durante a formação. As dúvidas ou incompreensões suscitadas serviram de diagnóstico para novos estudos e novas reflexões na formação. Esse processo de retroalimentação sintetizado em diagnóstico – formação – prática – reflexão – formação é cíclico e dinâmico.

Análise e resultados

Iniciamos a discussão na Formação Continuada, utilizando um diagnóstico anteriormente realizado: um ditado de números, que permitiu compreendermos os pensares e saberes mobilizados e produzidos pelos professores, durante o processo do ensinar e do aprender, a respeito do Sistema de Numeração Decimal. Esse processo diagnóstico/sondagem numérico, que direcionou nossa atenção e ação, era realizado oficialmente por todas as escolas municipais de São Paulo com números previamente determinados e cujo critério de escolha não era compreendido pelas professoras. Ao analisarem as escritas numéricas dos alunos, as professoras afirmaram encontrar números escritos "apoiados na fala", ou o uso de "muitos zeros ou alguns" em substituição aos algarismos que apresentavam dificuldades em sua identificação. Declararam ao mesmo tempo: "alguns alunos usam letras quando escrevem os números desconhecidos, eles não reconhecem e nem sabem ainda os números. Outros escrevem o número invertido. O que fazer com eles?" Ao analisarmos as dúvidas e as certezas presentes em seus discursos, encontramos em Tardif o alicerce para compreendermos que os saberes e os pensares são constituídos pela história de vida e desenvolvidos no decorrer da carreira do professor, pois "o profissional, sua prática e seus saberes não são entidades separadas, mas copertencem a uma situação de trabalho, coevoluem e se transformam" (Tardif, 2000, p.11). Conhecermos a trajetória desses professores, por meio de suas narrativas orais e escritas, foi essencial para a compreensão das asseverações e das estratégias praticadas, definindo as escolhas dos textos a serem estudados. Para Tardif (2000), o professor precisa compreender para "saber-fazer e saber-ser". A partir dessa análise, desencadeamos a organização de uma sequência numérica realizada pelas professoras, após discussão dos critérios com a formadora, desencadearam os ditados dos números: 6, 32, 23, 16, 300, 123, 2000, 5000, elaborado por Roseane e, os números: 2, 5, 24, 43, 54, 243, 300, 304, 2005, 5000, organizados por Cecília e Lygia (as professoras utilizam pseudônimos). Com as escritas dos alunos em mãos e a certeza de que "erro é fecundo e desempenha um papel construtivo na aquisição de conhecimentos" (Moreno, 2006, p.53), as formadoras encaminharam a discussão para que fizessem um contraponto entre o discurso incorporado e utilizado com certo orgulho e o observado nas sondagens. Compreender a diferença entre esses discursos envolvia a tarefa de despertar olhares atentos para as escritas e leituras numéricas dos alunos, bem como a percepção e entendimento dos saberes mobilizados e elaborados por eles. Essa análise compreensiva desencadeou novos encaminhamentos metodológicos, escolhas de atividades diferenciadas e uma intervenção/mediação que provocasse avanço na compreensão da organização do sistema e na percepção do seu funcionamento. Para essa tarefa, aprofundamos os estudos com as ideias de Vergnaud (2009), Brizuela (2006), Moreno (2006), Lerner & Sadovsky (1996), com o intuito de reavaliar ou validar discursos, ampliar a capacidade de interpretação dos saberes matemáticos e subsidiar e reavaliar intervenções/mediações, dos professores e da formadoras. Entendemos por intervenção, a ação realizada pelo formador/professor frente a uma determinada situação que envolve reflexão, solução e tomada de decisão imediata. O quadro a seguir reflete parte das interpretações realizadas pelas professoras, no grupo-escola:

Aluno C Profª Cecília	Aluno D Profª Lygia	Aluno E Profª Roseane	Aluno F Profª Roseane
 Figura 1: Aluno C	 Figura 2: Aluno D	 Figura 3: Aluno E	 Figura 4: Aluno F
Escreveu unidades e dezenas convencionalmente e para as centenas e milhares apoiou-se na fala.	Escreveu unidades, milhares e as dezenas até 40 convencionalmente e nas centenas fez uso de "coringas".	Escreveu unidades, dezenas e milhares convencionalmente e para as centenas fez uso de algarismos sem relação com o número ditado.	Escreveu unidades e dezenas convencionalmente e para as centenas e milhares apoiou-se na fala.

Fonte:Acervo pessoal

Quadro 1: Análise de sondagem de números de março/2011

Nossa atitude mediadora tentou assegurar a todos o direito de verbalizar pensares e pesares, em uma relação de confiabilidade, sem censura, sem juízo de valor, sem certo e errado, sem linha divisória entre proibido e permitido. Essa atitude formadora transposta para a sala de aula, despertando reolhares diferenciados para os saberes representados nos fazeres de seus alunos e de suas dificuldades: escritas imperfeitas, muitas vezes sem expressar "as reflexões feitas pela criança sobre o sistema de numeração" (Brizuela, 2006, p. 32). Esses novos conhecimentos provocaram nas professoras uma maior preocupação com as estratégias de ensino e com a organização da rotina matemática semanal. Uma demanda emergente que nos permitiu peregrinar por algumas das propostas de intervenções apresentadas por Moreno (2006), por Lerner & Sadovsky (1996), praticando e ponderando a necessidade do recitar para entender a ordem numérica. Recitação na ordem crescente ou decrescente adentrou a sala de aula e passou a fazer parte da rotina diária de algumas práticas. Recitar a sequência iniciando por números variados, saltando quantidades diferentes das que regularmente fazem 5 em 5, 2 em 2 e outros. Discussões a respeito da sequência oral: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, registrada no quadro suscitou o levantamento de questões como: "É possível perceber regularidade na sequência? Qual o próximo número com zero?" Atividades e análises que passaram a fazer parte da rotina dos 3º e 4º anos também. No início, a proposta dessas e outras atividades foram rejeitadas pelas participantes, o que era compreensível, pois para realizá-las precisavam adquirir mais confiança em seus cálculos mentais, pois segundo elas "precisavam de mais treino". Foram observando e reconhecendo a importância de atividades diversificadas com contagem para quantificar números e para a obtenção de resultados de cálculo. Como exemplo desse reconhecimento, relataremos a observação da prática da professora Raquel. Ela realizou o projeto Coleção de Tampinhas, de garrafas pet com o propósito de observar como os alunos contavam objetos em coleções móveis. Organizou seus alunos em duplas e alguns alunos não haviam levado tampinhas. Diante do problema, a professora compartilhou com a classe, perguntando: "Como era possível fazer a tarefa, se alguns alunos não haviam trazido tampinhas?" A sugestão recebida foi a de compartilhar as tampinhas entre eles.


Fonte: Acervo pessoal

Figuras 1 e 2: Contagem da Coleção de Tampinhas

Em uma das duplas, a aluna que trouxera mais tampinhas resolveu dividir com a colega, em partes iguais. Para dividir, a contagem foi realizada por agrupamentos de seis em seis para cada uma. Quando a quantidade diminuiu, alterou o agrupamento de distribuição de 3 em 3, de 2 em 2, de 1 em 1. Inicialmente, a divisão não era o objetivo da professora. No entanto, ela aproveitou o momento para problematizar a situação e ficou muito admirada ao perceber que seus alunos tinham noção de divisão mais ampliada que não a básica de 1 em 1. Um dividir mais elaborado, apoiado em diferentes agrupamentos baseados nos conhecimentos adquiridos nos momentos de recitação realizados. A prática da professora, após a discussão na formação, incentivou outras professoras a realizarem o projeto em suas salas de aula.

Outra situação constatada por elas foi a relevância dos quadros numéricos, utilizado para ampliar o entendimento das regularidades e das regras de organização do sistema, como também, as interpretações numéricas. Em muitas salas, a leitura dos números do quadro numérico entrou na rotina, em uma alternância com a recitação oral. Na sala da professora Roseane, observamos um quadro numérico diferente de outras salas, afixado em uma parede. Montado com a participação dos alunos, conforme sugestão no momento individual de formação, com duplo propósito: diagnosticar como os alunos interpretavam números desconhecidos e observar como acontecia a colaboração entre eles. A professora desempenhou o papel de mediadora das discussões ocorridas e incentivou/incitou a confrontação entre os pensares dos alunos. Tomando como partida sua afirmação "meus alunos recitavam sem interferência até o número 30", ampliamos o preenchimento do quadro até o número 50. Na classe com mais ou menos 30 alunos, as fichas restantes foram distribuídas aos alunos com maiores dificuldades. Alguns receberam até mais de duas fichas. No decorrer do relato oral, Roseane, com entusiasmo e admiração afirmou: "eu não acreditava que eles dariam conta da atividade. Os alunos que sabiam mais ajudavam os colegas a colar seu número no lugar certo e justificavam o posicionamento do número com entusiasmo. Eles não só deram conta da tarefa, como querem realizá-la todos os dias. Eu não tinha ideia de que eles sabiam tanto", finalizou com orgulho. Essa situação nos fez refletir sobre as muitas vezes que sugerimos atividades para serem realizadas em sala de aula e não temos a verdadeira dimensão da abrangência da atividade, se ela é ou não uma situação que oportuniza aprendizagem.

A Formação Continuada na escola oportunizou-nos a constatação da eficiência ou não das atividades sugeridas e a percepção do quanto o processo dinâmico – estudo, prática, reflexão, à medida que se institui permitia a constituição de profissionais reflexivos e investigativos, provocando novos olhares, novas práticas e despertando os interesses por novas teorias. Momentos vivenciados de desconstrução de saberes e fazeres, de estudos, de investigação, de trocas, de colaboração e de transformação. Professores exercendo o papel de investigadores e fazedores reflexivos, tal qual a epistemologia da prática proposta por Schön (1997) e destacados pelos estudos de Serrazina (2002) e de outros pesquisadores.

Conclusão

A Formação Continuada permitiu-nos concluir que os estudos teóricos realizados sobre o Sistema de Numeração Decimal, as discussões e os trabalhos conjuntos com as professoras foram determinantes ao evidenciar nos resultados os avanços percebidos em seus discursos e na ousadia investigativa do anteriormente praticado. Percebemos uma maior preocupação e atenção com os fazeres em sala de aula e com a compreensão do sentido e do significado do como se dá o aprender e ensinar Matemática, confirmada por suas declarações "Agora sim, parece que entendemos o como fazer". As professoras a cada encontro mostravam-se cheias de esperanças, falavam de seus deslumbramentos por um novo horizonte e pelas infinitas possibilidades do como fazer matemática. Elas demonstraram com suas participações que um processo de formação dentro da escola a importância de um formador-pesquisador que reveja constantemente seu papel de formador e incorpore em sua prática as reais necessidades dos envolvidos, suas vivências e seus aprendizados. Os resultados evidenciaram, ainda, a importância da interligação entre formação e pesquisa e a necessidade de serem abordados como processos independentes e, ao mesmo tempo, complementares pela relação entre teoria e prática, detectando nas práticas as teorias subjacentes.

Referências bibliográficas

Brizuela, B. M. (2006). *Desenvolvimento matemático na criança: explorando notações*. Porto Alegre: Artmed.

Fiorentini, D. (2006). Grupo de Sábado: Uma historia de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar matemática. In D. Fiorentini & E. M. Cristovão (Org.), *Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática* (pp. 13-36). Campinas: Alínea.

Imbernón, F. (2009). *Formação Permanente do professorado: novas tendências*. São Paulo: Cortez.

Lerner, D. & Sadovsky, P. (1996). O sistema de numeração: um problema didático. In C. Parra & I. Saiz. *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. (pp. 73-155). Porto Alegre: Artes Médicas.

Moreno, B. R. (2006). O ensino do número e do sistema de numeração na educação infantil e na 1ª série. In M. Panizza, (Org.) *Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais: análise e propostas*. (pp. 19-33). Porto Alegre: Artmed.

Nacarato, A. M. & Paiva, M. A. V. (2008). *A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas*. Belo horizonte: Autêntica.

Schön, D. A. (1997). Formar Professoras como Profissionais Reflexivos. In A. Nóvoa, (Coord.), *Os Professores e a sua Formação*. (pp. 77-91). Lisboa: Dom Quixote.

Serrazina, L. (2002) *A formação para o ensino da Matemática na Educação Pré-escolar e no 1º ciclo do Ensino Básico*. Portugal: Porto Editora.

Serrazina, L. & Monteiro, C. (2004). *Professores e novas competências em Matemática no 1º ciclo. Projeto Competências de cálculo e sentido do número no Primeiro Ciclo.* Acesso 18 janeiro 2011, de http://fordis.ese.ips.pt/conúmero/textos/ novas_comp_prof.pdf.

Schulman L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Education*

Researcher, 15(2), 4-14. Acesso 15 agosto 2011, de http://www.jstor.org/stable/ 1175860

Tardif, M. (2000). Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários. *Revista Brasileira de Educação* (13), 5-24. Acesso 19 agosto 2011, de http://educa.fcc.org.br/pdf/rbedu/n13/n13a02.pdf.

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática* e *a realidade*. Curitiba: Editora UFPR.

Zeichner, K. (2000). Formação de professores: contato direto com a realidade da escola. *Presença Pedagógica*, 6(34), 5-15.

CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE A FORMAÇÃO CONTINUADA

João Ferreira da Silva Neto, Iranete Maria da Silva Lima
Universidade Federal de Pernambuco Brasil
joaofsilvaneto@hotmail.com, iranetelima@yahoo.com.br

Resumo. Neste artigo, apresentamos um recorte de um estudo que objetivou identificar concepções sobre a formação continuada de professores que ensinam Matemática em escolas públicas de Alagoas, Brasil. Com base nos modelos clássicos de formação, bem como nos estudos sobre esta temática, construímos categorias de concepções expressas por meio de assertivas relacionadas às dimensões cognitiva, pedagógica, profissional e socioafetiva. As respostas de 87 professores apontam a predominância de concepções relacionadas à ideia de *atualização pedagógica* e uma tendência à mobilização de concepções que se apoiam em um modelo de formação mais emancipador (racionalidade prática). Por outro lado, eles valorizam uma formação instrumental, sugerindo a influência da racionalidade técnica.

Palavra chave: formação continuada, concepções, professor de matemática

Abstract. This paper presents part of a research aiming to identify conceptions about in service training of teachers who teach mathematics in states schools of Alagoas, Brazil. On the basis of classic models teachers training, as well as the literature on this subject, we built categories of concepts expressed by statements related to cognitive, pedagogical, professional and socio-affective. The answers of 87 teachers point to a predominance of conceptions related to the idea of *updating teaching* and a tendency to mobilize conceptions that rely on an emancipator model of teachers training (practical rationality). Nonetheless, they valorize an instrumental model of teacher training, which suggests the influence of technical rationality.

Key words: in service education, conceptions, mathematics teacher

Introdução

Vivemos numa sociedade em que as mudanças têm ocorrido numa celeridade nunca antes vista. Nesse contexto, a formação continuada de professores, ou de qualquer outro profissional, tem surgido como alternativa para acompanhar esse ritmo. É o que evidencia o estudo de Gatti (2008) quando aponta o crescimento de diversas atividades de formação continuada e destaca o interesse dos profissionais em participar desse tipo de formação como forma de melhorar seu desempenho para atender as condições emergentes da sociedade contemporânea. Nesta direção, Santiago e Batista Neto (2011) acrescentam que o crescimento de políticas de formação de professores também tem sido acompanhado pela exigência de novas bases teóricas para esta formação, embora salientem a presença de concepções tradicionais no desenvolvimento do processo de formação (inicial e/ou continuada) vigente.

Nesse contexto, investigar as práticas formativas tem se tornado cada vez mais necessário em qualquer domínio. Assim, abordamos nesse artigo as concepções que professores que ensinam matemática na Educação Básica na Rede Estadual de Ensino em Alagoas mobilizam sobre a formação continuada. Com efeito, Dubar (1997) ressalta a importância de se conhecer as concepções de profissionais em serviço como elemento essencial para subsidiar a elaboração de tais formações.

Para Santos e Terrazan (2007), a maioria das práticas formativas adotadas no Brasil se baseia no discurso da ação inovadora, o que pode contribuir para ocultar o predomínio de ações de formação pontuais e fragmentadas. Estes autores buscaram caracterizar analiticamente algumas propostas de formação oferecidas a professores da educação básica. Esta caracterização fez emergir algumas concepções que orientam tais propostas, as quais, retomaremos adiante.

Modelos de formação de professores

Os estudos de Schön (2000), Silva (2008), dentre outros estudiosos do assunto, explicitam que os modelos epistemológicos subjacentes às concepções de formação de professores estão relacionados a duas racionalidades: a *técnico-instrumental* e a *prático-reflexiva*.

Na *racionalidade técnico-instrumental*, a identidade profissional do professor se constitui a partir do domínio dos conteúdos a ensinar, aliado a um "treinamento" sobre métodos e técnicas pedagógicas que concebem a qualificação como sinônimo de domínio dos conteúdos. Nesse modelo, o professor é considerado um técnico que aplica o conhecimento científico diretamente na sala de aula.

De modo distinto, o modelo de formação baseado na *racionalidade prático-reflexiva* valoriza o trabalho docente e concebe o professor como um profissional autônomo que reflete sobre sua prática, sendo capaz de fazer suas escolhas e de tomar suas decisões; inclusive decisões didáticas (Lima, 2009). Segundo Garcia (1992, p. 55), "a indagação reflexiva analisa causas e consequências da conduta docente, superando os limites didáticos e da própria aula". Desse modo, para que se concretizem mudanças nos processos formativos, é preciso haver antes de tudo uma evolução nas concepções não apenas dos professores, mas também dos alunos, dos pais, dos gestores escolares, refletindo no sistema educativo na sua totalidade.

Concepções de formação continuada

O termo concepção é utilizado de maneira diversificada em diversos domínios da pesquisa, inclusive em Educação e em Educação Matemática. Ele é utilizado, por exemplo, como sinônimo de representações, crença, concepção errônea, estrutura alternativa e raciocínio espontâneo. Para orientar este trabalho, utilizamos o termo concepção no seu senso comum como sendo "uma crença que tem o sujeito em relação a algo" ou, numa abordagem construtivista, "como um tipo específico de conhecimento individual construído na interação do sujeito com o meio (um ambiente)" (Lima, 2009, p. 29).

Santos e Terrazan (2007) buscaram caracterizar propostas de formação continuada em algumas realidades brasileiras. Para tanto, os autores utilizaram como fonte de pesquisa as publicações das Reuniões Anuais da *Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação* – ANPED e dos *Encontros Nacionais de Didática* e *Prática de Ensino* – ENDIPE. Dentre os resultados obtidos no estudo destacamos: a concepção *forma mais genérica*, a concepção *associada a processos reflexivos* e a concepção *ligada à atualização pedagógica*. Tendo em vista que tomamos esta categorização de concepções como base no nosso estudo, apresentamos a seguir uma breve descrição de cada uma delas.

Concepção "forma mais genérica"

Essa concepção de formação está baseada no modelo da racionalidade técnica. Pérez Gómez (1992) afirma que esta concepção foi herdada do positivismo que pressupõe uma atividade docente norteada pela aplicação rigorosa de teorias e técnicas científicas. Nesta perspectiva, o professor funciona como um "técnico" que instrui o seu aluno com o conhecimento científico, sem considerar, na maioria das vezes, algumas dimensões inerentes à prática docente como, por exemplo, as dimensões pedagógica e social (Silva, 2008). A formação continuada concebida com base nesta concepção está vinculada à ideia de "preparação e aperfeiçoamento profissional de caráter técnico-pedagógico." (Silva, 2001, p. 150).

Concepção "processos reflexivos"

Essa concepção de formação está baseada no modelo da racionalidade prática. Na acepção de Silva (2007, p. 28) que se refere a um *modelo emancipador* de formação, ela tem "um caráter unificado, utilitário e abrangente" uma vez que requer de quem a mobiliza uma sólida formação teórica e cultural. Neste quadro, a formação do professor deve efetivamente ser um *continuum* que contribua para o desenvolvimento da sua autonomia. Em decorrência disso, ele deve produzir conhecimentos que lhe permitam articular a teoria com a prática efetiva em sala de aula e, por outro lado, criar as situações didáticas necessárias para favorecer a aprendizagem do aluno como sujeito autônomo na construção do conhecimento.

Concepção "atualização pedagógica"

Esta concepção privilegia "[...] o acesso aos estudos, às pesquisas e, portanto, aos conhecimentos mais recentes produzidos no campo educacional, independente destes conhecimentos servirem ou não como instrumental para mudar as realidades onde a escola está inserida" (Santos e Terrazan, 2007, p. 17).

De forma retórica, ela se aproxima do modelo da racionalidade prática, porém na efetivação das ações de formação continuada distancia-se dele, aproximando-se do modelo da racionalidade técnica quando o professor se considera (ou é considerado) um instrumento de transmissão, sem refletir na relação que este conhecimento entretém com a realidade do aluno e da sala de aula. A formação continuada baseada nesta concepção valoriza a participação passiva dos professores que devem se adequar às orientações dos especialistas que as propõem, sem questioná-las ou criticá-las.

Formação de professores de matemática

No cenário nacional, o desenvolvimento de pesquisas sobre as problemáticas relativas ao ensino e a aprendizagem de matemática, particularmente sobre a formação de professores de Matemática, tem se tornado cada vez mais sólido. Analisando mais de cento e vinte dissertações e teses produzidas nos mais de trinta Programas de Pós-Graduação na década 1990, Fiorentini e Lorenzato (2009) colocam em evidência um número relevante de investigações sobre a problemática da formação de professores de matemática, realizadas em diversas universidades brasileiras. Os autores ressaltam também estudos sobre a prática pedagógica, temática já consolidada como linha de pesquisa em Programas de Pós-graduação neste domínio, o que evidencia a preocupação dos educadores matemáticos com este campo de investigação.

Buscando analisar como professores de Matemática vivenciam a formação continuada, Modesto (2002) utiliza-se de uma análise fenomenológica para investigar a temática em alguns municípios do Estado de São Paulo. Neste estudo, constatou-se um distanciamento entre a formação inicial do professor e sua atuação prática docente. Os resultados dos estudos de Silva (2008) realizado com professores formadores em cursos de licenciatura em matemática comprovam a sua prevalência sobre as posturas dos docentes. O estudo coloca em evidência a dualidade entre o discurso do professor sobre a adoção de uma prática reflexiva e o que de fato se materializa na sala de aula.

Assim, entendendo que uma proposta formativa se constitui e se efetiva a partir das concepções dos atores envolvidos, e considerando a importância da valorização do professor como protagonista da melhoria das ações educativas, fizemos o seguinte questionamento: *Que concepções sobre a formação continuada têm professores que ensinam Matemática no ensino fundamental em escolas públicas no estado de Alagoas*?

Na busca por elementos de resposta a esta questão, implementamos um dispositivo de pesquisa que apresentamos a seguir em linhas gerais.

Metodologia do Estudo

A investigação de caráter exploratório foi desenvolvida junto a 87 professores que ensinam Matemática no sexto ao nono ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio na rede pública estadual em onze municípios do Estado de Alagoas (Silva Neto, 2012).

O estudo atingiu mais de 16% dos docentes que ensinam Matemática nesta rede de ensino. A maioria (66,7%) dos professores investigados é licenciada em Matemática, o que representa um percentual importante diante da carência de docentes nas diversas áreas do conhecimento, sobretudo de professores de Matemática nas instituições alagoanas (Alagoas, 2006).

Com base nos resultados do estudo piloto realizado, elaboramos um questionário semiestruturado, dividido em três etapas. A primeira, constituída de dez questões, foi destinada à identificação do perfil de formação inicial e continuada, bem como o perfil profissional dos professores investigados. A segunda contém questões de associação dirigida, nas quais foi solicitado que cada professor escolhesse dentre um conjunto de palavras fornecidas, as cinco palavras que mais lembram a formação continuada do professor de Matemática (Silva, 2008). Na terceira parte do questionário, constituída por quatro questões, solicitamos aos professores que atribuíssem valores segundo o grau de relevância a algumas assertivas propostas com o objetivo de identificar elementos que caracterizassem suas concepções sobre a formação continuada.

Para analisar a primeira e a segunda etapas do questionário fizemos um estudo de frequência das respostas dadas às questões, à luz da *Análise do Conteúdo* (Bardin, 1977). Levando em conta a complexidade das ações educativas, a partir de uma análise qualitativa buscamos identificar as concepções mobilizadas pelos professores sobre a formação continuada tomando por base uma categoria de dimensões inspirada na pesquisa de Silva (2008), a saber: *dimensões profissional, cognitiva, socioafetiva* e *pedagógica*. Além dessas, ajuntamos a categoria "outra", prevendo eventualmente a explicitação de outras dimensões que poderiam emergir das respostas dos professores, dando indícios importantes das suas concepções.

Alguns resultados do estudo

Os resultados mostram que a maioria (57,5%) dos professores investigados, todos em serviço, raramente participa de atividades de formação continuada. Para os que participam, as atividades são propostas por programas vinculados ao Ministério de Educação ou por instituições particulares de Ensino Superior. As propostas geridas por Instituições Públicas de Ensino Superior foram citadas em número reduzido. Os professores alegaram que, em geral, nas atividades formativas têm se discutido as questões matemáticas em articulação com os aspectos educacionais, o que pode significar que há uma preocupação relevante dos conceptores destas atividades com as questões que envolvem o ensino e a aprendizagem da Matemática. As temáticas mais citadas estão presentes nas discussões atuais sobre o ensino e a pesquisa em Educação Matemática.

Em resposta à solicitação de assinalarem as palavras que mais lembram a formação continuada de professores de matemática, os professores elencaram, em maior número, as seguintes palavras: *aprendizagem* (18 citações), *contextualização* (17 citações), *atualização* e *planejamento* (13 citações), *didática* e *ensino* (12 citações). Dentre estas palavras escolhidas, apenas a palavra *atualização* não está vinculada à dimensão pedagógica. Esses resultados apontam para o predomínio de uma concepção que prioriza os aspectos pedagógicos na formação continuada. Consideramos que a valorização da dimensão pedagógica é um indicativo relevante de suas concepções sobre a formação continuada, bem como do modelo de formação que eles gostariam de ter acesso. Quando perguntamos qual dentre as palavras que eles escolheram na questão precedente seria a que melhor define a formação continuada de professor de matemática, prevaleceu a dimensão pedagógica, o que já era esperado, tendo em vista a estreita relação existente entre as duas questões respondidas.

Solicitamos aos professores para atribuir um grau de importância à formação continuada. A maioria dos professores (57,5%) respondeu que esta formação é *indispensável para a realização profissional*, o que difere do resultado das questões precedentes. Embora os termos *profissão* e *realização* fizessem parte da lista de palavras fornecidas, a primeira foi escolhida por apenas um professor e a segunda por nenhum deles. No entanto, quando o termo *realização* foi associado a *profissional*, os professores a elegeram como sendo indispensável para a formação, indicando a relevância da dimensão profissional para estes professores.

Perguntamos também aos professores sobre o que contemplou as atividades de formação continuada das quais eles tinham, eventualmente, participado. As respostas dos professores indicam que elas contemplam mais as dimensões cognitiva e pedagógica e menos a dimensão profissional. Estas respostas indicam que as concepções que permeiam tais formações ainda estão fortemente influenciadas pelo modelo da racionalidade técnica, embora os professores apresentassem certa tendência à adoção de uma concepção articulada ao modelo da racionalidade prática, revelando um distanciamento entre concepção do professor e a formação continuada a que ele tem acesso.

Quando perguntamos aos professores se eles consideram que a formação continuada possibilita mudanças significativas no desenvolvimento de prática docente que eles adotam na sala de aula, as respostas dos professores foram dadas no sentido afirmativo. Eles reconheceram que a prática pode ser influenciada por esta formação, alegando, no entanto, que não percebem efetivamente os resultados de tal influência no quotidiano. Observa-se assim que há uma tendência a mobilização de uma concepção associada a *processos reflexivos* (racionalidade prática), ao mesmo tempo em que se mantêm laços com uma concepção associada à *forma mais genérica* (racionalidade técnica).

Considerações finais

Os resultados do estudo realizado mostram que as concepções dos professores estão ligadas à dimensão pedagógica, indicando uma tendência à mobilização de concepções que se apoiam em modelo emancipador (Silva, 2007). Por outro lado, observou-se a valorização de uma formação concebida com base na racionalidade técnico-instrumental, sugerindo que suas concepções ainda são influenciadas por esta racionalidade. Dessa forma, alguns fatores, que merecem ser investigados, mantêm os professores ainda vinculados à lógica da racionalidade técnica.

Entendemos que este estudo pode contribuir para reflexão dos conceptores de formação continuada, formadores e gestores no contexto em que o estudo foi realizado, extensível a outras realidades, na medida em que reforça o resultado de investigações realizadas em outros contextos educativos. No que se refere à formação do professor de matemática, identificar as concepções dos professores torna-se imprescindível, visto que os profissionais desta área historicamente tendem a trabalhar os conteúdos matemáticos de maneira descontextualizada.

Embora reconhecendo a importância desse estudo, vale salientar que ele foi realizado com base nas respostas dos professores investigados. Sendo assim, é importante realizar estudos sobre outros aspectos da problemática em foco, a exemplo do processo de construção da própria formação continuada com o intuito de melhor compreender o fenômeno estudado.

Referências bibliográficas

Alagoas-Br (2006). *Lei nº 6.757, de 03 de Agosto de 2006*. Maceió- AL, Brasil.

Bardin, L.(1977). *L'Ére logique.* Paris: Robert Laffont.

Dubar, C. (1997). Formação, trabalho e identidades profissionais. In: Canário, R. (Org.). *Formação e situações de trabalho* (pp.119- 146). Porto: Porto Editora.

Fiorentini, D. e Lorenzato, S. (2009). *Investigação em Educação Matemática.* Campinas: Autores Associados.

Gatti, B. (2008). Análise das políticas públicas para formação continuada no Brasil, na última década. *Revista Brasileira de Educação*, 13(37), 57 - 69.

Garcia, C. (1992). A Formação de Professores: Novas perspectivas baseadas na investigação sobre o pensamento do professor. In: Nóvoa, A (Org.). *Os professores e sua formação* (pp. 51- 76). Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Lima, I. (2009). *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs*: étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale (Collection Universitaire). Paris: Edilivre Editions.

Modesto, M. A. (2002). *Formação continuada de professores de Matemática:* compreendendo perspectivas, buscando caminhos. Dissertação de Mestrado em Educação. Bauru-SP: Faculdade de Ciências, UNESP.

Pérez Gómez, A. (1992). O pensamento prático do professor: A formação do professor como profissional reflexivo. In Nóvoa, A. (Coord.) *Os professores e sua formação* (pp. 93 – 114). Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Santiago, M. e Batista Neto, J. (2011). Formação de professores em Paulo Freire: uma filosofia como jeito de ser-estar e fazer pedagógicos. *Revista e-curriculum*, São Paulo, v.7 n.3 Dezembro 2011. Acesso em 10 de abril de 2012 em: http://revistas.pucsp.br/index.php/curriculum.

Santos, M. e Terrazan, E. (2007). Características da formação continuada de professores nas diferentes regiões do país. *30ª Reunião da ANPED*. Caxambu. Acesso em 07 de maio de 2011 em: http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/trabalhos/GT08-3846--Int.pdf.

Schön, D. A. (2000). *Educando o profissional Reflexivo:* um novo design para o ensino e a aprendizagem (R. C. Costa, Trad.). Porto Alegre: Artes Médicas Sul. (Obra original publicada em 1998)

Silva, J. F. (2007). *Modelos de formação de pedagogos (as)-professores (as) e políticas de avaliação da educação superior:* limites e possibilidades nos chão da IES. Recife: Ed.Universitária da UFPE.

Silva, J. F. (2001). *Políticas de formação de professores*: aproximações e distanciamentos políticos e epistemológicos. Dissertação de Mestrado em Educação. Recife: UFPE.

Silva, R. D. (2008). *A Formação do Professor de Matemática:* um Estudo das Representações Sociais. Tese de Doutorado em Educação. Recife: UFPE.

Silva Neto, J. F. (2012). *Concepções sobre a Formação Continuada de Professores de Matemática em Alagoas*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Recife: UFPE.

A INTERAÇÃO PROFESSOR-ALUNO NA CONSTRUÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA

Maria Helena Palma de Oliveira, Felipe Franco Gabriel, Verônica Yumi Kataoka
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
mhelenapalma@gmail.com; felipe.gabriel@gmail.com; veronicayumi@terra.com.br

Resumo. Objetivou-se a função do professor de estatística de cursos tecnológicos na construção de estratégias de atenção, de interação e de memória na autorregulação da aprendizagem de Estatística. A abordagem sociohistórica destaca a importância do professor na atribuição de sentido pelo aluno para o que aprende e o valor de sua contribuição para que o aluno construa comportamentos autorregulatórios. Os resultados dos estudos analisados mostraram a influência do professor de estatística na elaboração e no desenvolvimento de comportamentos autorregulatórios e na atribuição de sentido para a disciplina de Estatística. Evidenciaram ainda que o uso de estratégias de aprendizagem é resultado da ação diretiva do professor. Em decorrência, considera-se a necessidade de revisão de práticas pedagógicas tradicionais, visando empreender trabalho específico planejado que desenvolva e valorize junto aos alunos estratégias de atenção, de interação e de memória na autorregulação da aprendizagem de estatística.

Palabras clave: autorregulação, estratégias de aprendizagem, atenção, interação, memória

Abstract. This study analyzes the role of the statistical teacher of technological courses in the development of strategies attention, interaction and memory in self regulation of statistic learning. The sociohistorical approach emphasize the fundamental importance of the teacher in the attribution of meaning by the students to what they learns, as well accentuate the value of the teacher contribution for the students build self regulation behaviors. The results showed the influence of the statistical teacher in the elaboration and development of self regulation behaviors and in the attribution of meaning to the Statistic course. It is evident that the use of strategies of learning is result of the direct action of the teacher. Finally, teacher need to review the traditional pedagogical practices, in order to undertake specific planned work that develop and value together with the students strategies attention, interaction and memory in the self regulation of statistic learning.

Key words: self-regulation, learning strategies, attention, interaction, memory[1]

Introdução

Este trabalho apresenta resultados de uma série de estudos desenvolvidos entre 2009 e 2011 que fazem parte de projeto mais amplo sobre a autorregulação da aprendizagem de Estatística no ensino superior. Neste trabalho, reuniram-se resultados que evidenciam a importância da função do professor de Estatítisca de cursos tecnológicos na construção de estratégias de atenção, de interação e de memória na autorregulação da aprendizagem.

O trabalho toma como base a abordagem sócio-histórica no entendimento dos processos de aprendizagem. Um ponto fundamental desse enfoque é que a aprendizagem não proporciona apenas a construção de significados para os conteúdos escolares. Segundo Salvador (1994, p.155), "tudo parece indicar que o aluno constrói significações ao mesmo tempo em que atribui um sentido para o que aprende".

Descata-se a importância dos processos de pensamento do educando como elemento mediador entre o ensino e os resultados da aprendizagem. Salvador (1994) recupera a teoria de Vigotsky e traz para a discussão um novo elemento, ou seja, o sentido da aprendizagem, entendido como resultado de "interpretações subjetivas que o próprio aluno constrói". Essas interpretações decorrem da "complexa dinâmica de intercâmbios comunicativos que se estabelecem em múltiplos níveis entre os participantes, entre os próprios alunos e, muito especialmente, entre o professor e os alunos" (Salvador, 1994, p. 155).

O aluno não constrói apenas significados relativos aos conteúdos escolares, a complexa série de interações entre os próprio alunos, o professor e os conteúdos de aprendizagem – mesmo considerando o aluno como protagonista final pela aprendizagem –, é responsável pelas interpretações subjetivas que o próprio aluno constrói."Com efeito, a construção do conhecimento é, nessa perspectiva, uma construção claramente orientada a compartilhar significados e sentidos, (Salvador, 1994, p.156)

Na perspectiva de Vigotsky, "exercer a função de professor (...) implica assistir o aluno proporcionando-lhe apoio e recursos" (Fino, 2001, p. 279). Vigotsky (2010) atribui papel fundamental à ação docente. O processo de educação acaba consistindo em levar os alunos à elaboração de certo número de reações e a outros comportamentos mais complexos. Ainda destaca características da ação mediadora, tanto do aluno, quanto do professor. O processo de educação exige que o aluno eduque a si mesmo com seus próprios atos e que o mestre oriente e regule os fatores determinantes desses atos. Além disso, o processo de educação exige que o professor e o aluno tenham consciência da finalidade de tais atos.

Nessa perspectiva, professor pode ser um eficaz motivador e regulador da aprendizagem principalmente de alunos que se encontram em séries iniciais do curso e que ainda não assimilaram a cultura do ambiente universitário. Ou seja, a qualidade da relação entre o professor e o aluno em contexto de sala de aula pode influenciar o sentido que o aluno atribui à disciplina e, consequentemente, ao desenvolvimento consistente de seus comportamentos autorregulatórios.

Nesse contexto, considera-se que, de início, o estudante pode não ter condições de atribuir sentido ao que precisa aprender, pela pouca experiência anterior com o conteúdo. O professor é quem inicialmente "empresta" o significado e parcelas de sentido para o conteúdo. Também, nesse aspecto, o sentido atribuído ao que se aprende é resultado de um processo de negociação (Salvador, 1994) em que o professor tem papel fundamental.

Referencial teórico

A autorregulação da aprendizagem na abordagem sócio-histórica é definida como a capacidade do sujeito gerir por si mesmo projetos, progressos e estratégias diante de tarefas e obstáculos. Caracteriza-se como uma função metacognitiva, como atividade consciente e socialmente construída que evidencia o domínio de instrumentos culturais específicos.

Nesse estudo, a autorregulação concretiza-se pelo uso intencional de estratégias de domínio de funções mentais como as de atenção, de interação e de memória.

Vigotsky (1978) aponta três condições críticas necessárias para o desenvolvimento de comportamento autorregulado: uma orientação do plano intersubjetivo (social) para o plano intrassubjetivo (individual); o domínio de ferramentas culturais específicas que permitam ao aluno a utilização de comportamentos de autorregulação de modo independente e, finalmente, o envolvimento socioemocional do aluno em relação à tarefa.

Na perspectiva de Vygotsky (1978), a autorregulação é precedida por uma regulação exterior. No caso específico da autorregulação de estratégias de aprendizagem, é no contexto social que o indivíduo toma contato com as práticas que potencializam suas capacidades de atenção, de interação e de memória. Ou seja, a regulação exterior transforma-se em autorregulação Mais especificamente, o meio social mostra-lhe quais estratégias são apropriadas ao seu objetivo de aprendizagem.

Fino (2001, p. 281) destaca que "o aprendiz enquanto vai assumindo maior responsabilidade cognitiva sobre a gestão da atividade, vai gradualmente interiorizando os procedimentos e os conhecimentos envolvidos; enquanto vai se tornando mais auto-regulado na tarefa ou na habilidade.

As estratégias de aprendizagem, segundo Rosário, Perez & Gonzáles-Pienda (2004) são ações deliberadas para alcançar objetivos específicos, implicando tanto recursos cognitivos quanto recursos motivacionais que envolvem a tarefa. A importância das estratégias de aprendizagem, tanto para uma aprendizagem efetiva quanto para a autorregulação, tem sido cada vez mais reconhecida pelos educadores. (Boruchovitch, 1999)

Nessa direção, Pestana, Gabriel, Oliveira & Kataoka (2010) afirmam que o professor é o grande motivador e regulador da aprendizagem principalmente no estágio inicial do curso, sendo assim a qualidade da relação entre o professor e o aluno em contexto de sala de aula influencia o sentido que o aluno atribui à disciplina e, consequentemente, o desenvolvimento consistente de comportamentos autorregulatórios.

O desenvolvimento histórico-cultural permitiu ao ser humano avançar de capacidades naturais de atenção para capacidades historicamente construídas no uso dessa função mental. O desenvolvimento ontogenético também modifica as características do uso da atenção. Veer & Valsiner (1996) destacam que até a idade adulta as pessoas aprendem a usar os meios externos para direcionar a atenção, finalmente esses instrumentos culturais se internalizam e permitem que a atenção humana selecione a informação necessária, assessore os programas seletivos de ação e mantenha controle permanente sobre eles. Luria (1979, p.11) aponta dois tipos básicos de atenção: o arbitrário e o involuntário. "O involuntário (...) é instintivo e é comum ao homem e ao animal. A atenção arbitrária é inerente ao homem".

A interação na aprendizagem é descrita por Bilimória & Almeida (2008) como partilha, cooperação e confronto de informação, conhecimentos e posicionamentos que dinamizam a representação mental das tarefas, bem como repercutem no controle das atividades cognitivas e metacognitivas.

Para Radford (2006, p.113) a interação na sala de aula é consubstancial à aprendizagem. "As ações que os indivíduos realizam estão submersas em modos culturais de atividade". E por isso, não estão presas somente ao contexto de sala de aula, mas refletem toda a história cultural que envolve o espaço social.

A interação entre os sujeitos, ou a mediação social, é a base do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) definida por Vigotsky (1998) como a distância entre o nível de desenvolvimento real, determinado pela capacidade de solução de problemas de modo independente, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado pela da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração de companheiros mais capazes. Para Salvador (1999), o nível de desenvolvimento potencial tem caráter interativo e social; essas propriedades não são intrínsecas aos indivíduos que aprendem, mas se concretizam no transcurso da aprendizagem que ocorre na ZDP.

Em síntese, Vigotsky (1998) evidencia a importância da interação no processo de ensino e de aprendizagem, ou seja, da mediação social que envolve professor e aluno. Essa interação em de sala de aula é motivadora e sua qualidade influencia na aprendizagem.

O uso intencional de estratégias de domínio da memória requer instrumentos ou tecnologias que ampliam a capacidade de memória natural. "Os instrumentos são implementos físicos utilizados para aumentar os poderes naturais do organismo físico" Ratner (1995, p.16), Segundo Ratner (1995, p. 136), "Vigostsky expressa a diferença entre a memória natural, rudimentar, e seu estado sofisticado, distinguindo entre a conexão automática dos eventos, da primeira, e a conexão ativa, da última, via mediações físicas ou simbólicas interpostas, que servem como lembretes". Para Vygotsky (1996, p. 137), o indivíduo "(...) ao chegar à adolescência, passa à mnemotécnica interna que pode ser denominada memória lógica ou forma interna de memorização mediada."

A mnemotécnica, ou a arte da memória, estudada profundamente por Yates (1966) é entendida como prática, como *techné*, como esforço de elaboração, como forma de sustentação e de construção da memória, inscritas e instituídas na cultura. A mnemotécnica constitui-se como prática social (Smolka, 2000).

O processo histórico foi desenvolvido pelas várias maneiras de utilização de signos, que se transformaram em auxiliares da memória ou em formas de memória artificial. Do mesmo modo que o homem primitivo percebeu a necessidade de marcar o caminho na floresta para não se perder no retorno da caça; o aluno percebe a necessidade de desenvolver ou de aplicar instrumentos ou tecnologias de memória externa (artificial) como grifar, fazer um esquema das idéias principais de um texto ou material didático ou fazer uma síntese do material para ter mais recurso de memória quando houver a solicitação. Os processos de memória são desenvolvidos e motivados pela interação social humana (Vigotsky, 1998). Nesse sentido, no ambiente escolar, o professor tem papel fundamental na orientação para a construção de estratégias de memória.

Método

As discussões apresentadas a seguir trazem resultados de três pesquisas realizadas com o objetivo comum de verificar o uso intencional de estratégias de aprendizagem de Estatística de alunos de cursos tecnológicos de uma universidade privada de São Paulo.

Do estudo de Oliveira, Silva, Garbino, Angrimani,& Silva (2009) participaram 236 estudantes que haviam cursado uma disciplina de Estatística, a média de idade foi de 28,5 (± 7,2), que responderam a um questionário de perfil (trajetória escolar, importância, sentimento e idéia sobre Estatística, questões a respeito da interação entre estudantes e professor-estudantes) e a uma escala com 16 afirmativas, sendo uma subescala com 6 afirmativas sobre atenção e uma subescala com 10 afirmativas sobre interação. Cada afirmativa tinha como possibilidades de resposta: sempre, quase sempre, quase nunca e nunca, em que foram atribuídos pontuação 4 até 1 para as afirmativas positivas e 1 até 4 para as afirmativas negativas. Utilizou-se o software SPSS (Statistical Package for Social Science), versão 15.0 para analisar os resultados por meio de freqüência, média e desvio padrão, teste t e Anova. O nível de significância de 5%.

Do estudo de Oliveira, Kataoka & Gabriel (2011) participaram 177 estudantes que responderam ao mesmo questionário de perfil e a mesma subescala de interação do estudo anterior. Para cada afirmativa, as possibilidades de resposta eram: sempre, quase sempre, quase nunca e nunca, em que foram atribuídas pontuações de 4 a 1 para as afirmativas positivas e de 1 a 4 para as negativas. Para as análises, utilizou-se o mesmo software.

Dos estudos sobre as estratégias de memória (Pestana et al, 2010), (Gabriel, Pestana, Oliveira & Kataoka, 2010); (Gabriel, Pestana, Kataoka & Oliveira 2010), participaram 6 alunos do 1º semestre de cursos tecnológicos (4 homens e 2 mulheres) e 6 alunos do 3º semestre dos mesmos cursos (4 homens e 2 mulheres). A coleta de dados foi organizada em duas etapas: observação e realização de entrevistas. As observações tiveram como objetivo identificar núcleos de alunos existentes nos processos interativos em sala de aula, Para as entrevistas tomaram-se dois roteiros organizados com base nas afirmativas de uma escala de memória utilizada em pesquisa anterior (Oliveira, Gabriel & Pestana, 2011)

Resultados e discussões

No estudo sobre as estratégias de atenção (Oliveira et al, 2009) ficou evidente que o sentido que os alunos atribuíram a disciplina de estatística influenciou na elaboração de estratégias autorregulatórias; ou seja, o sentido atribuído à aprendizagem está relacionado aos valores aos quais o conteúdo se associa (Salvador, 1994).

Os sujeitos, no primeiro ano do curso, estavam entrando em contato com a disciplina de Estatísticaam e desenvolvendo estratégias de autorregulação próprias para a disciplina; mas como ainda tinham pouco conhecimento da aplicação do conteúdo da disciplina na futura área profissional, acabaram por atribuir pouco sentido ao conhecimento aprendido. Nessa etapa a ação docente pode ser fundamental na atribuição de sentido para o que se aprende.

É por meio de um processo de negociação que inicialmente o aluno terá condições de atribuir sentido ao conteúdo da disciplina (Salvador, 1994).

A pontuação média na escala de atenção foi significativamente menor nos alunos que não sabiam que curso fazer [$F_{(4,210)} = 3{,}49$; $p = 0{,}009$] e nos que atribuíram pouca importância à Estatística [$F_{(3,215)} = 4{,}03$; $p = 0{,}008$], o que mostra que os alunos podem ter dificuldade de atribuir sentido para o que aprendem, pelo menor contato com conteúdos estatísticos.

A dificuldade em atribuir sentido para o que se aprende pode levar a comportamentos de procrastinação, o que segundo Ribeiro (2007), já foi evidenciado em vários estudos recentes que mostraram a existência de relação entre a autorregulação e comportamentos de procrastinação e revelaram que este tipo de comportamento está associado a uma menor capacidade de regulação da aprendizagem.

Nos estudos sobre as estratégias de interação (Oliveira et al 2009); (Oliveira et al 2011) foi possível observar que os alunos que consideravam a disciplina de Estatística como muito importante, ou seja, atribuíam um motivo e um sentido maior para o estudo da disciplina, tiveram uma pontuação significativamente maior na escala de estratégias de interação de autorregulação da aprendizagem (MD = 44,39) em relação aos alunos que consideravam importante (MD = 41,20) e nada ou pouco importante (MD = 38,75).

Desse modo, também em relação à interação, o sentido que os alunos atribuíram a disciplina influenciou no desenvolvimento de comportamentos autorregulatórios. Outro ponto observado foi a qualidade da interação entre professor-aluno e aluno-aluno, em contexto de sala de aula, sendo que, 85,3% dos estudantes sempre ou quase sempre pedem ajuda para os colegas de classe quando precisam de explicação; 78,0% dos estudantes oferecem ajuda para os colegas na explicação de conteúdo de estatística; 59,9% dos estudantes restringem-se a responder aquilo que o professor de estatística pergunta e 36,7% dos estudantes nunca ou quase nunca expressam a própria opinião ou fazem perguntas para o professor. Esses dados evidenciam que a interação na sala de aula da disciplina Estatística apresentava-se mais elaborada entre os alunos do que entre os alunos e o professor.

Nos estudos sobre as estratégias de memória (Pestana et al, 2010); (Gabriel et al 2010); (Gabriel, Pestana, Kataoka & Oliveira 2010), (Oliveira, Gabriel & Pestana, 2011), os resultados demonstraram que o uso das estratégias de memória tem relação significativa com a diretividade do professor em contexto de sala de aula. O modo como se realizam as ações de domínio de estratégias de memória como grifar, fazer resumo, esquema, entre outras, apontou a importância do professor na construção dessas estratégias.

Os resultados mostraram que 82,3% dos estudantes consultam as anotações ou para atender à solicitação do professor e/ou (85,5%) para entender a explicação dada; além disso, copiar o que o professor fala ou escreve no quadro é a estratégia mais utilizada (93,6%) em relação às demais. Os resultados tornam evidente a importância da diretividade do professor e de sua influência direta ou indireta na regulação dos comportamentos dos alunos. A regulação do professor expressa um comportamento dependente do aluno, mas isso pode ser fundamental para que o aluno, posteriormente, construa intencionalmente suas próprias ações, ou seja, ações autorregulatórias de estratégias de memória.

Considerações finais

Os resultados observados nos estudos para as três categorias de estratégias na autorregulação da apredizagem de Estatística: atenção, interação e memória, evidenciaram o papel significativo do professor na construção e no desenvolvimento das mesmas. No início do curso, os alunos têm poucos referências ou experiências que lhes permitam construir sentido para o que aprendem e por isso, podem ter encontrado maior dificuldade no desenvolvimento e domínio de estratégias de atenção; além disso, os indicativos sobre o modo como ocorrem as interações professor-aluno puderam revelar características de contexto de sala de aula bastante tradicionais e inibidores de estratégias de interação professor-aluno o que se revelou evidente também no que se refere ao domínio de estratégias de memória, uma vez que os alunos utilizam mais as estratégias decorrentes da ação diretiva do professor.

De qualquer modo, os resultados evidenciaram a decisiva ação mediadora docente junto aos alunos de cursos tecnológicos no desenvolvimento e domínio de estratégias de autorregulação da aprendizagem de Estatística

O sentido que o aluno atribui à disciplina é a base afetiva motivadora para a construção de estratégias de aprendizagem. Observa-se a necessidade de revisão das práticas pedagógicas do professor de estatística de cursos tecnológicos no sentido de empreender trabalho específico e planejado com a finalidade de desenvolver e valorizar junto aos alunos estratégias de atenção, de interação e de memória na aprendizagem. A diretividade por ele exercida foi fundamental na autorregulação da aprendizagem. Essa diretividade sobre a ação do aluno pode ser decorrente de práticas tradicionais e centralizadoras de ensino que, se de um lado podem ser obstáculos para um diálogo constante, de outro, dão ao professor certa autoridade que pode ser explorada no sentido de regular a atividade do aluno.

Referências bibliográficas

Bilimória, H. & Almeida, L.S. (2008) Aprendizagem auto-regulada: fundamentos e organizacao do Programa SABER**.** *Psicol. esc. educ.* [online]. Recuperado em 10 de junho de 2012, disponivel em <http://pepsic.bvs-psi.org.br/scielo.php?script= sci_arttext&pid=S1413-55722008000100002&lng=pt&nrm=iso>. ISSN 1413-8557.

Boruchovith, E. (1999). Estratégias de aprendizagem e desempenho escolar: considerações para a prática educacional. *Psicologia Reflexão e Crítica, 12* (2), p.361-376..

Fino, C.N. (2001). Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): três implicações pedagógicas. *Revista Portuguesa de Educação,14* (14), 273-291.

Gabriel, F.F., Pestana, C.T.P., Kataoka, V.Y, Oliveira, M.H.P. (2010). A autorregulação de estratégias de memória na aprendizagem de estatística: um estudo com estudantes universitários de cursos tecnológicos de São Paulo. *Anais III Jornada de Iniciação Científica UNIBAN.* São Paulo: Brasil

Gabriel, F.F., Pestana, C.T.P., Oliveira, M.H.P e Kataoka, V.Y. (2010). A autorregulação da memória na aprendizagem de estatística de estudantes de cursos tecnológicos de instituição privada de São Paulo. *Anais 10º Congresso Nacional de Iniciação Científica*. São Paulo, Brasil.

Luria, A. R. (1979) *Curso de psicologia geral Vol.3*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Oliveira, M,H.P.; Gabriel, F.F.e Pestana, C.T.P.(2011, junho) Validação de uma escala de autorregulação de estratégias de memória na aprendizagem de estatística de estudantes universitários. In: *Anais XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM*. Recife, Brasil.

Oliveira, M.H.P., Kataoka V.Y.& Gabriel, F.F. (2011, julho). Estratégias de interação na aprendizagem de estatística de alunos de cursos tecnológicos de São Paulo. *Anais da XXV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa,* Camaguey, Cuba.

Oliveira, M.H.P., Silva, C.B., Garbino, A., Angrimani, D.S.R & Silva, E.F.F. (2009, janeiro). A auto-regulação da aprendizagem de estatística e sua relação com os processos de atenção e interação: um estudo com estudantes universitários. *Anais do VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Puerto Montt, Chile.

Pestana, C.T.P., Gabriel, F.F., Oliveira, M.H.P. & Kataoka, V.Y. (2010, outubro). Estratégias de memória no processo de autorregulação da aprendizagem de estatística: um estudo com alunos de cursos tecnológicos de nível superior. *Anais V Congresso Internacional de Ensino da Matemática. CIEM.* Canoas, RS, Brasil.

Radford, L. (2006) Elementos de uma teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial,* 113-139.

Ratner, C. (1995). *A psicologia sócio-histórica de Vygotsky.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Ribeiro, Y.S. (2007). Auto-regulação: diferenças em função do ano e área em alunos universitários. *Psicologia: teoria e Pesquisa, 23* (4), 443-448.

Rosário, P., Perez, J.C.& Gonzáles-Pienda, J.A. (2004). Historias que enseñan a estudiar y aprender. *Revista Eletrônica de Investigación Psicoeducativa*, *2* (1), 131-144.

Salvador, C.C. (1994). Significado e sentido na aprendizagem escolar: reflexões em torno do conceito de aprendizagem significativa. In: C.C. Salvador (Org.) *Aprendizagem escolar e construção do conhecimento* (pp. 145 - 159). Porto Alegre: Artes Médicas.

Salvador, C.C. (1999). *Psicologia da educação.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Smolka, A. L. B. (2000). A memória em questão: uma perspectiva histórico-cultural. *Educação e sociedade, 21,* (71), 166-193.

Veer, R. V.& Valsiner, J. (1996). *Vygotsky: uma síntese*. São Paulo: Loyola.

Vigotsky, L.S. (1998). *A formação social da mente*. 6ª ed. São Paulo: Martins Fontes.

Vigotsky, L.S. (2010). *Psicologia Pedagógica*. 3ª ed. São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in Society: the development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Yates, F. A. (1966). *The art of memory*. Chicago: University Press.

FORMAÇÃO CONTINUADA COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA NA BAIXADA FLUMINENSE MEDIADA POR TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Marcos Cruz de Azevedo, Cleonice Puggian, Clícia Vallladares Peixoto Friedmann
Secretaria de Estado de Educação - SEEDUC Brasil
Universidade UNIGRANRIO
patmatematica@gmail.com, cleo.puggian@gmail.com, cliciavp@terra.com.br

Resumo. Este texto apresenta os resultados de uma pesquisa ensino realizada com doze professores de matemática sobre a metodologia WebQuest na Baixada Fluminense. Os instrumentos para a coleta de dados foram: observação participante (com registro em vídeo), questionários e entrevistas. O referencial teórico contemplou estudos no campo da educação matemática, tecnologias da informação e comunicação, assim como formação continuada de professores. Resultados revelaram que um website de criação pode ser uma ferramenta efetiva para introduzir os professores no universo das tecnologias da informação e comunicação.

Palabras clave: webquest, educação matemática, formação continuada de professores

Abstract. This paper presents the results of a survey conducted with twelve school mathematics teachers on the methodology WebQuest in Baixada Fluminense. The instruments for data collection were participant observation (with video recording), questionnaires and interviews. The theoretical studies included in the field of mathematics education, information and communication technologies, as well as continuous training of teachers. Results revealed that a website creation can be an effective tool to introduce teachers in the universe of information technology and communication.

Key words: webquest, mathematics education, continuing education teacher

Introdução

Ensino de Matemática na Baixada Fluminense: dimensionando o desafio

Os dados obtidos pela Prova Brasil nos últimos anos, especialmente em 2009, indicam que a aprendizagem de matemática dos alunos das escolas estaduais e municipais dos municípios da Baixada Fluminense está aquém do esperado pelas instâncias governamentais. Resultados revelam que a Baixada Fluminense é uma das regiões mais empobrecidas e com um dos menores índices de desempenho em matemática, chegando a ter números comparáveis aos Estados das regiões Norte e Nordeste do Brasil. Por exemplo, verifica-se que nenhum dos municípios da Baixada Fluminense alcançou a média estipulada pelas instâncias governamentais para os estudantes do nono ano do Ensino Fundamental. Esse desempenho pode ser melhor analisado ao realizarmos um recorte entre os alunos das áreas que congregam os municípios da Baixada Fluminense na Rede Estadual de Educação, respectivamente, Metropolitana I (Japeri, Mesquita, Nilópolis, Nova Iguaçu e Queimados), Metropolitana V (Duque de Caxias), Metropolitana VI (Itaguaí, Paracambi e Seropédica), Metropolitana VII (Belford Roxo), Metropolitana XI (São João de Meriti) e Serrana IV (Magé e Guapimirim), onde nenhum desses municípios obtiveram resultados adequados. Cabe destacar que também as Redes municipais de Educação obtiveram resultados insatisfatórios.

A precariedade no ensino e aprendizagem de matemática é confirmada pelo desempenho dos estudantes das redes estadual e municipal da Baixada Fluminense na Prova Brasil. Segundo o Ministério da Educação (MEC), a Prova Brasil é uma das formas de medir o aprendizado de competências cognitivas básicas e gerais, assim como as competências leitora e matemática. Inclui a maioria das crianças e jovens matriculados na quarta e na oitava série (quinto e nono anos) do ensino fundamental, começando em 2005 e a partir daí realizando-se de dois em dois anos. As médias da Prova Brasil são apresentadas em uma escala de desempenho que varia de 0 a 500. A disciplina de matemática possui a seguinte escala: Nível 0, de 0 a 125, dos níveis 1 ao nível 12, variando de 25 em 25, ou seja, Nível 1 de 125 a 150, Nível 2 de 150 a 175, e assim, sucessivamente, e Nível 13, de 425 a 500, segundo Portal Ideb do Ministério da Educação – MEC, http://portalideb.inep.gov.br.

Os parâmetros da escala acima foram adotados pelo Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE), do Ministério da Educação, que definiu como metas para os alunos da quarta série (quinto ano) notas acima de 200 pontos e os da oitava série (nono ano) notas acima de 275.

Em 2009, os estudantes das unidades escolares da *rede estadual* da Baixada Fluminense, obtiveram as seguintes médias em matemática no 9º ano: Paracambi, 242,39; Guapimirim, 238,95; Mesquita, 238,26; Nilópolis, 235,90; Seropédica, 235,38; Itaguaí, 234,95; São João de Meriti, 233,27; Nova Iguaçu, 232,30; Belford Roxo, 232,11; Magé, 231,90; Duque de Caxias, 229,64; Queimados, 228,21 e Japerí, 225,53.

Já os estudantes das unidades escolares das *redes municipais* da Baixada Fluminense no 9º ano do ensino fundamental obtiveram os seguintes resultados em Matemática: Paracambi, 258,17; Nilópolis, 247,81; São João de Meriti, 240,37; Itaguaí, 236,09; Queimados, 245,44; Seropédica, 234,77; Magé, 234,38; Nova Iguaçu, 233,29; Mesquita, 232,97; Guapimirim, 231,56; Belford Roxo, 226,46; Japerí, 226,46 e Duque de Caxias, 223,25.

Caso se tome por base a média fixada pelo PDE, é possível verificar que nenhuma das redes administrativas dos municípios da Baixada Fluminense atingiu plenamente a meta estabelecida, o que indica uma grave situação na aprendizagem da matemática.

Os dados apresentados nesta seção indicam que o desempenho dos alunos das escolas municipais e estaduais dos municípios da Baixada Fluminense está aquém do esperado pelas instâncias governamentais. Portanto, como foi visto até agora, a Baixada continua sendo uma das regiões mais empobrecidas do país e com um dos menores índices de desempenho em matemática. Logo, a realização deste trabalho com professores da região se justificou devido à demanda por novas estratégias educacionais que promovam a aprendizagem dos alunos historicamente excluídos do processo de educação formal. Há urgência por soluções inovadoras e criativas para enfrentar este déficit, superando concepções pedagógicas que não atendem aos anseios e necessidades de alunos e professores.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam que dentre os obstáculos que o Brasil tem enfrentado em relação ao ensino da Matemática destacam-se a falta de formação profissional qualificada, as restrições ligadas às condições de trabalho, a ausência de políticas educacionais efetivas e as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas. No entanto, verificam-se esforços de governos, instituições de ensino e professores na tentativa de minimizar tais problemas.

> Existem professores que, individualmente ou em pequenos grupos, têm iniciativa para buscar novos conhecimentos e assumem uma atitude de constante reflexão, o que os leva a desenvolver práticas pedagógicas mais eficientes para ensinar Matemática no Brasil. De modo semelhante, universidades, secretarias de educação e outras instituições têm produzido materiais de apoio para a prática do professor. No entanto, essas iniciativas ainda não atingiram o conjunto de professores e por isto não chegam a alterar o quadro desfavorável que caracteriza o ensino de Matemática no Brasil (PCN, 1998, p. 21).

Além disso, o ensino de Matemática tem-se baseado na educação bancária, tão criticada pelo educador Paulo Freire (2003). Segundo os PCN (1998), a prática mais freqüente no ensino de Matemática tem sido aquela em que: o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstrações de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem. Ainda segundo os PCN (1998), essa prática tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser simplesmente uma indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não aprendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outro contexto.

É incontestável a importância da Matemática para a humanidade. Esta ciência possui características peculiares e diferentes de outras ciências, tais como a imaterialidade e a abstração, construídas através de um processo lógico-dedutivo (Garbi, 2007). No entanto, a prática pedagógica do professor de Matemática, pautada na educação bancária, faz com que os alunos percam o interesse por esta área do conhecimento. As aulas tornam-se mecânicas e monótonas. Mantém-se rituais de ensino que funcionam para cercar a Matemática de tabus, fazendo com que os educandos aceitem o fracasso como uma consequência natural (Giancaterino, 2009, p. 19).

A educação bancária no ensino de Matemática contraria estudos que indicam que métodos ativos são mais eficazes para incentivar os alunos a pesquisar, a interagir, a realizar estimativas, a conjecturar, a comparar, a analisar procedimentos (Vasconcelos, 2000). Giancaterino (2009) critica o educador bancário que promove um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados:

> O baixo índice de envolvimento dos alunos nas aulas de Matemática se dá em virtude de o professor não conseguir relacionar o conteúdo trabalhado em sala de aula ao cotidiano real do aluno. As aulas trabalhadas não aproximam os alunos das realidades vividas por eles. Percebemos que não há uma preocupação em demonstrar e construir socialmente a idéia da importância efetiva da Matemática ao dia a dia do aluno, interagindo com o meio sociocultural. (Giancaterino, 2009, p. 20).

Os PCN (1998) sugerem uma nova definição dos papéis de professores e alunos, onde estes são protagonistas de sua aprendizagem e aqueles devem ser organizadores do ensino, auxiliando os alunos na busca de materiais e propondo problemas significativos. Em relação a esses novos papéis, Ortigão (2005) destaca como fundamentais: a construção do conhecimento pelo aluno, o trabalho em equipe e a comunicação em sala de aula. Segundo a autora, o professor é caracterizado como alguém que encoraja os alunos na busca de soluções de problemas propostos, que valoriza os processos de pensamentos e incentiva a comunicação matemática, envolvendo-os em tarefas ricas e significativas. Notamos, portanto, a necessidade de incentivar docentes na construção de alternativas para o ensino da matemática. Assim, propusemos uma pesquisa ensino sobre WebQuests.

Metodologia: pesquisa ensino com Tecnologias da Comunicação e Informação

O objetivo geral desta pesquisa foi investigar as formas de apropriação da metodologia WebQuest por professores de matemática durante oficinas de formação continuada com o auxílio de um guia de estudos e de um website de criação. Também eram objetivos específicos: i) observar o processo de aprendizagem do professor de matemática com a metodologia de ensino WebQuest durante a oficina de formação continuada, avaliando a adequação do guia e do site de criação. ii) descrever, através da perspectiva dos próprios docentes, as implicações da incorporação da metodologia WebQuest no ensino matemática.

O desenvolvimento da pesquisa pode ser descrito em três etapas: 1) levantamento bibliográfico e preparação das oficinas "WebQuest e Educação Matemática"; 2) convocação dos professores de matemática e desenvolvimento de duas oficinas simultâneas, uma turma no sábado e uma turma na quarta-feira; e 3) análise dos dados e redação dos resultados. Vários instrumentos foram utilizados para coleta de dados, tais como: questionários, observação com registro em caderno de campo e vídeo, entrevistas e WebQuests. Dados foram analisados ao longo do estudo com base em um processo de tabulação e categorização.

Resultados

A apresentação do site www.webquestfacil.com.br aos professores ocorreu durante a oficina de formação continuada, quando foram convidados a visitar uma WebQuest sobre educação matemática. Utilizando os recursos indicados pela WebQuest, os professores foram convidados a elaborar colaborativamente uma apresentação em PowerPoint sobre esta metodologia de ensino. Nesta primeira experiência ficou evidente o desconhecimento de *softwares* como editores de textos, planilhas eletrônicas e apresentações. Além disso, muitos professores não sabiam explorar os recursos da web. Procuravam esclarecer dúvidas entre si e com os pesquisadores. As reclamações eram principalmente devido ao sistema operacional Linux, que apesar de similar ao sistema operacional Windows, causava estranheza aos professores.

> *Bruno*: Um detalhe, isso aqui é linux né? Vai ser um problema! A gente conhece o Windows! Por exemplo, o PowerPoint, eu nem imagino onde que fica aqui... Pra mim o bicho papão é esse tal de Linux, ele não consegue interagir com o Windows né. Eu vou fazer em PowerPoint em casa, por exemplo, tem que saber se o PowerPoint do Windows abre aqui. Como é que eu vou abrir o PowerPoint aqui? Eu não sei.

A criação da apresentação em PowerPoint foi a tarefa proposta no primeiro encontro da oficina e, após sua finalização, foi solicitado aos professores uma avaliação a respeito da metodologia WebQuest, de sua aplicação ao ensino de matemática e uma descrição das dificuldades encontradas. Os professores indicaram a velocidade da internet, o desconhecimento do ferramental tecnológico, o tempo de execução da tarefa e seus próprios receios como os principais obstáculos.

> *Marcos*: Vocês tiveram alguma dificuldade na execução da tarefa?
>
> *Guilherme*: A internet né, que não estava muito rápida…
>
> *Simão*: A diferença do PowerPoint também, que a gente sabe que muitos já são acostumados, aí sabem aonde fica tudo. Na hora que eu peguei, eu falei: _ Caraca! Onde é que fica isso?

Vinicius: Apesar de que quando eu vi a tarefa eu falei: - Caramba! Vai demorar pra caramba isso daqui, eu vou levar pelo menos umas duas semanas pra fazer, porque a gente não tem noção do que fazer… Mas depois que a gente começou a fazer, a gente viu que não ia ser tão demorado.

A tarefa realizada no segundo encontro consistia em analisar três WebQuests à luz das descobertas realizadas após a conclusão da tarefa 1. Os professores foram convidados a percorrer cada componente minuciosamente e a refletir sobre os conceitos aprendidos. Observaram também aspectos estéticos como formatação, figuras e letras. Neste momento, perceberam que teriam dificuldades em elaborar suas WebQuests pois não possuíam conhecimentos técnicos.

Pedro: Tem que aprender programação e html, porque isso aqui não sai de uma hora pra outra não. Uma WebQuest tipo essa aqui… Isso aí é chato pra cacete… Eu fiz isso no segundo grau, pra você aprender essa linha de programação aqui, você sua. Esse negócio de programação, eu já programei e é uma das coisas que eu não quero ver na minha frente nunca mais na minha vida. É horrível, se você erra uma vírgula na terceira linha, o trabalho não compila, você congela o negócio, você tem que ficar caçando aonde está o erro, é complicadíssimo.

Bruno: Eu acho que a maior dificuldade que a gente vai ter é de construir páginas, de repente fazer alguns links, montar alguns links. Como eu estava até comentando na quarta-feira são até fáceis, por exemplo, você chega no msn, no orkut, aí você vai lá olhar não sei o que, copia e cola lá na página, o endereço aparece lá azulzinho, bem diferenciado. Mas nem sempre é tão fácil assim.

Além das dificuldades técnicas, os professores destacaram também a utilidade das oficinas de formação continuada como oportunidades de descoberta e empoderamento. Segundo eles, a partir da interação com um instrutor e com colegas, foi possível superar as dificuldades iniciais, saindo da "monotonia" da prática docente que ainda se orienta por um viés tradicional. Transcrevemos abaixo um diálogo que ilustra este tipo de posicionamento:

Luiza: O problema da informática é só porque a gente ainda não fez, (não aprendeu no colégio), mas se sabe abrir o PowerPoint já fica mais fácil fazer. Então a construção do site também não é uma coisa muito difícil. Um pouco de habilidade e conhecimento a pessoa deve ter, mas não é assim uma condição, um obstáculo. Eu acho que dá pra fazer.

Leonardo: Eu acho assim, esse meio de trabalho é pra tirar os professores mesmo da monotonia.

Luiza: Rotina...

Leonardo: Da era das cavernas. [risos]

Luiza: Às vezes a gente acha que é uma coisa muito difícil, que é uma coisa assim inatingível, mas não é, se entra alguém e pede pra você e fala pra você: faça isso! Aí faz o passo a passo...

Leonardo: Te dá mais um incentivo também.

Luiza: Aí você aprende aquilo e…

Lucas: Igual lá na academia se você vai malhar sozinha você fica com preguiça, aí chega alguém que fica ali, que é o personal: Faça isso, faça aquilo… Te dá a direção...

No terceiro encontro, antes de apresentar o webquestfácil, indicamos aos professores o construtor americano www.zunal.com e o espanhol php (já que sua versão em língua portuguesa encontrava-se em manutenção durante o planejamento e realização da oficina). A intenção com essas indicações era deixar o professor livre quanto à escolha da ferramenta tecnológica. No entanto, os professores preferiram o webquestfácil pois os outros sites eram em língua estrangeira.

Sendo assim, ao final do segundo encontro, iniciamos o processo de cadastro no site. Após a realização do cadastro, instruímos os professores a se familiarizar com os botões do painel de controle, informando a função de cada um e solicitando que os mesmos navegassem para aprender a manuseá-los.

O terceiro e o quarto encontro da oficina foram dedicados à construção das WebQuests. O dinamismo do construtor na criação das WebQuests e a facilidade de disponibilizá-las aos alunos animou os professores. Ao final das oficinas todos forma convidados a preencher um questionário online intitulado "Avaliação da oficina sobre a metodologia WebQuest para o ensino da Matemática". Este questionário tinha o objetivo de avaliar o site www.webquestfacil.com.br em vários aspectos, inclusive apontando os limites observados por eles durante a oficina.

As observações feitas durante a realização das oficinas de formação sobre a metodologia WebQuest e os resultados obtidos através do questionário de avaliação indicaram que site webquestfácil alcançou o objetivo de proporcionar aos professores uma ferramenta que facilitasse a criação e o acesso à WebQuests para o ensino da matemática.

No primeiro semestre de 2011 também realizamos um grupo focal, no qual os professores foram convidados a avaliar o site, destacando sua colaboração para simplificar os procedimentos técnicos e apoiar os professores quanto à elaboração teórico-metodológica das WebQuests. O uso do site ainda permitiu que os docentes aprendessem outras ferramentas.

Os professores mostraram-se satisfeitos com suas produções durante e após a oficina. Eles demonstraram interesse em utilizar suas WebQuests com seus alunos, o que tem sido prejudicado pela falta de acesso à internet ou acesso deficiente, bem como pela a falta de equipamentos (computadores para todos os alunos). A declaração abaixo ilustra tal situação.

> *Natália:* Estou disposta a aplicar em sala de aula, não fiz ainda porque não tenho recursos. A minha escola ainda não está funcionando a internet. A escola ainda está em construção, porque não deu certo ainda, a internet não funcionou, aí tiveram que colocar roteadores, mas os cabos não estão muito legais… Então não deu para utilizar ainda.
>
> *Natália:* Eu não consegui usar porque eu não tenho internet, não tem laboratório de informática lá na escola ainda.
>
> *Tiago:* Deficiência da internet né, que nem sempre tem, às vezes a sala também está ocupada aí você não pode usar… Uma serie de coisas né, a diretora… Sabe como é que é né? É o aluno primeiro, aí você fica lá e espera e tal…

A idéia original do site construtor era desenvolver uma ferramenta de auxílio ao professor na criação de WebQuests, que funcionasse como um repositório de informações sobre esta metodologia, especialmente no Brasil, através de um portal. Ainda sem divulgação, no início de 2012 o site registrava 177 usuários e mais de 2500 acessos. Verifica-se sua utilização por professores de diversos estados brasileiros e até de outros países, como Moçambique.

De forma geral, os dados coletados durante as oficinas, questionários e grupo focal, revelam a potencialidade deste site como ferramenta de apoio à ação docente com tecnologias da informação e comunicação. Apesar de suas limitações, é possível afirmar que o site potencializa a utilização de WebQuests no ensino da matemática, facilitando a aprendizagem dos professores.

Considerações finais

As análises feitas permitem argumentar que a adoção de uma ferramenta, tal como o www.webquestfacil.com.br, contribui para o processo de apropriação e construção de WebQuests por professores em virtude de: (1) possibilitar a consulta dos conceitos de cada componente da WebQuest, através da opção help, inserida abaixo de cada template; (2) permitir, através da função edição, o aprimoramento das WebQuests; e, (3) possibilitar a simplificação do processo armazenamento e hospedagem de WebQuests produzidas pelos professores.

Enfim, foi visto que um website de criação pode ser uma ferramenta efetiva para introduzir os professores ao universo das tecnologias da informação e comunicação; que a escola, quando bem equipada, pode transformar-se em um poderoso lócus de aprendizagem para os próprios professores; que uma oficina de curta duração permite o diálogo entre os docentes, com resultados positivos na dimensão pessoal e profissional; e, também, que a matemática pode ser ensinada e aprendida com recursos digitais, que potencializam a compreensão dos conceitos. Espera-se que este estudo possa inspirar outras iniciativas de formação, contribuindo para superar desafios que ainda se apresentam ao ensino da matemática.

Referências bibliográficas

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Ministério da Educação e do Desporto.* Brasília: MEC/SEF.

Freire, P. (2003). *Pedagogia do Oprimido.* São Paulo: Editora Paz e Terra.

Garbi, G. (2007). Pra quê serve isso? *Revista do professor de matemática, SBM,* 63,1-5.

Giancaterino, R. (2009) A matemática sem rituais. Rio de Janeiro: Wak.

Ortigão, M. I. R. (2005). *Currículo de Matemática e desigualdades educacionais***.** 194 f. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Vasconcelos, C.C.(2000). *Ensino-Aprendizagem da Matemática: velhos problemas, novos desafios.* Lisboa: Instituto Politécnico de Viseu.

TRES PERSPECTIVAS DIFERENTES PARA MIRAR EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS Y LA ENSEÑANZA

Leticia Sosa Guerrero
Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas México
lsosa19@hotmail.com

Resumen. En este artículo se presentan algunos aspectos relevantes de tres perspectivas usadas actualmente en el campo internacional, orientadas al conocimiento profesional del profesor de matemáticas y la enseñanza: *Matemáticas para la Enseñanza* (Davis y Simmt, 2006), *Cuarteto de Conocimiento* (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) y *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (Ball, Thames y Phelps, 2008). Se asume que la comprensión de la génesis y desarrollo de los aspectos abordados, puede brindar al investigador herramientas para la propuesta de un nuevo modelo para el conocimiento profesional o bien para el seguimiento de uno de los existentes. Finalmente, se distinguen algunos matices diferentes que puede haber entre los tres enfoques.

Palabras clave: conocimiento del profesor, profesor de matemáticas, enseñanza

Abstract. This article presents some relevant aspects of three perspectives presently used at the international level, oriented to professional knowledge of mathematics teacher, especially about mathematical knowledge for teaching: *Mathematics for Teaching* (Davis & Simmt, 2006), *Knowledge Quartet* (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005) and *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, Thames & Phelps, 2008). It is assumed that the understanding of the genesis and development of these aspects can provide the researcher with tools for the proposal of a new model for professional knowledge or for using an existing one. Finally, we distinguish some different nuances that could be found when comparing the three approaches.

Key words: teacher knowledge, mathematics teacher, teaching

Introducción

Ya desde hace 30 años las investigaciones sobre el conocimiento del profesor y la enseñanza han sido estudiadas bajo distintos marcos de referencia, entre los más notables podemos mencionar los de Elbaz (1983), Schön (1983) y Shulman (1986), los cuales influenciaron la dirección de la investigación sobre profesores (Ponte y Chapman, 2006). Desde entonces y cada vez más, se ha venido discutiendo y profundizando el estudio del conocimiento profesional de los profesores, emergiendo distintas perspectivas sobre el conocimiento profesional, en particular, sobre qué conocimiento matemático posee el profesor y qué conocimiento matemático debería poseer para el ejercicio de su función docente.

El diálogo sobre la complejidad del conocimiento profesional es una preocupación constante de los investigadores en Educación Matemática, habiéndose celebrado, como prueba de esa preocupación, un grupo de discusión en la 33ª Conferencia del grupo internacional de Psychology of Mathematics Education (PME), titulado *Conocimiento del profesor y la enseñanza: considerando una relación compleja a través de tres perspectivas diferentes*, en el que se han discutido tres posturas específicas: *Matemáticas para la Enseñanza* (Davis y Simmt, 2006), *Cuarteto de Conocimiento* (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) y *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Así, por nuestra parte, con el afán de conocer y comprender más la génesis y el desarrollo de estas tres perspectivas, profundizamos en la investigación de éstas porque eso puede dar elementos al investigador para la propuesta de un nuevo enfoque para estudiar el conocimiento profesional del profesor, o bien para el seguimiento de uno de éstos o de otro ya existente. En ese sentido, a continuación se presentan más detalladamente algunos aspectos destacables de cada una de estas tres perspectivas.

Descripción de las tres perspectivas del conocimiento del profesor de matemáticas

a) *Matemáticas para la enseñanza*

En este enfoque propuesto por Davis y su equipo de investigación, se usa el marco interpretativo *"ciencias de la complejidad (complexity science)"* (de acuerdo a *Studying Complexity Science*, ciencias de la complejidad es el estudio científico de los sistemas complejos, sistemas con muchas partes que interactúan para producir un comportamiento global que no es fácil de explicar en términos de interacciones entre los elementos del componente individual). En particular, se ve a los profesores como sistemas y el interés se centra en saber cómo aprenden (Davis y Simmt, 2003; Davis y Simmt, 2006). Estos investigadores distinguen a las *matemáticas para la enseñanza* como una *"rama específica dentro de las matemáticas"* y organizan sus investigaciones en torno a "*estudio de conceptos"* (Davis, 2008), una estructura de aprendizaje colectivo a través del cual los educadores matemáticos identifican, interpretan, interrogan, inventan y elaboran imágenes, metáforas, analogías, ejemplos, ejercicios, gestos y aplicaciones a los que los profesores recurren de manera implícita o explícita para sustentar la comprensión de los estudiantes.

Davis (2010) propone el *"estudio de conceptos"* como entornos en los que los profesores pueden combinar sus conocimientos para cuestionarse y elaborar su conocimiento matemático para la enseñanza. El autor afirma que el *"estudio de conceptos"* puede ayudar a cambiar la forma en la que las matemáticas son vistas, entendidas y usadas dentro del aula. "[...] el estudio de conceptos parece contribuir a los cambios en las formas en que la matemática es vista, entendida, y empleada dentro de los entornos." (Davis, 2010, p.63)

Cabe mencionar que el término *estudio del concepto* proviene de otras dos nociones en la matemática educativa, *estudio de la lección y análisis del concepto*. Estudio de la lección en relación a la articulación, crítica y desarrollo de estrategias matemáticas para la enseñanza, con miras a conseguir nuevas posibilidades pedagógicas mediante una participación comprometida, colectiva y en curso; en un entorno de estudio de la lección "los profesores participan en la mejora de la calidad de su enseñanza y en el enriquecimiento de las experiencias de aprendizaje de los estudiantes" (Fernandez y Yoshida, 2004, p.2). Análisis del concepto en términos de Leinhardt, Putnam y Hattrup (1992), en cuanto a explicar las estructuras lógicas y asociaciones de conceptos matemáticos (origen y aplicación del concepto).

Los supuestos que rigen el estudio de conceptos son:

- Los conceptos matemáticos y las concepciones de la matemática están siempre implicados.
- Mediante la selección de las interpretaciones particulares y haciendo hincapié en ellas sobre las demás, los profesores son participantes vitales en la creación cultural de las matemáticas.
- El conocimiento de los profesores de matemáticas es en gran parte tácito, pero los elementos críticos del mismo pueden aparecer ante cuestionamientos conscientes suscitados en entornos colectivos.
- El saber individual y colectivo no puede ser dicotomizado – participar en la interpretación colaborativa puede afectar profundamente la comprensión individual (Davis, 2010, p.65).

Davis (2010) expresa que él está interesado en saber qué pasa cuando en un entorno para varios profesores (por ejemplo un grupo de profesores que hacen un máster (una maestría) en un programa enfocado en el conocimiento disciplinar de los profesores de matemáticas), diseñado con la lente de *"estudio de conceptos"*, y guiados por la convicción de transformar su práctica, se plantea la necesidad de diseñar entornos transformativos para profesores de matemáticas. Además a él le interesa saber cómo los seres humanos llegan a adquirir un concepto y por ello estudia además de algunos aspectos cognitivos, otros que pueden influir en la adquisición de éste.

> [...] mi interés se centra en cómo los seres humanos llegan a conocer el concepto, y por esa razón atiendo a las estructuras anidadas del cerebro, el pensamiento, el lenguaje, la cultura, la sociedad y la ecología – estructuras implicadas que permiten y limitan la comprensión. (Davis, 2010, p. 67)

En resumen, podemos decir que son dos los grandes constructos en la perspectiva de Davis, aparte del *"estudio de conceptos"* está la visión de las *"matemáticas para la enseñanza"* como una aplicación de la matemática, con una mirada matemática especial, es decir, él ha estudiado, junto con varios colegas (por ejemplo con Simmt y Renert), acerca de sistemas en *"ciencias de* *la complejidad"* y teoría de grafos para tratar de explicar y entender el complejo mundo de las matemáticas para la enseñanza. Finalmente, Davis apuesta por el *"estudio de conceptos"* como una metodología formal que pueda ser usada para investigar el conocimiento matemático de los profesores (para la enseñanza).

b) Cuarteto de Conocimiento

Esta perspectiva presentada por Rowland y sus colaboradores, es un marco conceptual de base empírica que se usa en clases de formación inicial, a partir de clases videograbadas de matemáticas preparadas e impartidas por otros estudiantes del último año de su formación para profesores de primaria, con la finalidad de observar y analizar la enseñanza de matemáticas con estudiantes y así desarrollar conocimiento matemático para la enseñanza. El foco de atención es la reflexión sobre el rol tanto del *conocimiento del contenido* como el del *conocimiento didáctico del contenido* (PCK) en matemáticas. Su principal interés está en los conocimientos y creencias que tiene el profesor y cómo pueden ser identificadas las oportunidades de mejora relacionadas con el conocimiento matemático para la enseñanza (Rowland y Turner, 2007).

El *cuarteto de conocimiento* nace en un proyecto colaborativo con la participación de tres universidades de Inglaterra (Goulding, Rowland y Barber, 2002), el cual fue desarrollado entre los años 2002 y 2004 y modificado en 2007, videograbaron 24 clases de matemáticas con estudiantes para profesor (nivel primaria) en su último ciclo escolar (durante su periodo de práctica), y escribieron una breve sinopsis descriptiva (400-500 palabras) con la intención de dar la idea sobre aspectos relevantes acontecidos en cada clase. En ese estudio, identifican situaciones que dan cuenta de aspectos significativos sobre el conocimiento del contenido y el PCK, sobre la carencia de estos y analizan las clases bajo la metodología de la *Grounded Theory* (Glaser y Strauss, 1967) con el objetivo de generar teoría. Del análisis obtienen cuatro categorías o unidades: fundamentos, transformaciones, conexiones y contingencias. (Rowland, 2008). A continuación se presenta brevemente la conceptualización de las cuatro categorías, mismas que aparecen de manera más detallada en Rowland et. al. (2005).

Fundamentos, se refiere al conocimiento de las matemáticas en sí, concepciones y creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre qué, por qué y cómo enseñar, incluye la concepción personal que se tenga sobre el rol del profesor en el salón de clases; todo esto adquirido antes y durante su formación (intencionalmente o no). Mientras que en las *transformaciones* se abordan aspectos del conocimiento en la acción, incluye las formas y contextos en los cuales el conocimiento es desarrollado durante la planificación, la enseñanza y la capacidad en sí que se tenga para transformar el conocimiento a enseñar haciéndolo accesible a los alumnos, por ello, en esta categoría consideran la selección y uso de las formas de representación: analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones expresadas en Shulman (1986). Las *conexiones* se refieren al conocimiento que manifiestan los profesores cuando establecen conexiones entre las distintas partes del contenido, a la coherencia durante la planificación o enseñanza mostradas a lo largo de un episodio o de una o varias clases. Y las *contingencias* se presentan en aquellas situaciones en las que los profesores han de responder ante eventos inesperados que emergen durante la instrucción, acontecimientos que son casi imposibles de planear, en los que entra en juego la habilidad del profesor para responder a las diversas ideas inesperadas de los alumnos y desviarse de lo que tenía planeado cuando lo considere apropiado, la calidad de las respuestas que dé el profesor está determinada, en parte, por la fuente de conocimiento disponible que tenga el profesor (Rowland et. al. 2005).

En el *cuarteto de conocimiento* destacan como potencialidad el hecho de ser un marco conceptual manejable para la reflexión sobre aspectos del conocimiento del contenido en las discusiones realizadas entre el tutor (mentor) y el aprendiz en formación inicial -y no sólo del PCK-, ya que normalmente, como se muestra en el estudio de Brown, McNamara, Jones y Hanley (1999), tales discusiones se enfocan más a características de corte organizacional de la clase, con menos atención a los aspectos matemáticos de las clases de matemáticas.

Además, posteriormente Rowland (2008) expresa que el *cuarteto de conocimiento* es un marco conceptual accesible para observar, analizar y discutir acerca de la enseñanza de matemáticas a partir de la perspectiva del conocimiento matemático para la enseñanza (ambos conocimiento del contenido y PCK) que posee el profesor y enfatiza que pretenden que este marco sea una herramienta para apoyar el desarrollo del profesorado, con objetivos claramente determinados y organizados sobre el impacto de su conocimiento del contenido y PCK en la enseñanza. Asimismo menciona que últimamente han analizado clases de nivel secundaria, no sólo de matemáticas sino también de inglés, ciencias y lenguas extranjeras aplicando el *cuarteto de conocimiento* exitosamente, con lo cual Rowland y sus colaboradores se cuestionan si la conceptualización de este marco podría funcionar en otras disciplinas y no sólo en matemáticas (Rowland, 2008). En conclusión, Rowland y su equipo de investigadores consideran que el marco conceptual que ellos proponen es un instrumento para desarrollar la enseñanza y el conocimiento de los profesores. Rowland y sus colegas otorgan mayor importancia al cuarteto de categorías emergentes de conocimiento más que a tener una lista de códigos (Rowland et. al. 2005); además, Rowland (2008) enfatiza que en su teoría, al analizar las clases, es más significante la clasificación de las situaciones bajo las cuales subyace el conocimiento matemático para la enseñanza que hacer una distinción entre diferentes tipos de conocimiento matemático para la enseñanza (dicha distinción es un aspecto característico de la teoría propuesta por Ball et al. 2008).

c) *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*

Ball y sus colegas presentan el *MKT*. Sus investigaciones se centran en el conocimiento matemático para la enseñanza, en particular en el nivel de primaria, estudiando dicho conocimiento a partir de la práctica del profesor. Ellos exponen un modelo multi-dimensional, en el que hacen un refinamiento a las dimensiones del *conocimiento del contenido* y del *conocimiento didáctico del contenido* presentado por Shulman (1986), adaptado a las matemáticas. Ball y su grupo de investigación exponen una propuesta centrada en el conocimiento matemático para la enseñanza, ellos incluyen el conocimiento curricular planteado por Shulman (1986) en el conocimiento didáctico del contenido, obteniendo así sólo dos grandes dominios que se encuentran, por su parte, cada uno de ellos subdivididos en tres subdominios. El conocimiento del contenido queda subdividido en tres subdominios: Conocimiento común del contenido (CCK), Conocimiento especializado del contenido (SCK) y Horizonte matemático (HCK). Y el PCK en: Conocimiento del contenido y estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y Enseñanza (KCT) y Conocimiento Curricular (KCC).

El CCK se refiere al conocimiento matemático y a las habilidades necesarias para resolver las tareas que los estudiantes están realizando, los profesores necesitan ser capaces de hacer las tareas que ellos están asignando a sus estudiantes (Ball et al., 2008). El SCK es el conocimiento constituido por el conocimiento matemático y las habilidades que son propias de la profesión de los profesores, en él se incluye el conocimiento que permite a los profesores conocer la naturaleza matemática de los errores que cometen los alumnos y razonar si alguna de las soluciones que dan sus alumnos podrían funcionar en general o no. En el SCK se destaca el hecho de que los profesores tienen que desarrollar una clase de conocimiento matemático especial en tanto que los profesores requieren de un entendimiento y razonamiento matemático único de su profesión para realizar sus tareas escolares día a día, siendo el propio trabajo de la enseñanza de las matemáticas el que crea la necesidad de un cuerpo de conocimiento matemático especializado para la enseñanza. El HCK es considerado como el conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intra y extramatemáticas. Este subdominio incluye las habilidades que tienen los profesores para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular.

El KCS consiste en la conjunción del entendimiento del contenido y saber lo que los alumnos pueden pensar o hacer matemáticamente, el KCS incluye las habilidades que tienen los profesores para predecir lo que a los alumnos les parecerá interesante, motivante, fácil, difícil, aburrido o agobiante. En tanto que el KCT se refiere a la conjunción del entendimiento del contenido y su enseñanza, es decir, al entendimiento del contenido matemático y su familiaridad con los principios pedagógicos para enseñar ese contenido en concreto. En este conocimiento se incluye las habilidades que tienen los profesores para saber qué representaciones son más adecuadas y usar diferentes métodos y procedimientos cuando imparta ese contenido matemático. Finalmente, el KCC está:

> […] representado por el conjunto de programas diseñados para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado, la variedad de materiales educativos disponibles en relación con los programas, y el conjunto de características que sirven tanto como las indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios particulares o los materiales del programa en determinadas circunstancias. (Shulman, 1986, p. 10)

Se puede destacar que Ball y su grupo de investigación se interesan en lo que los profesores hacen mientras enseñan (Ball, Hill y Bass, 2005) y se enfocan en el estudio de la enseñanza de la matemática y también en la matemática utilizada durante el proceso de enseñanza.

De las tres perspectivas acerca del conocimiento matemático para la enseñanza constatamos, de forma relativamente explícita, que el profesor deberá ser conocedor del contenido que pretende enseñar y también de conocimientos didácticos que le permitan hacerlo. En ese sentido, Ball (2000) refuerza la necesidad de que los profesores adquieran *conocimiento del contenido* y *conocimiento didáctico del contenido,* y efectúen las interconexiones necesarias entre estos tipos de conocimientos, con el objetivo de utilizarlos para lograr que sus alumnos aprendan matemáticas.

Conclusiones

Cada uno de estos tres grupos de investigación, por su parte, han desarrollado a la fecha, diversas pesquisas. Con base en el estudio de la comprensión de la génesis de las tres perspectivas mostradas en este artículo, se pudieran interpretar algunas sobreposiciones entre ellas, pero también algunos matices diferentes mostrados a través de los aspectos expuestos anteriormente en cada perspectiva, esto debido a los objetivos distintos, trazados por cada grupo de investigadores al hacer sus pesquisas, de las cuales surge cada perspectiva. Por ejemplo, se puede decir que uno de los grandes intereses de Davis y sus colaboradores es saber cómo los profesores llegan a adquirir un concepto, mientras que Rowland y sus colegas están interesados en el conocimiento y las creencias del profesor y cómo pueden ser identificadas las oportunidades para mejorar el conocimiento matemático para la enseñanza (no sólo el conocimiento didáctico del contenido) en la formación inicial del futuro profesor de primaria, entre tanto, Ball y sus colaboradores identifican, estudian y analizan el conocimiento matemático para la enseñanza del profesor de primaria.

Cabe destacar que en torno a las tres perspectivas expuestas, independientemente de la discusión que pudiera provocar lo que sí contempla una y no otra, puede resultar más interesante e importante toda la reflexión, todo el trabajo que puede brindar al investigador el **proceso** de seguir/usar una de ellas, aún y cuando éste pueda hacer aportaciones para enriquecerla o bien, diferir en algunos matices.

En síntesis, es de destacar que el contenido del conocimiento profesional del profesor, la forma en que se organiza y sus características continúan siendo ampliamente estudiadas en la Educación Matemática. Por tanto, uno de nuestros mayores intereses de investigación consiste en inquirir las características del conocimiento profesional, en particular, en el de las del conocimiento matemático para la enseñanza.

Referencias bibliográficas

Ball, D.L. (2000). Bridging practices. Interwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241-247.

Ball, D.L., Hill, H.C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *29*(1), 14-46

Ball D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Brown, T., McNamara, O., Jones, L. y Hanley, U. (1999). Primary student teachers' understanding of mathematics and its teaching. *British Education Research Journal*, *25*(3), 299-322.

Davis B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM)*, *14*(2), 86-91.

Davis B. (2010). Concept studies: Designing settings for teachers´disciplinary knowledge. In Pinto, M. M. F. & Kawasaki, T. F. (Eds). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 63-78. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Davis B. y Simmt E. (2003). Understanding learning systems: mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(2), 137-167.

Davis B. y Simmt E. (2006). Mathematics-for-teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. Londres: Croom Helm.

Fernandez, C., y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Glaser, B.G. y Strauss, A.L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aldine de Gruyter.

Goulding, M., Rowland T. y Barber, P. (2002). Does it matter? Primary teacher trainees' subject knowledge in mathematics. *British Educational Research Journal*, *28*(5), 689-704

Leinhardt, G., Putnam, R., y Hattrup, R.A. (1992). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ponte, J.P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. In A. Gutierrez y P. Boero (Eds.). *Handbook of Research of the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishing.

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. In P. Sullivan and T. Wood (Eds.) *International Handbook of Mathematics Teacher Education:* Vol.1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development (pp. 273-298). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Rowland, T., Huckstep P. y Thwaites A. (2005). Elemenatry teachers´ mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rowland, T y Turner F. (2007). Developing and using the 'Knowledge Quartet': A framework for the observation of mathematics teaching. *The Mathematics Educator*, *10*(1), 107-124.

Schön, D.A. (1983). *The Reflective Practitioner: how professionals think in action*. New York: Basic Books.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14.

Studying Complexity Science (s.f.). *Complexity Sciende Focus.* Recuperado el 28 de agosto de 2010 de http://www.complexity.ecs.soton.ac.uk/

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL ENTRE PROFESORES DE BACHILLERATO

Mario Caballero Pérez, Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav del IPN México
macaballero@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen Diversos estudios muestran que los profesores parecen no haber desarrollado un pensamiento variacional, ya que no recurren a ideas variacionales para resolver actividades que las requieren. Como objetivo nos hemos propuesto identificar las causas por las cuales el profesor de matemáticas presenta dificultades para desarrollar un pensamiento variacional. Nuestra hipótesis indica que el pensamiento de los profesores los lleva a centrar su atención en reproducir una acción, aplicar una propiedad o regla para conseguir un resultado, dejando de lado el estudio de las causas que originan ese resultado. Para el logro de los objetivos se realizará una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional, y con base a ello, se aplicará un diseño de actividades a profesores para observar la forma en que abordan una situación de variación, analizando las dificultades que surjan y las causas que las generan.

Palabras clave: pensamiento y lenguaje variacional, profesor, variación

Abstract. Several studies show that teachers seem to have not developed a variational thought because they don't utilize variational ideas for solving activities that require them. As aim of this work, we want to identify the reasons why a math teacher has difficulties developing a variational thought. Our hypothesis is that the thinking of teachers leads them to focus their attention to reproduce an action, to apply a property or a rule in order to get a result, ignoring the study of the causes of that result. To achieve the objectives, we will do a characterization of the elements of the Thought and Language Variational, and, based on this, we will apply an instrument (an activities design) to teachers to see how they approach a situation of variation, analyzing the difficulties that will emerge and the causes that generate them.

Key words: thought and language variational, teacher, variation

Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación que tiene como objetivo identificar las causas que originan las dificultades en los profesores de bachillerato para desarrollar un pensamiento variacional. En el presente escrito reportamos los avances que se tienen ahora, enfocándonos en describir la problemática en la que se inscribe el trabajo, las preguntas de investigaciones que lo guían, el planteamiento de la hipótesis de investigación y los objetivos que persigue.

Planteamiento de la problemática de investigación

Los resultados de investigaciones dentro de la Matemática Educativa han mostrado que el estudio de la variación es un elemento necesario para poder significar las ideas y conceptos del Cálculo, pero el actual discurso matemático escolar no propicia este desarrollo de ideas variacionales. Se fomenta el desarrollo de estrategias y conocimientos procedimentales y memorísticos que, aunque son necesarios, no dejan ver el carácter variacional del Cálculo, y no propician la construcción de una concepción rica en significados. Se dedica mucho tiempo a la enseñanza de algoritmos dejando de lado la formación de ideas variacionales tan necesarias para la comprensión de las ideas del cálculo.

"El discurso matemático escolar parece inhibir el desarrollo de ideas variacionales, al centrar la atención en el desarrollo de destrezas mecánicas y algorítmicas que no dejan ver la naturaleza variacional del Cálculo" (Reséndiz, 2004). Por tanto, propiciar el estudio de la variación representa una tarea importante para fomentar un aprendizaje rico en significados, tarea ante la cual se han desarrollado investigaciones enmarcadas en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar), línea de investigación que estudia los saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, y que enfatiza en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico.

Algunas investigaciones (Salinas, 2003 y Reséndiz, 2004) han estudiado la forma en que la variación se hace presente en el discurso matemático escolar, particularmente en los libros de texto y en las explicaciones que los profesores proporcionan a los alumnos, sin embargo, aunque la variación tiene un papel en los libros o en las explicaciones, este es relegado a segundo plano, o bien, no se hace énfasis en la importancia de la variación en las ideas matemáticas. Otros trabajos (González, 1999; Aparicio, 2003; Engler, Vrancken, Gregorini, Müller, Hecklein y Henzenn, 2008) se han ocupado del diseño de actividades que propicien el desarrollo de estrategias variacionales entre los estudiantes y también en analizar las estrategias que los estudiantes usan ante situaciones variacionales. Los resultados de estos trabajos muestran, entre otras cosas, que lo estudiantes no cuentan con las herramientas necesarias para abordar situaciones de variación, lo que se refleja en el uso de definiciones, teoremas o propiedades aprendidas previamente, pero que no son recordadas correctamente, e incluso en ocasiones modificándolas para construir teoremas o propiedades no validas para dar respuesta a los problemas planteados.

Pero existe otro tipo de investigaciones, que se ocupan de estudiar la formación de profesores de matemáticas con respecto a ideas variacionales (Cabrera, 2009; Engler, Vrancken, y Müller, 2011), y otras que analizan las estrategias empleadas por profesores ante situaciones de variación (González, 1999; Cantoral, Sánchez y Molina, 2005). Los resultados de estas investigaciones muestran la importancia del manejo de ideas variacionales en los profesores para una enseñanza donde los significados de los conocimientos matemáticos se enriquezcan con el estudio de la variación, pero también muestran que los profesores presentan dificultades para abordar satisfactoriamente situaciones de variación, en ocasiones dificultades similares a las reportadas en estudiantes.

Ejemplo de estas dificultades se pueden observar en el trabajo de González (1999), donde se propone una actividad a profesores de bachillerato en la que deben decidir sobre el signo de la primera, segunda y tercera derivada a partir de la gráfica de una función. Los profesores logran responder a las actividades referentes a la primera y segunda derivada usando recursos memorísticos, como la idea de pendiente y concavidad, pero ante el signo de la tercera derivada presentan dificultades y errores en sus respuestas. Estas dificultades se manifiestan cuando los profesores hacen uso de "teoremas factuales", que consisten en afirmaciones basadas en las propiedades de los signos de la primera y segunda derivada, y que son extrapolados de manera errónea para argumentar sobre la tercera derivada, mostrando con esto una falta de comprensión de estas propiedades, pero también que los profesores no tienen desarrollado un pensamiento variacional, pues de tenerlo podrían recurrir al estudio de la variación para dar respuesta a la tercera derivada.

Este tipo de situación evidencia que los profesores poseen un buen dominio del contenido matemático, al menos a un nivel procedimental, pero que presentan deficiencias en cuanto a un entendimiento más profundo de los conceptos del Cálculo, particularmente con respecto a ideas variacionales. Esto a su vez, tiene repercusiones en cuanto a las estrategias de enseñanza, las cuales se sustentan en el uso de la memoria, aprendizaje de algoritmos y reglas, dejando de lado aquellas ideas variacionales tan importantes para el aprendizaje del Cálculo. Un ejemplo de esto lo vemos del trabajo de Reséndiz (1997), citado en Reséndiz, (2004), donde se analiza la práctica de un profesor cuando aborda el tema de la segunda derivada, observando que les cuesta trabajo establecer argumentos más allá del manejo simbólico que relacionen la segunda y tercera derivada, sin poder dotar de significado a la tercera derivada al no tener ningún esquema previo para ello, a diferencia de la primera y segunda derivada que si asocia un significado por medio de la velocidad y aceleración. De este ejemplo en un escenario de clase, podemos ver que el profesor no caracteriza los cambios más allá del orden dos, pues de hacerlo el profesor podría establecer características para la tercera derivada a partir del estudio de su variación y poder significarla a partir de ello. Asimismo, podemos ver una preocupación del profesor por hacer uso de los procedimientos algebraicos que domina, lo que ocasiona que deje de lado los aspectos variacionales que se encuentran al seno del aprendizaje y de la construcción de la derivada.

En trabajos como el de González (1999) y Reséndiz (1997) se observan dificultades en profesores de matemática para abordar situaciones de variación, lo que nos da indicios de la existencia de dificultades para desarrollar un pensamiento variacional. Esto representa una problemática fundamental a estudiar, debido a que consideramos que para poder hablar de una enseñanza donde el estudio de la variación tenga un papel importante, es necesario que el profesor tenga desarrollado este pensamiento. Sin embargo, los trabajos enmarcados en el Pylvar relacionados con el profesor se han enfocado en analizar la forma en que resuelven situaciones de variación, pero no han tomado en cuenta la naturaleza de las dificultades para desarrollar un pensamiento variacional, aspecto que consideramos esencial para cualquier propuesta que pretenda incorporar ideas variacionales al conocimiento del profesor. Por ello en este trabajo nos enfocamos en analizar cuáles son las causas que ocasionan esas dificultades a los profesores para desarrollar un pensamiento variacional, para lo cual es importante entender qué es, en qué consiste, y cómo se desarrolla, y así tener un marco de referencia que nos permita analizar y comprender la naturaleza de esas dificultades. Con base en lo anterior, planteamos nuestras preguntas de investigación:

1. ¿Cuáles son las causas que originan las dificultades para desarrollar un pensamiento variacional en los profesores de matemáticas de bachillerato?
2. ¿Qué caracteriza y cómo se desarrolla el Pylvar?

El sustento teórico de la investigación se encuentra en la teoría Socioepistemológica, que plantea que el conocimiento matemático tiene su origen en el conjunto de prácticas humanas que son aceptadas y establecidas socialmente llamadas prácticas sociales (Cantoral, 2004). Son las prácticas las que favorecen la construcción del conocimiento matemático, lo que implica un énfasis distinto que caracteriza a la Socioepistemología: pasar de los objetos a las prácticas. Es la praxis la que favorece y permite el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción, proceso o procedimiento (Cabrera, 2009), en el cálculo esta praxis se refiere a las prácticas propias de la variación. En las siguientes secciones se mostrará el análisis documental realizado al Pylvar y al Razonamiento Causal (RC), con el objetivo de caracterizar el pensamiento variacional y establecer nuestra hipótesis sobre las causas que originan dificultades para desarrollar este tipo de pensamiento.

Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional

El Pylvar "estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida" (Cantoral, 2000, citado en Cabrera, 2009, p. 53). Enfatiza en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico, siendo las prácticas propias de la variación las que dotan de significado a los conceptos matemáticos y los procedimientos que se asocian a ellos. La idea que subyace a esta línea de investigación es el estudio del cambio y la variación, nociones que dieron vida y permitieron el desarrollo de las ideas del Calculo. "Por cambio se entiende a la modificación de estado, apariencia, comportamiento o condición de un cuerpo, sistema u objeto, en tanto que la variación es entendida como una cuantificación de ese cambio" (Cantoral, Sánchez y Molina, 2005). De modo que el estudio de la variación requiere de conocer qué es lo que cambia, cuánto cambia y cómo cambia

Cabrera (2009) menciona que el Pylvar puede ser visto bajo dos perspectivas, la primera como una línea de investigación que estudia los conocimiento matemáticos desde un punto de vista variacional, analiza las estructuras cognitivas que se generan ante situaciones de variación, y diseño de actividades que permitan la resignificación de los conocimiento matemáticos por medio de la variación. La segunda se refiere al Pylvar "como aquellas estrategias, formas de razonamientos, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten discutir y comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación" (Cabrera, 2009, p.55).

El estudio del cambio y la variación se derivan de la incapacidad de poder adelantar el tiempo para observar los resultados de los acontecimientos, lo que ha llevado a desarrollar herramientas basadas en el estudio del cambio para lograr anticipar el comportamiento de sistemas complejos, de modo que la idea de predicción se vuelve una herramienta importante en el desarrollo y construcción de algunos resultados y conceptos matemáticos (Cantoral, R.; Farfán, R.; Lezama, J.; Martínez, G., 2006). La predicción enmarcada bajo el Pylvar se fundamenta en el hecho de que el cambio posee herencia, "un estado posterior de un fenómeno de variación depende de las circunstancias que caracterizan el estado inicial" (Cabrera, 2009, p.57). En otras palabras, un estado B de un fenómeno, depende de las características variacionales del estado anterior A, por lo tanto la predicción requiere centrarse en la forma en que se da el cambio de un estado a otro, pues al conocer la forma en que se dan los cambios, se puede anticipar un estado futuro. El proceso de cambio de un estado a otro es por tanto más importante que los estados mismos.

El Pylvar es una línea de investigación y una forma de pensamiento que se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación. Las situaciones donde se pone en juego el Pylvar, se caracterizan por enfatizar en los procesos de cambio, lo que permite significar los conocimientos matemáticos propios del cálculo más allá de la sola manipulación simbólica, analizando estos procesos de cambio por medio de las ideas variacionales que dieron vida y desarrollaron esos conocimientos.

Dada la naturaleza de estas características del Pylvar, se decidió complementar este análisis con las aportaciones referentes al RC propuesto por Piaget, postura que se preocupa del estudio de las causas que originan un cierto fenómeno. Antes de exponer este análisis, conviene aclarar que los estudios de Piaget fueron realizados con niños, y nuestra investigación considera profesores de bachillerato que son personas adultas, no obstante, consideramos que dada la relación existente entre el RC y el Pylvar, conocer las dificultades que se presentan en la infancia, y las causas que originan dicha dificultad, nos puede ayudar a explicar las dificultades que se refieren al desarrollo del pensamiento variacional en la etapa adulta, y las causas que la originan.

El razonamiento causal

El RC tiene su base en la causalidad, que consiste en la explicación que se realiza sobre una relación o fenómeno observado, en cuanto esta versa en el análisis de su modo de producción (Piaget, 1977). Consiste en los procesos mentales que permiten la explicación de las causas que originan algún fenómeno, lo que implica mostrar qué transformaciones se produjeron y como ciertos aspectos del resultado corresponden a transmisiones del estado inicial (Piaget, 1977), en decir, señalar lo que está ocurriendo, hacer énfasis en aquello que produce el resultado del fenómeno y cómo se produce.

En una etapa inicial, el sujeto fija completamente su atención en los estados inicial y final de un fenómeno, sin prestar atención a lo que sucede entre estados. No se busca él cómo suceden las cosas, sino que se enfoca en el resultado final de una acción sin preocuparse de los estados intermedios, no hay necesidad de averiguar las causas del fenómeno (Piaget, 1977), basta con saber que cierta acción produce un cierto resultado deseado, siendo estas acciones principalmente una reproducción de los movimientos que el niño realizó cuando el fenómeno se produjo. En un experimento se colocaba un objeto sobre una cornisa con una cuerda atada que colgaba a la altura del niño, quien jalaba de la cuerda para acceder a ese objeto. Al repetir el experimento, se observa que el niño no jala la cuerda, sino que realiza un ademan con su mano, mismo que uso al jalar la cuerda anteriormente. En esta situación, el propósito no está en entender porque el objeto cayo, sino obtenerlo, para lo cual hace uso del movimiento corporal que anteriormente le permitió obtener el objeto.

En una etapa avanzada se comienza a desarrollar y formalizar el RC al intervenir dos elementos que importantes, la objetivación y la espacialización. El desarrollo de la objetivación permite adquirir una verdadera permanencia e identificación física con los objetos, volviéndolos ajenos a los movimientos del niño y permitiendo reconocer y asociar elementos externos que interactúan y afectan al objeto. El desarrollo de la espacialización consiste en reconocer el centro de la acción, relacionarlo con otros espacios y entrar en contacto físico con esos espacios, es decir, el fenómeno y las acciones que sobre ella se realicen toman lugar en un escenario específico con características propias. Cuando estas dos ideas son desarrolladas, las causas de los fenómenos dejan de ser asociadas únicamente al movimiento corporal o a las intenciones, logrando reconocer otros factores o elementos que pueden afectar y originar esos fenómenos. Se reconoce la existencia de causas al fenómeno externas al comportamiento físico, y la existencia de lazos entre los eventos del suceso, lo que permite aplicar esquemas previos a nuevas situaciones (Piaget, 1977).

Planteamiento de la hipótesis de investigación y objetivos

Del análisis del RC encontramos elementos que causan dificultades para su desarrollo y que brindan elementos para plantear una postura acerca de las causas que originan que profesores presenten dificultades para desarrollar un pensamiento variacional, ya que se observaron características similares entre ambas formas de pensamiento, en cuanto a que requieren analizar el proceso entre estados, más que los estados mismos. Las dificultades en el RC se originan por la centración en reproducir una acción que produzca un resultado deseado, sin preocuparse por las causas reales que originan ese resultado. Sólo hasta que el niño comienza a darse cuenta que los fenómenos son producidos no solamente por las acciones realizadas, sino que también intervienen otros estados intermedios, como cuerdas unidas a un objeto, es que podemos hablar de un RC.

El desarrollo del Pylvar requiere, al igual que el RC, centrarse en las causas que generan un fenómeno, lo que en el caso del Pylvar implica enfocarse en el estudio y cuantificación del cambio y la variación. Con base en el análisis del RC, sostenemos que el uso de ideas variacionales por profesores es obstaculizado por razones similares al desarrollo del RC, esto es, la persona centra su atención en reproducir una acción (como puede ser aplicar una propiedad o regla) para conseguir un resultado, dejando de lado el estudio de las causas que originan ese resultado. Los resultados de las investigaciones acerca de Pylvar, confirman esto último, pues se observa una predilección por el uso de procedimientos, algoritmos, o recursos memorísticos para afrontar situaciones de variación.

Con base en lo anterior, nuestra hipótesis de investigación sostiene que el pensamiento de los individuos los lleva a centrarse en utilizar algún conocimiento que los conduzca a un resultado satisfactorio, lo que hace que no se enfoquen en estudiar las causas del fenómeno, es decir, estudiar el cambio y la variación. Sostenemos que esto último tiene su origen en las herramientas con las que cuenta el profesor, pues como se menciona Attorps (2006) los profesores han desarrollado en mayor medida habilidades procedimentales, algorítmicas y memorísticas, lo que no favorecen el desarrollo del Pylvar. Este desarrollo requiere centrarse en los procesos de cambio de un estado a otro de un fenómeno, más que en el estado mismo y de la mera manipulación simbólica, identificando aquello que cambia, cuantificar ese cambio y analizar como varían los cambios. Si sólo se verifica que alguna propiedad o regla se cumple, no hay un pensamiento variacional detrás, ya que no se requiere comprender el proceso de variación involucrado, sino obtener el resultado.

Reflexiones finales

El interés del estudio es identificar las causas que originan dificultades en profesores para desarrollar un pensamiento variacional. Para ello, establecimos los siguientes objetivos: Primero, caracterizar los elementos que conforman el Pylvar, segundo, con base en esa caracterización, diseñar un conjunto de actividades que involucren situaciones de variación, y tercero identificar, a partir de esas actividades, las estrategias empleadas por lo profesores que son propiamente variacionales de aquellas que no lo son, para poder analizar y verificar si nuestra hipótesis es válida. Hasta el momento se ha realizado la caracterización del Pylvar, y el diseño de las actividades, y se está procediendo a aplicar las actividades con profesores de matemáticas para analizar el tipo de estrategias que emplean con base en la caracterización, y nuestra hipótesis.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. (2003). *Sobre la noción de discontinuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes de ingeniería en contexto de geometría dinámica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. México, D.F. México.

Attorps, I. (2006). *Mathematics teachers' conceptions about equations*. Tesis de Maestría no publicada, University of Helsinki.

Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN. México D.F. México.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, pp. 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Lezama, J y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número Especial, 18, 83-102. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Engler, A., Vrancken, S. y Müller, D. (2011). Formación a distancia. Las concepciones de los docentes con relación a ideas variacionales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24, 1027-1036. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M., Müller, D., Hecklein, M. y Henzenn, N. (2008). Estudio del comportamiento de la función a partir de la derivada. Análisis de una secuencia didáctica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 466 – 476. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. México D.F. México.

Piaget, J. (1977). Causality and Operation. En J. Piaget y R. Garcia (Eds), *Understanding Causality* (pp. 1 – 10), United States of America, Norton Library.

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN. México D.F. México.

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. México D.F. México

LA DECONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO: UN MEDIO PARA EL ANÁLISIS DEL DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR

Luis M. Cabrera Chim, Ricardo A. Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados México
lmcabrera@cinvestav.mx; rcantor@cinvestav.mx

Resumen. El desarrollo profesional del profesor de matemáticas es un proceso complejo en el cual intervienen diferentes factores. Uno de estos factores es su relación con la Matemática y la Matemática Educativa, la cual dota de significado su práctica docente. Por tanto, caracterizar la relación que poseen los profesores en servicio nos permitirá crear espacios de desarrollo profesional más acordes a sus necesidades. Para realizar esto, resaltamos la necesidad de reconocer los conocimientos que intervienen en el desarrollo de sus tareas profesionales, en particular en el diseño de situaciones de aprendizaje. Cuando los profesores se enfrentan a esta tarea deben integrar diferentes fuentes de su conocimiento profesional (matemático, didáctico, contextual de su salón de clases, curricular, entre otros). A esta integración la denominaremos deconstrucción del conocimiento matemático.

Palabras clave: deconstrucción, desarrollo profesional, profesor

Abstract. The professional development of mathematics teacher is a complex process in which different factors are involved. One of these factors is his relationship with Mathematics and Mathematics Education, which gives meaning his practice teaching. Therefore, characterizing this relationship we will allow us to create opportunities for professional development more suited to teachers' needs. To do this, highlight the need to recognize the knowledges involved in the development of their professional tasks, particularly in the design of learning situations. When teachers face this task, they have to integrate different sources of professional knowledge (mathematical, didactic, context of classroom, curriculum, among others). We call deconstruction of mathematical knowledge to this integration.

Key words: deconstruction, professional development, teacher

Introducción

Las investigaciones en Matemática Educativa (Didáctica de las Matemáticas, Mathematics Education…según la región donde se desarrolle), poco a poco han arrojado un cúmulo de resultados que nos permiten comprender los fenómenos que suceden cuando se procura el aprendizaje de los saberes matemáticos por parte de los estudiantes. Sin embargo, el impacto de estos resultados en el aula no es directo. Se requiere que el profesor los haga parte de sus conocimientos profesionales. Esto exige una reelaboración de dichos resultados a la luz de su práctica docente, pues dicho conocimiento está normado por la forma como el profesor la concibe, los aspectos que privilegia y su capacidad para trastocarla. Dicha práctica se encuentra vinculada a diversos factores: su experiencia como estudiante y sus concepciones sobre la matemática y su enseñanza (Grossman, Wilson & Shulman 2005); la formación profesional y experiencia de trabajo en el aula (Azcárrate, 1998, citado en Parra, 2004) las condiciones institucionales en las que se desarrollan (Krainer & Llinares, 2010); el discurso Matemático Escolar (Soto, 2010), entre otras.

Existen diversos trabajos que buscan caracterizar los conocimientos que los profesores de matemáticas deben poseer para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes (Shulman, 2006, Ball, Thames & Phelps, 2008; Davis & Simmt, 2006; Godino, 2009; Schoenfeld & Kilpatrick, 2008). En todos ellos se parte de una premisa fundamental: existen diferencias fundamentales entre el conocimiento de la disciplina *per se*, y el conocimiento de la disciplina necesario para la enseñanza. Si bien, no se pone en duda la necesidad de un profundo y amplio conocimiento de la matemática. Se requiere que las ideas y conceptos matemáticos no se vean sólo como objetos matemáticos sino como objetos a enseñar. No obstante, ninguno de los trabajos problematiza el saber matemático, ni proponen nuevas visiones sobre la construcción de los conocimientos matemáticos.

La comprensión del profesor sobre los diferentes tópicos de la matemática y sobre las relaciones que existen entre estos, influye en gran medida en la forma como se introducen al salón de clases. Así, el diseño de actividades, ejemplos y ejercicios que desarrollan para favorecer el aprendizaje de los estudiantes depende en gran medida de dicha comprensión (Thompson, Carlson & Silverman, 2007).

Bajo el panorama anterior, toman relevancia las críticas realizadas desde la Teoría Socioepistemológica al actual discurso Matemático Escolar (dME). Soto (2010) realiza un estudio cuyo objetivo se centró en analizar cómo el dominio del dME sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan en la escuela, constituye una fuente de problemáticas para favorecer la construcción del conocimiento matemático, dando por resultado la exclusión de las personas de dicha construcción. Así, es de vital importancia que el profesor pueda trastocar el dME para que pueda transformar su práctica y favorecer procesos de construcción social del conocimiento en sus aula

Marco de referencia

El dME hace referencia a las bases y perspectivas establecidas para la conformación y la comunicación de consensos, respecto a lo que es la matemática y la forma como se construyen los conocimientos matemáticos en el modelo didáctico contemporáneo. Al imponerse ciertas argumentaciones, significados y procedimientos de los objetos matemáticos, como mecanismos de difusión de estos, se impide a los actores del sistema educativo la posibilidad de construirlos con base a sus realidades y sus necesidades. Así, se impone una forma de construcción de conocimientos que les es ajena a las personas y que a su vez produce “significados” que también le son ajenos. Por tanto, ellas se ven limitadas a una reproducción o uso parcial de las potencialidades de los conocimientos. Esto ante la dificultad para reconocer otros significados. Esto provoca que al final las personas se vean limitadas a conocer y no a construir los conocimientos matemáticos (Soto, 2010).

El dME es un constructo teórico que forma parte de un programa de investigación inserto en la Teoría Socioepistemológica, la cual se interesa por analizar y comprender cómo los saberes matemáticos son construidos socialmente. Esta teoría tiene como objeto de estudio a los fenómenos relacionados con la construcción, la adquisición y la difusión del saber matemático, para ello le interesa caracterizar el papel que tienen las prácticas sociales en estos procesos. Así, interesa comprender el papel que desempeñan los escenarios históricos, sociales, culturales e institucionales en la construcción del conocimiento matemático, el cual se postula como social, histórico y culturalmente situado (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006). Por tanto, hablamos de una construcción social del conocimiento matemático, pues sin estos contextos no es posible comprender su surgimiento y significado. Así, esta mirada nos lleva a pensar en caminos alternativos para favorecer la construcción, difusión y adquisición de los conocimientos matemáticos, tomando en cuenta los aspectos sociales y su influencia en dichos procesos. De este modo, la problematización del conocimiento nos permite realizar una "reconstrucción" o "reinterpretación" de estos a la luz de las prácticas sociales. La problematización busca desentrañar y comprender los usos que las personas otorgan a los objetos matemáticos, la forma como los usan bajo determinadas prácticas, la razón de usarlos de ese modo, etc., de manera que podamos reconocer los significados que ellas otorgan o pueden otorgar a dichos objetos. Es importante aclarar que cuando hablamos del uso, debe entenderse en un sentido amplio. No refiriere únicamente al uso cotidiano, sino también a aquello que está impregnado implícitamente en la cultura y las relaciones sociales, y que favorece su significación.

Un medio para romper con el dME y favorecer que el profesor desarrolle nuevos discursos, es hacer que él viva la experiencia de aprender a través de nuevas perspectivas de construcción de conocimiento. Para esto, el enfrentarlo a Situaciones de Aprendizaje desarrolladas bajo esas perspectivas se presenta como relevante. En este proceso más que el desarrollo de nuevos conocimientos matemáticos *per se*, se busca que el profesor resignifique la matemática escolar (Montiel, 2010) y que transforme estos aprendizajes en conocimientos pertinentes para el desarrollo de su actividad profesional. La reflexión sobre los fundamentos que guían las situaciones experimentadas es un punto clave para lograr esto, pero también lo es llevar estas ideas a su contexto escolar. Los conocimientos y significados producto de este proceso serán los del que profesor se apropie (Montiel, 2010) y en los que fundamenten transformaciones en su práctica. Así, este proceso exigirá una confrontación entre las creencias, los conocimientos y las exigencias institucionales que vive el profesor.

Esta confrontación que el profesor vive día a día y que son reforzados por las experiencias de desarrollo profesional que el profesor cursa, favorece en el profesor una mezcla de conocimientos: los que ha ido desarrollando durante la experiencia de desarrollo profesional, las restricciones impuestas por su contexto de trabajo y su formación previa. Esta acción la denominaremos deconstrucción del conocimiento matemático, y es propia del profesor y difiere de uno a otro.

Marco metodológico

Para promover el desarrollo profesional del profesor, partiremos de ubicarlo en un papel de alumno que enfrenta situaciones de aprendizaje (Montiel, 2010). Con esto buscamos que resignifique sus aprendizajes matemáticos a la vez que experimenten en su propio nivel lo que su estudiante podría experimentar y con ello volverlo más sensible hacia él (Watson & Mason, 2007). También se busca que se vuelva más sensible hacia los resultados de investigación que fundamentan las situaciones de aprendizaje que él enfrentará.

Estas acciones consideramos son relevantes dentro nuestra propuesta, pues lo que los estudiantes aprenden está fuertemente definido por las tareas que ellos desarrollan. Además existe una fuerte relación entre el tipo de espacios de aprendizaje que se producen en el salón de clases y la toma de conciencia del profesor de él mismo como estudiante, así como el reconocimiento de diferencias en la forma como los estudiantes aprenden matemáticas (Watson & Mason, 2007).

Para observar como los profesores realizan la deconstrucción del conocimiento matemático, se desarrollo el Diplomado denominado "Desarrollo de Estrategias de Aprendizaje para las Matemáticas de Bachillerato. La transversalidad curricular de las Matemáticas". En el cual participaron alrededor de 250 profesores de bachillerato de diversos subsistemas: general, tecnológico y bivalente.

El Diplomado se desarrolló en dos fases: construcción de conocimientos matemáticos y diseño de una situación de aprendizaje (ver figura 1).

Para el análisis de las situaciones de aprendizaje diseñados por los profesores, empleamos el reporte de aplicación de la situación que elaboraron. En este documento se describe el objetivo de la situación, se presenta la situación de aprendizaje, se relata lo sucedido durante su aplicación y una reflexión sobre lo sucedido.

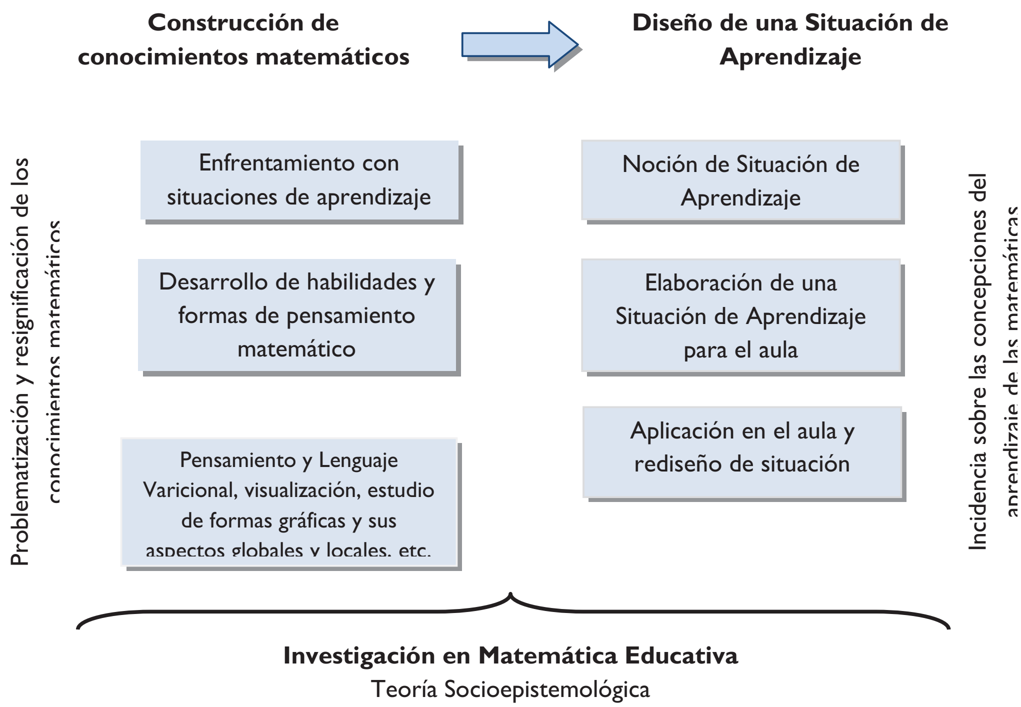


Figura 1: Etapas seguidas en el desarrollo del diplomado

Discusión de los datos

A continuación presentamos el análisis de una situación de aprendizaje diseñada por un profesor participante en el Diplomado (ver figura 2). Este profesor tuvo un papel destacado durante el Diplomado y su diseño sirvió de base generar situaciones de aprendizaje para trabajar con otros profesores. Nos interesó analizar los conocimientos puestos en juego, más que lo adecuado o no de la situación. Ésta tenía el objetivo de desarrollar la habilidad para "analizar las gráficas" y argumenten sobre las relaciones entre las variables que intervienen.

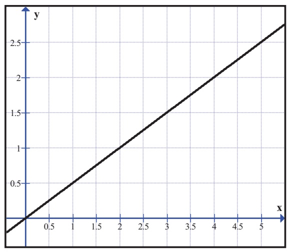
El profesor parte de considerar una distinción entre una situación de enseñanza y una situación de aprendizaje, señala que un "adecuado" proceso de enseñanza no genera necesariamente aprendizajes. De este modo, más que recurrir al desarrollo de novedosas formas de presentar un tema, deben generarse situaciones que lleven a los estudiantes a desarrollar procesos cognitivos significativos, a reflexionar y pensar activamente para que generen sus propios aprendizajes. El papel del profesor se limita a resolver dudas relacionadas con la compresión de lo establecido dentro la situación, más que explicar lo que se tiene que hacer. Así mismo, considera importante favorecer que los equipos de trabajo expongan las acciones que realizaron y los resultados a los que llegan, esto con el fin de establecer conclusiones generales.

JUAN Y LAS CUBETAS

A Juan lo pusieron a llenar 12 cubetas con agua… tenía la opción de llenarlas con la llave de la toma domiciliaria o la del tinaco… se muestran las graficas que corresponden al llenado de las cubetas.

1. ¿Con cuál de las dos llaves se llenan más lento las cubetas?
2. ¿Cuánto tiempo tardan en llenarse las 12 cubetas con la toma domiciliaria?
3. Si Juan llena una cubeta con ambas llaves de forma simultánea ¿Cuánto tardará?
4. Juan llena las cubetas con ambas llaves sin cerrarlas ¿Cuántas llenará en 210 seg.?
5. Juan cree que es más rápido llenarlas con las dos llaves, ¿Cuánto tardará en llenar las 12?
6. Encuentra la función que corresponde a cada grafica y su relación con tus resultados

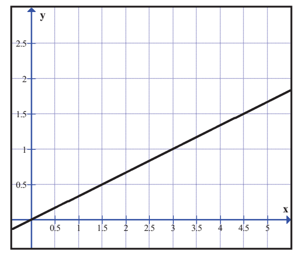
CUBETAS



MINUTOS

Llave de la toma domicilia

CUBETAS



MINUTOS

Llave del tinaco

Figura 2: Situación de aprendizaje propuesta por un participante en el Diplomado

Con respecto al análisis de los conocimientos matemáticos involucrados en la situación (el análisis gráficos y el concepto de función), resulta interesante el planteamiento de poner en correspondencia la información de las dos gráficas presentadas. Esto introduce al estudiante en un conflicto que lo pone en una condición propicia para generar aprendizajes. Esta es una idea discutida en el Diplomado. Con respecto al tema de función, su exploración y desarrollo a partir del análisis gráfico permite genera nuevos significados. Pero, se observa la necesidad de que estos conocimientos sean demostrados a través de la explicitación de una fórmula.

Lo anterior nos muestra una diferencia interesante. Si bien se considera importante que el estudiante desarrolle habilidades para el análisis gráfico, al no existir la presión curricular de abordar este concepto y por tanto un referente al cual llegar, se tiene mayores posibilidades de favorecer diferentes niveles de profundidad en su estudio. Mientras que para el tema de las funciones, al ser este tema exigido dentro el currículo y tener múltiples relaciones con temas posteriores, se espera que se demuestre un dominio formal del mismo. Esto también puede relacionarse con la necesidad de evaluar el aprendizaje de este último tema.

Por otra parte, el profesor asigna gran importancia a la contextualización como un medio en el cual el conocimiento matemático surge. Sin embargo, la contextualización es entendida como una situación que permita hablar de algo concreto o vivible por el estudiante, más que como un medio en donde conocimiento tiene significado por sí mismo para la sociedad en la que se desarrolla. Esta idea de contextualización es influenciada en gran medida por la reforma educativa que vive el bachillerato mexicano.

Un aspecto interesante que se presentó en diferentes diseños, y no sólo en éste, es que ellos están enfocados en profundizar en diferentes aspectos de un conocimiento ya estudiado con anterioridad, más que en favorecer la construcción de conocimientos matemáticos. Esto nos habla de una posible dificultad de los profesores para reconocer diferentes formas para favorecer la construcción de dichos conocimientos, en este caso las funciones.

Reflexiones finales

El profesor tiene una fuerte necesidad de que los estudiantes se apropien de un procedimiento correcto o una idea o significado formal del conocimiento matemático bajo estudio. Esto como un resultado directo de la situación que aplican en el aula. Parece no considerarse la posibilidad de la generación de ideas o significados diferentes a los exigidos en el currículo, pero que aporten a la construcción de los conocimientos bajo estudio y al desarrollo de habilidades y formas de pensamiento matemático. Esto puede ejercer un efecto negativo sobre las ideas socioepistemológicas respecto a la construcción social del conocimiento matemático: los saberes matemáticos obtienen sus significados a partir de las situaciones en las que se desarrollan.

Consideramos que el hecho de que los profesores ponga énfasis en lograr una "concepción formal" de los conceptos y temas bajo estudio no es una problemática en sí. Pero que esto se pretenda alcanzar a partir de una única situación, bajo una ruta o camino dominado por las perspectivas de la matemática formal, y ello sea el elemento para valorar la pertinencia y éxito de la misma, si lo es. Esto puede ser la causa de la prevalencia de un único o limitado número de significados de los conocimientos matemáticos que se favorecen en el aula de clases. También pareciera que el lograr que los estudiantes se apropien de un conocimiento es responsabilidad del profesor y ésta no puede ser dejada a ellos. Mientras que una vez logrado lo anterior, el ser capaz de hacer uso del conocimiento en diversas situaciones es una responsabilidad que puede quedar en manos de los estudiantes.

De este modo, es a partir de profundizar en la comprensión de los conocimientos y fundamentos que los profesores emplean para el diseño de situaciones que serán llevadas a su aula, que podemos identificar los elementos provenientes de programas de desarrollo profesional de los que se apropian los profesores, así como aquellos sobre los que resulta complejo incidir. Por otra parte, nos permite afirmar que los elementos que se retoman estarán condicionados en gran medida a la correspondencia de estos con sus creencias y conocimientos y las exigencias institucionales que tienen. Por lo cual incidir sobre sus procesos de aprendizaje es un importante punto de partida para los programas de formación profesional. Sin embargo, no es suficiente.

Referencias bibliográficas

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(4), 83-102.

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teacher (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 293-319. doi: 10.1007/s10649-006-2372-4.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31. Recuperado de http://www.fisem.org/web/union/

Grossman, P., Wilson, S. & Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: el conocimiento de la material para la enseñanza (P. Rodríguez, trad.). *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado*, 9(2), 1-24. (Reimpreso de Knowledge Base for the Beginning Teacher, pp. 23-36, by M. Reynolds, Ed., 1989, Oxford: Pergamon Press).

Krainer, k. & Llinares, S (2010). Mathematics Teacher Education. In P. Peterson, E. Baker, & B, McGaw (Eds.), *International Encyclopedia of Education, 7* (pp. 702-705). Oxford: Elsevier.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: Formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*(4), 69-84.

Parra, H. (2004). El contenido matemático escolar en situaciones de aprendizaje en la formación inicial de profesores. En M. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 280-283. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Shulman, L. (2006). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma (A. Ide & A. Bolívar, trads.). *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado, 9*(2). Recuperado de http://www.ugr.es/~recfpro/ (Reimpreso de Harvard Educational Review, 57(1), 1-22, 1986).

Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Thompson, P., Carlson, M. & Silverman, J. (2007). The design of task in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10* (4-6), 415-432. doi: 10.1007/s10857-007-9054-8.

Watson, A. & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10* (4-6), 205-215. doi: 10.1007/s10857-007-9059-3.

HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES: O CURRÍCULO COMO CONSTRUÇÃO SOCIAL

Elisabete Zardo Búrigo
Universidade Federal do Rio Grande do Sul Brasil
elisabete.burigo@ufrgs.br

Resumo. O texto discute as contribuições da pesquisa e da discussão sobre a história da educação matemática para os processos de formação de professores, enfatizando aspectos relacionados à compreensão dos currículos como historica e socialmente construídos e à construção das identidades profissionais docentes. Tais dimensões da formação são consideradas relevantes para subsidiar a interveniência reflexiva e crítica dos professores nos processos de reconfiguração dos currículos escolares e de suas próprias práticas. A discussão é referenciada na experiência da autora como professora da escola básica e como formadora de professores, em curso de Licenciatura e de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática.

Palavras chave: formação de professores, história do ensino de matemática, educação matemática.

Abstract. The text discusses the contributions of research and discussion on the history of mathematics education in the processes of teacher training, emphasizing aspects related to the understanding of the curriculum as historically and socially constructed and the construction of teachers' professional identities. These dimensions of teachers' education are considered relevant to support the critical and reflexive intervention of teachers in the process of rewriting curricula and their own practices. The discussion is referenced in the author's experience as a school teacher and as a professor engaged in teachers' education.

Key words: teachers education, history of the teaching of mathematics, mathematical education

Introdução

A história da educação matemática vem se afirmando como campo de investigação e de debate, no Brasil, nos últimos dez anos, mobilizando docentes e pós-graduandos de diversas instituições e abrangendo um amplo leque de temas. É recente e incipiente, contudo, a discussão sobre as conexões entre esses estudos e os processos de formação de professores (Miguel, 2005).

Neste texto, discutimos algumas possíveis contribuições do estudo da história da educação matemática para a formação de professores. Iniciamos relatando o modo como a pesquisa em história se inscreve na nossa própria trajetória profissional e acadêmica (da autora). A seguir, explicamos como foi concebida a inserção da formação em história em educação matemática no Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), criado em 2004, e examinamos algumas produções de estudantes do curso. Argumentamos que uma dimensão relevante da contribuição da história em educação matemática para a formação continuada de professores é a da provocação de interrogações, pelos professores, sobre as condições e possibilidades de sua própria prática docente.

A investigação histórica na trajetória de uma professora iniciante

Minha primeira experiência docente foi a de ensinar matemática em curso supletivo para funcionários do Hospital de Clínicas de Porto Alegre, em 1980 (adoto nesta seção a primeira pessoa do singular para fazer referência a essa experiência pessoal). O curso preparava para os exames, organizados pela Secretaria de Educação, que davam acesso à certificação do ensino de 1º grau. Os alunos eram adultos, em sua ampla maioria mulheres, que haviam frequentado o antigo curso primário. Os índices de aprovação na prova de matemática eram então inferiores a 10%. O êxito nos exames se afigurava como um objetivo remoto e o tempo exíguo impunha escolhas solitárias sobre os conteúdos a abordar.

Em 1982, quando já estava concluindo o curso de Licenciatura em Matemática na UFRGS, fui contratada em caráter precário como professora da Escola Estadual Governador Walter Jobim, que ficava na Vila Aparecida, na periferia de Viamão, próxima a Porto Alegre. Naquele ano foram-me atribuídas duas turmas de quinta série, compostas em sua maioria por alunos repetentes. Era o mês de junho, e eles não haviam tido aulas de matemática até a minha chegada. Face à extensa lista de conteúdos prevista para a quinta série, era preciso, de novo, fazer escolhas.

Três anos depois, atendendo a uma demanda da comunidade, foi criado na escola um curso noturno de 2º grau. Como no curso supletivo, os alunos eram em sua larga maioria adultos, que haviam deixado a escola alguns anos antes. Como única professora de matemática, e já licenciada, tinha a tarefa de elaborar a proposta curricular para a disciplina. Mais uma vez, se apresentava a questão da relevância: que matemática importava ensinar ou aprender?

Ao ingressar no curso de Mestrado em Educação da UFRGS, em 1985, acreditava que encontraria respostas para essas questões. As respostas vieram na forma de novas perguntas, suscitadas pelas discussões e leituras nas disciplinas de Sociologia da Educação.

Os textos mais provocadores de reflexões eram aqueles então identificados com a "nova sociologia da educação" inglesa e com a emergente Sociologia do Currículo, que propunham o estudo do currículo escolar como construção social. Os programas das diferentes disciplinas não deveriam ser tomados como dados, mas como objetos de interrogação: como vieram a ser o que são?

As primeiras leituras faziam pensar no currículo como expressão dos interesses das classes dominantes ou da vontade dos legisladores e das cúpulas dos Ministérios. Young (1976) argumentava que a centralidade atribuída no ensino básico às ciências e à matemática, desde os anos 1960, não decorria diretamente da relevância ampliada desses conhecimentos, em um contexto de aceleração das inovações tecnológicas, mas expressava políticas governamentais de valorização dessas áreas, articuladas a projetos mais amplos de formação de mão-de-obra.

Mas também líamos autores como Sharp (1980), que criticavam as teorias da reprodução como ancoradas numa concepção estática, a-histórica de sociedade, e Giroux (1986), que falavam do espaço escolar como lugar de dominação e de resistência, onde "os atores humanos são constrangidos e também mobilizados" (Ibidem, p. 89).

Nenhuma dessas leituras explicava como os programas escolares de matemática tinham sido configurados, mas elas forneciam uma pista importante: para entender esse processo era preciso conhecer os interesses, as motivações e as crenças dos atores que, de modos diversos, intervinham nessa configuração.

O movimento da matemática moderna, transcorrido nos anos 1960 e 1970, se afigurava como um interessante objeto de investigação. Os livros didáticos traziam elementos de linguagem simbólica que eu identificava como marcas da matemática moderna. Tinha as lembranças de aluna, que havia vivenciado em 1972 e em 1973, no Colégio de Aplicação da UFRGS, uma abordagem da lógica das proposições envolvendo o uso dos blocos lógicos de Zoltan Dienes. Tinha também uma lembrança vaga das vindas de Dienes a Porto Alegre, nos anos 1970, que haviam sido noticiadas na imprensa escrita: a realização de palestra em um ginásio de esportes sugeria uma grande mobilização dos professores em torno da novidade que Dienes e a matemática moderna representavam. Eu havia conhecido, de perto, duas personagens importantes do movimento: havia colaborado com Esther Pillar Grossi, em 1981, na coleta de dados para sua tese de doutorado, e trabalhara sob a orientação de Léa da Cruz Fagundes no Laboratório de Estudos Cognitivos (LEC) da UFRGS, de 1984 a julho de 1987.

Todas essas lembranças e vivências faziam pensar na matemática moderna como algo que havia de fato acontecido, e mais - como algo que havia mobilizado professores. Mas por quê?

Sem ter a formação de historiadora, mas movida por uma questão interessante, e incentivada pelo orientador, Tomaz Tadeu da Silva, aventurei-me então em um estudo histórico sobre o movimento da matemática moderna no Brasil e, mais especialmente, em São Paulo, para onde havia me mudado ao final de 1987.

A história da educação matemática não havia se constituído como campo de investigação. Mas busquei suporte no trabalho de Beatriz d'Ambrosio (1987), que havia se debruçado sobre o mesmo tema e realizado uma ampla coleta de dados.

Procurei entrevistar os protagonistas do movimento, que se mostraram, para a pesquisadora iniciante que eu era, inesperadamente acolhedores. Confirmou-se, a partir dos depoimentos, minha hipótese inicial de que a matemática moderna não podia ser interpretada como modismo ou mera reprodução de inovações realizadas em outros países.

Mas em muitos outros aspectos fui surpreendida. Percebi que era preciso compreender os anos 1960 tais como haviam sido vivenciados pelos professores: compreender, por exemplo, a importância que então assumia o exame de admissão ao ginásio, e que logo depois seria abolido. Compreendi que os engajamentos dos professores haviam sido diversos, como eram diversas as trajetórias e a inserção de cada um(a) naquele período. Entendi, enfim, que a divulgação da matemática moderna havia tido efeitos não imaginados pelos seus proponentes, que pretendiam introduzir na escola básica uma matemática ao mesmo tempo mais geral, mais rigorosa e mais compreensível para os alunos.

A experiência de pesquisa não teve continuidade após a conclusão da dissertação. Bem mais tarde, quinze anos depois, eu retornaria ao tema, a partir do diálogo com colegas já então identificados como pesquisadores da área da História da Educação Matemática.

Mas a investigação marcaria minha trajetória de professora: eu havia compreendido que o currículo escolar se reconfigura ao longo do tempo, mas não exatamente do modo como é concebido por aqueles que o planejam e prescrevem. Não haveria um critério que permitisse definir, sob qualquer ponto de vista, o que deveria constar nos programas, de uma vez por todas. Mas caberia, sempre, de um lado, a interrogação sobre as motivações para se ensinar isso ou aquilo; e, de outro lado, a interrogação sobre os efeitos daquilo que se ensinou ou pretendeu ensinar.

A História da Educação Matemática em um Mestrado Profissionalizante

O Programa de Pós-Graduação e o Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da UFRGS foram criados em 2004 visando, sobretudo, a formação continuada de professores de matemática e o desenvolvimento de pesquisas focadas na sala de aula da escola básica.

No currículo do Mestrado, foi incluída a disciplina Tópicos de Educação Matemática B, com os objetivos de "trazer à tona e problematizar temas e questões da Educação Matemática, observando a natureza social, multicultural e política do conhecimento Matemático e seu ensino"; "examinar relações entre o currículo e as práticas pedagógicas desenvolvidas em contextos educacionais, enfatizando suas implicações para a prática e a pesquisa em Educação Matemática".

Tomando nossa própria trajetória como referência, propusemos a inserção, nessa disciplina, de tópicos da história da educação matemática. Mas, qual a finalidade da abordagem histórica na formação de professores cujo cotidiano é dedicado à sala de aula da escola básica?

A aposta era, fundamentalmente, a de que o olhar dirigido ao passado permitiria o redimensionamento das contradições enfrentadas no cotidiano do ensino, quando os professores se vêem investidos da responsabilidade de transmitir uma herança milenar, e de tornar acessível um conhecimento cuja relevância é considerada inquestionável, e se defrontam com a apatia dos estudantes e com condições precárias de exercício do trabalho docente. A compreensão do currículo como construção social permitiria a reflexão sobre essa "missão", e que cada estudante-professor se percebesse como um dos muitos atores que participam do processo através do qual a escola é permanentemente reconfigurada, atuando em um campo dinâmico de constrangimentos e possibilidades.

A compreensão do currículo como construção social

De que modo o estudo da história poderia contribuir para essa compreensão?

Em primeiro lugar, a história nos mostra que o lugar ocupado pelas disciplinas, no processo de escolarização, é transitório. Como explica Viñao Frago (2008): "As disciplinas não são, com efeito, entidades abstratas com uma essência universal e estática. Nascem e se desenvolvem, evoluem, se transformam, engolem umas às outras, se atraem e se repelem, se desgarram e se unem, competem entre si" (Ibidem, p. 204).

O lugar marginal que a matemática ocupou no ensino, até o século dezenove (Valente, 2007), e a inversão de papeis entre a matemática e o latim, no século vinte, são evidências dessa transitoriedade.

A compreensão do caráter dinâmico dos currículos nos permite compreender os questionamentos dos alunos, relativos à relevância ou à utilidade da matemática, como expressão de uma interrogação legítima, no âmbito da sociedade, acerca das tarefas da escola e dos processos através dos quais se decide o que deve ser ensinado ou estudado.

A história coloca em questão os discursos que tratam a matemática escolar como herdeira direta da matemática grega, e como disciplina cuja importância se justifica por si só; sua presença no currículo, com problemas, conceitos e métodos que a distinguem das demais, depende do reconhecimento, pela sociedade, do seu caráter educativo (Chervel, 1988).

Em segundo lugar, os estudos históricos mostram que as práticas dos professores e, principalmente, os efeitos do ensino em geral não corresponderam aos objetivos proclamados. É preciso então interrogar-mo-nos não apenas sobre as finalidades atribuídas ao ensino de matemática, mas também sobre aquilo que Chervel designa como os "ensinos reais" (1988, p. 78) e como se constituíram.

O estudo histórico nos mostra, em terceiro lugar, que as reformas e as normatizações do ensino, na sua implementação, defrontam-se com as condições e a cultura escolar peculiares a cada instituição. Não são recentes as distâncias e dissonâncias entre aquilo que é anunciado nos documentos oficiais e aquilo que se ensina e aprende nas escolas. Mesmo nos anos 1950, em que vigoravam a uniformidade nacional e a centralização, encontramos registro de descumprimentos das normas ou, melhor dizendo, de interpretações, por parte dos professores, dos conteúdos que deveriam ser priorizados, face à impossibilidade de cumprimento dos programas elaborados pela Congregação do Colégio Pedro II (Búrigo, 2010). A compreensão de que o currículo escolar praticado é, de fato, construído no âmbito dos estabelecimentos de ensino, nos leva a considerar com reserva as políticas governamentais que anunciam grandes mudanças a partir de decisões centralizadas.

Essas reflexões nos remetem às considerações sobre o campo de possibilidades em que se inscrevem as ações dos professores. Não se trata de conferir aos professores a responsabilidade pelo sucesso do ensino, que resulta de múltiplas interveniências, mas, sim, um papel mais ativo no planejamento curricular. O trabalho e a formação docente devem ser organizados de modo a possibilitar que cumpram esse papel, interrogando-se, propondo, experimentando e avaliando alternativas de ensino.

Aliás, também nesse aspecto a história é elucidativa. O movimento da matemática moderna exemplifica as possibilidades de mobilização dos professores em torno da inovação curricular, quando engajados nas mudanças. No Brasil, as experimentações de modernização dos anos 1960 e 1970 foram implementadas por grupos de professores, em um número pequeno de turmas e de estabelecimentos, e os resultados alcançaram uma divulgação modesta. Na França, os professores, através de sua Associação, propuseram e participaram de uma ampla experimentação conduzida pelo Ministério, analisaram e debateram seus resultados, influenciando a versão final dos novos programas (Búrigo, 2011). Experiências como essa mostram as possibilidades de um planejamento curricular em que os professores não são meros executores, que considera os saberes docentes e a experiência viva das salas de aula.

O estudo histórico propicia, ainda, a desconstituição das idealizações sobre a escola do passado, como aponta Prost (2004), referindo-se ao ensino francês:

> Frente às queixas relativas ao declínio do nível de ensino, o historiador é tanto mais cético quanto mais ele as reencontra ao longo de todo o século dezenove e todo o século vinte: segundo esse cálculo, e considerando todo esse tempo passado, deveríamos ser todos analfabetos! (Ibidem, p. 409).

Depoimentos e estatísticas relativos ao ensino dos anos 1930 a 1950, no Brasil, mostram que os extensos programas não correspondiam às aprendizagens dos alunos. Tampouco é o caso de se desprezar o passado como imobilista ou arcaico, como nos lembra Matos (2007):

> Em suma, quem se debruça sobre documentos educativos históricos encontra uma diversidade de posturas pedagógicas, tal como, aliás, o que podemos encontrar nos dias de hoje, e, nem os bons velhos tempos eram tão bons como por vezes ouvimos afirmar, nem a escola tradicional utilizaria exclusivamente métodos desadequados. Estudando o passado não encontramos o estereótipo do ensino tradicional, mas antes múltiplas metodologias e conteúdos, posturas, filosofias, problemáticas, debates que se interligam naturalmente com os consensos e os conflitos de cada época. (Ibidem, p. 10).

Reflexões de estudantes-professores

De que modos as discussões sobre a história da educação matemática vem incidindo sobre a formação e sobre as reflexões dos estudantes-professores, mestrandos em Ensino de Matemática da UFRGS?

Alguns desses efeitos são mais identificáveis, porque estão documentados.

Tal é o caso de Antonio Esperança (2011), que desenvolveu sua dissertação em torno das provas de matemática do curso complementar ofertado, nos anos 1930, no Colégio Estadual Júlio de Castilhos:

> O tema da pesquisa surgiu durante uma aula do mestrado. Nela, estudávamos a educação escolar do início do século XX. Enquanto discutíamos os primórdios da nossa educação escolar secundária – e isso até então me parecia tão distante – fui percebendo que a organização inicial do Colégio em que eu trabalhava se confundia com um momento histórico importante da educação escolar brasileira. (Esperança, 2011, p. 12).

A dissertação de Esperança não apresenta, como a maioria das produções do Mestrado Profissionalizante, uma proposta didática a ser implementada em sala de aula. Mas constitui-se em importante contribuição para a área da história, ao reunir e analisar um conjunto de novas fontes referentes ao ensino de matemática dos anos 1930 e a uma instituição que ocupou lugar de destaque na educação escolar do Rio Grande do Sul. Em outras dissertações, que tratam de temas ou de conteúdos específicos da matemática escolar, a perspectiva histórica ocupa um lugar importante na reflexão dos autores.

Procurando entender as razões para o predomínio, no ensino da álgebra, da manipulação de fórmulas, Bonadiman (2007) recorre a autores que explicam como o ensino da álgebra se constituiu no Brasil.Numa perspectiva semelhante, Becker (2009) critica o ensino de geometria baseado no uso de fórmulas, muito frequente nos livros didáticos, e busca na história do ensino a explicação para essa tendência.

Outros tipos de reflexão, estabelecendo conexões entre o passado e o presente, emergiram nas discussões realizadas ao longo da disciplina de Tópicos da Educação Matemática – B. Registro aqui, mediante autorização, alguns trechos de produções de alunos que frequentaram a disciplina em 2012. Diogo estabelece um paralelo entre os exames de suficiência que vigoraram até os anos 1930 e os sistemas de avaliação que hoje constrangem as ações dos professores nas escolas:

> A educação me parece não ter sofrido mudanças significativas, pois ainda focamos o ensino de matemática para o sucesso do aluno em exames e/ou avaliações governamentais, como o ENEM, o ENADE e a Prova Brasil. Questiono, portanto, até onde vai a autonomia do professor e a flexibilidade nos currículos?

Túlio apresenta uma interessante reflexão sobre a função seletiva do ensino de matemática:

> Encontramos raízes históricas na utilização da matemática como instrumento de seleção, já que a discussão apresentada no texto (Valente, 2007) gira em torno de exigir-se dos candidatos aos cursos jurídicos conhecimentos de geometria (conhecimento que destoa dos demais exigidos). Verificamos, baseados na observação empírica, que atualmente exigem-se de candidatos a cargos públicos ou de estudantes, conhecimentos matemáticos que muitas vezes (para não exagerarmos dizendo que na totalidade das vezes) não serão exigidos por sua prática profissional ou estudantil.

Viviane Hummes reflete sobre mudanças e permanências nos cursos de Licenciatura:

Cursos de licenciatura em Matemática em que estão incluídas as disciplinas de didática, de prática de ensino e de psicologia estudadas ao longo dos quatro anos do curso, ainda são muito recentes. [...] Durante muito tempo, a Matemática continuou sendo ensinada como os professores engenheiros o faziam [...]. Com isso, acredito que os conteúdos que ensinamos hoje e que o modo como pensamos o ensino de Matemática está diretamente atrelado às ideias iniciais sobre o ensino, sem pensarmos em porque ensinamos determinados conteúdos e/ou porque o fazemos de determinada maneira.

As produções confirmam a expectativa de que os estudos históricos contribuem para a construção, por parte dos professores, de um olhar em perspectiva. Não há nada de eterno ou imutável no ensino, mas para incidirmos sobre a escola e, em especial, sobre o currículo, é necessário compreendermos os processos através dos quais foi configurado e, inclusive, os processos históricos que constituem nossos próprios modos de pensar e práticas docentes.

Referências bibliográficas

Becker, M. (2009). Uma alternativa para o ensino da geometria: visualização geométrica e representações de sólidos no plano. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Brasil.

Bonadiman, A. (2007). Álgebra no ensino fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Brasil.

Búrigo, E. (2010). Tradições modernas: reconfigurações da matemática escolar nos anos 1960. *Boletim de Educação Matemática 23(35b)*, 277-300.

Búrigo, E. (2011). Matemática moderna nas salas de aula: protagonismos de professores. *Revista Diálogo Educacional 11(34)*, 663-686.

Chervel, A. (1988) L'histoire des disciplines scolaires: Réflexions sur un domaine de récherche. *Histoire de l'Éducation 38*, 59-119.

D'Ambrosio, B. S. (1987). *The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education*. Tese de Doutorado não publicada, Indiana University. Estados Unidos da América.

Esperança, A. (2011). *O ensino de matemática no Instituto Júlio de Castilhos: um estudo sobre as provas do Curso Complementar*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Brasil.

Giroux, H. (1986). *Teoria crítica e resistência em educação.* Petrópolis: Vozes.

Matos, J. (2007). História do ensino da matemática em Portugal – a constituição de um campo de investigação. In J. Matos, W. Valente (Eds.), *A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal*: *primeiros estudos* (pp. 8-20), São Paulo: GHEMAT.

Miguel, A. (2005). História, filosofia e sociologia da educação matemática na formação do professor: um programa de pesquisa. *Educação e Pesquisa 31(1)*, 137-152.

Prost, A. (2004). *Histoire de l'enseignement et de l'éducation*. v. IV: Depuis 1930. Paris: Perrin.

Sharp, R. (1980). *Knowledge, ideology and the politics of schooling*. London: Routledge & Kegan Paul.

Valente, W. (2007). *Uma história da matemática escolar no Brasil* (1730-1930). São Paulo: Annablume.

Viñao, A. (2008) A história das disciplinas escolares. *Revista Brasileira de História da Educação 18*, 173-216.

Young, M. (1976). The schooling of science. In G. Whitty, M. Young (Eds.), *Explorations in the politics of school knowledge* (pp. 47-62), Nafferton: Studies in Education.

LOS ARTEFACTOS Y LA VISUALIZACION EN EL ETG DEL PROFESOR

Carolina Henríquez Rivas, Elizabeth Montoya Delgadillo
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, FONDECYT Nº 1110988. Chile
carohenriquezrivas@gmail.com, emontoya@ucv.cl

Resumen. El propósito de este escrito es mostrar los primeros avances y observaciones realizadas en una investigación de doctorado en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. El objetivo de investigación es analizar el tránsito que realiza el profesor, entre la geometría euclidiana y la geometría analítica en la enseñanza secundaria en Chile, sustentado en un enfoque teórico denominado *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico (ETG)* y, otras perspectivas que permiten profundizar el análisis sobre instrumentos y visualización en geometría.

En las observaciones se ha analizado y caracterizado el ETG de profesores debutantes cuando enseñan geometría euclidiana, centrado en los artefactos utilizados y la actividad de visualización involucrada.

Palabras clave: trabajo geométrico, profesor, artefactos, visualización

Abstract. The purpose of this paper is to show the first advances, and observations in PhD research in Didactic of Mathematics at the Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. The research objective is to analyze the transit that makes the teacher, between Euclidean geometry and Analytic geometry in secondary education in Chile, based on a theoretical approach called *Geometrical Paradigms and Geometrical Working Spaces (GWS)* and other perspectives that allow deepen analysis about instruments and visualization in geometry.

The observations were analyzed and characterized the GWS debutantes teachers when teaching Euclidean geometry, focusing on the artifacts used and visualization activity involved.

Key words: geometric work, teacher, artifacts, visualization

Introducción

El propósito de este escrito es mostrar los primeros avances y observaciones realizadas en una investigación de doctorado en Didáctica de la Matemática en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y, en el marco de un proyecto Fondecyt. Estas observaciones nos han permitido realizar algunas caracterizaciones del ETG del profesor debutante –hasta 3 años de ejercicio de la profesión– cuando enseña geometría euclidiana y *da paso* a la geometría analítica –lo que llamamos *tránsito*–. Esta investigación está inserta en el marco teórico de la Didáctica de la Matemática *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico* (ETG) iniciado por de Houdement y Kuzniak (1996, 2006). Además, han sido considerados dos enfoques cognitivos que permiten profundizar en el estudio del ETG; el de Rabardel (1995) sobre la noción de instrumentos y la visualización desarrollada por Duval (2004, 2005).

El principal objetivo de investigación es analizar y caracterizar el *tránsito* que efectúa el profesor en la Enseñanza Media chilena –desde 14 a 17 años, aproximadamente–, de la geometría euclidiana a la geometría analítica, donde el trabajo geométrico cambia, particularmente, los instrumentos usados, los registros semióticos y la actividad de visualización involucrados, además, cómo es que articula los elementos de los planos epistemológico y cognitivo (ver figura 1) involucrados en su ETG en estas dos geometrías.

Es importante precisar que en el trabajo de investigación doctoral, la atención está centrada en el *tránsito* de la Geometría Euclidiana (GE) a la Analítica (GA) en la Enseñanza Media desde una perspectiva didáctica, pues es en estos niveles que se estudian ciertos objetos matemáticos, principalmente desde la perspectiva de la GA como si se tratara de otro tipo de geometría, donde las influencias mutuas –y el *tránsito*– no son considerados, coincidiendo al respecto con la posición de Klein (1908). Luego, la noción de *tránsito* considerada, no solo es el paso de una a otra, sino que momentos en la enseñanza donde el énfasis está en una u otra geometría.

Según esta noción de *tránsito* entre las geometrías, nos encontramos frente a un momento del saber enseñado, en que ciertos fenómenos de tipo matemáticos y cognitivos, no son problematizados e incluso a nivel saber a enseñar podemos observar que aspectos relacionados con el *tránsito* de GE a GA son *invisibles e incuestionables*. De forma similar, esto ocurriría no solo en Chile, por ejemplo, Gascón (2003) se refiere a ciertos aspectos que han permanecido *transparentes* en la institución escolar en España, en particular, en el caso de la Geometría. Luego, en este estudio pretendemos desvelar, analizar y caracterizar aspectos de tipo matemático-cognitivo, que habitan en la enseñanza de la Geometría a nivel de Enseñanza Media y que hasta el momento no han sido abordados.

En este escrito, mostraremos el análisis al *ETG idóneo* de un profesor debutante en una línea de investigación desarrollada por los autores citados en el primer párrafo. Para ello, mostraremos la caracterización del trabajo del docente, empleando un instrumento de estudio que nos ha permitido estudiar en profundidad cómo activan y controlan los profesores su ETG en situación de aula real.

Una herramienta de análisis

El sustento teórico del estudio, que permite describir y caracterizar el trabajo geométrico de un individuo cuando se enfrenta a una tarea en geometría, se denomina *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico (ETG)*, iniciado por de Houdement y Kuzniak (1996, 2006) y que en Chile ha sido difundido por Montoya (2010) recientemente. Esta perspectiva teórica del ETG contempla tres niveles distintos; considera un referencial matemático (ETG de referencia), el espacio definido en términos didácticos (ETG idóneo) y el espacio propio de cada utilizador fruto de la reflexión entre sus conocimientos y los que utiliza para resolver una tarea (ETG personal). Desde esta perspectiva es posible observar cómo un *geómetra* –sujeto que resuelve una tarea geométrica– reflexiona de acuerdo a las creencias, técnicas y el conocimiento de distintos modelos geométricos cuando enfrenta un problema en geometría, conformando su propio ETG. En este espacio, fruto de la interacción entre el individuo y el problema geométrico, el ETG puede variar, pues dependiendo del paradigma dominante (y la institución), los problemas geométricos toman distinta interpretación y validez para el geómetra.

El ETG se conforma por dos planos: el cognitivo y el epistemológico. El plano epistemológico se relaciona con componentes de tipo matemático y está constituido por tres polos: el referencial teórico, el de los *artefactos* y el espacio local y real. En este estudio, consideramos con mayor énfasis el polo artefactos del plano epistemológico, sustentado en el enfoque instrumental desarrollado por Rabardel (1995). Los artefactos pueden ser de distinto tipo; materiales y simbólicos. En los *materiales*, los de tipo *tecnológico* permiten realizar procesos que con artefactos *tradicionales*, como lápiz y compás, sería mas difícil realizar, o bien no se dejan ver y, por otro lado, los artefactos *simbólicos*, que permiten al geómetra utilizar instrumentos teóricos como teoremas, definiciones o ecuaciones al realizar una tarea específica. En este trabajo, se mostrará un trabajo asociado a los artefactos de tipo simbólico en el ETG de un profesor debutante. Respecto del plano cognitivo, está constituido por tres polos: la *visualización*, las construcciones y el polo prueba. Este análisis, considera en relación a este plano, el proceso de visualización, pues interesa analizar cómo los docentes realizan el trabajo que involucra el registro figural y la actividad de semiosis, en particular los tratamientos vinculados a este registro, sustentado en los trabajos de Duval (2004, 2005).

Paradigmas Geométricos

En la investigación realizada por Houdement y Kuzniak (1996, 2006) y Kuzniak (2008, 2011) ellos identifican tres tipos de geometrías que coexisten en la enseñanza de la geometría y cuya función es permitir que el alumno construya su propio espacio de trabajo geométrico guiado por el docente. En este espacio, los problemas geométricos toman distinta interpretación y validez dependiendo del paradigma y de la institución elegida. La noción de *paradigma geométrico* ha sido inspirada por la noción de paradigma introducida por Kuhn (1962) en su obra sobre la estructura de las revoluciones científicas.

Los tres tipos de geometrías, o bien, tres *paradigmas geométricos* que habitan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, son considerados en forma conjunta, no están jerarquizados, sino que el horizonte de trabajo es diferente, estos son:

- Geometría I: Geometría Natural

  La geometría sobre objetos reales, importancia en las mediciones, aproximaciones, trabajo de tipo material.

- Geometría II: Geometría Axiomática Natural

  Objetos geométricos descritos por una propiedad, su definición, al momento de validar, esto se hace dentro de un sistema axiomático local.

- Geometría III: Geometría Axiomática Formal

  Independencia de la geometría y la realidad, axiomática explícita y completa.

Espacio de Trabajo Geométrico

Podemos observar cómo un geómetra reflexiona de acuerdo a las creencias, técnicas y el conocimiento de distintos modelos geométricos cuando enfrenta un problema en geometría. Este ambiente de reflexión, fruto de la interacción entre el individuo y el problema geométrico, donde el trabajo se asocia a los paradigmas, es lo que se denomina *espacio de trabajo geométrico* (ETG) y, dependiendo del paradigma dominante, el ETG variará.

En el ETG se articulan dos niveles, uno epistemológico, y otro cognitivo. El nivel epistemológico está constituido por tres componentes: espacio local y real, referencial teórico y la componente *artefactos*. El nivel cognitivo está conformado por tres procesos: la visualización, la construcción y el proceso discursivo que produce la prueba.

En los distintos espacios de trabajo geométrico es posible identificar tres niveles de ETG, dependiendo de la función de la reflexión del geómetra cuando se enfrenta a un problema geométrico; en torno a la relación con el saber definido de manera ideal solamente sobre criterios matemáticos, cómo enseña este saber en una institución dada con una función definida y, cómo se enfrenta al problema geométrico, cómo se apropia y utiliza los conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas. Estos son: ETG de *referencia*, ETG *idóneo* y ETG *personal*, respectivamente.

Este marco teórico, coincide con la idea de Gonseth (1945-1955) de concebir la geometría como una síntesis dialéctica entre tres diferentes modos de conocimiento sobre los cuales el geómetra se apoya al resolver una tarea geométrica: la *intuición*, que articula los objetos reales con la visualización, el uso de artefactos y la construcción mediante la *experiencia* y, el modelo teórico puesto en juego que permite probar vinculado por la *deducción*. Esta organización del ETG se esquematiza de la siguiente forma (Kuzniak, 2011):

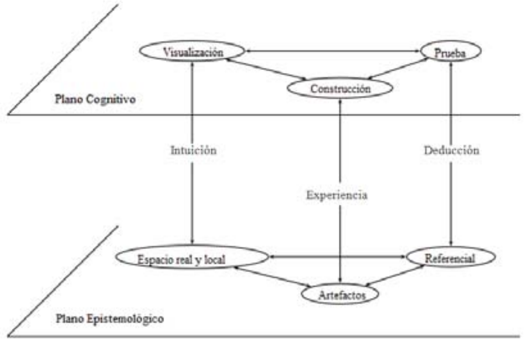


Figura 1: El Espacio de Trabajo Geométrico

La activación y control del ETG puede ser diseñada a nivel de los profesores (nivel idóneo) o a nivel de referencia. Es posible analizar las entradas posibles en el trabajo geométrico (personal) especificando los polos puestos en juego. En este caso, analizamos cómo un profesor activa y controla el ETG en una situación de aula real.

En este trabajo consideramos los polos artefactos y visualización en profundidad, pues no solo nos interesa observar cómo se vinculan los planos del ETG en general, es decir, estudiar y caracterizar las circulaciones del ETG del profesor, sino que además, estudiar aspectos mas específicos relacionados con los artefactos empleados por el profesor y cómo esto podría afectar ETG personal de los estudiantes y, también, cómo las formas de visualizar las figuras podrían favorecer o no el tránsito entre las dos geometrías.

Los artefactos en el ETG

Los artefactos conforman uno de los polos del ETG en el plano epistemológico. Este componente y las técnicas de uso son problema central para la psicología (Rabardel, 1995). Es necesario comprender los mecanismos y los procesos por los cuales son concebidos los artefactos para proporcionar ayuda real al geómetra, además, se deben analizar y comprender los significados y contextos en donde están inscritos sus usos y considerando que se desarrollan en situaciones sociales donde el rol del profesor es fundamental.

El enfoque de Rabardel sobre los artefactos está relacionado con sus usos, es decir, no deben ser analizados como cosas transparentes, sino cómo estudiar los esquema de uso. En este sentido, los instrumentos pasan a ser entidades mixtas formadas por el objeto técnico (artefacto), ya sea material o simbólico y componentes cognitivos relacionados con sus usos (esquemas de uso).

El término *artefacto* que utilizaremos, está relacionado con una cosa que ha sufrido transformación de origen humano y, lo que nos interesa, son los procesos relacionados con su uso, es decir, se refiere a todo lo que nos permite manipular el objeto geométrico en cuestión, sea este de tipo material o simbólico. El término *instrumento* será empleado para designar el artefacto en situación. Por lo tanto, son las actividades que involucran instrumentos, las de nuestro interés a estudiar.

Las situaciones que involucran uso de instrumentos, se caracterizan por comprender los siguientes tres polos: el sujeto utilizador, el instrumento y, el objeto al que la acción de utilizar el instrumento se dirige. Posteriormente, Rabardel agrega un cuarto polo, que lo conforman las relaciones del sujeto con otros sujetos. Por ejemplo, cuando el artefacto es de tipo tecnológico (software), donde las relaciones colaborativas son fundamentales. Estas relaciones entre los polos, se muestran en la siguiente figura 2:

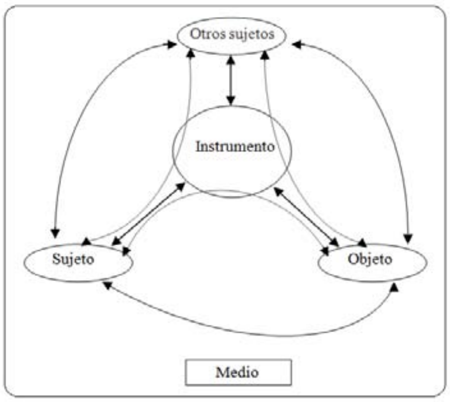


Figura 2: "Modelo de situaciones de las actividades colectivas instrumentadas" (Rabardel, 1995, p. 62).

El instrumento tiene entonces una posición intermedia, es decir, es un mediador entre sujeto, objeto y los otros sujetos que interactúan entre sí; constituye un intermediario donde la característica principal es que se adapta en términos de propiedades materiales o simbólicas puestas en escena, pero también, cognitivas y semióticas en función de un tipo de actividad en la cual el instrumento se inserta.

Para los efectos de este análisis, emplearemos el modelo de situaciones con instrumentos de Rabardel, sin considerar el polo de las interacciones con otros sujetos. Esto queda, para un trabajo futuro.

La visualización en el ETG

El proceso de visualización conforma uno de los polos del plano cognitivo del ETG. En este estudio, consideramos la noción de visualización desarrollada por Duval (2004, 2005). Según este autor, la actividad cognitiva requerida para la geometría exige la articulación de dos registros de representación que funcionan de manera simultánea e interactiva; el lenguaje y registro de las figuras.

La actividad cognitiva vinculada al registro figural es la *visualización.* Las formas de visualizar pueden funcionar de modo icónico o no icónico, según el tipo de operación con las figuras y cómo se movilizan sus propiedades. En el caso de la primera forma de visualizar, los objetos se identifican o representan por semejanza de un objeto real (objeto de tipo estable, no modificable). Además, la figura es independiente de las operaciones que se realizan. En el segundo caso, el de la visualización no icónica, las figuras se construyen y descomponen. Se trata de una secuencia de operaciones que permite reconocer y movilizar propiedades geométricas, es decir, se realiza construcción de figuras usando instrumentos, las figuras se descomponen usando trazos suplementarios y se efectúa de-construcción dimensional de figuras (Duval, 2005). Según Duval esta última forma de ver es la requerida en geometría "La manera de ver requerida en geometría: la deconstrucción dimensional de las formas" (p. 20).

El ETG de un profesor debutante

En el marco de un proyecto Fondecyt, sobre el espacio de trabajo matemático (ETM) de profesores debutantes, en donde se realizan análisis al trabajo en situaciones de aula reales durante los años 2011 y 2012, consideramos un caso para mostrar cómo se analiza y caracteriza el *ETG idóneo* de los docentes centrados en los polos artefactos y visualización en esta investigación.

Los objetivos propuestos en este estudio son: *identificar tareas durante una sesión, describir y caracterizar el ETG del profesor según videos y transcripciones e identificar las interacciones de los estudiantes que generan discusión para cada tarea.* En la etapa de creación y validación del instrumento de análisis para estudiar el ETG idóneo del profesor, realizado durante el primer semestre del año 2012, se asignó una clasificación a cada polo con un número o letra según el plano del ETG, con la finalidad de permitir registrar y caracterizar el trabajo realizado durante las sesiones de forma clara y concreta. Esta clasificación se muestra a continuación:

- Plano cognitivo: visualización (A), Construcción (B), Prueba (C).
- Plano epistemológico: espacio local y real (1), artefactos (2), referencial (3).

Luego, el instrumento que permite describir y caracterizar el ETG del profesor, es el de la tabla siguiente, donde se muestra el extracto de una clase analizada a uno de los profesores debutantes que han sido grabados.

Tarea 3' 7''	Circula ción	Descripción y caracterización del ETG del Profesor	Intervenciones de estudiantes
Tarea de clase: *Determinar la altura de una pirámide mediante semejanza de triángulos.* Tarea genérica: *Determinar la medida de un cateto mediante la proporcionalidad de triángulos.*	3 1 A	Relaciona la semejanza con la proporcionalidad, estudiada la clase anterior -según docente-. Los objetos que menciona son pirámide y su altura, para determinar la altura de un bastón. En la pizarra representa la pirámide (3D/2D) mediante el dibujo de un triángulo rectángulo (a mano alzada), no usa artefactos de manipulación, muestra dos triángulos rectángulos (sin indicarlo) donde los catetos corresponden a la sombra (ver intervención 1 de estudiantes) y altura de una pirámide y un bastón, respectivamente. *Observación 1: no indica por qué esa configuración 2D/2D corresponde a la de una pirámide y además, no hace relación con la noción de semejanza estudiado – según ella- anteriormente.* *Observación 2: la profesora ante pregunta 2 responde que sí, y que a partir de esta idea nace el teorema.*	1: Un estudiante (5' 1'') pregunta por la sombra que se determinará, pues la configuración dibujada no se relaciona directamente con los objetos reales (no se distingue entre configuración 2D/2D y 3D/2D). 2: Un estudiante pregunta (8' 30'') si esto permite determinar medidas de otros objetos.

Tabla 1: Presentación del teorema de Tales y la circulación en el ETG

Luego de analizar la tarea presentada, podemos afirmar que el profesor se cambia de un marco geométrico a uno algebraico, al proceder con una ecuación cada vez que tiene un segmento desconocido. No la intensión en esta investigación, hacer un juicio de valor al respecto, sino que, evidenciar el cambio de marco en el *espacio de trabajo matemático* y como hemos afirmado, la tarea geométrica es una excusa para pasar a las ecuaciones, como si fuese una "geometría aritmetizada" perdiendo el horizonte la tarea geométrica en sí. En este sentido, el trabajo está centrado en realizar una algoritmia correcta, los *artefactos* empleados son simbólicos, el profesor no promueve ni realiza trabajo con instrumentos materiales como regla y compás, o bien, un software geométrico. Respecto del trabajo de *visualización*, es mas bien de tipo icónico, pues no relaciona propiedades con la figura, se trata de una configuración estática que funciona como apoyo visual que ayuda a desarrollar el trabajo algorítmico. En resumen, el profesor en este caso, centra su trabajo en procedimientos algebraicos, el énfasis en resolución de ecuaciones, dando poca importancia al uso de artefactos para efectuar construcciones, así como a los tratamientos asociados al registro figural requeridos en geometría, perdiendo el sentido en el trabajo geométrico. Además, pensamos que esta forma de trabajar, mas bien mecánica, no favorecería al tránsito entre las geometrías.

Conclusiones

La presentación de este avance de investigación, tiene como objetivo principal mostrar cómo es analizado el trabajo geométrico de profesores en situaciones reales de aula de Enseñanza Media, por medio de un caso particular observamos un débil trabajo geométrico (ETM) del debutante que no explota en sus alumnos un trabajo geométrico en toda su dimensión. El estudio se sustenta en un marco teórico que articula la teoría de los Paradigmas Geométricos y ETG desarrollada por Houdement y Kuzniak con el enfoque instrumental de Rabardel y la visualización según Duval. Esto nos ha permitido contribuir y profundizar en aspectos teóricos a la luz de enriquecer los análisis y mejorar las caracterizaciones.

Esperamos en un futuro, contar con evidencia contundente respecto del trabajo geométrico de profesores en el *tránsito* de la Geometría Euclidiana a la Analítica en la Enseñanza Media chilena, a la luz de realizar mejoras en términos de enseñanza y, también, aportes en términos teóricos en esta línea de investigación en Didáctica de la Matemática.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (2004*). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Developpement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de luers Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 10*, 5-53.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma, 44*, 25-34.

Gonseth, F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne: Éditions du Griffon.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(3), 289-321.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Klein, F. (1908). *Matemática elemental: Desde un punto de vista superior. Volumen II. Geometría.* Traducción de R. Fontanilla. Madrid: Biblioteca Matemática.

Kuhn, T. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Traducción de Carlos Solís Santos. México: Fondo de Cultura Económica (Breviarios; 213).

Kuzniak, A. (2008). Personal Geometrical Working Space: a Didactic and Statistical Approach. *Studies in Computational Intelligence (SCI), 127,* 185–202.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 9-24.

Montoya E. (2010). *Etude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili.* (Tesis de doctorado no publicada). Université Paris Diderot-Paris 7, Paris, Francia.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: Une approche cognitive des instruments contemporains*. Francia: Armand Colin.

DESARROLLO DE LA HABILIDAD ALGORITMIZAR EN EL ÁLGEBRA LINEAL

Anelys Vargas Ricardo, Ramón Blanco Sánchez, Olga Lidia Pérez González, Elizabeth Rodríguez Stiven
Universidad de las Ciencias Informáticas Cuba
Universidad de Camagüey
anelys@uci.cu, ramon.blanco@reduc.edu.cu, olga.perez@reduc.edu.cu, beth@uci.cu

Resumen. El presente trabajo tiene como objetivo poner a consideración la propuesta de un proyecto de investigación sobre el desarrollo de habilidades matemáticas en la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas, específicamente, ¿cómo contribuir desde el Álgebra Lineal al desarrollo de la habilidad algoritmizar? Esta es una de las habilidades básicas a desarrollar en los estudiantes de las carreras de perfil computacional e informático, ya que deberán ser utilizadas por ellos en disciplinas propias de la especialidad, entre ellas Programación, Sistemas de Bases de Datos.

Palabras clave: álgebra lineal, habilidad algoritmizar

Abstract. The aim of this work is to discuss with Mathematical Education community about the proposal of a research project. The object of this project is the development of mathematical skills in Computer Science Career. The question asked is: How to help to develop algorithmical skills from learning Linear Algebra process? Algorithmical skills is very important for students from Computer Sciences careers as they are used for Programming, Data Bases Systems and many other disciplines in this area.

Key words: linear algebra, algorithmic skills

Introducción

A lo largo de estos últimos años, en diferentes instituciones docentes, se han venido observando dificultades en los resultados de sus estudiantes en las asignaturas de Matemática. La preocupación tanto de matemáticos profesionales como de los profesores de Matemática en los diferentes niveles escolares, ha propiciado que se hayan abierto diferentes espacios internacionales con el fin de tratar temas relacionados con el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, sus características epistemológicas y los avances obtenidos en la comprensión del proceso de asimilación. Ejemplos de estos espacios son: el ICMI "*International Commission for Mathematical Instruction*", el PME "*Psychology of Mathematics Education*" y la RELME "Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa", así como el desarrollo de publicaciones especializadas en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, de reconocido prestigio en la comunidad científica (Blanco, 2011).

Cuba no está aislada de esta situación y se plantea la necesidad de dar continuidad al perfeccionamiento de la educación y continuar avanzando en la elevación de la calidad y rigor del proceso docente educativo.

En este sentido la Universidad de las Ciencias Informáticas [UCI] está llamada a jugar un papel protagónico, toda vez que en ella se forman ingenieros altamente calificados que tendrán en sus manos la responsabilidad de participar activamente en los procesos de desarrollo y mantenimiento de la industria del *software* y la informatización de la sociedad.

Para lograr el cumplimiento de estas misiones se hace necesario incrementar la calidad en el proceso de formación del profesional y lograr una mayor excelencia en los resultados científico-tecnológicos, expresada en el incremento de la pertinencia, la calidad y el impacto de los productos que desarrolla la universidad. Es por ello que cada una de las disciplinas involucradas en la formación del profesional de la informática debe contribuir al cumplimiento de los objetivos trazados.

La carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas

El ingeniero en Ciencias Informáticas [ICI] tiene como objeto de trabajo, el ciclo de vida de un software, con una perspectiva industrial, aplicado a los procesos de tratamiento y gestión de la información y del conocimiento en organizaciones productivas y de servicios; y como campo de acción, la representación y procesamiento de la información y del conocimiento: estructura de datos, bases de datos, bases de conocimientos, procesos algorítmicos o heurísticos, programación y técnicas de Inteligencia Artificial.

El ICI, a su vez, debe ser capaz de:

- Desarrollar formas de pensamiento lógico y capacidad de razonamiento, mediante la modelación conceptual y el análisis algorítmico de los problemas.
- Desarrollar habilidades para la solución de problemas, garantizando que los algoritmos implementados en cada caso funcionen correctamente.
- Diseñar los algoritmos necesarios para resolver problemas y expresar el algoritmo de solución de este problema mediante algún instrumento de descripción formal.
- Utilizar algún medio formal para la descripción de algoritmos.
- Programar y poner a punto algoritmos usando los recursos adecuados de un lenguaje de alto nivel y aplicando los conceptos de la programación orientada a objetos.
- Aplicar los principios de la programación orientada a objetos al diseño e implementación de un algoritmo en un lenguaje de alto nivel.

Desde el primer año de la carrera el estudiante se enfrenta a la disciplina Matemática, entre las primeras materias que se imparten en cualquier carrera de Ingeniería. Aunque esta materia ha sido recibida por los estudiantes desde edades tempranas, este encuentro no ha dejado de ser traumático, provocando un alto nivel de deserción. Además, se ha podido constatar que los estudiantes poseen pobre desarrollo de habilidades básicas matemáticas y existe una enorme brecha entre las habilidades matemáticas que requiere el ingeniero y las habilidades que se forman en los cursos de Matemática. La enseñanza de la Matemática se limita a una simple actividad reproductiva y los alumnos muestran dificultades en el aprendizaje y la ejercitación del razonamiento ya que se pone énfasis en la actividad de resolver ejercicios de cálculo.

La Disciplina Matemática en la UCI, aporta fundamentos teóricos tales como: la modelación, la lógica matemática, procesos algorítmicos, métodos, técnicas y herramientas, propios de alguna de las áreas de conocimiento de la Informática Aplicada necesarios para desarrollar un software aplicado competitivo. Y tiene entre sus objetivos: algoritmizar, aplicar e implementar modelos numéricos para resolver problemas aplicando métodos numéricos, la introducción de la computación y los enfoques computacionales en la disciplina.

El Álgebra Lineal es una de las asignaturas de la disciplina Matemática que aporta herramientas para el trabajo en otras asignaturas de la Matemática y en las disciplinas propias del campo de la Informática. Es una asignatura marcada por su carácter abstracto y la complejidad del trabajo simbólico. Ello conlleva a que los estudiantes presenten dificultades para apropiarse de los conceptos e induce a que sientan como si estuvieran aprendiendo reglas de un juego que no tiene nada que ver con la realidad. Esto hace que existan dificultades a la hora de identificar las conexiones existentes entre el Álgebra Lineal y el resto de la Matemática que han recibido en clases hasta ese momento. (Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1999; Dorier et al., 1997; Stewart, 2008; Uhlig, 2006). Al unísono, el discurso matemático escolar del Álgebra Lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en detrimento de la comprensión conceptual de nociones básicas y se evidencia la mecanización algorítmica en los procesos de cálculo, por lo que no se internaliza el significado de los objetos matemáticos. Estos aspectos han sido analizados en las investigaciones realizadas por (Karrer, 2006; Mateus, 2008; Miyar, 2009; Ortega, 2002; Stewart, 2008; Yordi, 2004).

El Álgebra Lineal en la carrera ICI se imparte en el primer semestre de primer año, mientras los estudiantes reciben las asignaturas Matemática Discreta 1, Cálculo diferencial e integral de una variable e Introducción a la programación.

Habilidades Generales Matemáticas [HGM]

El sistema básico de habilidades matemáticas, fue definido por Hernández entre 1989 y 1993. Este sistema fue ampliado por los profesores Valverde, Rodríguez y Delgado. [Ver Figura 3**Figura 3**](Orlando, 2009)

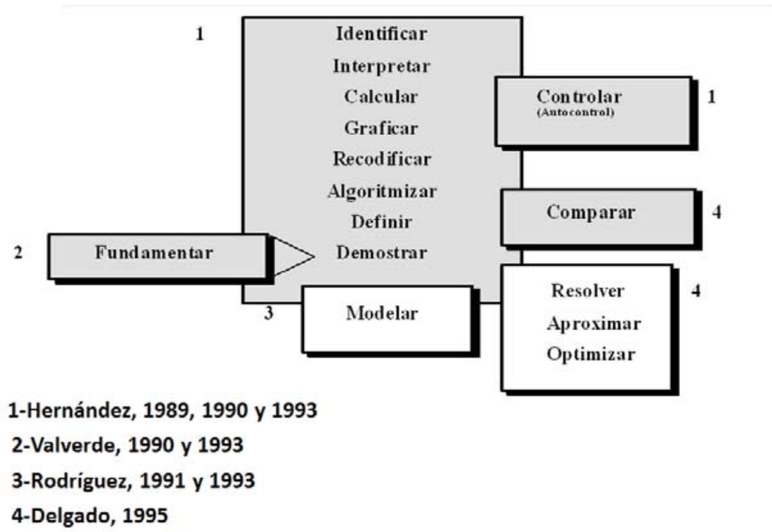


Figura 3. Habilidades generales matemáticas.

Una de las habilidades imprescindibles para los ICI y graduados de otras carreras afines es la habilidad algoritmizar por estar íntimamente relacionada con la elaboración de programas de computación para su uso o no en la Matemática, pero resulta obligado para todo profesional moderno. Por otro lado, todo profesional que organice recursos humanos o materiales con un fin productivo debe tener formada en alguna medida esta habilidad y la enseñanza de la Matemática puede contribuir indirectamente a formarla en él.

La habilidad algoritmizar ha sido definida según planteó Delgado como: (Delgado, 1998)

- Plantear una sucesión estricta de operaciones matemáticas que describan un procedimiento conducente a la solución de un problema.
- Tiene una doble significación:

Cognoscitiva: en el establecimiento del algoritmo se posee un soporte teórico materializado que expresa la secuencia lógica y estricta de la dinámica del modelo y de su formación

Metodológica: la sucesión de operaciones planteadas en el algoritmo, puede servir como base de orientación para realizar la acción, la tarea o el problema que exige el modelo para su resolución.

Han sido consultadas las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa [ALME] y la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa [RELIME] de los últimos cinco años y ha podido observarse que existe consenso en la comunidad académica sobre las dificultades del procesos de enseñanza aprendizaje del Álgebra Lineal son escasos los trabajos que abordan el tema del desarrollo de habilidades matemáticas. (Blanco, 2011)

En las tesis doctorales consultadas, se abordan el desarrollo de la habilidad calcular en sentido amplio para la carrera Ingeniería Eléctrica (Yordi, 2004), la comprensión de conceptos del Álgebra a través de tres modos del pensamiento matemático(Stewart, 2008), la articulación del Álgebra Lineal y la Geometría desde la perspectiva de los registros de representación semiótica (Karrer, 2006) y el proceso de enseñanza aprendizaje a través del uso de sistemas informáticos de cálculo (Mateus, 2008; Miyar, 2009; Ortega, 2002). De esta forma se ha podido identificar que no se ha abordado, hasta el momento, el *desarrollo de la habilidad algoritmizar en* el Álgebra Lineal en carreras de la rama de la Informática.

Partiendo de esta *situación se hace necesario plantear la siguiente interrogante:* ¿Cómo contribuir desde el Álgebra Lineal al desarrollo de la habilidad algoritmizar? Para darle respuesta a la misma se propone desarrollar un proyecto docente para la elaboración de una metodología que permita el desarrollo de la habilidad algoritmizar en el Álgebra Lineal en los estudiantes de la carrera de Ciencias Informáticas.

Para el desarrollo del proyecto se proponen tres etapas:

1. Exploración y constatación del problema.
2. Elaboración de la metodología.
3. Estudio de factibilidad de la propuesta.

Actualmente el proyecto se encuentra en la culminación de la primera etapa, dentro de los resultados obtenidos hasta el momento se procedió a estudiar el grado de desarrollo de la habilidad Algoritmizar en la UCI, para ello, a petición de la dirección de la UCI, el Centro de Innovación y Calidad de la Educación [CICE] puso a disposición de la comunidad universitaria una herramienta informática para el diagnóstico de cierre del Ciclo Básico de formación. En esa herramienta fueron incorporados instrumentos que permitieron, entre otras, la medición de la habilidad Algoritmizar, con el objetivo de explorar y caracterizar el nivel de los estudiantes en relación a la algoritmia, razonamiento lógico, reconocimiento de patrones y deducciones lógicas.(CICE, 2012)

Respondieron el cuestionario 1128 estudiantes y los resultados arrojaron que los estudiantes [79,4 %] tienen dificultades en Matemática y algoritmización tras haber cursado las asignaturas de esta disciplina. (CICE, 2012)

Conclusiones

Se pudo constatar que:

- Existe contradicción entre el grado de desarrollo de la habilidad algoritmizar y las necesidades de la formación del Ingeniero en Ciencias Informáticas.
- El problema abordado por el proyecto es necesario, de actualidad y puede contribuir al proceso de formación del profesional de manera satisfactoria.

Referencias bibliográficas

Blanco, R. (2011). Las investigaciones sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática. Artículo no publicado, presentado en la *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 25)*, Universidad de Camagüey, Cuba.

CICE. (2012). *Informe Diagnóstico Integral a estudiantes que culminan el Ciclo Básico curso 2011-2012*. Universidad de las Ciencias Informáticas. La Habana.

Delgado, J. R. (1998). Las habilidades generales matemáticas. En Hernández (Ed.), *Cuestiones de Didáctica de la Matemática*. Rosario: Homo Sapiens.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., et al. (1999). Teaching and learning Linear Algebra in first year of French Science University. *First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* Osnabruck.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., et al. (1997). Book Review. En Grandsard (Ed.), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question* (pp. 206-210). Brussels: La Pensée Sauvage.

Karrer, M. (2006). *Articulação entre Álgebra Linear* e *Geometria um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica*. Tesis de Doctorado no publicada, Pontifícia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.

Mateus, J. (2008). *La enseñanza y el aprendizaje del Álgebra: una concepción didáctica mediante sistemas informáticos*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Ciencias Pedagógicas "Enrique José Varona". La Habana, Cuba.

Miyar, I. (2009). *Perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Camagüey, Universidad APEC, Santo Domingo, República Dominicana.

Orlando, F. (2009). Un recurso metacognitivo para resolución de problemas en el ejemplo de matemática: el autocontrol. Manuscrito no publicado

Ortega, P. (2002). *La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Complutense de Madrid. España.

Stewart, S. (2008). *Understanding Linear Algebra Concepts Through the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Auckland. Nueva Zelanda.

Uhlig, F. (2006). *Certain Dilemmas in Teaching Elementary Linear Algebra Today and Tomorrow.* Manuscrito no publicado, Departmento de Matemáticas, Universidad de Auburn. Alabama, Estados Unidos.

Yordi, I. (2004). *Metodología para formar en los estudiantes de Ingeniería Eléctrica la habilidad de calcular en Álgebra Lineal con sentido amplio*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Camagüey, Universidad de Oriente. Cuba.

CAPACITACIÓN EN CONTEXTO PARA LA PREPARACIÓN DE LOS MAESTROS QUE IMPARTEN LA MATEMÁTICA. EXPERIENCIA EN REPÚBLICA DOMINICANA

Carmen Evarista Matías Pérez, Olga Lidia Pérez González, Celia Rizo, Ramón Blanco
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Santo Domingo. República Dominicana
Universidad de Camagüey Cuba
evaristam@gmail.com, olguitapg@gmail.com

Resumen. Se utilizan los postulados teóricos sobre la capacitación en contexto para profesores de Matemática (Matías, 2010), con el fin de contribuir al mejoramiento de la preparación del maestro que imparte la asignatura Matemática. Se describe y argumenta la orientación y organización del contenido de este tipo de capacitación, las acciones de capacitación que deben realizarse, las vías que se deben seguir, como estrategia de implementación, así como los momentos de su ejecución. Se explica la estrategia a seguir y se describe y fundamenta la implementación de la estrategia en República Dominicana. Se hace una valoración de sus resultados.

Palabras clave: capacitación, contexto, maestros, matemática

Abstract. It has been used the theoretical postulates about training in context for teachers of Mathematics (Matías, 2010), in order to improve teacher preparation to teach Mathematics. It has been described and argued the orientation and organization of the content for this form of training, the training activities to be performed, routes to be followed, and implementation strategy as well as execution times. It has been explained the strategy to be followed and it has been described and substantiated the implementation of the strategy in the Dominican Republic. It has been made an assessment of the results.

Key words: training, context, teachers, mathematics

Fundamentos teóricos

Dada la diversidad de términos que se utiliza por los investigadores, para determinar las diferentes etapas del proceso de formación de maestros, se precisa asumir una posición para la realización de la presente investigación, para lo cual se asume los postulados teóricos de la teoría de capacitación en contexto para los maestros que imparten la asignatura Matemática en la Educación Básica, de Matías, 2010, la cual precisa que este tipo de capacitación es la que se desarrolla a través de un sistema de acciones inherentes a la formación permanente de los maestros, organizada por las universidades u otras entidades autorizadas y que se realiza mediante un conjunto de acciones pedagógicas que completa o actualiza su formación inicial, en este caso en el área de Matemática en la Educación Básica, con el propósito de perfeccionar el desempeño.

La misma debe partir de un diagnóstico de las necesidades de capacitación en contexto, preferiblemente a través de estudios de casos, una concepción bien definida de su planificación y ejecución, así como la evaluación de sus resultados.

Cada una de las acciones realizadas deberán organizarse con carácter cíclico y su contenido debe referirse a didácticos y sociales acorde al contexto donde se realice. Desarrollándose en el marco de la propia práctica profesional de los maestros e incorporando su experiencia profesional, las vivencias personales, familiares y sociales, de modo que contribuyan a lograr el mejoramiento profesional y humano de los maestros, al conciliarse la motivación con sus intereses personales y los sociales.

En la descripción de las acciones de la propuesta, que se realizan en el último apartado del presente trabajo, se detallan, los aspectos esenciales que abordan esta teoría.

Para la capacitación en contexto se deben propiciar relaciones de coordinación entre las formas de superación y el acompañamiento del trabajo del maestro, que incluya la supervisión de su práctica, la autoreflexión del maestro, así como la reflexión, individual y colectiva sobre la práctica. En estas relaciones, se consideran como formas fundamentales el diplomado, el entrenamiento, el trabajo cooperativo, la reflexión sobre la propia práctica y la autopreparación, las cuales articulan con las conferencias y talleres, que son consideradas como complementarias para reforzar las acciones previstas, así como para valorar su eficacia La estrategia de implementación deberá partir del entrenamiento, de modo que el trabajo que se realice tenga como sustento el diagnóstico, derivando del mismo el plan de capacitación, deberá, además, concebir la observación/ evaluación, de modo que se jerarquice la supervisión del trabajo del docente, en las clases y se propicie la reflexión individual y colectiva con respecto a su actuación en el aula, e integrado a los dos aspectos anteriores, concebir el actuar indagativo/investigación (Matías, 2010).

Propuesta de capacitación en contexto para los maestros que imparten la asignatura Matemática en la Educación Básica en República Dominicana

Objetivo general: Mejorar la preparación de los maestros que imparten la asignatura Matemática de la Educación Básica.

Acciones a desarrollar:

A. Precisar la orientación y organización de su contenido.

B. Seleccionar la vía a seguir como estrategia de implementación.

C. Caracterizar los momentos de ejecución de la propuesta.

A. Orientación y organización de su contenido

El contenido de la capacitación está orientado al desarrollo profesional a partir de considerar, también, los factores planteados por F. Imbernón que la autora considera que se ajustan al caso de esta investigación (Imbernón, 2004, p. 67)

El sistema de contenidos de la capacitación gira alrededor de tres ejes o directrices que lo sustentan:

- El desarrollo profesional en el trabajo docente y para él desde su institución, mediante la actividad personal y colectiva
- La reflexión sobre la propia práctica y
- El intercambio de experiencias, tanto de orden teórico como práctico, dirigido a la satisfacción de las necesidades más ingentes de capacitación determinadas por vía empírica y teórica en función de la situación que se ha evidenciado por vía empírica.

Estas necesidades se pueden satisfacer con una organización de la capacitación, tal como se sistematiza en la ilustración # 1.

Ilustración 1

En su elaboración se tuvo en cuenta el carácter sistémico, la graduación de las formas (diplomado, conferencias, talleres, trabajo colaborativo, autopreparación, reflexión sobre la propia práctica y el entrenamiento), así como el acompañamiento del trabajo del maestro, que incluye la supervisión de su práctica que propicia la reflexión.

B. *Vía a seguir como estrategia de implementación*

- El modelo entrenamiento, de modo que el trabajo que se realice se parta de un diagnóstico como forma básica de conocer las metodologías o estrategias implementadas por el profesorado en la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y el estado del aprendizaje de los alumnos, derivando de este diagnóstico un plan de capacitación, estableciendo los objetivos, los contenidos y demás elementos que se consideran en una planificación de este tipo, de acuerdo a dicho diagnóstico.

- Dentro del plan del centro educativo, desarrollar el modelo observación/ evaluación integrado al anterior, de modo que se jerarquice la supervisión del trabajo del docente, en las clases de Matemática y se propicie la reflexión individual y colectiva con respecto a su actuación en el aula, a partir de las observaciones y valoraciones de los expertos que se designen para dar seguimiento a su labor docente.
- Por último, integrar el modelo indagativo/investigación, a los dos modelos anteriores para iniciar, de manera paulatina, la actividad investigativa del profesorado y desarrollar, en su condición de maestro investigador de su propia práctica, la atención a los reales problemas que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática.

El diplomado, entrenamiento, trabajo cooperativo, reflexión sobre la propia práctica y la autopreparación se consideraron como fundamentales para el logro de los propósitos de la propuesta de capacitación en contexto. Estas se articulan con las dos formas restantes (conferencias y talleres), que se consideraron como complementarias para reforzar las acciones previstas, así como para valorar su eficacia.

C. Momentos de ejecución de la propuesta

- Desarrollo de Entrenamiento a especialistas en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, al asesor del distrito y a directores de escuela:

En el entrenamiento, los participantes se prepararon adecuadamente realizando las siguientes acciones:

- Preparación teórica previa. Elementos del diagnóstico y los problemas típicos de aprendizaje de la Matemática que se detectaron en las escuelas estudiadas. Interpretación, procesamiento y trazado de estrategias de solución didáctica.
- Aplicación del diagnóstico e identificación de problemas con los maestros, evaluación de la calidad del trabajo docente.
- Realización de modelos de actuación didáctica con los niños que presentan problemas de aprendizaje.
- Aplicación de estrategias de transformación. Desarrollo del sistema de monitoreo y evaluación de los productos parciales y finales de evaluación del aprendizaje en Matemática.
- Autopreparación.

- Evaluación, al inicio y al final entrenamiento, en función de su preparación para asumir el análisis integral de los resultados del diagnóstico del maestro, en la escuela en general y en el área de supervisión para determinar: Problemas generales y específicos de alumnos, maestros y escuelas, así como potencialidades, a fin de encontrar los pilares de apoyo para las transformaciones, incluido los posibles maestros que pudieran constituirse en promotores de calidad.
- Desarrollo de un diplomado con los maestros seleccionados.

Obtenidas las necesidades de capacitación de los maestros, se procedió a la fase de aplicación de la propuesta, para lo que se realizó la selección de las temáticas necesarias para contribuir a la capacitación de los maestros, teniendo también en cuenta los criterios de los metodólogos y los directores de las escuelas. Las temáticas seleccionadas fueron:

- Metodología de la Enseñanza de la Matemática.
- Elementos fundamentales para la estructuración de la clase.
- Tratamiento de conceptos y definiciones matemáticos.
- Desarrollo de los contenidos matemáticos: dominios numéricos, cálculo, resolución de ecuaciones, y problemas.
- Conocimiento por parte de los maestros del tratamiento metodológico de dominios numéricos, cálculo, resolución de ecuaciones, y problemas.
- El seguimiento del diagnóstico de los alumnos.
- La comunicación e n el proceso de enseñanza aprendizaje.

Estas temáticas se incluyeron en el diplomado y en las actividades de acompañamiento de los maestros en las escuelas. Se ejecutó el diplomado en el cual participaron los 32 maestros de Educación Básica del Distrito 15-03 y posteriormente se continuó con la capacitación de los maestros en las escuelas del distrito, donde actuaron conjuntamente con los autores de la investigación y los metodólogos de la asignatura matemática.

En su desarrollo se entrenó a los maestros en:

- La organización de los alumnos para el trabajo en equipos durante las clases de resolución de ejercicios fundamentalmente,
- La ayuda del maestro a los estudiantes más rezagados
- La importancia de la exposición oral por parte alumnos de los resultados obtenidos,
- La realización de competencias entre los alumnos del grupo

- El desarrollo de la independencia cognoscitiva de los alumnos.
- La preparación de los planes de clases.
- Cómo desarrollar una buena clase.
    - La autopreparación

Este momento es considerado se asumió como un elemento básico en la labor del maestro. Esto exige que la capacitación se dirija a cada maestro según sus reales necesidades, de modo que su autopreparación sea más efectiva. La autopreparación fue dirigida y controlada por los asesores del distrito y los maestros seleccionados, a través de las diferentes actividades del diplomado y de las actividades en la escuela.

- El trabajo cooperativo.

Este momento comienza desde el desarrollo del diplomado, a través del trabajo en equipo, y continuará en las escuelas, donde se jerarquiza la supervisión del trabajo docente y se propicia la reflexión individual y colectiva con respecto a la actuación de los maestros en las clases. Aquí se realizan preparaciones de planes de clase y se ejecutan clases modelos que son objeto de análisis y debates colectivos.

- Visita a las clases de los maestros del Distrito.

Paralelo a la atención metodológica y de capacitación a los docentes, se desarrolla el monitoreo sistemático de la efectividad de las acciones en las supervisiones, considerando como aspecto central el comportamiento de los aprendizajes en matemática básica.

Se hace de manera colectiva el análisis de las clases observadas en la cual el maestro visitado realiza la reflexión sobre la propia práctica.

Valoración de los resultados

En el curso escolar 2008-2009 se desarrolló la capacitación en contexto, con la participación de los 32 maestros de Educación Básica del Distrito 15-03 que fueron objetos de análisis en el estudio de casos. Posteriormente se desarrollo en todas las escuelas del distrito, con la participación de los autores de la investigación y los metodólogos de la asignatura matemática de dicho distrito. Además, se procedió a las observaciones de clases de los 32 maestros antes mencionados, con la participación del resto, en dependencia de las posibilidades, en calidad de observadores.

Los resultados de los diálogos reflexivos fueron:

Aspectos positivos

- La motivación y participación de los alumnos en las clases,
- La participación de los alumnos y maestros en la actividad docente,
- La deducción por parte de los estudiantes de la relación de la multiplicación y la suma a través de los ejercicios,
- La integración de los alumnos en la búsqueda del valor de la incógnita en la resolución de ecuaciones
- La aplicación de procedimientos lógicos en la resolución de ejercicios,
- Las respuestas de los alumnos
- La determinación de valores de una expresión.

Existencia de situaciones de aprendizaje

- Cuando uno de los niños, aunque todos decían que no sabía nada, pasó al pizarrón y logró realizar uno de los ejercicios,
- En la independencia en la resolución de ecuaciones,
- En todos los momentos de la clase,
- En la reafirmación de las propiedades, por las preguntas y las respuestas de los alumnos cuando interactuaban en el pizarrón, En la conceptualización y en los procedimientos
- En las preguntas a los alumnos en la introducción de las clases,
- Cuando se procedió al análisis de ejemplos
- En el momento de la exploración del tema, por la motivación y respuestas de los alumnos.

Algunas expresiones de los maestros fueron:

- "La ayuda metodológica me sirvió porque al desarrollar la clase de forma improvisada se me perdían algunos detalles"
- "Ahora tengo más conciencia de que hay que preparar la clase con antelación"

Se valoraron los cambios efectuados en los maestros, esta evaluación tuvo carácter sistémico, a través de la observación de las clases, de forma oral en los debates en todo el proceso de acompañamiento, pudiéndose constatar que hubo avances en:

- El autoreconocimiento sobre el dominio que tiene de los contenidos de Matemática, de su metodología de la enseñanza y del nivel de conocimiento de la situación de sus alumnos.

En este aspecto hubo 23 maestros en los cuales se valoró un cambio hacia niveles más altos, lo que representó el 72% mientras que 9 se mantuvieron en los niveles iníciales, de ellos 7 en el mediano y 2 en el nivel bajo que representaron el 6%. Por lo que se concluyó que la propuesta contribuyó a que los maestros tengan mejor percepción de la situación en que se encuentra el proceso de enseñanza aprendizaje que dirige.

Resulta significativo que aún hay 3 maestros, lo que representa el 9,4%, que tienen serias dificultades en este fundamental aspecto, sin embargo se observan avances en el dominio de los contenidos de la asignatura en 23 de los maestros, que representó el 72%, por lo que la autora considera que se ha fortalecido este indicador, máxime si se tiene en cuenta el indicador de la independencia cognoscitiva.

Se aprecia desarrollo de la independencia cognoscitiva de los maestros, siendo uno de las variables con mejores resultados. No obstante aún hay maestros que no están satisfechos con la labor realizada, 2 maestros en el nivel bajo y 1 en el mediano.

Se evaluaron por su desempeño en la propuesta de capacitación 25 maestros, y se apreciaron cambios hacia un nivel más alto en el 78 % de los maestros, aunque se mantiene el nivel bajo del 9,4%. En general, en el análisis de los resultados de todos los indicadores, se aprecian avances; fundamentalmente en la independencia cognoscitiva de los maestros.

Al aplicar la mediana conjunta como estadígrafo para constatar los valores a la derecha del valor central, la autora pudo constatar que en los niveles alcanzados en el diagnóstico final se evidencia mejoría en comparación con los niveles obtenidos en el diagnóstico inicial, de lo que se pudo inferir que la aplicación de la propuesta de capacitación en contexto contribuyó al desarrollo de estas características en los maestros de matemática de la Educación Básica.

Referencias bibliográficas

Imbernón, F. (2004). *Modelos de Formación Permanente del Profesorado.* Informe de Investigación, Instituto Nacional de Formación y Capacitación del Magisterio (INAFOCAM), Formación Permanente, Santo Domingo, República Dominicana.

Matias, E. (2010). *capacitación en contexto que contribuya al mejoramiento de la preparación del maestro que imparte la asignatura Matemática en la Educación Básica en República Dominicana.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad de la Habana, Facultad de Educacion a Distancia, Ciudad Habana.

SISTEMA INTELIGENTE PARA EL ALGEBRA LINEAL

Laura Casas Fuentes. Olga Lidia Pérez González, Lisandra Docampo, Yailé Caballero Mota, Lenniet Coello, Isabel Yordi González, Angela Martín.
Facultad de Informática, Universidad de Camagüey Cuba
Universidad APEC República Dominicana
laura.casas@reduc.edu.cu,lisandra.docampo@reduc.edu.cu, olga.perez@reduc.edu.cu; m.angela24@gmail.com

Resumen. El trabajo describe la concepción del Sistema Inteligente para el Algebra Lineal (SIAL), el cual fue creado por los autores de la investigación. Sus fundamentos teóricos están relacionados con las técnicas de Inteligencia Artificial para clasificar, utilizando el clasificador k-vecinos más cercanos K-NN (Caballero, 2010), así como los cinco problemas tipos del Álgebra Lineal (Yordi, 2004). El SIAL se creó con el objetivo de apoyar al estudiante durante su estudio independiente para brindarle la vía de solución de los problemas que debe resolver.

Palabras clave: sistema inteligente, algebra lineal, inteligencia artificial

Abstract. This work describes the design of the Intelligent System for Linear Algebra (SIAL); it was created by the authors of this research. It is theoretical foundations are related to Artificial Intelligence techniques for classifying, using the k-nearest neighbor K-NN classifier (Caballero, 2010), and the five types of Linear Algebra problems (Yordi, 2004). The SIAL was created to help the student during their independent study, this provide the way to solve the problems oriented in the assignment.

Key words: intelligent system, linear algebra, artificial intelligence

Introducción

Las investigaciones pedagógicas relacionadas con la aplicación de la computadora en la enseñanza de la Matemática se centran fundamentalmente en la introducción de herramientas (software), que faciliten el proceso de cálculo. La diversidad de software que anualmente se genera en la esfera de la Enseñanza Asistida por Computadora es muy amplia. No obstante, resulta difícil encontrar software educativos que se ajusten a los requerimientos de un proceso activo de aprendizaje.

Se hizo un análisis de los asistentes matemáticos que, por lo general, facilitan el cálculo de operaciones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal: el Derive, MATLAB; mientras otros como la plataforma interactiva MOODLE, con actividades evaluables, lo que hace es procesar información, pero no está orientada a la búsqueda del conocimiento, por lo tanto se hace necesaria la sustitución del producto "información" por el producto "conocimiento" y de "sistemas que permiten procesar información" por sistemas que generan o entregan conocimientos, es decir que aseguren el uso productivo de la información, que guíen una toma de decisión óptima, capaces de tomar decisiones inteligentes en un determinado tema, con la capacidad de adquirir nuevos conocimientos y perfeccionar el que posee.

Para el desarrollo de herramientas que superen estas dificultades, las técnicas de Inteligencia Artificial resultan de mucho interés, debido a todos los métodos desarrollados para la adquisición del conocimiento y el aprendizaje automático, el cual consiste en generalizar comportamientos a partir de una información no estructurada suministrada en forma de ejemplos. Esto sugirió un estudio teórico-práctico de las relaciones que se puedan establecer entre la Inteligencia Artificial y la autoevaluación del estudiante; de forma que con el empleo de las técnicas de aprendizaje se puedan desarrollar herramientas de apoyo a la actividad independiente que realizan los estudiantes y al sistema de ayudas pedagógicas que responda a las especificidades de cada asignatura.

En este contexto, la Inteligencia Artificial puede permitir fundamentar una nueva línea de trabajo, orientada a diseñar programas de consulta, capaces de ayudar a resolver dudas al estudiante, a los que se les da el nombre de "Sistemas Expertos" (SE). Son programas que reproducen el proceso intelectual de un experto humano en un campo particular, pudiendo mejorar su productividad, ahorrar tiempo y dinero, conservar sus valiosos conocimientos y difundirlos más fácilmente. Además son capaces de arribar a conclusiones a partir de la información almacenada en su base de conocimiento.

Dado lo abstracto del contenido de Espacio Vectoriales (EV) en Álgebra Lineal (AL), el estudiante requiere de un tiempo prolongado de estudio independiente, pues no asimilan las definiciones, conceptos, por lo general los ejercicios tienen varias vías de solución y los alumnos no son capaces de seleccionar el algoritmo correcto de los propuestos por el profesor. Una vez identificado que las herramientas informáticas disponibles no les resultaban factibles para analizar las posibles vías de solución de una tarea dada, se defiende la idea de la utilización de Sistemas Expertos que propongan caminos de solución a los problemas y no la solución en sí.

Metodología

En consideración a los aspectos anteriores, la investigación tuvo como objetivo el de implementar un SIAL, aplicando las técnicas de Inteligencia Artificial, con el fin de que el estudiante al realizar una tarea, introduzca los datos e incógnita de la misma y el software le ofrezca la vía de solución a la tarea y lo oriente qué debe estudiar para poder comprender la tarea, por lo que se debía disponer de un módulo inteligente.

En el artículo se describe el proceso seguido para la producción de un software, que se fundamenta en cinco problemas tipos para el Algebra Lineal, en técnica la Inteligencia Artificial, para clasificar, utilizando el clasificador k-vecinos más cercanos K-NN y en la herramienta de la inteligencia artificial llamada razonamiento basado en casos.

El software desarrollado es catalogado como un Sistema de Experto. Se describen detalladamente las 7 acciones que realizaron sus autores desde la descripción de los fundamentos hasta el diseño de la diseñó la interfaz de usuario. Al finalizar se hace una breve descripción el impacto que se ha tenido con su implementación. Las 7 acciones desarrolladlas constituyen una guía para desarrollar otros sistemas de expertos para las Matemáticas, siendo este el principal aporte del trabajo. Se asume como innovación al proceso de producción del Sistema De Experto.

Fundamentos teóricos

Los cinco tipos de problemas de Álgebra Lineal. (Yordi, 2004)

Desde el punto de vista didáctico, se ha trabajado con la estructuración sistémica de la asignatura, para favorecer la enseñanza-aprendizaje de esta asignatura, en este sentido se han determinado cinco problemas tipos que relacionan el contenido entre los temas y el contenido dentro del tema. La clasificación en esos tipos de problemas favorecen la estructuración sistémica de la asignatura y permiten orientar al estudiante en la ejecución de las tareas, en su actividad de estudio independiente.

Muchos de los principales problemas con la Combinación Lineal de vectores se reducen a los problemas tipos con las formas lineales (Yordi, 2004). Una forma lineal es una combinación lineal, de allí que los principales problemas del AL puedan enunciarse en términos de la teoría de Espacios Vectoriales.

Dado el sistema de ecuaciones en la forma matricial $AX=Y$, si se denotan los vectores columna de la matriz A como a_i, $i=1...n$, los problemas tipo quedarían enunciados de la siguiente forma

- ❖ Problema directo: Dados los vectores de la Combinación Lineal a_i y los coeficientes de dicha combinación lineal x_i (elementos del vector X), calcular el vector resultante de dicha Combinación Lineal Y (de componentes y_i).
- ❖ Problema inverso: Dados los vectores de la Combinación Lineal a_i y el vector resultante de dicha Combinación Lineal Y (de componentes y_i). Calcular los coeficientes de dicha Combinación Lineal x_i (elementos del vector X).
- ❖ Problema de dependencia de los datos: Dados los vectores a_i y el vector Y (de componentes y_i). Plantear la interrogante de la dependencia lineal de estos vectores (existencia de los x_i, únicos o infinitos) o la independencia lineal de los mismos (no existencia de los x_i).
- ❖ Problema de factibilidad: Dados los vectores a_i y el vector Y (de componentes y_i). Cuestionar la posibilidad de generar el vector Y, mediante la combinación lineal de

los vectores a_i, siendo los coeficientes x_i (coeficientes de la combinación lineal) únicos, infinitos o si no existen (no es posible generar el vector Y combinando linealmente los vectores a_i).

- Problema de unicidad: Dados los vectores a_i y el vector Y (de componentes y_i). Cuestionar la posibilidad de generar el vector Y, mediante la combinación lineal de los vectores a_i, siendo únicos los coeficientes x_i (coeficientes de la Combinación Lineal). No obstante, a pesar de lo mucho que se ha avanzado en la enseñanza del Álgebra Lineal aún existen insuficiencias, se requiere de un perfeccionamiento dentro de la disciplina Matemática para carreras técnicas.

Las técnicas de Inteligencia Artificial para clasificar, utilizando el clasificador k-vecinos más cercanos K-NN. (Caballero, 2010)

La clasificación consiste en el proceso de asignar a una entrada concreta, el nombre de una clase a la que pertenece. Las clases se pueden describir de gran cantidad de formas. Su definición dependerá del uso que se les dé.

La clasificación constituye una parte importante de muchas de las tareas de resolución de problemas. En su forma más simple, se presenta directamente como una tarea de reconocimiento de un objeto a determinado clase. Antes de que se pueda hacer la clasificación, se deben definir las clases que utilizará. (Caballero, 2010). Los diferentes algoritmos de aprendizaje se agrupan en una taxonomía en función de la salida de los mismos. Algunos tipos de algoritmos son:

- *Aprendizaje supervisado*. se conocen las entradas y las salidas deseadas del sistema. Un ejemplo de este tipo de algoritmo es el problema de clasificación, donde el sistema de aprendizaje trata de etiquetar (clasificar) una serie de vectores utilizando una entre varias categorías (clases). La base de conocimiento del sistema está formada por ejemplos de etiquetados anteriores.

- *Aprendizaje no supervisado*. todo el proceso de modelado se lleva a cabo sobre un conjunto de ejemplos formado tan sólo por entradas al sistema. No se tiene información sobre las categorías de esos ejemplos

Razonamiento basado en casos

El Razonamiento Basado en Casos (RBC) es una de las múltiples herramientas con las que cuenta hoy la Inteligencia Artificial (IA). Con esta herramienta la solución de un nuevo problema se realiza a partir de las soluciones conocidas para un conjunto de problemas previamente resueltos (o no resueltos) del dominio de aplicación. Su rasgo distintivo es el hecho de utilizar directamente la información almacenada en la memoria del sistema sobre los problemas o casos. Los sistemas que emplean el RBC usan una memoria permanente en lugar de alguna forma de base de conocimientos en la cual se almacene de forma explícita el conocimiento sobre el dominio de aplicación, en forma de estructuras conceptuales, reglas de producción u otra forma de representación del conocimiento.

RBC significa razonar en base a experiencias. Es una alternativa entre otras metodologías para construir sistemas basados en el conocimiento que se asemejan en gran medida a la forma de razonamiento humano. Al razonar basado en casos el solucionador de problemas recuerda situaciones previas similares a la actual y las usa para ayudar a resolver el nuevo problema.

k-Vecinos más Cercanos (k-NN)

El clasificador k-Vecinos más Cercanos (k-NN) es uno de los métodos de clasificación supervisada más usados que se usa en el razonamiento basado en casos. Utiliza funciones de distancia o similitud para generar predicciones a partir de ejemplos almacenados.

Este algoritmo pertenece a la clase de algoritmo perezoso (Lazy Learning algoritms), pues almacena el conjunto de entrenamiento y deja todo el procesamiento para la fase de clasificación. Es altamente sensible a la definición de las funciones de distancia o similitud utilizadas y a las características de los rasgos que conforman cada uno de los ejemplos almacenados. Muchas variantes del k-NN se han propuesto reducir esta sensibilidad parametrizando la función de distancia o similitud con características de peso. Otro de los factores que intervienen en el desempeño del clasificador es la base de casos que se utiliza en el proceso de clasificación.

La entrada del clasificador es una instancia *q*, cuya clase se desconoce, y la salida es su clasificación. Los rasgos pueden ser continuos o pueden estar limitados dentro de un conjunto fijo de valores discretos. El error que puede cometerse al clasificar cada instancia del conjunto de entrenamiento es conocido como *Error de Clasificación Dejando uno Fuera* (LOOCE por sus siglas en inglés). El objetivo del clasificador es minimizar el coeficiente LOOCE y existen algoritmos eficientes para minimizarlo. La forma de calcular el LOOCE está en dependencia de si los valores de la clase son continuos o discretos. Para valores discretos se calcula como:

$$(1)\ LOOCE = \sum_{q \in BC} \sum_{j \in J} \left(\delta_{q,j} - p_{q,j} \right)^2$$

Donde *q es* cada instancia que pertenece a la base de casos *BC* y *j* cada clase que pertenece al conjunto de clases *J*. La función de probabilidad de clase $p_{q,j}$, definidas como:

$$(2)\quad \delta_{q,j} = \begin{cases} 1 & q_c = j \\ 0 & q_c \neq j \end{cases}$$

$$(3)\quad p_{q,j} = \frac{\sum_{r \in K} \delta_{r,j} \cdot sim(q,r)^2}{\sum_{r \in K} sim(q,r)^2}$$

Donde *K* es el conjunto de las instancias vecinas más similares

Las acciones científico técnicas que dieron lugar a la innovación fueron las siguientes (Caballero, Pérez, Docampo, Casas, & Yordi, 2011)

En el artículo se describe el proceso seguido para la producción de un software, que se fundamenta en las técnicas de Inteligencia Artificial, a través de siete acciones que se describen detalladamente, las cuales comienzan con la fundamentación de la propuesta hasta el diseño de la interfaz de usuario. Al finalizar se hace una breve descripción de la experiencia que se ha tenido con su implementación. La metodología seguida para desarrollar el trabajo es descriptiva y su importancia radica en mostrar los pasos que han de seguirse para la producción de tecnología educativa utilizando dichas técnicas. Se asume como innovación al proceso de producción de dicha tecnología.

La *primera acción*, la cual es un fundamento científico de la innovación tecnológica, estuvo dirigida a caracterizar el proceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra Lineal en las carreras de Ingeniería En la *segunda acción* se trabajó en los sustentos teóricos, descrito anteriormente, precisándose el Razonamiento Basado en Casos (búsqueda por semejanza y adaptación de las soluciones). Los experimentos realizados con herramientas como Weka, MLP, KNN-WorkShop; determinaron que el clasificador k-vecinos más cercanos (K-NN) es el óptimo para diseñar e implementar la máquina de deducción del SIAL, la cual proporciona la capacidad de razonamiento del SE, al extraer conclusiones sobre la clasificación.

En *la tercera acción* se diseña e implementa el módulo inteligente o módulo "Obtener vía de solución para el tema de Espacios Vectoriales del Álgebra Lineal", usando la base de conocimiento diseñada y el clasificador para inferir soluciones. A partir de encuestas, entrevistas con expertos, se determinaron los requisitos funcionales relacionados con orientar al estudiante hacia la búsqueda de una solución a un problema dado, tomando como base la clasificación del mismo en uno de los cinco problemas tipo del Álgebra Lineal, de manera que el SIAL no sólo oriente al estudiante, sino que le permita justificar los resultados de una clasificación. Los requisitos funcionales definidos fueron: ofrecer la vía de solución a un problema, clasificar en un problema tipo los datos introducidos por el estudiante, mostrar los resultados de la clasificación, justificar los resultados de la clasificación, guardar los resultados de la clasificación en la base de datos y asignar entrenador (material de consulta al estudiante con dificultades). Luego de realizar un estudio de las características del negocio y el problema a automatizar se decidió que estos requisitos conformarían el módulo "Obtener vía de solución del sistema". Esta opción hace del SIAL un sistema computacional con características especiales, ya que incorpora en forma operativa el conocimiento de los profesores más experimentados en la asignatura Álgebra Lineal, de forma que es capaz de resolver problemas inteligentemente y de justificar sus respuestas.

En la *cuarta acción* se diseñó e implementó la base de conocimiento. Esta es el componente más importante de un Sistema Experto y tiene asociado un formato el cual indica cómo el conocimiento será representado. La base de conocimiento del SIAL proporciona ejemplos sobre la asignatura que es objeto de estudio y está basada en el razonamiento en casos, con 22 rasgos, 6 clases y 66 instancias. Se determinó que un caso estará compuesto por un vector de datos y su clasificación. Los elementos que forman el vector van a ser los datos seleccionados por el estudiante como la información que tiene del problema y las incógnitas. La clasificación va a ser clase de los problemas absurdos o uno de los cinco problemas de la combinación lineal definidos por los especialistas.

A continuación se muestran los 22 rasgos, del 1 – 12 representan los posibles datos de un problema planteado por el alumno y del 13 – 22 la posibles datos que necesita conocer

1. Vectores de R_n
2. Sistema de matrices
3. Sistema de vectores
4. Escalares de la CL
5. Vector resultante/ matriz resultante
6. Base del EV
7. Vector genérico
8. EV (condiciones)
9. Sistema de vectores canónicos/ Matriz idéntica
10. Sistema generador
11. Linealmente Independiente (LI)
12. Linealmente Dependiente (LD)
13. Vector resultante
14. Escalares de la CL
15. Coordenadas

16. LD
17. LI
18. Expresar un vector como CL de los demás
19. Base
20. Vectores resultantes (vector genérico). Subespacio generado
21. Número máximo de vectores LI/Dimensión
22. Polinomio

En la *quinta acción* selección del Razonamiento Basados en Casos como método para la adquisición del conocimiento y construir sistemas basados en el conocimiento. Su principal ventaja es que este método tiene la facilidad de que el conocimiento que se almacena puede ser ampliado y por consiguiente, la exactitud de la clasificación, así como la veracidad de las posibles respuestas aumenta. Es muy difícil considerar en una base de casos todas las selecciones que puede realizar un estudiante, algunas, en un número elevado de casos, carentes de coherencia y sentido lógico y totalmente alejadas de los conceptos de Álgebra Lineal. Es por este motivo que se decidió incluir una sexta clase que agrupa estos últimos casos. Luego se comenzaron a adicionar casos a la base para lo cual fue necesario realizar varias consultas a expertos. Se ofrece una base de casos de prueba con los 22 rasgos mencionados anteriormente, 1 rasgo de clase con un dominio de 1-6 y 66 instancias o problemas ejemplos que han sido ejecutados exitosamente sobre la base de conocimiento.Finalmente, se definió que un caso estará compuesto por un vector de datos y una clasificación. Los elementos que forman el vector van a ser los datos seleccionados por el estudiante como la información que tiene del problema y las incógnitas. La clasificación va a ser uno de los cinco problemas de la combinación lineal definidos por los especialistas o la clase de los problemas absurdos.

En la *sexta acción* se definió el mecanismo de explicación, el cual consiste en mostrar al usuario cómo se llegó a la clasificación del nuevo caso. La forma de dar la conclusión es variada y en este caso se realizó de la siguiente forma: lo primero es clasificar, a través del kNN, el nuevo objeto en una de las 6 clases. Para cada clase estará registrada en la base de datos su correspondiente explicación de cómo se resuelve ese tipo de problema. Debido a que k=1, se obtiene el vecino más cercano, que es, de los objetos registrados en la base de casos, el más similar al nuevo objeto. De sus rasgos se presentarán solo aquellos con valor 1, es decir, los que indican una posible selección, los cuales serán mostrados en el reporte.

En la *séptima acción* se diseñó la interfaz de usuario. Mediante la interfaz el estudiante plantea los problemas al sistema y este ofrece la vía de solución, o sea, la clasificación en uno de los 5 problemas tipos. Al seleccionar la opción obtener vía de solución se le mostrará una nueva ventana para que seleccione los datos de su problema y las incógnitas, los cuales serán identificados por el sistema como atributos de la BC. El sistema derivará una clasificación y mostrará al estudiante por cuál vía puede resolver su ejercicio. Cada clase se vincula con varios entrenadores, asignados aleatoriamente evitando obtener el mismo material para clasificaciones iguales. El entrenador servirá para que el estudiante interiorice los conceptos y definiciones de la teoría de Espacios Vectoriales implícitas en su problema. Los mismos estarán relacionados con uno de los cinco problemas de la Combinación Lineal. De esta forma el estudiante obtendrá una vía de solución a su ejercicio y así podrá resolverlo por diferentes caminos.

Implementación en la práctica (Pérez, Caballero, Docampo, Casas, & Yordi, 2012)

Desde el curso 2008-2009 se está implementando el SIAL en los cursos de Algebra Lineal en la Universidad de Camagüey, Cuba. A través de su uso se valoró si realmente el sistema es utilizado por los estudiantes como apoyo durante su estudio independiente y si ellos consideraban que el SIAL les brindaba la vía de solución de los problemas que debe resolver. En todos los cursos se aplicó una encuesta dirigida a conocer las opiniones de los estudiantes y los resultados fueron favorables.

Una vez que se adquiere el sistema puede ser duplicado lo cual reduce sus costos. Al poder obtener información de una base de conocimiento puede realizar cálculos y derivar soluciones mucho más rápido que cualquier experto humano. El sistema puede simular el rol de un profesor de Álgebra Lineal lo cual lo convierte en un apoyo académico muy valioso para los estudiantes de los cursos semipresenciales. El sistema contribuirá en gran medida a crear habilidades en los estudiantes y consolidar conocimientos durante el estudio independiente. Además permitirá a los profesores conocer y tratar las dificultades de sus estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje para así crear mecanismos que tributen a elevar la calidad del proceso.

El impacto científico del resultado se evidencia en la obtención del Premio Territorial de la Academia de Ciencias de Cuba (2010) y el premio del Rector al resultado, ya aplicado, de mayor impacto al desarrollo social (2011). Actualmente se desarrollan SIAL para los temas de Diagonalización y Aplicaciones Lineales.

Referencias bibliográficas

Caballero, Y., Pérez, O., Docampo, L., Casas, L., Yordi, I., Coello, y otros. (2011). Sistema Experto para el Algebra Lineal. *XII Congreso de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación (COMPUMAT2011)*, (págs. 25-37). Villa Clara, Cuba.

Caballero, Y. (2010). La Teoría de los Conjuntos Aproximados para el Descubrimiento de Conocimiento. *Revista DYNA , 77* (162), 261-270.

Pérez, O., Caballero, Y., Docampo, L., Casas, L., Yordi, I., Coello, y otros. (2012). Valoración del impacto de la implementación del SIAL. *Informe de Ciencia y Técnica*, (pp. 5-21). Vicerrectoría de Investigaciones, Universidad de Camagüey, Cuba.

Yordi, I. (2004). *Metodología para formar en los estudiantes de Ingeniería Eléctrica la habilidad de calcular en Álgebra Lineal con sentido amplio.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Camagüey, Departamento de Matemática, Camagüey, Cuba.

HISTÓRIA(S), NARRATIVA(S), EXPERIÊNCIA(S): CONSTITUINDO PESQUISADORES EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Marcelo Bezerra de Morais, Jean Sebastian Toillier e Ivete Maria Baraldi
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP Brasil
morais.mbm@gmail.com; jean3000@yahoo.com.br; ivete.baraldi@fc.unesp.br

Resumo. Neste trabalho, pretendemos discutir as experiências adquiridas no desenvolvimento de dois projetos que usam a História Oral como metodologia de pesquisa em Educação Matemática e como essas experiências colaboram com a formação dos pesquisadores. Estes projetos são desenvolvidos em duas regiões distintas do Brasil, Nordeste e Sul. Num deles visa-se compreender e construir uma versão histórica de como se deu a formação de professores de Matemática na região de Mossoró (RN), num período anterior a 1974; noutro, espera-se entender como se deu a formação de professores de matemática na região de Itaipulândia (PR), no período de 1961 ao final da década de 1990.

Palavras chave: história oral, formação de professores, experiência

Abstract. In this work, we intend to discuss the experiences gained in the development of two projects that use Oral History as a research methodology in Mathematics Education and how these experiences cooperate with the training of researchers. These projects are developed in two distinct regions of Brazil, Northeast and South. In one seeks to understand and build a historical version of how was the training of mathematics teachers in the region of Mossoró (RN), a period prior to 1974; in another, it is expected to understand how was the training of mathematics teachers in the region of Itaipulândia (PR) in the period from 1961 to the late 1990s.

Key words: oral history, teacher formation, experience

Desejo de introdução

> A experiência é o que nos passa, que nos acontece, que nos toca. Não o que se passa, não o que acontece, ou o que toca. [...] é aquilo que "nos passa", ou que nos toca, ou que nos acontece, e ao nos passar nos forma e nos transforma. Somente o sujeito da experiência está, portanto, aberto à sua própria transformação (Larrosa, 2002, p. 21 e 26)

Como afirma Larrosa, neste artigo, a experiência não é informação, é aquilo que nos atravessa, formando ou transformando. Nas pesquisas desenvolvidas pelo GHOEM (Grupo "História Oral e Educação Matemática"), grupo ao qual estamos vinculados, que fazem uso da História Oral como metodologia de pesquisa são trabalhadas as experiências vividas e ressignificadas daqueles que podem nos narrar histórias. Entretanto, "[...] o que analisamos não é, propriamente, a experiência do outro, mas o relato dessa experiência" (Fernandes, 2011, p.17), pois, como afirma Larrosa, a experiência do outro não pode ser, por nós, apreendida, a menos que, de alguma forma, a revivêssemos e tornássemos própria.

Contudo, ao vivermos a possibilidade de desenvolver estas pesquisas, estamos (quando o que vivemos nos toca, nos passa, ou nos acontece), vivendo nossas próprias experiências ou os saberes da experiência. Muitas vezes, as próprias narrativas de nossos colaboradores nos atravessam, possibilitando adquirir novas experiências ressignificando aquelas experiências já ressignificadas, talvez, até, de outras experiências, e suas ressignificações.

Neste trabalho, pretendemos mostrar as experiências de desenvolvimento de dois projetos que usam a História Oral como metodologia de pesquisa em Educação Matemática e como essas experiências colaboram com a formação dos pesquisadores de regiões bastante distintas do Brasil.

A (não) Experiência – um referencial teórico

Para Larrosa, todos os dias muitas coisas passam, mas não nos passam, o que torna cada vez mais rara a experiência. Para o autor, o excesso de *informação* contribui para essa falta de aquisição da experiência, na verdade, "a informação não deixa lugar para a experiência, ela é quase o contrário da experiência, quase uma antiexperiência" (Larrosa, 2002, p. 21). Hoje, a busca pela informação, como se ter muita informação fosse sinônimo de ter muito conhecimento ou de ser aprendiz, o que não é, parece ser o mais importante, o que faz com que quase nada nos aconteça.

Outro fato que contribui para a não aquisição de experiências, segundo Larrosa, é o excesso de *opiniões*. "O sujeito moderno é um sujeito informado que, além disso, opina. É alguém que tem uma opinião supostamente pessoal e supostamente própria e, às vezes, supostamente crítica sobre tudo o que se passa, sobre tudo aquilo de que tem informação"(*Ibidem*, p. 22). Entretanto, esse desejo, essa fixação, de sempre opinar, também favorece para que nada nos atravesse, nada se torne experiência.

Outros dois inimigos da experiência para Jorge Larrosa são a falta de tempo e excesso de trabalho.

O *tempo* parece estar cada vez mais curto e, cada vez mais, estamos repletos de trabalhos para realizarmos. "O presente é rápido e, em sua rapidez, mostra-se como uma extensão do passado – não há mais passado: há um passado presentificado, pois também ele tornou-se presente, e esvai-se com a mesma rapidez – e engole o futuro" (Garnica, Fernandes e Silva, 2011, p. 222). Está tudo exacerbadamente rápido: a comunicação, os meios de transporte, etc. e estamos todo dia mais apressados e cada vez apressando mais o que fazemos. A vida está rápida. "Tudo o que se passa, passa demasiadamente depressa, cada vez mais depressa. E com isso se reduz o estímulo fugaz e instantâneo, imediatamente substituído por outro estímulo ou por outra excitação igualmente fugaz e efêmera" (Larrosa, 2002, p. 23), e com o tempo cada vez mais curto, quando paramos para poder refletir sobre as ações, como algo vai nos atravessar para poder se tornar experiência?

E o *trabalho*? O autor corrige outra confusão usual na sociedade em que vivemos, que é acreditar que excesso de trabalho é sinônimo de experiência. Quantas vezes não ouvimos falar que só se adquire experiência em determinada coisa, se já fez, ou já trabalhou com aquilo? De que aprendemos a teoria na academia e no trabalho adquirimos a experiência? Para Larrosa (2002, p. 24), "não é somente porque a experiência não tem nada a ver com o trabalho, mas, ainda mais fortemente, que o trabalho, essa modalidade de relação com as pessoas, com as palavras e com as coisas que chamamos trabalho, é também inimiga mortal da experiência". Para o autor, somos seres pretensiosos, e o trabalho, essa ação, é derivado disso, dessa vontade de tudo saber fazer, de tudo poder fazer, de sempre querer fazer algo novo, diferente, se não agora, algum dia. Deixando-nos cada vez mais ocupados para que nada nos passe.

> Nós somos sujeitos ultrainformados, transbordantes de opiniões e superestimulados, mas também sujeitos cheios de vontade e hiperativos. E por isso, porque sempre estamos querendo o que não é, porque estamos sempre em atividade, porque estamos sempre mobilizados, não podemos parar. E, por não podermos parar, nada nos acontece. (Larrosa, 2002, p. 24)

E é toda essa agitação, de que nos fala Larrosa, esse excesso de informações, opiniões e trabalho que tornam a experiência cada vez mais difícil de ser conquistada. É necessário fazer algo pouco provável de se fazer na sociedade que vivemos, realizar ações que se tornam cada dia mais difíceis, interromper este turbilhonar de coisas e

> [...] parar para pensar, parar para olhar, parar para escutar, pensar mais devagar, olhar mais devagar, e escutar mais devagar; parar para sentir, sentir mais devagar, demorar-se nos detalhes, suspender a opinião, suspender o juízo, suspender a vontade, suspender o automatismo da ação, cultivar a atenção e a delicadeza, abrir os olhos e os ouvidos, falar sobre o que nos acontece, aprender a lentidão, escutar aos outros, cultivar a arte do encontro, calar muito, ter paciência e dar-se tempo e espaço. (Larrosa, 2012, p. 24)

Esse é o segredo para que tudo nos toque, nos atravesse, nos passe, formando e transformando. Só assim a experiência poderá se tornar em nós.

A experiência de um grupo ou um grupo de experiência? – Aspectos metodológicos

O Grupo História Oral e Educação Matemática (GHOEM) já desenvolveu, ao longo dos dez últimos anos, inúmeros trabalhos, embora caiba ressaltar que o grupo não só trabalha com História, ou só com História Oral, tampouco, só com Educação Matemática. Em boa parte dos trabalhos desenvolvidos por este grupo, foi utilizada a História Oral como metodologia de pesquisa, sendo ainda hoje, como toda metodologia, algo que está em constituição no grupo.

Embora saibamos que metodologia não é apenas um aglomerado de passos, ou técnicas, mas, nos foi possível, ao longo desse tempo, constituir alguns procedimentos que consideramos plausíveis para a realização de trabalhos com essa metodologia de pesquisa como, por exemplo, a realização das entrevistas, transcrição, textualização, retorno do material produzido na entrevista aos nossos colaboradores, assinatura de carta de cessão e análise – vale ressaltar que esses são apenas alguns dos procedimentos (Garnica, Fernandes e Silva, 2011). Essa metodologia, bem como esses procedimentos que citamos, nos permite, e exige, refletir sobre nossas as ações durante as pesquisas e temas objetos de estudo.

Por exemplo, durante a entrevista, o entrevistador deve saber ouvir, estar atento ao que é dito, ao que está estudando, bem como ao modo com trata o colaborador da pesquisa; durante o processo de transcrição – onde se dá a passagem do que foi gravado durante a entrevista para a forma escrita – é exigido do pesquisador grande atenção para todos os detalhes do áudio, todos os detalhes falados, para que tente conservar, o máximo possível, do clima e os atos que aconteceram durante a entrevista; durante a textualização – procedimento que utilizamos para chegar ao texto que pretendemos utilizar para apresentar no trabalho, ao final de nossas pesquisas – exige do pesquisador o mesmo trato dado durante a transcrição: atenção ao que é dito, cuidado com as alterações que fizer, tentar imprimir no texto as características sensoriais da entrevista, etc.

Esse processo de voltar, estar atento, parar, refletir, ouvir, questionar quando adequado, analisar, pensar, buscar em outras fontes, entre tantas outras ações que são necessárias no desenvolvimento das pesquisas do grupo, nos remetem refletir se estamos sendo capazes de produzir experiência nos nossos pesquisadores, ou futuros pesquisadores. Se pensarmos segundo as concepções de Larrosa sobre experiência, que corroboramos, talvez sim.

Decidimos então discutir as potencialidades da História Oral como colaboradora para a aquisição de experiências, para a constituição de pesquisadores em Educação Matemática, as possíveis experiências adquiridas a partir de dois projetos que estão em desenvolvimento. Estes projetos estão inseridos em um projeto maior do GHOEM que visa realizar um mapeamento sobre a formação de professores, nas distintas regiões que compõem o Brasil. Em específico, eles estão sendo desenvolvidos em regiões distintas do País: Nordeste e Sul, e visam, respectivamente: compreender e construir uma versão histórica de como se deu a formação de professores de Matemática na região de Mossoró (região localizada no interior do Estado do Rio Grande do Norte, a 277 Km da capital Natal), no período anterior ao ano de 1974, data que marca a criação do mais antigo curso de formação de professores; e descrever a formação dos professores de Matemática que atuaram na região do Município de Itaipulândia, Paraná, no período de 1961(quando a região começou a ser povoada) ao final da década de 1990 (anos após a formação do Lago de Itaipu que acarretou a inundação de parte do território do município). (Morais, 2012; Toillier, 2013).

Relatando as possíveis experiências... – Considerações

Para desenvolver a pesquisa na região de Mossoró (RN), o pesquisador seguiu alguns passos dos descritos acima: elaborou inicialmente o objetivo de estudo – já apresentado – e buscou seus colaboradores de pesquisa. Decidiu procurar por professores que tivessem começado a lecionar na região antes do ano 1974 e por intermédio da Internet conseguiu nome de seis possíveis colaboradores.

Em um segundo momento, foi possível para o pesquisador buscar acervos e outras informações sobre esses, ou outros, professores. O pesquisador foi a quatro antigas instituições de ensino de Mossoró, nem todas possuíam arquivos, mas, em algumas, foi possível ter acesso aos poucos Livros de: Atas, Correspondências, Recortes de Diário Oficial (jornal) falando sobre a Escola Normal de Mossoró, Registro de Posse, Pontos, Registro de Títulos; entre outros documentos. Assim, encontrou nomes de outros possíveis colaboradores.

De posse de alguns nomes, com o rascunho de um perfil dos professores com quem gostaria de conversar, foi à busca de alguns deles. E após algumas idas e vindas, aceites e recusas, entrevistou: Felisbela Freitas de Oliveira, Joabel Azevedo Dantas, Maria das Graças Bezerra Satler, José Arimatéia de Souza, Alcir Leopoldo Dias da Silveira, Luiz Carlos Avelino da Trindade, Raimundo de Freitas Melo, Francisco de Assis Silva (Chiquito) e um professor que não nos concedeu o direito de utilização de sua entrevista.

Cumpre lembrar que os nomes de alguns colaboradores surgiram após as entrevistas com os primeiros professores entrevistados. Dessa maneira, se aproximou destes professores pelo *critério de rede*, processo em que convidados a participar da pesquisa indicam outros (Garnica, Fernandes e Silva, 2011).

Antes, ainda, do processo de contato com os colaboradores, decidiu-se pela utilização não de um roteiro de entrevista, mas de Fichas Temáticas para a realização da pesquisa. Essa escolha foi baseada nos trabalhos de Rolkouski (2006) e Vianna (2000). No entanto, de maneira diferente destas, utilizou as fichas em uma sequência dada, por julgar que os colaboradores poderiam ter menos dificuldade em continuar um raciocínio, contribuindo para que o rememorar transcorresse de maneira mais fluída. Foram usadas vinte e sete fichas: *Apresentação pessoal; Família; Infância; Juventude; Cotidiano da cidade em que cresceu; Cidade e* *educação; Costumes; Política; Escola e rotina escolar; Disciplinas marcantes; Professores marcantes e suas aulas; Sistemas de ensino; Dificuldades nos estudos; Dificuldades em realizar os estudos; Mudanças na educação durante os estudos; Primeiros contatos com o ensino; Ingresso no magistério; Formação; Escolas e cotidiano durante o exercício do magistério; Dificuldades no exercício do magistério; Mudanças durante o Magistério; Mudanças na formação de professores de Matemática; Mossoró no início do magistério; Magistério em Mossoró; Mossoró no contexto atual; Ensino de Matemática hoje; Considerações.*

Com as fichas e o gravador, o pesquisador realizou todas as entrevistas onde os colaboradores se sentiram mais a vontade. Após a realização de todas as entrevistas, iniciou o processo de transcrição. O pesquisador descobriu que esse processo poderia ser o passo mais difícil de toda a pesquisa, por ser um processo literal, rigoroso, isolado e, muitas vezes, cansativo... Concomitante a este processo, foram realizadas as textualizações e, ao terminar essa fase, todo o material elaborado retornou aos entrevistados para que, após a leitura e correção, pudessem legitimá-lo e ceder os direitos de uso.

Ao mesmo tempo, outro pesquisador iniciou sua pesquisa em Itaipulândia (PR), trilhando passos semelhantes para a sua elaboração e execução. Com a delimitação do tema, três possíveis entrevistados foram contatados, pois o pesquisador já os conhecia por ter sido aluno e colega de trabalho deles. Nesse caso, tratavam-se dos professores José Heckler Griebeler, Cecília Antônia Folador Moretto e Nelson Domingues.

Em contato com o professor José, mais uma vez o critério de rede apareceu, ao serem indicados os professores Guido Miranda e Antônio Derseu Cândido de Paula, os únicos que não residiam no município de Itaipulândia na atualidade. Por meio da consulta de documentos do Colégio Estadual Tiradentes, de São José do Itavó, distrito de Itaipulândia, foi possível encontrar o nome de mais dois professores: Oneide Martins Patrício e Lotário Otto Knob. Além disso, a pesquisa em outras instituições como na Casa da Memória, no Colégio Estadual Costa e Silva e na Secretaria de Educação, todos de Itaipulândia, na Documentação Escolar e Secretaria Municipal de Educação, ambos São Miguel do Iguaçu (município vizinho do qual Itaipulândia se emancipou em 1993), e nas entrevistas realizadas com as pessoas já citadas, fez com que surgisse o nome de João Kazmirczak, ex-professor e ex-diretor de escolas de Itaipulândia, como um dos depoentes-colaboradores.

Para a realização das entrevistas foi elaborado um roteiro que continha um pedido de apresentação do entrevistado e nove perguntas disparadoras das discussões que perpassavam desde a formação escolar e profissional do depoente, a condição de trabalho e das escolas à época, sua mudança e sua vida na região e se houve alguma influência da formação do Lago de

Itaipu para a educação do lugar, já que, antes de se tornar município, Itaipulândia foi afetada pela construção da Hidrelétrica de Itaipu, tendo mais de 54% de suas terras inundadas.

Diferente da pesquisa descrita anteriormente, o roteiro foi entregue para todos os depoentes-colaboradores antes da realização das entrevistas, assim como uma Carta de Apresentação, na qual era explicado todos os procedimentos da pesquisa e para qual finalidade a entrevista estava sendo gravada. Essa é outra possibilidade de trabalhar com a História Oral, contando com uma preparação prévia do entrevistado. Dessa forma, compreende-se que a História Oral é uma metodologia que não é engessada e com procedimentos únicos, mas que a partir de seus vários passos pode ser constituído um estudo diferenciado sobre o objeto da pesquisa.

Paralelamente à realização das entrevistas, houve a consulta aos acervos documentais de Itaipulândia e de outras cidades da região, pois ao realizar um trabalho com a História Oral como metodologia de pesquisa, dentro dos pressupostos do GHOEM, não é caracterizada uma operação historiográfica apenas a partir dos documentos compostos por meio da oralidade, omitindo outras fontes de pesquisa (Martins-Salandim, 2012). O que se acredita é que os depoimentos orais são disparadores para a compreensão das perguntas de pesquisa constituídas e que outras fontes de pesquisa, como os documentos oficiais e fotografias, possibilitam um aprofundamento das discussões, sendo fundamentais para a realização do trabalho.

Por Itaipulândia ter sua colonização recente, outra preocupação que se teve ao longo do processo de realização das entrevistas foi em conhecer aspectos relacionados à constituição histórica da região para que facilitasse a postura do entrevistador ao longo dos demais processos da pesquisa.

Semelhantemente, também efetuou a transcrição, textualização das entrevistas, bem como retornou os textos aos colaboradores para que esses pudessem conferir e ceder os direitos de uso. Ao fazerem a leitura, várias lacunas foram preenchidas pelos professores, constituindo-se como um momento enriquecedor para a pesquisa.

Mesmo com pesquisas em regiões distintas, as experiências dos pesquisadores nos permitem escrever esse texto no plural, pois são entrelaçadas pelas experiências de um e num grupo. Além disso, por meio dessas experiências em que eles se constituem pesquisadores, há um outro alguém se vivencia e experimenta o orientar. Mas isso seria uma outra história, uma outra narrativa, uma outra experiência.

Referências bibliográficas

Fernandes, D. N. (2011). *Sobre a formação do professor de Matemática no Maranhão: cartas para uma cartografia possível*. Tese de doutorado não publicada, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

Larrosa, J. (2002). Notas sobre a experiência e o saber da experiência. *Revista Brasileira de Educação, (19)*, 20-28.

Garnica, A. V. M., Fernandes, D. N. e Silva, H. (2011). Entre a amnésia e a vontade de nada esquecer: notas sobre regime de historicidade e história oral. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 25 (41)*, 213-250.

Martins-Salandim, M. E. (2012). *A Interiorização dos Cursos de Matemática no Estado de São Paulo: Um exame da década de 1960*. Tese doutorado não publicada, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

Morais, M. B. (2012). *Peças de uma história: formação de professores de matemática na Região de Mossoró (RN)*. Dissertação de mestrado não publicada. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

Rolkouski, E. (2006). *Vida de professores de matemática: (im)possibilidades de leitura*. Tese de doutorado não publicada, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

Toillier, J. S. (2013). A formação do professor (de Matemática) em terras paranaenses inundadas. Dissertação de mestrado não publicada. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

Vianna, C. R. (2000). *Vidas e circunstâncias na Educação Matemática*. Tese de doutorado não publicada, Universidade de São Paulo. Brasil.

ANÁLISE DO PERFIL DOS ALUNOS DE MATEMÁTICA DA UFTM E DE SUAS ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA

Ailton Paulo de Oliveira Júnior; Cristian Elias do Carmo
Universidade Federal do Triângulo Mineiro Brasil
drapoj@uol.com.br; cristianjubai@gmail.com

Resumo. O acesso ao ensino superior deve ser analisado como um imenso campo para reflexão, pois seu processo de seleção não se limita apenas no ingresso universitário. O jovem e sua família têm como um "divisor de águas" o fato de ingressar no ensino superior pelo fato de os pais esperarem sucesso de seus filhos ao iniciarem na vida acadêmica. Assim, o objetivo deste trabalho é estabelecer perfil dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM, bem como identificar as atitudes destes em relação à matemática que é o conteúdo fim deste curso obtidos através da aplicação de um questionário e apresentar os resultados destes alunos nos processos seletivos para a entrada no curso via processo seletivo. E a partir destes resultados desenvolver ações que atendam às demandas deste grupo de alunos que se preparam para futuramente entrarem no mercado de trabalho como professores de Matemática.

Palabras clave: : atitude, alunos, matemática, formação de professores

Abstract. The access to higher education should be analyzed like a huge field for reflection, because their selection process is not limited only to university entrance. The young man and his family have like a "watershed" the fact admission to higher education because parents expect their children to successfully engage in academic life. The objective of this study is to provide the profile of the students of Mathematics degree from the Federal University of Triângulo Mineiro - UFTM and to identify these attitudes toward mathematics that is the end of this course content obtained through the application of a questionnaire and present the results of students in selection processes for entry to the course through the selection process. And from these results developing actions that meet the demands of this group of students preparing to entering the market in future work as mathematics teachers.

Key words: : attitude, students, mathematics, teacher education

Introdução

Em nossa sociedade o processo seletivo para acesso ao ensino superior ainda tem um papel de grande importância no processo da educação uma vez que é visto como parâmetro para as instituições particulares e públicas, possibilitando maiores chances de inserção no mercado de trabalho. Este processo deve ser analisado como um imenso campo para reflexão, pois a seleção não se limita apenas no ingresso universitário. Abrange toda a fase preparatória: escolha de escolas, cursinhos, escolha de carreira e ainda está presente no ensino superior por meio da evasão. O jovem e sua família têm como um "divisor de águas" o fato de ingressar no ensino superior.

Sendo assim, seria plausível que os critérios utilizados pelas universidades para selecionar os alunos deveria servir de base para informar adequadamente sobre os candidatos que devem ou não ser escolhidos.

Em virtude da realidade acadêmica brasileira a presença de especialistas torna-se indispensável para a coleta das informações e análise dos dados, uma vez que as provas exercem um importante papel para se selecionar os candidatos ingressantes no ensino superior. É de se considerar que mesmo que as provas estejam de acordo com o perfil de aluno desejado fatores como as características culturais e educacionais manifestas nas suas preferências, o que torna determinada escola menos válida à seleção.

Portanto, ao avaliar os resultados da seleção, é importante considerar que cada curso universitário apresenta um conjunto específico de disciplinas, que podem ser comuns a alguns cursos dentro de uma mesma área de ensino, mas que divergem, em geral, dos cursos de outras áreas.

O acesso às atitudes relativas à Matemática é uma pequena parcela de uma grande tarefa que é a de ensinar e propiciar modificações nas atitudes dos alunos, buscando melhorar o autoconceito e o desempenho dos mesmos (Utsumi, 2000, p. 32).

Segundo Gomez Chacón (2003) atitude é uma predisposição avaliativa (positiva ou negativa) que determina as intenções pessoais e influi no comportamento. Faria (2006) analisou trabalhos já realizados no Brasil, e em outros países, no que se refere às atitudes em relação à Matemática e concluiu que existem pontos em comum entre os pesquisadores no que se refere às atitudes em relação à Matemática. Segundo o autor as atitudes negativas surgem por influência de diversos fatores como, por exemplo: ensino deficiente; uso inadequado de metodologias; rejeição à Matemática por parte de mestres, alunos, pais, dentre outros.

Gairin (1987) diz que a preocupação pelo estudo das atitudes aumenta na medida em que comprovamos a insuficiência das propostas tradicionais para alcançar os objetivos educativos que uma sociedade cada vez mais exigente se propõe. Gonçalves (2000) enfatiza que o trabalho do professor necessita ser voltado para o desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à escola e às disciplinas, aumentando a probabilidade de que seus alunos desenvolvam atitudes mais positivas em relação às mesmas.

Assim, o objetivo deste trabalho é estabelecer perfil dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFTM, apresentar os resultados destes alunos nos processos seletivos para a entrada no curso e identificar as atitudes destes em relação à matemática que é o conteúdo fim deste curso.

Metodologia

Os sujeitos da pesquisa são alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFTM. O grupamento de variáveis que serão utilizadas para as análises são: 1) Resultados obtidos no processo seletivo para o ensino superior da UFTM 1-2009 a 2-2011 obtidos junto à Comissão Permanente de Concursos Discentes - COPEC da UFTM e 2) Variáveis sócio-econômico-educacionais obtidas através da aplicação de questionário junto aos alunos para a criação de um perfil bem completo dos respectivos alunos e a determinação da atitude destes alunos em relação à matemática.

Em relação à avaliação da escala de atitudes em relação á Matemática, cada uma das proposições positivas da escala de atitudes recebeu pontuação distribuída da seguinte forma: concordo totalmente = 5 pontos; concordo parcialmente = 4 pontos; indiferente = 3 pontos; discordo parcialmente = 2 pontos e; discordo totalmente = 1 ponto. Para as negativas a pontuação foi: discordo totalmente = 5 pontos; discordo parcialmente = 4 pontos; indiferente = 3 pontos; concordo parcialmente = 2 pontos; concordo totalmente = 1 ponto. A soma das pontuações nas 21 proposições da escala de atitudes pode variar de 21 (vinte e um) a 105 (cento e cinco), indo de atitudes extremamente negativas a atitudes extremamente positivas em relação à Matemática. Nesse tipo de instrumento, nenhuma proposição é considerada certa ou errada, pois apenas refletem as expressões dos sujeitos quanto ao sentimento que experimentam frente a cada um dos enunciados.

O trabalho utilizou tratamento estatístico que consistiu numa análise descritiva dos resultados (notas ou escores) obtidos pelos alunos no Concurso Vestibular, bem como as variáveis citadas. Também foi feita uma análise do instrumento de validação – Concurso Vestibular segundo critérios como confiabilidade através do cálculo do Alfa de Cronbach.

Para a elaboração do relatório técnico serão utilizados programas computacionais como o MSOffice Excel e alguns softwares específicos como o WinSTAT Statistics 3.16 for Windows. E para a verificação dos métodos estatísticos empregados são recomendadas leituras de fácil compreensão como Freund e Simon (2000).

Resultados

Exibe-se nas tabelas a seguir o perfil sócio, demográfico, econômico e educacional, dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFTM. Além disso, são apresentados os resultados obtidos por estes no concurso vestibular em que os qualificou para a entrada no curso. Ao final é apresentada a análise das atitudes destes mesmos alunos em relação à matemática.

Na tabela 1 são apresentadas informações referentes aos concursos vestibulares para Licenciatura em Matemática da UFTM, bem como o número e percentual de alunos evadidos, tomando como base as entradas em cada um dos concursos de 2009 a 2011.

Informações	1º 2009		2º 2009		1º 2010		2º 2010		1º 2011		2º 2011	
	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%
Inscritos	59	-	71	-	43	-	76	-	52	-	144	-
Vagas	30	-	30	-	30	-	30	-	30	-	30	-
Candidato/Vaga	1,96	-	2,36	-	1,43	-	2,53	-	1,73	-	4,80	-
Entrada Vestibular	30	-	25	-	30	-	16	-	29	-	24	-
Evadidos	11	36,67	5	20,00	10	33,33	4	25,00	7	24,14	13	54,17

Tabela 1 – Informações concursos vestibulares - 1º - 2009 a 2º - 2011, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro.

Dos dados apresentados nesta tabela, o que chama mais a atenção é o percentual de alunos que fizeram o segundo concurso vestibular de 2011 que desistiram do curso (54,17%), e isto depois de cursado apenas um semestre letivo o que pode ser causado pelo despreparo dos alunos que são aprovados para o curso de matemática sem realmente terem os pré-requisitos básicos para cursá-lo.

Os dados apresentados na tabela 2 são referentes à segunda fase do processo seletivo de acesso ao curso de Licenciatura em Matemática aplicada aos candidatos aprovados na primeira fase, sendo constituída de Prova de Conhecimentos Específicos (Física e Química – 6 questões e Matemática – 8 questões) e Redação, com as questões dissertativas das disciplinas específicas de cada curso, valendo 80 (oitenta) pontos e de uma Redação, valendo 20 (vinte) pontos.

Fazendo uma avaliação de cada turma (entrada no curso pelos respectivos concursos vestibulares: 1-2009 a 2-2011) destacam-se que as médias das notas nas provas de conteúdos específicos de todas as turmas formadas pela entrada são bastante heterogêneas, ou seja, ao calcular a razão entre o desvio padrão e a média, determina-se o coeficiente de variação (CV), medida relativa, determina-se o quanto estão dispersos os dados em relação à média obtida, pois para todas estas provas os desvios relativamente à média atingem, em média, mais de 100% do valor desta.

A única prova que não apresenta resultados heterogêneos é a prova de Redação e que também á a que menos contribui para o resultado final da segunda fase, já que se refere a 20 pontos num total de 100 pontos possíveis.

Um aspecto importante que se destaca é o número de alunos aprovados para o curso de matemática da UFTM em todos os concursos vestibulares (1-2009 a 2-2011) que tiveram nota zero em pelo menos umas dos conteúdos específicos constantes na seleção, ou seja, Matemática, Física ou Química.

Além destes aspectos, observam-se diversos dados que ajudam a formar o perfil do aluno do curso de Licenciatura em Matemática que ingressa na referida universidade. Há uma ligeira maioria de alunos do sexo feminino, com média de idade de 23,73, ou seja, ingressou na universidade, um tempo razoável após a conclusão do ensino médio, que é feita geralmente entre 17 e 19 anos, indicando que, em média, não entraram para o curso logo que terminaram o Ensino Médio. Pode-se também observar que a grande maioria dos entrevistados é solteira, mais de 79%.

Provas	**Estatísticas**					
Vestibular 1/2009	N	Média	Desvio	Min - Máx	Mediana	IC95%
Física	13	4,46	4,70	0 - 15	3,00	±2,84108
Matemática	13	4,38	5,55	0 - 18	2,00	±3,47623
Química	13	4,31	3,40	0 - 10	5,00	±2,05503
Redação	13	11,08	0,18	8 - 15	11,00	±1,22019
Segunda Fase	13	24,23	12,34	11 - 52	22,00	±7,45517
Classificação Final	13	88,32	34,00	53,26 – 163,30	76,56	±20,5454
Vestibular 2/2009	N	Média	Desvio	Min - Máx	Mediana	IC95%
Física	18	3,44	4,59	0 - 18	2,50	±2,17969
Matemática	18	9,33	8,91	0 - 31	6,00	±4,29992
Química	18	2,77	3,04	0 - 9	2,50	±1,42422
Redação	18	12,22	1,80	10 - 16	12,00	±0,84374
Segunda Fase	18	29,45	16,31	14 - 66	24,75	±7,75267
Classificação Final	18	101,31	40,98	54,41 – 208,83	92,91	±19,5282
Vestibular 1/2010	N	Média	Desvio	Min - Máx	Mediana	IC95%
Física	20	1,60	4,64	0 - 21	0,00	±2,17622
Matemática	20	1,95	2,92	0 - 12	1,00	±1,37061
Química	20	1,85	4,69	0 - 21	0,00	±2,19665
Redação	20	10,3	2,00	07 - 14	10,00	±0,93727
Segunda Fase	20	16,15	16,15	07 - 66	13,60	±5,72066
Classificação Final	20	66,12	66,12	33,77 – 200,61	59,56	±15,6014
Vestibular 2/2010	N	Média	Desvio	Min - Máx	Mediana	IC95%
Física	12	1,58	1,88	0 - 6	1,50	±1,19509
Matemática	12	2,25	3,59	0 - 12	0,50	±2,28486
Química	12	1,41	1,44	0 - 5	1,50	±0,91708
Redação	12	10,75	1,05	09 - 13	11,00	±0,67050
Segunda Fase	12	16,44	6,03	11 - 34	15,20	±3,83696
Classificação Final	12	63,98	15,03	48,74 – 106,37	60,39	±9,55000
Vestibular 1/2011	N	Média	Desvio	Min - Máx	Mediana	IC95%
Física	26	1,19	1,67	0 - 6	0,00	±0,67606
Matemática	26	2,65	4,60	0 - 19	0,00	±1,85955
Química	26	0,65	1,49	0 - 6	0,00	±0,60389
Redação	26	11,92	2,05	8 - 16	12,00	±0,83110
Segunda Fase	26	16,78	7,92	8,80 – 42,00	14,00	±3,20132
Classificação Final	26	71,87	20,41	53,40 – 135,16	64,23	±8,24476
Vestibular 2/2011	N	Média	Desvio	Min - Máx	Mediana	IC95%
Física	22	2,27	3,78	0 - 12	0,00	±1,67682
Matemática	22	4,95	7,21	0 - 22	1,00	±3,19863
Química	22	2,50	3,21	0 - 11	1,00	±1,42690
Redação	22	12,08	2,32	7,50 – 17,50	12,08	±1,03092
Segunda Fase	22	22,00	12,91	10,00 – 52,50	15,66	±5,72445
Classificação Final	22	85,16	38,62	46,30 – 175,93	65,94	±17,1237

Tabela 2 – Medidas descritivas das notas padronizadas da segunda fase dos candidatos ao curso de Licenciatura em Matemática nos Concursos Vestibulares, 1/2009 a 2/2011, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Um fator fundamental que reflete diretamente no acesso ao ensino superior é a renda familiar. Observa-se que a maior parte está concentrada entre um e quatro salários mínimos, mais de 77%. Assim, pode-se relacionar a quantidade de alunos que trabalham, 60%, seja para ajudar na renda da família ou para sustentar a sua própria casa.

Relacionando os resultados da variável "renda familiar" àqueles constantes da tabela 1 que se referem às entradas no curso e evasão dos alunos, observa-se que o vestibular é bem pouco concorrido, o que leva a estes alunos que não tem uma renda familiar alta e, portanto precisam trabalhar a ter escolhido o curso em questão.

Um fator que pode ser um preditor de um bom rendimento acadêmico é a quantidade de horas dedicada aos estudos. Assim, observa-se que 35,06% dos alunos dedicam mais de oito horas semanais aos estudos. Sabe-se que o curso de matemática que está na área das exatas exige aplicação dos alunos na preparação para o curso.

A crescente evolução tecnológica é observada no fato de mais de 94% dos alunos possuírem computador com acesso à internet em casa. Quando inquiridos sobre a finalidade de tal uso, o que mais se destaca é que 21,4% dos alunos de matemática da UFTM a utilizam para preparação de trabalhos em relação aos seus estudos.

O fato de o curso ser noturno é possivelmente o fator que propicia que mais de 59% dos alunos trabalharem. Em relação à função exercida destaca-se a de professor com quase 30% do total de alunos. Logo se percebe que mesmo antes de se formar os alunos já praticam a docência como profissão. A Tabela 3 apresenta a distribuição das respostas dos sujeitos para cada um dos itens da escala, os quais nos mostram que os resultados médios de todas as proposições tendem mais para resultados positivos que negativos.

Para classificar as atitudes dos alunos em positivas ou negativas, utilizou-se a média geral como ponto de corte, ou seja, considerou-se que os alunos que apresentaram pontuação acima da média (52,5 pontos) como tendo atitudes positivas e aqueles que apresentaram pontuação abaixo da média, atitudes negativas. Como a média da atitude deste grupo foi de 73,68 pontos com um desvio padrão de 20,33 pontos e valores mínimo de 23,00 e máximo de 105,00 pontos, indica que a atitude em relação à Matemática desse grupo de sujeitos é positiva.

Ainda na Tabela 3 pode-se observar que a proposição que apresentou resultados menos positivo foi a de número 10: *Eu fico mais feliz na aula de Matemática do que na aula de qualquer outra matéria.* Sendo assim, como a aula de Matemática não é considerada, pela maioria, aquela em que eles se sentem mais felizes, é um indicativo para que os professores desta disciplina façam encaminhamentos para torná-la mais prazerosa.

Por outro lado, as proposições que apresentaram resultados mais positivos foram as de número 13*: Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazer essa matéria,* e a de número 8: *Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas.* Isso significa que esses alunos do 6° ano gostam da disciplina e a consideram interessante. Assim, embora as aulas de Matemática não sejam aquelas em que os alunos ficam mais felizes, eles gostam tanto da disciplina, quanto das aulas, não se assustando em ter que cursá-la e ainda a consideram interessante.

Segundo Field (2009) um valor do α de Cronbach é aceitável se estiver no intervalo de 0,7 a 0,8 e valores substancialmente mais baixos indicam uma escala não confiável. Kline (1999) registra que o valor do α de Cronbach igual a 0,8 é apropriado para testes cognitivos como o teste de inteligência, sendo que para testes de habilidade um ponto de corte de 0,7 é mais adequado. Ele também afirma que quando se tratar de construtos psicológicos, valores abaixo de 0,7 podem ser esperados, por causa da diversidade dos construtos que estão sendo medidos.

Nº da Proposição	Proposições	Natureza da Proposição*	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
1.	"Dá um branco na minha cabeça" e não consigo pensar claramente quando estudo Matemática.	N	2 2,60%	9 11,69%	15 19,48%	20 25,97%	31 40,26%
2.	A Matemática é algo que eu aprecio grandemente.	P	58 75,32%	15 19,48%	2 2,60%	2 2,60%	- 0,00%
3.	A Matemática é fascinante e, ao mesmo tempo, divertida.	P	39 50,65%	28 36,37%	7 9,09%	1 1,30%	2 2,60%
4.	A Matemática é uma das matérias que eu realmente gosto de estudar.	P	59 76,62%	12 15,58%	3 3,90%	2 2,60%	1 1,30%
5.	A Matemática me deixa inquieto (a), descontente e impaciente.	N	2 2,60%	6 7,79%	4 5,19%	26 33,77%	39 50,65%
6.	A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido (a) em uma selva de números e sem encontrar saída.	N	1 1,30%	5 6,49%	5 6,49%	13 16,88%	53 66,83%
7.	A Matemática me faz sentir seguro (a) e é estimulante.	P	28 36,37%	29 37,66%	12 15,58%	8 10,39%	- 0,00%
8.	Eu acho Matemática muito interessante e gosto das aulas.	P	42 54,55%	28 36,37%	2 2,60%	4 5,19%	1 1,30%
9.	Eu ficava sempre sob uma terrível tensão nas aulas de Matemática.	N	6 7,79%	4 5,19%	5 6,49%	13 16,88%	49 63,64%
10.	Eu fico mais feliz na aula de Matemática do que na aula de qualquer outra matéria.	P	44 57,14%	19 24,68%	7 9,09%	4 5,19%	3 3,90%
11.	Eu gosto realmente de Matemática.	P	61 79,22%	12 15,58%	3 3,90%	- 0,00%	1 1,30%
12.	Eu me sinto tranqüilo (a) em Matemática e gosto muito dessa matéria.	P	42 54,55%	28 36,37%	6 7,79%	1 1,30%	- 0,00%
13.	Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazê-la.	N	- 0,00%	1 1,30%	6 7,79%	3 3,90%	67 87,01%
14.	Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que me deu mais medo.	N	1 1,30%	1 1,30%	1 1,30%	3 3,90%	71 92,21%
15.	Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.	N	2 2,60%	6 7,79%	6 7,79%	10 12,99%	53 66,83%
16.	Eu tenho uma reação definitivamente positiva em relação à Matemática: Eu gosto e aprecio essa matéria.	P	54 70,13%	19 24,68%	4 5,19%	- 0,00%	- 0,00%
17.	Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz de utilizá-la.	N	3 3,90%	6 7,79%	8 10,39%	10 12,99%	50 64,94%
18.	O sentimento em relação à Matemática é bom.	P	59 76,62%	15 19,48%	2 2,60%	- 0,00%	1 1,30%
19.	Pensar sobre a obrigação de resolver um problema matemático me deixa nervoso (a).	N	6 7,79%	14 18,18%	7 9,09%	17 22,08%	33 42,86%
20.	Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.	N	- 0,00%	- 0,00%	9 11,69%	5 6,49%	63 81,82%
21.	Não tenho um bom desempenho em Matemática.	N	5 6,49%	15 19,48%	10 12,99%	18 23,38%	29 37,66%

(*) P = Proposição de natureza positiva; N = proposição de natureza negativa.

Tabela 3 – Distribuição das respostas dos alunos e da natureza das proposições, para cada um dos itens da Escala de Atitudes em relação à Matemática.

Desta forma, observamos que o valor do α de Cronbach da escala em análise é igual a 0,8698, portanto, podemos concluir que há uma relação positiva dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFTM em relação à Matemática que é o elemento chave de sua formação.

Conclusão

Ao analisar os alunos que entraram no curso de matemática por acesso via vestibular, observa-se que em média a desistência das turmas foi de aproximadamente 32,22%. Observando cada turma separadamente temos que a turma que ingressou no Vestibular 2-2011 apresentou o maior índice de abandono, 54,17%. Na prova de conhecimentos específicos realizados pelos candidatos aprovados na segunda fase, constituída por questões discursivas de Matemática, Física e Química, além da Redação, vemos que os resultados de cada turma apresentam-se bastante heterogêneos e há ainda alunos aprovados que zeraram alguma das provas desta fase.

Por meio do questionário aplicado observa-se que a maioria dos alunos cursou o ensino fundamental e médio na rede pública na modalidade regular de ensino. Uma pequena parcela dos alunos realizou um curso pré-vestibular. Aproximadamente 20% dos pais e mães dos alunos cursaram a educação superior. Mais de um terço dos alunos dedica mais do que 8 horas semanais de estudo e faz uso dos recursos tecnológicos para este fim. Por se tratar de um curso noturno há a presença de alunos que trabalham, e destes destacamos que 30% têm a docência como profissão. Observamos que o valor do Alfa de Cronbach da escala em análise é igual a 0,8698, portanto, podemos concluir que há uma relação positiva dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFTM em relação à Matemática que é o elemento chave de sua formação.

Conclui-se ainda que o expressivo número de desistentes ao longo do curso encontrado em todas as turmas pode ser decorrente de uma diversidade de fatores como: a grade curricular oferecida; a dificuldade em cursar as disciplinas (reprovações); o interesse por outro curso; o trabalho como um obstáculo ao se impedir que ser dedique mais tempo aos estudos; entre outros.

Além disso, parte considerável dos alunos que trabalham já pratica a atividade docente e as atitudes do grupo em relação à Matemática são positivas, indicando que realmente este grupo de alunos está satisfeito com a escolha feita e se mostram empenhados em se tornarem profissionais também de qualidade.

Referências bibliográficas

Faria, P. C. (2006). *Atitudes em relação à matemática de professores e futuros professores*. Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Field, A. (2009). *Descobrindo a estatística usando o SPSS.* 2 ed. Porto Alegre: Artmed.

Freund, J. E., e Simon, G. A. (2000). *Estatística Aplicada: Economia, Administração e Contabilidade*. (Alves de Farias A. Trad.). Porto Alegre: Bookman.

Gairin, J. (1987). *Las actitudes en educación*. P.P.U: Barcelona.

Gomez Chacón, I. M. (2003). Afetividade e Matemática. In**:** *Matemática Emocional*. (Vaz de Moraes, D., Trad.). Porto Alegre: Artmed.

Gonçalves, T. O. (2000). *Formação e desenvolvimento profissional de formadores de professores: o caso dos professores da UFPA*. Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Kline, P. (1999). *The handbook of psychological testing*. 2nd Ed. London: Routledge.

Utsumi, M. C. (2000). *Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos*: um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática. Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: DESAFIOS EM UM CENÁRIO DE REORGANIZAÇÃO CURRICULAR

Rosineide Monteiro Rodrigues, Angélica da Fontoura Garcia Silva
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
rosineidemrodrigues@gmail.com, angelicafontoura@gmail.com

Resumen. O objetivo desse artigo é apresentar um estudo sobre as percepções que professores de Matemática do Ensino Médio têm acerca dos processos de ensino e aprendizagem da análise combinatória, em um cenário de implementação curricular, e investigar as implicações na formação docente em serviço. Para tal será exposto o plano base de construção da pesquisa, sua principal fundamentação teórica, uma descrição do contexto de realização do estudo, dos procedimentos metodológicos e alguns dos resultados da análise, especificamente aqueles que se relacionam ao objeto matemático análise combinatória, e algumas das considerações finais. Conforme este estudo, concluiu-se que há a necessidade de uma constante reflexão sobre a própria prática e uma formação ampla, que favoreça a compreensão do docente como um profissional (em permanente desenvolvimento) e ofereça, verdadeiramente, oportunidades de romper concepções sobre o ensino, a aprendizagem, o currículo, como também sobre o próprio conhecimento matemático.

Palabras clave: continuing education, curriculum reform

Abstract. The aim of this paper is to present a study on the perceptions developed by high school mathematics teachers about the processes of teaching and learning combinatorics, in a scenario of curriculum implementation, and investigate their implications for in-service teacher' development . For that, we will present the research baseline, its main theoretical framework, a description of the context of the context of the study, the methodological procedures and some of the results analysis results, specifically those that relate to the mathematical object combinatorics and some final remarks. Based on this study, we found that there need for constant reflection by the teacher on their practice and extensive training, that promotes the understanding of teaching as a profession (in constant development) and offers opportunities to truly challenge conceptions about teaching, learning, the curriculum, but also about teacher' own mathematical knowledge.

Key words: formação continuada, reforma curricular

Introdução

O presente artigo visa apresentar parte do nosso estudo *Os desafios da formação continuada de professores que ensinam Matemática no Ensino Médio em um cenário de reorganização curricular* (Rodrigues, 2010). Trata-se de uma dissertação de mestrado realizada durante o período de 2008 a 2010, desenvolvida no âmbito do Projeto Observatório da Educação do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN) e vinculada à linha de pesquisa Formação de Professores que Ensinam Matemática. Este estudo teve por objetivo "analisar as percepções que professores que ensinam Matemática no Ensino Médio têm acerca dos processos de ensino e aprendizagem, em um cenário de implementação curricular, e investigar as implicações que tal inovação traz ao processo de formação continuada docente" (Rodrigues, 2010, p. 17). Nesse artigo apresentaremos o plano base de construção da pesquisa, os principais aportes teóricos, o cenário ou contexto de realização do estudo, os passos de escolha dos sujeitos de pesquisa, alguns dos resultados de análise, especificamente aqueles que se relacionam ao objeto matemático *Análise Combinatória*. Por fim apresentaremos algumas de nossas considerações finais.

Plano base de construção da pesquisa e fundamentação teórica

Com a finalidade de delimitar a abrangência de nosso estudo e centralizar o foco de investigação, algumas escolhas relacionadas à temática, aos sujeitos de pesquisa e ao segmento de ensino foram necessárias.

Para o desenvolvimento de nossa investigação traçamos um plano base de construção (ver Figura 1), no qual consideramos os temas formação de professores, reformas curriculares e desenvolvimento profissional docente, tendo por tonalidade o papel do professor perante os processos de mudanças educacionais.

Reputamos que as expectativas a respeito do perfil profissional do professor são demasiadas, em face à tarefa de realizar um ensino de qualidade e que reflita em bons resultados nas avaliações de larga escala, as quais produzem indicadores que medem a aprendizagem do aluno – como o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA). Deste modo, discutir a formação profissional de professores que ensinam Matemática nos fez pressupor a relevância de analisar também os currículos dessa disciplina escolar. Ressaltamos que o papel do professor diante dos processos de mudanças é fundamental nos processos de ensino e aprendizagem, nas inovações ou renovações curriculares, na formação e no desenvolvimento profissional docente, tendo em vista a organização do trabalho pedagógico.

Fonte: Rodrigues, 2010, p. 23

Figura 1. Plano base de construção da pesquisa

Nessa comunicação, fundamentamos as discussões sobre formação e desenvolvimento profissional docente nos estudos de Ponte (1998) e ampliamos estas discussões com os estudos de Shulman (1986) sobre o Conhecimento Profissional Docente. No que se refere ao debate sobre as mudanças na prática docente propostas nos currículos, tomamos por referência os trabalhos de Zeichner (2003) e Hargreaves (1998).

Outra delimitação necessária dizia respeito ao segmento escolar que a pesquisa enfocaria. O ensino médio, entre tantas razões, foi escolhido por sua tradicional concepção dualista estrutural, ou seja, formação propedêutica e/ou profissional, por sua recente característica de terminalidade e continuidade e por suas finalidades: "desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores" (Lei n.º 9.394, 1996, Art. 35). Também foi considerado como ponto relevante para a escolha deste segmento, a divulgação dos resultados do SARESP de 2005, em 2006, que fomentou os debates sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática na Educação Básica paulista, e de modo significativo àqueles relacionados a este nível de ensino. Deste modo, percebemos ser pertinente investigar o ensino de matemática no Ensino Médio, especificamente na rede pública estadual paulista.

Quanto ao currículo apresentamos em nossa dissertação um panorama das reformas curriculares no ensino médio no âmbito nacional e estadual, de modo específico para o ensino de Matemática. Este panorama abordou desde a Reforma Francisco Campos (1930) até o novo currículo do Estado de São Paulo (2008), o qual é fonte do cenário de investigação. Para esse artigo apresentaremos somente o processo de mudança curricular implementado em 2008.

Contexto de investigação, questão e sujeitos de pesquisa

O Currículo do Estado de São Paulo

A partir do ano letivo de 2008 foi implantado, na rede estadual de ensino de São Paulo, um novo currículo para os níveis de ensino Fundamental II e Médio. Esta nova proposta curricular (São Paulo, 2008) e posteriormente currículo estadual (São Paulo, 2010), tem por objetivos principais, segundo seus autores: organizar o ensino público estadual paulista, contribuindo para a melhoria da qualidade das aprendizagens de seus alunos; garantir uma base comum de conhecimentos e competências a todo o Estado; oferecer subsídios aos profissionais que compõem a rede de ensino; atender ao nível de concretização estadual dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Esta proposta está organizada em quatro eixos específicos, porém complementares, que foram elaborados como subsídios a sua implementação, quais sejam: (1) Proposta Curricular(2008)/Currículo (2010) – documento base, que apresenta as ideias norteadoras de todo o trabalho e os conceitos que estruturam todas as áreas e suas disciplinas, e propõe os princípios orientadores para a prática educativa; (2) Caderno do Gestor – conjunto de documentos com orientações para a gestão do currículo na escola que tem por interlocutores os diretores e vice-diretores de escola, os professores coordenadores (gestores pedagógicos) de escola e de oficina pedagógica e os supervisores de ensino; (3)

Cadernos do Professor – materiais de apoio às atividades do professor, organizados por bimestre e disciplina, que indicam as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos em cada tema ou tópico dos conteúdos, e apresentam situações de aprendizagem com orientações metodológicas e sugestões de aulas, de materiais complementares, de avaliação e de recuperação; e (4) Caderno do Aluno, a partir de 2009 – complemento do Caderno do Professor, específico por disciplinas e por bimestre (ou volume), é um material que tem a referência pessoal do aluno, cuja intenção é a de facilitar o processo de ensino e aprendizagem.

Neste currículo, ou reorganização curricular, ou reforma curricular a Matemática escolar é apresentada como uma área específica, diferentemente do que aconteceu nos documentos curriculares publicados anteriormente na esfera federal (PCNEM, PCN+, Orientações Curriculares para o Ensino Médio). Ressaltamos que este currículo de matemática foi pautado em documentos curriculares produzidos em outras décadas, mas ainda vigentes, como a Proposta Curricular (elaborada na década de 80) e os Parâmetros Curriculares Nacionais, de 1998 em diante.

O curso A Rede Aprende com a Rede

Como ação (e única em 2008) de formação continuada dos docentes PEB-II (Professores de Educação Básica no Ensino Fundamental II e/ou Médio) da rede estadual de ensino de São Paulo, a Secretaria de Estado da Educação (SEE-SP), por intermédio da Coordenadoria de Ensino e Normas Pedagógicas (CENP), promoveu o curso A Rede Aprende com a Rede (RAR2008) cujo objetivo era possibilitar aos professores aprofundamento dos conceitos e teorias que norteiam as Propostas Curriculares de cada disciplina, bem como as metodologias indicadas nos materiais de apoio aos professores.

As turmas foram compostas por um número diferente de professores, conforme a quantidade de escolas sob a jurisdição de cada uma das 91 Diretorias de Ensino (DE) do Estado. As inscrições para o curso aconteceram no período de 5 a 18 de setembro de 2008 e a partir da segunda quinzena daquele mês até o mês de dezembro deste mesmo ano, foram realizadas as atividades do curso, que foi estruturado em dois grupos: professores e mediadores. O grupo dos professores foi organizado em turmas por DE, por disciplina e por segmento de ensino (Fundamental II e Médio), sendo os Professores Coordenadores da Oficina Pedagógica (PCOP) das respectivas DE os mediadores destas turmas. O curso RAR2008, foi organizado em quatro módulos, cada um subdividido em três atividades – Videoaula, Fórum de discussão e Videoconferência – e um Trabalho Final. É importante destacar que as atividades e o cronograma de cada módulo eram diferentes para cada disciplina/segmento de ensino. Ressaltamos que este curso aconteceu no modo Educação a Distância (EAD).

Problemática e sujeitos de pesquisa

Como bússola para nossa investigação, tomamos por questão: Quais percepções relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem são observadas por professores que ensinam Matemática no Ensino Médio, os quais participaram do curso A Rede Aprende com a Rede em 2008, no cenário de implementação curricular no Estado de São Paulo, e quais as implicações trazidas ao processo de formação continuada de professores?

A fim de atender aos objetivos de nosso trabalho e responder a questão de pesquisa ou dar indicações de respostas, adotamos uma abordagem de natureza qualitativa e consideramos o cenário descrito acima. Ressaltamos que para esse artigo apresentaremos as percepções que os docentes têm a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem da análise combinatória.

Procedimentos metodológicos, resultados e discussões

No processo de escolha de nossos sujeitos de pesquisas, dentre os 52 professores inscritos para o curso RAR2008, na turma Matemática/Ensino Médio da Diretoria de Ensino Regional Santo André, inicialmente fizemos uma análise preliminar das mensagens postadas pelos professores nos fóruns de discussão do curso. Depois, elaboramos um questionário que nos permitiu escolher nossos sujeitos de pesquisa, com os quais realizamos entrevistas semi estruturadas com a finalidade principal de esclarecer aspectos levantados durante a análise inicial.

Para a dissertação, em nossa análise consideramos os dados coletados por intermédio dos questionários, das interações no ambiente coletivo do curso RAR2008 e nas entrevistas cedidas pelos dois professores sujeitos de pesquisa (Prof.9 e Prof.26). Com os depoimentos dos professores elaboramos os quadros de unidades de significados, ou seja, selecionamos aqueles depoimentos mais significativos, do nosso ponto de vista, os quais puderam denotar elementos que favoreceram a discussão do problema de pesquisa e possibilitaram construir uma categorização e definir nossos objetos de investigação. Nestas categorias procuramos apontar as percepções destes professores quanto ao currículo em implementação e às ações de formação continuada promovidas institucionalmente, aos reflexos e/ou impactos na prática docente e no desenvolvimento profissional, e aos processos de ensino e aprendizagem do objeto matemático análise combinatória, demandado da leitura e análise dos dados coletados.

Para esse artigo, na análise das percepções que os professores participantes de nossa pesquisa têm dos processos de ensino e aprendizagem da análise combinatória, focamos em duas fontes de dados: as mensagens postadas no fórum de discussão e os depoimentos apresentados na entrevista.

Analisando os depoimentos dos professores concluímos que as ideias dos nossos sujeitos convergem, quando estes consideram como característica importante e positiva da nova proposta curricular o fato de o Estado propor a unificação do currículo em toda rede de ensino. Outra percepção convergente refere-se à procura de um espaço para a formação docente no curso, ou mais amplamente, para o desenvolvimento profissional, por acreditarem que todo processo de mudança curricular poderia proporcionar-lhes tais oportunidades. Reputamos que estes professores divergiram quanto ao que seria o objeto de formação, assim como, qual seria a interpretação para o conceito de desenvolvimento profissional docente. Segundo Ponte (1998) há uma aproximação entre as noções de formação de professores e de desenvolvimento profissional docente, contudo, essas ideias não são equivalentes nem antagônicas. Consideramos que o desenvolvimento profissional docente é considerado análogo a uma *textura* que é tecida em múltiplos espaços e contextos: no aprendizado com os colegas, no uso de material didático, em processos de formação, nos diversos contatos com orientações curriculares, nas horas coletivas de trabalho pedagógico e na prática docente, especificamente em sala de aula.

Contudo, os dados coletados possibilitaram inferirmos que o movimento de renovação curricular favoreceu o processo reflexivo dos professores sobre as suas práticas, mas não foi encontrado indícios, nos discursos analisados, de mudanças profundas nas práticas, que julgamos ser possível somente por meio da viabilização de um espaço efetivo de reflexão.

Quanto à formação profissional docente e o currículo, parece-nos interdependentes, porque em concordância com Zeichner (2003), o professor é mais do que um implementador, ele deve ser autor, ou coautor, do processo educacional, ou seja, protagonista que dá vida ao currículo. Do mesmo modo, para Hargreaves (1998) o envolvimento dos professores "no processo de mudança educativa é vital para o seu sucesso, especialmente se a mudança é complexa e se espera que afecte muitos locais, durante longos períodos de tempo" (Hargreaves, 1998, p. 12). Para nós "se o professor não compreender as inovações curriculares ou não estiver convencido delas, a potencialidade da mudança fica consideravelmente limitada" (Rodrigues, 2010, p. 24).

Para analisar a percepção dos docentes sobre os processos de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória cabe destacar que as orientações contidas no Caderno do Professor do 2.º ano do Ensino Médio propõe iniciar o trabalho pela probabilidade sem vinculá-la, num primeiro momento, às fórmulas comumente utilizadas na análise combinatória. Tal encaminhamento favorece, ainda segundo seus autores, a utilizar como metodologia a resolução de problema. Este fato foi comentado pelo Prof.26:

> [...] resolução de problemas, que é o princípio norteador da aprendizagem da matemática, pode possibilitar o desenvolvimento do trabalho com probabilidade em sala de aula, através da resolução de problemas de ordem prática e contextualizada. [...] O desenvolvimento do pensamento probabilístico, sem dúvida, pode efetivar as potencialidades formativas da disciplina de Matemática (Prof. 26).

Entretanto, parece que nem todos os professores consideram isto como característica positiva. O Prof.9, por exemplo, ao se referir à temática, considera como uma falha não se iniciar o questionamento da probabilidade pela árvore de possibilidades, argumentando que tais questões esperam que os alunos apresentem uma determinada "sequência de resposta". Este professor demonstrou descontentamento também em relação às sequências apresentadas:

> [...] E falando mais sobre a quantidade pequena de exercícios. Não existem exercícios de fixação. Sem repetição de exercícios para que possamos avaliar se houve retenção do realizado. Agora, quanto a esperança de que todos os alunos sejam iguais e tenham o mesmo nível de interesse, assimilação e conhecimento prévio acarretando prejuízo aos diferentes (Prof. 9).

Para o Prof.9 as abordagens, práticas, técnicas e metodologias propostas no novo currículo foram "mudanças impostas" e que "no geral" ele foi "obrigado a utilizar", e, para esse professor, "não há novidade" no novo currículo. Observamos aqui indícios das características de certas reformas curriculares descritas por Zeichner (2003) e Hargreaves (1998). De acordo com Zeichner, por exemplo, muitas das reformas, consideradas como "centradas no aluno", têm concebido o professor apenas como "técnico eficiente", e aponta essa como uma das causas da "resistência e subversão às mudanças" por parte dos docentes; ele conclui que tais mudanças só ocorrerão de fato na sala de aula quando os professores as compreenderem e aceitarem como suas.

Todavia mesmo não se considerando um autor do novo currículo a recepção do Prof. 26 foi diferente. Para esse profissional, o material de apoio que compõe o currículo permite ao docente desenvolver "aulas mais dinâmicas, possibilitando ao aluno o momento de reflexão e de pesquisa [...] e permite sair do lugar comum do livro didático, porque tanto o Caderno do Professor quanto o Caderno do Aluno são bem variados". Este professor parece sentir-se participante do processo, uma vez que considera que "Caberá sempre ao professor selecionar os exercícios de maior ou menor dificuldade para seu aluno resolver". Afirma também que "O professor precisa preparar sua aula com maior atenção e estudar determinados conteúdos, que não estava habituado a ensinar" (US12.E-I:Prof.26), o que entendemos como favorecimento no desenvolvimento de aspectos da base do conhecimento profissional docente apontados nos estudos de Shulman. Todavia, vale ressaltar que essa não foi uma temática muito discutida nem no fórum do curso nem durante a entrevista, pois os professores pareciam não ficar à vontade ao falar acerca do tema.

Nesse sentido, sobre a discussão desses professores relacionada ao ensino e aprendizagem do objeto matemático Análise Combinatória, observado sob a forma de reapresentação do discurso oficial, ou mesmo crítica, na verdade pareceu-nos denunciar a necessidade de se ampliar estudos sobre o Conhecimento Profissional Docente, especialmente em processos de formação. Assim posto, reputamos importante a teoria de Shulman (1986), quando este afirma que é o conjunto do conhecimento do conteúdo e o conhecimento curricular, conectados ao conhecimento pedagógico do conteúdo, que forma a base do conhecimento profissional docente, porque não dizer de seus saberes, considerados fundamentais para o exercício do ser professor.

Considerações finais

Concluímos que há a necessidade de uma constante reflexão sobre a própria prática e uma formação ampla, que favoreça a compreensão do docente como um profissional (em permanente desenvolvimento) e ofereça, verdadeiramente, oportunidades de romper concepções sobre o ensino, a aprendizagem, o currículo, como também sobre o próprio conhecimento matemático. Consideramos, também, necessário a realização de estudos, que acompanhem *in loco* os professores em sala de aula e nos espaços de reflexão e estudo, e que possibilitem analisar ações práticas no interior da escola, de modo a identificar a implementação de mudanças e os processos de formação docente, pois, cremos que enquanto houver inquietações há o que investigar e escrever.

Referências bibliográficas

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempo de mudança: o trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna*. Portugal: Mac Graw-Hill.

Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial [da] União,* Brasília, 23 dez. 1996. Recuperado em 08 de junho de 2009 de <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. *Actas do PROFMAT98*, (pp. 27-44). Lisboa, Portugal: APM.

Rodrigues, R. M. (2010). *Os desafios da formação continuada de professores que ensinam matemática no ensino médio em um cenário de reorganização curricular*. Dissertação de mestrado, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Secretaria da Educação. (2008). *Proposta curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. Coordenação de Maria Inês Fini. São Paulo: SEE.

_______. (2010). *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática* e *suas tecnologias*. Coordenação de Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. São Paulo: SEE.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,15*(2), 4-14.

Zeichner, K. M. (2003). Formando professores reflexivos para a educação centrada no aluno: possibilidades e contradições. In R. L. L. Barbosa (Org.), *Formação de educadores: desafios e perspectivas* (pp. 35-55). São Paulo, SP, Brasil: Editora Unesp.

REFLEXÕES SOBRE DISCRIMINAÇÃO ÉTNICO-RACIAL E PRÁTICA DOCENTE EM MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA NA EJA

Iraídes Reinaldo da Silva, Cristiane Coppe de Oliveira
Universidade Federal de Uberlândia. Brasil
iraidesrs@gmail.com, criscopp@pontal.ufu.br

Resumen. El presente artículo tiene como objectivo presentar los resultados de la investigación realizada con alumnos jóvenes y adultos en una escuela pública en la ciudad de Uberlandia/MG (Brasil), tratando de reflexionar y aprender a percibir la presencia de conocimientos africanos en matemáticas por manifestaciones de tradiciones afro-brasileñas, además de identificar que los estudiantes contemplando la cuestión de la raza, apodos y la imagen que tenen de las matemáticas y de las tradiciones afro-brasileñas, con miras a desarrollar una educación enraizada en los fundamentos de nociones, que busca reforzar la producción de conocimientos matemáticos a otros grupos sociales para una matemática crítica e incluyente. La encuesta también trató de contribuir al desarrollo de acciones educativas basadas en la ley brasileña 10.639/03. La enseñanza de las matemáticas, teniendo debidamente en cuenta los cultivos afro brasileños también tienen mucho que contribuir a la comprensión del mundo como una posibilidad para desarrollar valores y ampliar conceptos..

Palabras clave: etnomatemática, relaciones afro-brasileñas

Abstract. This paper aims to present the results of research made with students of youth-adults education - EJA - of a public school in Uberlândia/MG (Brazil), trying to reflect and understand how they perceive the presence of African knowledge in mathematics from the manifestations of afro-brazilian traditions, and identify who are those students contemplating the issue of race, surname and the image they have of mathematics, of school and the afro-brazilian tradition, while possibility to develop an education that is grounded in the foundations of Ethomathematics, which seeks to valorize the production of mathematical knowledge of other social groups towards a critical and inclusive mathematics. The survey also sought to contribute to the development of educational activities guided by the Brazilian Law 10.639/0. In this sense the mathematic teaching also considering the afro-brazilian cultures have much to contribute to the understanding of the world as a possibility to develop values and extend concepts.

Key words: ethnomathematics, racial-ethnic relations

Apresentação

A história da Educação de Jovens e Adultos – EJA – no Brasil teve início no período colonial, voltada à escolarização de indígenas e de negros. Os jesuítas, quando aqui chegaram, trouxeram a moral, os costumes, a religiosidade europeia e seus métodos pedagógicos e buscaram, com a catequização, difundir, na população de índios e de negros, a cultura e as crenças de Portugal. Ao mesmo tempo, tinham a intenção de anular as cerimônias religiosas dos indígenas e também as que haviam sido trazidas pelos negros, quando foram arrancados de sua terra natal, na África, para tornar-se escravo no Brasil.

A partir da Constituição de 1824, o Estado passou a garantir o direito à educação primária e gratuita para todos os cidadãos livres ou libertos. Contudo, atendia apenas aos filhos da elite dominante.

O País passou, em seguida, por uma série de acontecimentos relevantes, entre os quais se destacam o final do tráfico negreiro, a Abolição da escravatura, a Proclamação da República e a influência dos cafeicultores. Ocorreram mudanças no campo econômico, social e político. No entanto, parcelas da população de baixo poder aquisitivo ainda continuavam fora da escola.

A partir da Lei de Diretrizes e Bases – LDB –, a 5.692/71, houve a regulamentação da Educação de Jovens e Adultos – EJA, que, na ocasião, passou a denominar-se Ensino Supletivo, com o objetivo de "suprir a escolarização regular para os adolescentes e os adultos que não tenham seguido ou concluído na idade apropriada" (Brasil, 1971, p. 34).

Porém, na Constituição de 1988 (Brasil, 1988), definiu-se uma nova concepção de Educação de Jovens e Adultos, ao estabelecer o ensino fundamental como obrigatório e gratuito, passando a ser direito de todos, independentemente da idade; e ao atribuir ao Estado, à família e à sociedade o dever de erradicar o analfabetismo no País, no período de dez anos. Apesar de garantir ser a educação um "direito de todos", na década de 1990 ainda poucas mudanças haviam sido efetuadas no campo educacional. Todavia, com a pressão de setores populares da sociedade, exigindo do Estado investimentos em escolas públicas apropriadas e de qualidade para os jovens e adultos concluírem seus estudos, foi aprovada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN, nº 9.394/96 (Brasil, 1996), que alterou a denominação de "supletivo" para "Educação de Jovens e Adultos" e representou uma grande conquista para a população em geral.

O Brasil participou da Conferência Mundial de Educação para Todos, em 1990, na cidade de Jomtien, na Tailândia, ocasião em que se evidenciou a necessidade de expansão e de melhoria na escolarização dos jovens e adultos de todo o mundo. Foi, portanto, acelerada a regulamentação de políticas públicas em cada país, para reduzir os índices de analfabetismo desse segmento da sociedade. Assim, em 1997 aconteceu em Hamburgo, na Alemanha, a V Conferência Internacional de Educação de Jovens e Adultos, a qual se consolidou como um marco importante na educação, ao vincular a educação de adultos ao desenvolvimento sustentável e equitativo da humanidade.

O Brasil é um país constituído por um povo que apresenta uma diversidade cultural em que se reconhece que as pessoas não são iguais e cada uma apresenta uma peculiaridade própria, no que diz respeito a gênero, raça/etnia, religião, entre outros aspectos que compõem a sua história de vida, conforme ressalta Lopes (2008):

> [...] o Brasil é um país múltiplo, onde descendentes de europeus, de africanos, ameríndios e asiáticos convivem, sim, mantendo, cada grupo, o seu jeito, o seu modo de ser, a sua identidade étnica e cultural. E onde cada um contribui com o

> que herdou de seus antepassados, para a formação do todo que é a nação brasileira. País onde convivem várias culturas, no Brasil, os africanos deixaram fortes traços de sua identidade na religião, na história, nas tradições, no modo de ver o mundo e de agir perante ele, nas formas de arte, nas técnicas de trabalho, fabricação e utilização de objetos, no modo de falar, na medicina popular e em muitos outros aspectos. Esses traços, recriados pelos afro-brasileiros de uma forma inconsciente ou não, são o que melhor define a identidade nacional. (Lopes, 2008, p.159).

Sabe-se que o Brasil tem uma dívida histórica a ser resgatada e reconhecida pela própria Constituição do Estado, cujo papel atualmente é de promover a inclusão. E, como exemplo dessa ação de política antidiscriminatória e inclusiva, podemos citar os *Parâmetros curriculares nacionais* – PCN — e as *Diretrizes nacionais sobre a diversidade*, do Conselho Nacional de Educação, que apontam a temática; as Leis Federais 10.639/03 (Brasil, 2003) e 11.645/08 (Brasil, 2008), que tornam obrigatório o ensino de história e cultura africana, afro-brasileira e indígena nas escolas públicas e privadas do Brasil; ou, mesmo, a Lei Orgânica do Município de Uberlândia (Uberlândia, 1990), que, em seu artigo 165, estabelece o combate à discriminação racial, propondo revisão dos livros didáticos e das práticas pedagógicas que visam eliminar estereótipos racistas, bem como assegura a valorização da participação do negro na formação histórica e cultural, a liberdade de manifestações das religiões afro-brasileiras e a divulgação de programas educativos que combatam a discriminação racial. A discriminação evidencia-se no cotidiano da escola. Neste trabalho, abordaremos a forma como essa temática pode ser amenizada na Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Por um lado, vê-se o contexto da investigação em que a pesquisa foi realizada como um indicador, a fim de promover o bem-estar de todos, sem preconceito de origem, raça, sexo, idade e quaisquer outras formas de discriminação.

Por outro lado, a realidade atual do ensino, em particular da Matemática, em muitas escolas, diz respeito à exclusão de um número significativo de pessoas, especialmente, de negros e negras. Em função disso, há um número expressivo de alunos que são reprovados/as ou excluídos/as, em consequência de seu baixo desempenho nessa disciplina. Esses alunos e alunas formam o grupo de pessoas que procuram, cada vez mais, o ensino da Educação de Jovens e Adultos para concluir seus estudos.

Diante desse panorama de discussões, os *Parâmetros Curriculares Nacionais* – PCN — foram implantados pelo Ministério da Educação e do Desporto - MEC, como uma proposta para democratizar, humanizar e diversificar a prática pedagógica de cada área do conhecimento conectada aos temas transversais, como Saúde; Meio Ambiente; Ética; Pluralidade Cultura; Orientação Sexual; e Trabalho e Consumo. Cabe destacar como um dos objetivos dos PCN que alunos e alunas sejam capazes de conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro e os aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais; de classe social; de crenças; de sexo; de etnia ou outras características individuais e sociais. E de conhecer características fundamentais do Brasil, nas dimensões sociais, materiais e culturais, como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertença ao País.

Foi nesse contexto que o Conselho Nacional de Educação aprovou, em 2000, o Parecer em que se reconhecia a necessidade de investimentos pedagógicos nesta modalidade de ensino e elaborou as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos (Brasil, 2000), com o propósito de assegurar que as necessidades de aprendizagem de todos os jovens e adultos sejam atendidas pelo acesso equitativo à aprendizagem apropriada; à habilidade para a vida; e a programas de formação para a cidadania.

Em 2004, criou-se a Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão – SECADI —, assinalando uma nova fase no enfrentamento das injustiças existentes nos sistemas de educação no País, com ações pedagógicas que visassem à valorização da diversidade da população brasileira, ao garantir a implementação de políticas públicas e sociais como instrumento de cidadania. A SECADI tem a competência de investir na implementação de políticas públicas que contemplem, entre outras, a alfabetização e a educação de jovens e adultos, a educação escolar indígena e a diversidade étnico-racial, com o propósito de fortalecer a luta pela educação como direito de todos e todas. Foi criado na SECADI o Departamento de Jovens e Adultos, que tem por finalidade traçar as diretrizes políticas e pedagógicas para garantir a jovens e adultos que não tiveram acesso à escola ou dela foram excluídos o direito de continuar seus estudos em prol de sua promoção social, individual e coletiva.

Do ensino-aprendizagem da Matemática na EJA

Uma das causas para a exclusão de muitos alunos e alunas da escola está em não se reconhecer e não se valorizar a sua maneira de pensar e de praticar Matemática em comunhão com seu contexto social. Além disso, a escola é vista como a única responsável pela produção e pela transmissão de saberes, excluindo e negando aqueles produzidos fora dela. Fonseca (2005, p. 75) aponta que "a busca do sentido do ensinar-e-aprender Matemática será, pois, uma busca de acessar, reconstruir, tornar robustos, mas também flexíveis os significados da Matemática que é ensinada- e- aprendida". E completa:

> A aprendizagem da Matemática deve justificar-se ainda como uma oportunidade de fazer emergir uma emoção que é presente, que comove os sujeitos, enquanto resgata (e atualiza) vivências, sentimentos, cultura[...] de perscrutar o mundo à nossa volta e tentar imprimir-lhe uma ordem que nos reforce a ilusão de que seja possível compreendê-lo. (Fonseca, 2005, p.54).

Nessa perspectiva, a Matemática vem incorporando em seus estudos questões socioculturais, tendo como base a Etnomatemática, com a finalidade de resgatar práticas matemáticas vivenciadas pelos diferentes segmentos sociais.

Destacamos aqui os saberes afro-brasileiros relacionados com a matemática, abordando as relações etnicorraciais presentes na sociedade e, consequentemente, na escola. A realidade quanto à conexão de saberes matemáticos relacionados à cultura afro-brasileira e à matemática demonstra que a prática desta em quase nada considera os referidos conhecimentos.

Constata-se que, nos currículos oficiais de ensino da Matemática, no que se refere aos conteúdos e às metodologias dessa disciplina, por vezes, há desconexão em relação à cultura afrodescendente. Por outro lado, deveriam acontecer abordagens contemplando aspectos sociais, culturais e as relações de poder que permeiam o contexto da referida cultura. O conhecimento, visto sob uma única ótica, pode passar a ser entendido e constituído enquanto produção sociocultural e, nesse sentido, a Etnomatemática, que tem o intuito de valorizar a produção de saberes constituídos pelos diversos grupos sociais, por considerar que eles são elaborados historicamente, pode contribuir para o equacionamento dessas questões.

A confirmar o exposto, ouvem-se, com frequência, relatos de alunos e de alunas, ressaltando que a Matemática é uma disciplina difícil de ser aprendida e que não veem nenhuma aplicação do seu aprendizado em situações de seu dia a dia. Mas, ao mesmo tempo, expressam um desejo de aprendê-la. Como afirma Gerdes (2010, p. 157), que, ao apresentar uma visão de educação matemática ancorada no diálogo, na experimentação, na surpresa e na beleza da descoberta como ações cruciais para o aprendizado, propõe "uma educação matemática que valoriza cada estudante e cada cultura" e assinala que "a educação matemática deve ser para o benefício dos povos".

Da investigação

A atuação de uma das autoras deste texto na educação de jovens e adultos levou-a a fazer algumas indagações sobre o pensamento de alunos e alunas quanto à temática étnico-racial: *"Quem são os alunos e alunas da EJA no que tange aos aspectos de gênero, raça e idade?", "Que 'apelidos' são atribuídos para os alunos e alunas afro-brasileiros?", "Como percebem a presença da matemática nas manifestações de tradições afro-brasileiras?", "Que compreensão eles e elas têm da matemática, da escola e das tradições afro- brasileiras?"*. Com as respostas a essas indagações, foi possível compor um retrato desses jovens e adultos da EJA na escola.

Para tanto, foi utilizado um instrumento de coleta de informações, buscando detectar esses questionamentos, com oito questões subjetivas e objetivas aplicadas ao conjunto de duas turmas da EJA, uma do sexto e outra do nono período. Atendendo às orientações quanto à ética na pesquisa, os nomes dos alunos e das alunas não são revelados, atribuindo-se a cada instrumento de coleta de informações uma numeração que vai do número 1 (um) até o 45 (quarenta e cinco).

Uma questão específica, que buscou saber qual a cor ou a raça do/a entrevistado/a, apresentou o seguinte resultado: treze deles disseram ser de cor branca; dois, de cor amarela; dez, de cor preta; e vinte são pardos. Alguns alunos (as) ficaram indecisos (as) para declarar sua cor. Percebeu-se que as pessoas têm dificuldades e se sentem inseguras para identificar sua cor, uma vez que não se reconhecem e não se identificam como de cor preta. Essa dificuldade, em geral, é fruto da imagem estereotipada/negativada que os meios de comunicação (internet, TV, livros, revistas, jornais etc.) veiculam com relação às pessoas negras; e que a escola também reforça, muito embora — vale ressaltar — a escola, palco da prática inclusiva, deva adequar-se para atender a todos e a todas, ofertando educação de qualidade. No entanto, a pesquisa divulgada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), através da Síntese de Indicadores Sociais, em 2010 (Brasil, 2010), mostra que um em cada dois jovens de 15 a 17 anos estava fora do nível de ensino adequado em 2009.

Também foi solicitado que o aluno e a aluna informassem que outros nomes ou apelidos são utilizados para caracterizar sua cor. Dentre as respostas, destacam-se os seguintes: mulato, *alemão, branco, morena, pretinha, nega preta, morenin, branquim, nega, preta, preto, amarelo, moreno, moreninha, ruivinha, neguinha, moreno claro, negro.*

Por essas respostas, percebe-se como se vem configurando uma prática, comum entre os(as) alunos(as), de atribuir apelidos carregados de conotação depreciativa e racista, o que provoca baixa autoestima e baixo desempenho escolar dos(as) alunos(as). Em outra questão do instrumento, buscou-se desvelar a compreensão que os alunos(as) da EJA têm a respeito da presença da matemática nas manifestações de tradições afro-brasileiras. Surgiram importantes argumentos, que ajudam na compreensão da temática em questão. Dentre as respostas, as mais representativas estão transcritas abaixo:

> *Ela está presente na capoeira, na culinária, no congado, na dança, no gingado e na religião* (aluna 34, feminino, 17 anos, parda).
>
> *Na capoeira, o pessoal tem que ter noção de espaço, quantidade de componentes, quantidade de instrumentos e na congada saber calcular a quantidade de comida, quantidade de roupas e quantos componentes têm em cada terno* (aluno 36, masculino, 42 anos, preta).
>
> *Na congada, ao começar pelo vestuário, se você vai fazer uma roupa, tem que saber a quantidade de tecido, linha, zíper, etc. O mesmo acontece com café da manhã, almoço, jantar, principalmente se for para muita gente* (aluna 26, feminino, 57 anos, preta).
>
> *Na congada, a matemática está presente na cozinha. As mulheres usam para pesar os alimentos, para medir a quantidade dos produtos e calcular o número de pessoas* (aluna 7, feminino, 38 anos, preta).
>
> *Na congada, porque toda manifestação gera um tipo de custo, por exemplo, com roupas, bandas, enfeite, chapéus, etc.* (aluno 6, masculino, 32 anos, branca).
>
> *Na capoeira tem o custo do uniforme e no batizado tem que pagar uma corda que amarra na cintura* (aluna 5, feminino, 45 anos, branca).

Os depoimentos revelam que a maioria dos(as) alunos(as) da EJA considera a matemática como fundamental ao seu aprendizado e que eles(as) compreendem e percebem a presença da matemática em qualquer situação real de suas vidas, como a ilustrada em atividades nas manifestações africanas. Os relatos mostram uma preocupação em comum: as dificuldades que esses jovens e adultos enfrentam em busca de um aprendizado contextualizado da matemática.

Considerações

Os depoimentos deixam claro que a maioria dos(as) alunos(as) da EJA considera a matemática como fundamental ao seu aprendizado e compreendem e percebem a presença da matemática em qualquer situação real de suas vidas, como a ilustrada em atividades nas manifestações africanas. Os relatos mostram uma preocupação em comum: as dificuldades que esses jovens e adultos enfrentam em busca de um aprendizado contextualizado da matemática. Evidenciou-se a necessidade de integrar e relacionar a matemática oriunda do saber popular ao saber acadêmico, tendo em vista que sua contextualização pode favorecer que o aluno e a aluna compreendam sua realidade e possam intervir de maneira a melhorá-la cada vez mais. Dessa forma, o aprendizado da matemática torna-se mais significativo e útil aos jovens e aos adultos, como cidadãos e cidadãs.

Destaca-se que, no decorrer das experiências aqui discutidas, buscou-se considerar, no ensino da Matemática, os diferentes saberes aportados por alunos e alunas, levando em conta os pressupostos da Etnomatemática apontados por D'Ambrosio (1993) como possibilidade de reconhecimento e valorização da diversidade étnico-racial, ambos relacionados às populações afro-brasileiras. Assim, pode ser garantido o direito a oportunidades de acesso e apropriação de conhecimentos em prol da educação qualificadamente inclusiva para essas parcelas sociais.

A Lei 10.6939/03 pode contribuir para a aceleração da inclusão social e escolar dos afro-brasileiros na EJA, uma vez que estimula a formação reflexiva e crítica que contribua no processo educativo, em termos de informação e de formação, colaborando, assim, com o avanço da educação cidadã. E ainda pode se constituir num espaço privilegiado de diálogo entre educador e educando; possibilitar articulação e encontro entre teoria e prática educacionais, fundamentais no processo de construção de conhecimentos, em que se destaca, neste caso, a importância da efetiva consideração dos saberes oriundos das culturas afro-brasileiras relacionados com a matemática, como forma de contemplar as relações etnicorraciais.

Referências bibliográficas

Brasil (1996). Ministério da Educação. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*, nº 9.394/96. Brasília: MEC.

Brasil (1971). Ministério da Educação. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*, nº 5.692/71. Brasília: MEC.

Brasil (1998). Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino fundamental*. Brasília: Mec.

Brasil (2000). *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos*. Brasília: CNE/MEC.

Brasil (2010). *Indicadores sociais: relatório 2010*. Rio de Janeiro: IBGE. Recuperado em 05 de junho, 2011, de http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/condicaodevida/indicadoresminimos/sinrireseindicsociais2010/SIS 2010.

D'Ambrosio, U. (1993). *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer*. São Paulo: Ática.

Fonseca, M. C. (2005). *Educação matemática de jovens e adultos: especificidades, desafios e contribuições*. Belo Horizonte: Autêntica.

Gerdes, P. (2010). *Da etnomatemática a arte-design* e *matrizes cíclicas*. Belo Horizonte: Autêntica.

Lopes, N. (2008). *Bantos, malês e identidade negra*. Belo Horizonte: Autêntica.

Uberlândia (1990). *Lei orgânica do município de Uberlândia*. Uberlândia: Câmara Municipal de Uberlândia.

AS DIFICULDADES ENFRENTADAS PELO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE SOBRE A FORMAÇÃO E ATUAÇÃO DOCENTE NO ESTADO DE SÃO PAULO

Ivete Maria Baraldi, Juliana Aparecida Rissardi Finato
UNESP, Faculdade de Ciências, Campus de Bauru/SP. Brasil
ivete.baraldi@fc.unesp.br, julianarfinato@yahoo.com.br

Resumo. A formação do professor de matemática do Estado de São Paulo (Brasil) não ocorreu, apenas, por intermédio do Ensino Superior. Até a década de 1960, apenas os grandes centros possuíam cursos superiores de formação de professores de matemática. Aos professores do interior restavam como opção: a Escola Normal, a CADES, o Curso Vago e, em alguns casos, o Colegial Científico. Assim, neste trabalho apresentamos um estudo sobre esses modelos buscando mostrar uma compreensão acerca de como se deu a formação do professor de matemática paulista.

Palavras chave: modelos formativos. professor de matemática paulista

Abstract. The training of mathematics teachers of the State of São Paulo (Brazil) occurred not, only, through higher education. Until the 1960s, only large centers had higher education for the training of mathematics teachers. Teachers inside were left as option: Normal School, CADES, the Course Vague and in some cases, the Collegiate Science. In this work we present a study on these models to show an understand of how was the formation of a mathematics teacher in São Paulo.

Key words: formative models. teacher of mathematics paulista

Introdução

Neste texto apresentamos um recorte da pesquisa de Iniciação Científica realizada durante o período de julho/2011 a agosto/2012 com o financiamento de PIBIC/Reitoria - UNESP. . Abordaremos os modelos pelos quais os professores de matemática do Estado de São Paulo foram formados enquanto docentes. . Nesse sentido, o objetivo principal deste estudo é refletir e entender como ocorreu a formação do professor de matemática paulista, desde meados da década de 1940 até os dias atuais. Para tanto, esta pesquisa de cunho qualitativo, foi realizada através da leitura e análise dos depoimentos de professores de matemática que foram cedidos aos pesquisadores do Grupo de Pesquisa "História Oral e Educação Matemática" (GHOEM) em seus trabalhos de Iniciação Científica, Mestrado e Doutorado. Tal análise ocorreu por meio da leitura dos depoimentos e posterior categorização dos recortes realizados com base em suas proximidades.

A leitura e análise dos depoimentos, bem como o estudo de bibliografia pertinente, nos permitiu compreender que a formação do corpo docente do Estado de São Paulo não ocorreu por intermédio, apenas, do Ensino Superior. Até a década de 1960, apenas os grandes centros possuíam cursos superiores para a formação de professores de matemática. Diante da dificuldade em encontrar um estabelecimento de ensino superior no interior paulista, os docentes passam a buscar outros meios para essa formação inicial, tais como: a Escola Normal, a CADES (Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário), os Cursos Vagos e, em alguns casos, o curso Colegial Científico. Apresentamos então um estudo sobre cada um destes modelos formativos que puderam ser detectados nos depoimentos analisados.

O ensino superior

No Estado de São Paulo o primeiro curso superior para a formação de professores de matemática foi oferecido pela Universidade de São Paulo (USP), criado em 1934. Segundo seu modelo formativo, para que o candidato fosse considerado habilitado a lecionar como professor do Ensino Secundário deveria, primeiramente, concluir algum dos cursos oferecidos pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) com a duração de três anos e depois realizar, em um ano, o curso de formação pedagógica do Instituto de Educação, ambos pertencentes a USP.

A grade curricular do curso de Ciências Matemáticas era composta por: Geometria (Projetiva e Analítica), Análise Matemática, Cálculo Vetorial, Elementos de Geometria Infinitesimal, Física Geral e Experimental, Mecânica Racional e Elementos de Mecânica Celeste e História das Matemáticas. Ainda, o curso de Didática era constituído pelas disciplinas: Biologia educacional aplicada ao adolescente, Psicologia Educacional, Sociologia Educacional, Metodologia do Ensino Secundário, História e Filosofia da Educação, Educação Secundária e Comparada.

Na grade curricular do curso de Didática é possível perceber que as disciplinas pedagógicas se baseiam em aspectos gerais da educação. Além disso, a existência de um curso pedagógico ministrado de maneira isolada demonstra a ideologia da época: o importante era saber matemática, deixando para segundo plano a preocupação com a formação pedagógica do professor. "Desde o início da criação dos cursos de bacharelado e licenciatura, houve uma nítida separação entre conteúdo específico e formação pedagógica. Na FFCL o objetivo era formar 'cientistas', ficando ao encargo do Instituto de Educação a formação do professor." (Silva, 2000). Alia-se a isso, a necessidade da USP em formar o quadro docente para a própria instituição, pois muitos alunos se tornaram docentes da FFCL.

Em 1938 o Instituto de Educação da USP foi extinto. A FFCL responsabiliza-se pela formação de professores secundaristas com a criação da Seção de Educação. Os docentes efetivos do Instituto de Educação foram remanejados para a FFCL. O modelo formativo oferecido após essa modificação se assemelhava ao que já era realizado pelo Instituto de Educação, mas os estudantes eram formados pela Seção de Educação da FFCL.

Novamente, em 1939, a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo passaria por mudanças devido a implantação da Faculdade Nacional de Filosofia (FNFi), criada para regulamentar os cursos universitários, servindo como modelo para todo o país, inclusive para a FFFCL da USP. Devido a sua importância que a FNFi, apesar de ter sido estabelecida na cidade do Rio de Janeiro (capital do País à época) merece atenção neste trabalho.

Os cursos oferecidos pela Seção de Filosofia, Ciências, Letras e Pedagogia deste novo modelo formativo possuíam a duração de três anos. Ao concluir um de seus cursos o candidato receberia o título de Bacharel. Para lecionar no ensino secundário ou no ensino normal, o bacharel deveria também concluir o curso de Didática com duração de um ano. Tendo realizado essas duas etapas, o candidato receberia o título de Licenciado. Assim sendo, para ser professor o estudante deveria adquirir, primeiramente, o título de bacharel. (Martins-Salandim, 2012). Esse modelo de formação ficou conhecido como "esquema 3+1" (Ferreira, 2009). A grade curricular proposta pela Seção de Filosofia, Ciências e Letras da FNFi se assemelha ao que foi oferecido pela FFCL da USP anteriormente. Já o curso pedagógico da Seção Especial de Didática da FNFi se diferencia do currículo proposto pelo Instituto de Educação da USP pelo acréscimo das disciplinas de Didática e retirada da disciplina de Metodologia.

Com relação à formação proposta pela FNFi, Silva (2002, p. 113) salienta que o modelo ministrado "reforça fortemente a dicotomia entre disciplinas de conteúdo e disciplinas pedagógicas" auxiliando na formação de matemáticos e na ampliação das pesquisas no país. A questão do ensino era relegada a um segundo plano. Nesse ambiente, "não havia espaço para discussões mais amplas sobre o saber escolar, as influências da história da Matemática, filosofia, análise das influências sociais e culturais no contexto escolar". (Silva, 2000). A preocupação era com a garantia de oferecimento do saber científico e de técnicas que assegurassem que esse conhecimento seria repassado à escola secundária.

Este modelo de formação permaneceu no país até 1961, quando é promulgada a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). "Com a inclusão das matérias pedagógicas para as licenciaturas, o modelo de formação "3+1" não seria mais admitido (em tese, ao menos)" (Martins-Salandim, 2012, p. 269).

Atrelado à publicação da LDB, o Parecer 292 de 1962 do Conselho Federal de Educação determinou a duração dos cursos superiores (quatro anos para a licenciatura) e seus currículos mínimos. Licenciatura e Bacharelado podiam ser obtidos paralelamente.

> Regulamentada pelo Parecer CFE nº. 292/1962, a licenciatura previa o estudo de três disciplinas: Psicologia da Educação, Elementos de Administração Escolar, Didática e Prática de Ensino; esta última em forma de Estágio Supervisionado. Mantinha-se, então, a dualidade, bacharelado e licenciatura (...), ainda que, nos

> termos daquele Parecer, não devesse haver a ruptura entre conteúdos e métodos, manifesta na estrutura curricular do esquema 3+1. (Brito, 2006, p. 2)

A citação anterior possibilita compreender que apesar do abandono ao "esquema 3+1", o modelo de formação pautado no desenvolvimento do pesquisador em conteúdos matemáticos ainda se mantém.

Outra legislação que modificou a formação de professores de matemática no Brasil ocorreu com a publicação da LDB de 1971. Pela lei, passa-se a ter dois tipos de licenciatura:

> Após a reformulação da LDB, em 1971, as licenciaturas ficaram divididas em curta (voltadas à formação do professor para o primeiro grau, de quinta a oitava série) e plena (para o segundo grau), com redução de sua duração mínima para três anos, no caso da licenciatura plena, e um ano e meio, no caso da curta. (Martins-Salandim, 2012, p. 332).

Apesar de todas essas modificações, Martins-Salandim (2012, p. 332) salienta que as discrepâncias entre as disciplinas específicas e as pedagógicas continuaram a ocorrer. No entanto, para Moreira e David (2007), a partir da década de 1970 iniciaram-se as discussões a respeito da formação meramente técnica do professor de matemática.

Por meio desses dois trabalhos – Martins-Salandim (2012) e Moreira e David (2007) – é possível inferir um novo modelo de formação de professores: verifica-se a preocupação com a formação pedagógica do professor de matemática demonstrado pela inclusão de disciplinas que se afastam do modelo que se preocupa apenas em transmitir conteúdos, mas se mantêm as separações entre as disciplinas específicas e pedagógicas e a dificuldade em entrelaçar teoria e prática.

Atualmente, a legislação em vigor na educação refere-se à LDB de 1996. Essa lei, em seu artigo 61, estabelece como fundamentos para a formação de profissionais da educação a associação entre teoria e prática, inclusive mediante a capacitação em serviço. Ainda, a LDB de 1996 estabelece que para atuar na educação básica (1º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio) o candidato deverá se habilitar em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação. Desse modo, a Licenciatura Curta não deve mais ser oferecida pelos estabelecimentos de ensino superior.

Por tudo que foi exposto, podemos dizer – em acordo com Saviani (2006) – que tivemos dois modelos de formação de professores de matemática predominantes no Estado de São Paulo, no período considerado em nosso estudo, em nível superior: o modelo "3+1" em que para ser professor é necessário, primeiramente, ser bacharel; e o modelo em que licenciatura e bacharelado se separam, e as disciplinas pedagógicas deixam de ser coadjuvantes no processo de formação de professores de matemática.

Cursos vagos

Não há um trabalho específico, por nós conhecido, sobre o tema. No entanto, Baraldi (2003) e Martins-Salandim (2012), ao realizarem seus trabalhos de doutoramento buscando compreender a formação do professor de matemática em sua região de inquérito (Bauru e Estado de São Paulo, respectivamente) se depararam com depoentes que foram perpassados por essa formação.

Baraldi (2003, p. 235) esboça uma definição de curso vago: aquele "cujas atividades, realizadas nos finais de semana, era contra-opção aos cursos de Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática, com a duração de quatro anos e com aulas presenciais durante toda semana".

O Curso Vago ainda é uma incógnita nas pesquisas de âmbito educacional. Uma hipótese para o desconhecimento desse modelo formativo pode estar na inexistência de legislação oficial sobre o assunto. Os Cursos Vagos não eram regulados pela legislação, dessa forma escondiam-se por meio de cursos regulares. A flexibilidade da frequência era acordada entre alunos e professores, mediados pela estrutura da instituição formadora. (Martins-Salandim, 2012). O curso vago era uma opção ao professor que já se encontrava atuante na sala de aula e que não possuía tempo "vago" para cursar a formação regular. Devido a inexistência de "dados" sobre esse modelo formativo, não pudermos compreendê-lo a ponto de defini-lo.

Escola normal

A primeira Escola Normal foi instalada na cidade de Niterói em 1835, seguida de Bahia (1836), Pará (1839), Ceará (1845) e São Paulo (1846). Implantada com a responsabilidade de formar professores primários, possuía a duração máxima de dois anos e em nível secundário. Com relação à estrutura "pedagógica" dessas escolas, Nogaro (2002, p. 86) aponta que "a formação de professores nessas escolas era assistemática, sem qualquer método e com preocupações maiores em relação à dedicação, qualidades morais e aptidão, em detrimento dos conhecimentos especializados".

Saviani (2006) salienta que a expansão da preocupação com a formação didático-pedagógica do professor primário teve início com a instalação da Escola-Modelo (por volta de 1890). Essas escolas foram criadas com o intuito de servir como aplicação, em forma de exercícios práticos, dos estudos teóricos realizados na Escola Normal. "De fato, foi por meio dessa escola de aplicação que o modelo pedagógico-didático se tornou a referência para a formação de professores propiciada pelas escolas normais." (Saviani, 2006, p. 5).

Almeida (2009) defende a mesma tese de Saviani, mas acrescenta, no entanto, que a maioria das escolas normais existentes no país ainda traziam as marcas do modelo em que a formação do professor pautava-se nos conteúdos específicos. Uma reforma específica desse nível de ensino ocorreu através do Decreto-Lei 8.530 de 02/01/1946 – que ficou conhecida como Lei Orgânica do Ensino Normal. Até a promulgação desse decreto, o Ensino Normal – assim como o ensino primário – era de responsabilidade dos Estados, não havendo uma política educacional nacional. Assim, a Lei tinha como objetivo "a uniformização e a melhoria do ensino mediante o estabelecimento de diretrizes e normais de caráter nacional" (Nogaro, 2002, p. 103). Ao abordar o currículo proposto por essa lei, Nogaro (2002) o caracteriza como diversificado e especializado.

Na LDB de 1961 não houve alterações quanto à estrutura estabelecida na Lei Orgânica de 1946. Esse modelo de Escola Normal apenas foi modificado com a LDB de 1971 em que o Curso Normal foi transformado em Habilitação Específica de 2º grau para o exercício do magistério de 1º grau. Estava extinta a Escola Normal. Para Saviani (2006, p. 2) "este modelo considera que a formação propriamente dita dos professores só se completa com o efetivo preparo pedagógico-didático".

Pelo exposto, é possível perceber que apesar de um início marcado pela valorização dos conhecimentos específicos em oposição aos pedagógicos, a Escola Normal teve como principal modelo aquele pautado na formação pedagógica. Cabe salientar, que a formação matemática oferecida pela Escola Normal limitava-se a um ano de estudos básicos e que muitos professores normalistas assumiram cargos como professores de matemática secundaristas devido à insuficiência de professores no Estado.

Campanha de aperfeiçoamento e difusão do ensino secundário

A democratização do acesso ao ensino secundário teve como conseqüência a necessidade da ampliação quantitativa de professores secundaristas. No entanto, os governantes acabaram enfrentando um obstáculo: as Faculdades de Filosofia – localizadas, principalmente, nos grandes centros e capitais – eram insuficientes para formar o quadro necessário de professores para atender o aumento na demanda do ensino secundário.

Buscando solucionar esse problema, é instituída em 1953 a Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES). Dentre suas atribuições, a CADES promoveu cursos para professores secundaristas, com a duração de um mês (janeiro ou julho – períodos de férias escolares) na tentativa de suprir as deficiências conceituais e pedagógicas dos professores nas disciplinas que iriam lecionar ou que já lecionavam. Eram três as disciplinas ministradas no curso: Didática Geral, Didática Específica e Conteúdo Específico, sendo um professor para cada uma delas.

Ao final desse curso era necessária a aprovação no Exame de Suficiência. Como explicitado por alguns depoentes no trabalho de Baraldi (2003), eram os professores da CADES quem indicavam os alunos que poderiam prestar tal exame. Caso contrário, pediam que o aluno se preparasse mais um ano. Aos aprovados era garantido o registro para lecionar em escolas em que não houvesse licenciados por Faculdades de Filosofia. Com o surgimento de faculdades no interior dos estados brasileiros ao final da década de 1960, os cursos promovidos pela CADES se tornam desnecessários sendo que o Exame de Suficiência perde sua validade com a LDB de 1971.

Devido à preocupação governamental em formar o professor secundarista, é difícil estabelecer quais dos dois modelos formativos estabelecidos por Saviani (2006) – ênfase nos conteúdos pedagógicos x específicos – melhor define os cursos oferecidos pela CADES. Aparentemente, os cursos da CADES eram uma mescla dos dois modelos, mas devido a sua curta duração (um mês) eram limitados, tanto nas questões pedagógicas quanto de conteúdos.

Colegial científico

O curso colegial é equivalente ao atual Ensino Médio. Pelo Decreto-Lei 4.244 de 1942, o curso era dividido em dois cursos paralelos: o clássico e o científico. O curso clássico abordava o conhecimento de filosofia e o estudo das letras, enquanto o curso científico era marcado pelo ensino de ciências. A falta de professores na localidade fez com que estudantes do Curso Científico assumissem aulas em escolas do ensino secundário. O Curso Científico não tinha finalidade de formar professores, mas aprofundar o estudo das disciplinas exatas para os estudantes de nível médio. Nesse sentido, essa formação era em conteúdos específicos.

Considerações finais

Este trabalho buscou delinear alguns dos modelos pelos quais os professores de matemática do Estado de São Paulo foram formados e que puderam ser detectados nos depoimentos analisados. Não tinha como objetivo, portanto, definir qual foi o melhor curso para a formação do professor de matemática paulista dado a complexidade desta questão.

No estudo efetuado, pudemos compreender que a importância da formação em nível superior é pouco sentida nas cidades interioranas, principalmente, devido a sua implantação depois da década de 1960: aos professores do interior (paulista), muitas vezes, restaram como possibilidades para a formação docente a Escola Normal, a CADES e, em alguns casos, o Curso Científico.

Quanto aos modelos formativos, dois se contrapõem: baseado apenas nos conteúdos específicos e aquele cuja ênfase está nos conteúdos pedagógicos. As perspectivas atuais buscam inter-relacionar esses dois modelos, integrando teoria e prática. No entanto, é sabido que essa integração não é simples e precisa ser mais bem estudada em novas pesquisas.

Referências bibliográficas

Almeida, M. B. de. (2009) *A formação inicial de professores no curso de Pedagogia*: constatações sobre a Formação Matemática para a Docência nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado não publicada, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, Brasil.

Baraldi, I. M. (2003). *Retraços da Educação Matemática na região de Bauru (SP)*: uma história em construção. Tese de Doutorado não publicada. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Brito, R. M. (2006). Breve histórico do curso de pedagogia no Brasil. *Revista Dialógica*1(1), 1-10. Recuperado em 30 de setembro de 2012 de http://dialogica.ufam.edu.br/index.htm

Ferreira, V. L. (2009). *O processo de Disciplinarização da Metodologia do Ensino de Matemática.* Tese de Doutorado não publicada. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, Brasil.

Martins-Salandim, M. E. (2012). *A interiorização dos Cursos de Matemática no Estado de São Paulo: um exame da década de 1960.* Tese de Doutorado não publicada. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Nogaro, A. (2002). *Teoria e Saberes Docentes*: a formação de professores na Escola Normal e no Curso de Pedagogia. Erechim: EdiFAPES.

Saviani, D. (2006). Pedagogia e formação de professores no Brasil: vicissitudes dos dois últimos séculos. *Anais do Congresso Brasileiro de História da Educação 4*, 1-10, Goiânia. Recuperado em 08 de outubro de 2012 de <http://www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe4/coordenadas/eixo01/Coordenada%20por%20Dermeval%20Saviani/Dermeval%20Saviani%20-%20Texto.pdf>.

Silva, C. M. S. da. (2000). A faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP e a formação de professores de Matemática. *Anais da Reunião Anual da ANPED 23*, 1-19, Caxambu.

Recuperado em 08 de outubro de 2012 de http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/faculdade_filosofia.pdf

Silva, C. M. S. da. (2002). Formação de professores e pesquisadores de Matemática na Faculdade Nacional de Filosofia. *Cadernos de Pesquisa* (117), 103-126.

PERCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE RESULTADOS DE AVALIAÇÕES EXTERNAS

Rosangela de Souza Jorge Ando; Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN Brasil
rosangela.ando@gmail.com , nielce.lobo@gmail.com

Resumo. Este artigo discute alguns resultados de uma pesquisa de mestrado que investigou as percepções de professores de Matemática, sobre resultados de Avaliações Externas num contexto de formação continuada envolvendo o Ensino de Álgebra na Educação Básica. A pesquisa qualitativa, na metodologia investigação-ação, se desenvolveu em um processo formativo com 16 professores. O episódio aqui discutido refere-se a um dos encontros no qual foi analisada uma questão específica de Álgebra da avaliação do Saresp (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) e analisadas as problematizações e reflexões que surgiram. Concluímos que, no grupo de professores em formação continuada, o conhecimento específico do conteúdo esteve em construção. Um dos resultados da pesquisa foi que os encontros do processo formativo propiciaram reflexão compartilhada e evolução nos conhecimentos profissionais docentes, especialmente quanto aos conhecimentos pedagógicos.

Palavras chave: formação continuada, ensino de álgebra, reflexão

Abstract. This paper broaches results about a Master's Research. It investigated the Mathematics teacher's perceptions on the results of External Assessment in the context of continued education surrounding the teaching of Algebra in Elementary Education. The qualitative research was developed in a learning process with sixteen teachers. This episode refers to a specific question on algebra from Saresp (Evaluation System of School Performance of São Paulo) and were analyzed difficulties and reflections that arose. We conclude that, in the group of teacher in continuing education, the knowledge of specific content was under construction. One of the results was the meetings promoted shared reflection and led teaching professional knowledge, especially regarding pedagogical knowledge.

Key words: continuing education, teaching algebra, reflection

Introdução

Os resultados das avaliações externas têm se configurado como um instrumento para informar os níveis de aprendizagem dos alunos e para fornecer subsídios às decisões, tanto dos gestores escolares quanto dos professores, na determinação de diretrizes para a melhoria (ou manutenção) dos indicadores por elas apontados.

O professor de Matemática hoje no Estado de São Paulo, Brasil, se depara com uma situação de implementação de um novo currículo e com a consolidação dos sistemas de Avaliações Externas que apontam em seus resultados, baixo índice de rendimento dos alunos em Matemática. Este contexto na Educação Básica, de demanda por novas metodologias para ensinar, além da instituição de metas para melhorar o rendimento dos alunos, pode causar insegurança no professor em desenvolver o ensino de Matemática.

Para auxiliar o professor com esta nova metodologia de ensino, bem como utilizar os resultados dos Relatórios das Avaliações Externas, em particular o Saresp, como mais um aliado para impulsionar a melhoria do ensino de Matemática entendemos que os processos formativos que discutam as avaliações externas são necessários.

Este artigo tem por objetivo discutir resultados parciais de uma pesquisa de mestrado que investigou a compreensão evidenciada por professores de Matemática, relativas a resultados de Avaliações Externas num contexto de formação continuada envolvendo o Ensino de Álgebra na Educação Básica.

O Estudo

A pesquisa se inseriu em um projeto de Educação Continuada desenvolvido pela SEESP (Secretaria de Estado da Educação de São Paulo) em uma das Diretorias Regionais de Ensino, com professores de Matemática da rede estadual O projeto em questão teve por objetivo subsidiar a implementação de um novo currículo no Estado. Em particular, a investigação foi desenvolvida em um módulo de Álgebra no qual foram discutidos conteúdos de Matemática dos materiais de apoio ao trabalho docente no currículo atual (Caderno do Aluno e Caderno do Professor – materiais da SEESP que contêm Situações de Aprendizagem), assim como analisados resultados de avaliações externas do Saresp (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) para favorecer a socialização dos conhecimentos didáticos para o ensino da Matemática.

A fundamentação teórica da pesquisa, no que se refere à Formação Continuada, vem dos estudos de Shulman (1986) sobre conhecimento profissional docente, complementado pela Teoria do Conhecimento para o Ensino de Matemática, de Ball, Thames e Phelps (2008). Em relação ao processo formativo empreendido nos apoiamos nos estudos de Serrazina (2010) que elenca cinco princípios a serem considerados. No que se refere à profissão docente, entendemos, segundo Imbernón (2000) que "O conceito de profissão não é neutro, nem científico, mas é produto de um determinado conteúdo ideológico e contextual; uma ideologia que influencia a prática profissional" (p.26)

A metodologia da pesquisa é a qualitativa na acepção de Bogdan e Biklen (1994), para os quais, o investigador é o instrumento principal no ambiente natural, analisando os dados de forma indutiva e adotando estratégias e procedimentos de modo a considerar as experiências de acordo com o ponto de vista do sujeito da investigação. Caracteriza-se como investigação-ação na qual existe uma intervenção do pesquisador na realidade, ou seja, o investigador está envolvido diretamente na situação investigada. Para estes autores "a investigação-acção consiste na recolha de informações sistemáticas com o objectivo de promover mudanças" (p.292). Entendemos que ocorre uma intervenção do pesquisador na realidade. O investigador que opta pela metodologia da investigação-ação pretende investigar uma determinada situação ou um determinado fato para procurar causas, documentá-las de forma consistente a fim de sugerir propostas de mudanças destas situações. A investigação-ação baseia-se nos depoimentos e nas próprias palavras das pessoas, transcrevendo entrevistas ou gravações, sejam elas em áudio ou em vídeo, tentando convencer pessoas ou promover mudança da situação. Nosso estudo apresenta tais características, dessa forma, o classificamos como uma pesquisa qualitativa do tipo investigação-ação.

A análise foi do tipo interpretativa e por triangulação de dados, segundo Mathison (1988 apud Lobo da Costa, 2004), que consiste em uma estratégia de análise de diversas fontes de informações a fim de confrontá-las para buscar pontos divergentes ou convergentes durante a análise dos dados coletados.

Quanto ao processo de categorização, segundo Fiorentini e Lorenzato (2007), são três os tipos possíveis de categorização de dados, sendo que o primeiro é relativo ao estabelecimento *a priori* das categorias, ou seja, o pesquisador as estabelece a partir do referencial teórico; o segundo tipo se refere às categorias que emergem do contexto de pesquisa, isto é, são detectadas após a coleta de dados e o terceiro tipo é o misto, as categorias são obtidas no "confronto entre o que diz a literatura e o que se encontra nos registros de campo". (Fiorentini e Lorenzato, 2007, p.135)

Para a análise dos dados nesta pesquisa não foram estabelecidas *a priori* categorias de análise, consideramos as reflexões emergentes das discussões ao longo dos encontros de formação, dos registros escritos pelos sujeitos sobre os itens e de suas produções sobre ensino de equações e inequações feitas a partir das análises dos itens do Saresp. Desta forma, entendemos que a categorização dos dados pode ser considerada no terceiro tipo, na acepção de Fiorentini e Lorenzato (2007).

A pesquisa se desenvolveu em duas fases:

- Construção do módulo de Álgebra, compreendendo a escolha de atividades contidas nos materiais de apoio da SEESP, a Matriz de Referência do Saresp seleção de itens de Álgebra dos Relatórios Pedagógicos do Saresp (2008/2009) com baixo índice de acertos para análise dos descritores e distratores, para discussão no grupo;

- Pesquisa de Campo – desenvolvimento do módulo e investigação sobre as percepções dos professores a respeito dos resultados de avaliações externas e, além disso, a partir das análises dos professores de itens de Álgebra identificar quais as reflexões, problematizações dos professores, bem como as sugestões de possíveis intervenções para um melhor desenvolvimento do conteúdo.

A coleta de dados de campo foi feita por observação direta, gravação de áudio e vídeo dos encontros. Os sujeitos da pesquisa foram os 15 professores sendo que o módulo de formação teve oito encontros presenciais semanais e atividades à distância com pesquisa em ambiente virtual para complementar os estudos.

Os encontros

O módulo foi planejado, por determinação da SEESP, para ter atividades que perpassassem todas as séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. A equipe de Coordenação decidiu que houvesse pelo menos uma atividade do Caderno do Aluno (CA), que envolvesse Álgebra, de cada série (ou ano escolar). Estas atividades deveriam ser desenvolvidas em "Encontros" presenciais e à distância.

Os *Encontros* se comporiam de três momentos, sendo o primeiro com acolhimento, o segundo com o desenvolvimento de atividades do CA, leitura e reflexão de textos ou análise de itens constantes nos Relatórios Pedagógicos do Saresp, edições 2008 e 2009, e o terceiro com o fechamento do encontro, no qual seriam socializadas as soluções das atividades e/ou análises dos itens. Nos *Encontros* os professores deveriam estar dispostos em grupos de quatro a cinco pessoas.

Os encontros, no que se refere ao nosso foco de estudo, foram planejados da seguinte forma:

1º Encontro: apresentação do curso, do ambiente virtual para estudos complementares, uma breve retrospectiva sobre a história do ensino de Álgebra na Educação Básica e estudo de um texto sobre avaliação externa.

2º Encontro: Estudo sobre avaliações externas no Brasil, a distribuição dos conteúdos de Álgebra no currículo de Matemática do Estado de São Paulo, análise de atividade do caderno do aluno de 6ª série/7º ano (Investigando sequências por aritmética e álgebra - Volume 4 – 2009) e socialização.

3º. Encontro: Estudo da Matriz de Referência do Saresp, Atividade 1 de Análise de itens e socialização, Atividade do Caderno do Aluno - 7ª série/8º ano (Equações, tabelas e gráficos Volume 3 – 2009) e socialização. Proposta de estudos complementares sobre análise de atividades dos cadernos dos alunos com uma síntese a ser apresentada nos 7os e 8os encontros.

4º Encontro: Atividade 2 de análise de itens e socialização da Atividade.

5º Encontro: Atividade do Caderno do Aluno da 8ª série/9º ano (Grandezas Proporcionais: Estudo funcional, significados e contextos. Volume 2 – 2009) e socialização da atividade.

6º Encontro: Criação e análise de itens.

7º Encontro: Apresentação dos Estudos complementares por alguns grupos e Atividade 3 de análise de itens e socialização.

8º Encontro: Apresentação dos Estudos complementares por alguns grupos.

Análise de um episódio

Em um dos encontros, que escolhemos para discutir neste artigo, foram apresentados para análise pelos professores, alguns tópicos contidos na Matriz de Referência do Saresp. Foram detalhadas as competências cognitivas do sujeito consideradas na matriz, as quais se dividem em três grupos: competência para observar (GI), para realizar (GII) e para compreender (GIII); quais as habilidades avaliadas pelo Saresp em cada série/ano escolar e quais os conteúdos ou objetos do conhecimento que se dividem em quatro grandes temas: Números, operações e funções; Espaço e forma; Grandezas e medidas; Tratamento da informação. Além disso, foram apresentados os níveis de proficiência; a escala de proficiência para cada nível de escolaridade e o ciclo de matematização. Em seguida, foram discutidos três exemplos de itens e feitas as analises relacionando-as com a Matriz de Referência.

Essas discussões tiveram por propósito subsidiar o professor para, em seguida, empreender de forma autônoma análise dos itens das avaliações. Um episódio deste encontro que exemplifica a análise de itens e as problematizações ocorridas refere-se a proposta da atividade exposta na figura 1:

Atividade:
Discutir em grupo:
1) Apresentar as soluções que os alunos fariam.
2) Identificar as alternativas que não estão corretas e o comportamento das respostas dos alunos.
3) Analisar a aderência do item com a habilidade citada.
4) Acrescentar os comentários do grupo.

Exemplo 20

Habilidade avaliada

H15 – Expressar e resolver problemas por meio de equações.

Na rua onde Clara mora, há 70 construções, entre casas e prédios. O número de casas é igual a $\frac{9}{5}$ do número de prédios.

O número de casas nesta rua é:

a. 30
b. 35
c. 45
d. 55

Esta questão aparece também na prova da 8ª. série/9º. ano.

6ª. série/7º. ano:

a	b	c	d
13,8%	31,5%	37,7%	16,7%

8ª. série/9º. ano:

a	b	c	d
13,4%	29,8%	44,2%	12,5%

Fonte: Relatório Pedagógico do Saresp 2009 - Exemplo 20 – pág. 127 – H15

Figura 1: Atividade de análise de item

Para desenvolver esta atividade os professores formaram cinco grupos.

Em relação às soluções que os alunos fariam, as reflexões de três grupos centraram-se na análise da alternativa b errada (31,5%), um grupo apresentou a análise da alternativa c, correta (37,7%),com maior frequência e um grupo teve muita dificuldade para resolver. Quanto aos distratores os grupos levantaram conjecturas sobre as possibilidades de resolução ou raciocínio que levariam o aluno a assinalar as alternativas erradas. As conjecturas que surgiram foram relativas à dificuldade dos alunos quanto à leitura e interpretação, à resolução da equação ou por não entenderem a questão colocaram qualquer alternativa.

Quanto à aderência dois grupos consideraram que o item tem aderência à habilidade indicada e dois grupos consideraram que a questão envolve outras habilidades além da indicada.

Conjecturas que surgiram:

> *"O aluno terá o domínio de várias habilidades como frações, equações, mmc e outros." (Grupo 3)*
>
> *"O problema exige mais do que resolver através de equações, precisa também de conhecimento na montagem e resolução de sistemas."(Grupo 4).*

Quanto às reflexões gerais surgiram:

> *"o aluno deve ter habilidade na interpretação do problema e construção da equação que deverá resolver."(Grupo 1).*
>
> *"Falta base matemática das séries/anos anteriores."(Grupo 2).*
>
> *"muito difícil." (Grupo 3)*
>
> *"Problema inadequado para o conhecimento dos alunos de uma 6ª.série." (Grupo 4).*

Vale destacar que um dos grupos (Grupo 1), ao resolver o item 3, considerou-o difícil para os alunos. Eles próprios tiveram dificuldade em entender o enunciado. O grupo ficou absorto na resolução e discussão do problema e, no tempo reservado para a atividade, não discutiu as questões nela propostas, tais como a aderência do item à habilidade, etc.

Observamos que o conhecimento do conteúdo comum (Ball et al, 2008), está em construção nesse grupo. Vale ressaltar que como diz Shulman (1986) os professores conhecem cada conteúdo matemático de forma diferente e com profundidades diferentes.

No momento de socialização da atividade cada grupo apresentou sua análise e os demais grupos discutiram e complementaram os "depoimentos".

Emergiram nessa socialização novas reflexões, tais como as seguintes:

> *"... quando o aluno não sabe, tenta encontrar números nas respostas que associem aos dados dos problemas".*

> *"Nós resolvemos assim x mais 9/5 de x é igual a 70. Só que não sabemos se o aluno resolveria assim, pois teria que dividir por 14... e eu tenho classe de alunos de reforço e eles não sabem dividir com um número na chave, imagina dividir com dois números na chave. Daí tem problema..."*

> *"Ó o grande problema dos problemas é essa interpretação que se até nós se não souber a gente dança. É uma realidade. Nós professores temos dificuldade de interpretar o que realmente o problema tá pedindo. Resolver é fácil, mas interpretar é que é o problema... Precisa dominar o conteúdo....A gente tem que estar bem preparado para dar uma aula legal...Saber as saídas que pode dar para o aluno e deixar o aluno buscar as saídas também e as vezes o aluno por si só chega nessas respostas..."*

Uma professora ao final da socialização disse:

> *"Foi interessante analisar as questões e observar como o aluno poderia ter errado, discutir com os colegas sobre isso e que nem sempre temos oportunidades como essa."*

Todos concordaram com a fala desta sobre a validade da atividade realizada. Observamos que neste encontro os professores ao analisar resultados do Saresp se preocuparam em verificar supostas soluções dos alunos, embora tenham percebido que são apenas suposições e que não havendo o registro das soluções dos alunos não poderiam precisar onde erraram. Perceberam também que se estas questões fossem abertas teriam um parâmetro melhor para analisar.

Com a interação entre os componentes do grupo, superaram esta dificuldade, no entanto, fica evidenciado que alguns professores têm falhas no conhecimento do conteúdo da disciplina específica, o qual é fundamental para a docência (Shulman, 1986) e que com isto ele terá dificuldades para levar o seu aluno a desenvolver as habilidades que estão sendo requeridas para a solução de determinadas situações matemáticas.

Conclusão

Concluímos que, no grupo de professores em formação continuada, o conhecimento específico do conteúdo esteve em construção ao longo de todo o processo. Um dos resultados da pesquisa foi que os encontros propiciaram reflexão compartilhada e evolução nos conhecimentos profissionais docentes, especialmente quanto aos conhecimentos pedagógicos.

Referências bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H. e Phelps G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*. November/December, 59, 389-407.

Bogdan, Robert e Biklen, Sari (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Fiorentini, D. e Lorenzato, S. (2007). *Investigação em Educação Matemática: Percursos teóricos e metodológicos.* 2ª Ed. Campinas: Autores Associados.

Imbernón, F. (2000). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza* (Coleção Questões da Nossa Época, 77). São Paulo: Cortez.

_______.(2009). *Formação permanente do professorado: novas tendências*; tradução de Sandra Trabucco Valenzuela. São Paulo: Cortez.

Lobo Da Costa, N. M. (2004). .*Formação de professores para o ensino da matemática com a informática integrada à prática pedagógica: exploração e análise de dados em bancos computacionais*. Tese de Doutorado não publicado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Serrazina, M. L. (2010). *A formação contínua de professores em matemática: o conhecimento e a supervisão em sala de aula e a sua influência na alteração das práticas* JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática 2(1) Acesso em 15 de abril de 2012 de http://periodicos.uniban.br/index.php/ JIEEM/article/view/112/92

Shulman, Lee S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Education Researcher*, *15*(2), 4-14.

GRUPO DE ESTUDOS: PROFESSORES DE MATEMÁTICA INVESTIGANDO O USO DE SOFTWARE NO ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ronaldo Barros Orfão, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Bandeirante de São Paulo. Brasil
ronaldobarros63@hotmail.com, nielcelobo@uol.com.br

Resumo. Este artigo discute parte de uma pesquisa cujo objetivo foi identificar os fatores relevantes para impulsionar o desenvolvimento profissional docente, os quais emergem em um grupo de estudos sobre o uso de tecnologia no ensino de trigonometria. A pesquisa qualitativa fundamentou-se no conceito de desenvolvimento profissional de Ponte, nos estudos de Shulman sobre conhecimento profissional e de Schön sobre reflexão. Neste texto relatamos e analisamos um encontro do grupo, no qual, com o software Geogebra, se estabeleceu uma analogia entre o movimento de um ponto no ciclo trigonométrico e o movimento periódico dos pistões de um motor. Os resultados da pesquisa indicaram que os encontros propiciaram aprendizagem profissional a partir de um trabalho colaborativo caracterizado pelo diálogo, desenvolvimento da autoestima, reflexão compartilhada, participação voluntária e confiança mútua.

Palavras chave: desarrollo profesional docente, geogebra, trigonometria

Abstract. This article discusses part of a research aimed to identify the relevant factors to boost teacher professional development, which emerge in a group of studies on the use of technology in teaching trigonometry. The qualitative research based on the concept of professional development Ponte, in studies of Shulman on professional knowledge and reflection on Schön. In this paper, we describe and analyze a group meeting in which, with the software Geogebra, has established an analogy between the motion of a point in the cycle trigonometric and periodic motion of the pistons of an engine. The research results indicated that the meetings led professional learning from a collaborative work characterized by dialogue, development of self-esteem, shared reflection, voluntary participation and mutual trust.

Key words teacher professional development, geogebra, trigonometry

Introdução

Os estudos sobre aplicações de tecnologias computacionais para o ensino da matemática, que vem sendo observados nas últimas décadas, dão conta de que, por várias vezes, se atribuía à maquina o sucesso ou fracasso do experimento. Sobre tal questão, Giraldo & Carvalho (2004 apud Hasche, 2004, p.1), afirmam que o uso da tecnologia nas aulas de matemática tem valor relevante, pois proporciona ao professor mais uma opção além do modelo tradicional. Contudo, os autores advertem que a preparação e a motivação dos professores, aliadas ao planejamento criterioso das atividades é que vão possibilitar uma atitude investigativa dos alunos. Diante disso, demanda-se uma necessidade de formação docente que auxilie o professor a lidar com ferramentas computacionais de modo que ele possa criar tarefas apropriadas para esta nova maneira de ensinar.

Por sua vez, os professores, por serem, em muitos casos, oriundos de uma formação tecnicista, acreditam que a melhor maneira de ensinar é da mesma forma que aprenderam. Segundo

Fiorentini (1995), a formação tecnicista parte do pressuposto que a matemática consiste basicamente, na fixação de conceitos estimulados por atividades que facilitem a memorização dos fatos e exercicios operantes para desenvolver habilidades e atitudes computacionais e manipulativas, capacitando o aluno à resolução de exercicios ou de problemas padrões. Este mesmo autor aponta que nas décadas de 70 e 80, os cursos de formação continuada de professores eram tratados como reciclagem, treinamento, aperfeiçoamento de professor com técnicas e metodologias de ensino de matemática. Estes cursos admitiam que, com o passar dos tempos, os professores defasavam-se em conteúdos e metodologias, não sendo capazes, eles próprios, de produzirem novos conhecimentos e se atualizarem a partir da prática, necessitando, para isso, tomar conhecimento e novos saberes curriculares produzidos pelos especialistas. Ao contrário desta linha de pensamento, nos anos 90,através de estudos internacionais acerca do pensamento do professor, observou-se que, primeiro: os professores escolares também produzem, a partir dos desafios da prática, saberes profissionais relevantes e fundamentais e segundo: os resultados das experiências e estudos dos próprios formadores pesquisadores, alguns realizados em colaboração com professores escolares, mostravam que os cursos sob o modelo da racionalidade técnica pouco acrescentavam aos conhecimentos dos docentes dentro do ambiente escolar.

O professor, neste olhar de desenvolvimento profissional, constitui-se num agente reflexivo de sua prática pedagógica, passando a buscar, colaborativamente, subsídios teóricos e práticos que ajudem a compreender e a enfrentar os problemas e desafios do trabalho em sala de aula. Trata-se de um processo não linear, de idas e vindas, de avanços e retrocessos, cada vez mais amplos e completos, de reflexão sistemática sobre a ação educativa. Hoje em dia, com o maior acesso à tecnologia e consequentemente ao grande número de informações, os discentes chegam à escola ansiando pela continuidade deste avanço tecnológico, e rejeitando veementemente o sistema educacional que privilegia a técnica, a lousa e o giz.

A Pesquisa

A pesquisa que subsidia este artigo teve fundamentação teórica constituída a partir dos conceitos de conhecimento profissional de Shulman (1986), de reflexão de Schön (1992), e de desenvolvimento profissional do professor de matemática de Ponte (1998). A metodologia foi a qualitativa, do tipo *Design Experiment* desenvolvida por Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer, & Schäuble (2003). Essa metodologia consiste em um modelo dinâmico que permite fazer, caso necessário, mudanças conforme o desenvolvimento da pesquisa. Na investigação problematizamos construindo e desenvolvendo mecanismos para confrontar a pesquisa com a teoria já existente.

O objetivo da pesquisa foi identificar os fatores relevantes para impulsionar o desenvolvimento profissional docente, os quais emergem em um grupo de estudos de professores de Matemática ao investigarem o uso de tecnologia para o ensino de trigonometria no Ensino Médio. Foi constituído um grupo de estudos formado por seis professores de matemática de uma escola de Educação Básica localizada na grande São Paulo. O grupo se reuniu durante um semestre letivo no próprio local de trabalho, para investigar o processo de ensino e aprendizagem de trigonometria com o uso de recursos tecnológicos.

TIC no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática

Segundo Ponte, Oliveira e Varandas (2003), com os quais concordamos, o professor deve ter conhecimento de novas tecnologias e deve, também, saber usá-las em suas práticas pedagógicas. No caso do professor de matemática, as tecnologias permitem reforçar o papel da linguagem, relevando a importância do cálculo e das manipulações algébricas, uma vez que, usando estes recursos, o professor potencializa as possibilidades de projetos de exploração, investigação e modelação, com isto favorecem o desenvolvimento dos alunos e a construção de competências, revelando atitudes positivas com relação à aprendizagem.

As TIC desempenham, no mundo de hoje, um papel fundamental na comunicação e na educação. A tecnologia é uma ferramenta significativa no ensino das disciplinas, principalmente no ensino de matemática, uma vez que o seu uso pode simplificar os cálculos, as manipulações simbólicas, reforçar e representar a linguagem gráfica, valorizar os conceitos e aplicações na investigação em sala de aula, viabilizar o desenvolvimento de atividades dos projetos educativos.

Os envolvidos na formação devem adotar valores essenciais de uma profissão que contempla aperfeiçoar-se como educador para que possa contribuir com as instituições educacionais das quais fazem parte. Para Ponte, Oliveira e Varandas (2003):

> Um professor de matemática deve ser capaz de realizar as atividades próprias de um professor e identificar-se pessoalmente com a profissão. Isso significa assumir o ponto de vista de um professor, interiorizar o respectivo papel e os modos naturais de lidar com questões profissionais (p. 163).

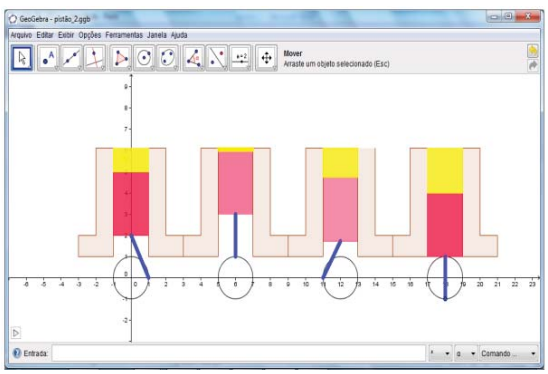
Entendemos que faz parte do desenvolvimento profissional do professor o domínio das TIC, cada vez mais presentes no ambiente escolar, tornando imprescindível que o docente se familiarize com os softwares educativos constituindo um meio educacional que auxilie a aprendizagem dos alunos.

Optamos pelo software Geogebra, disponibilizado em, (http://www.geogebra.org) uma vez que ele reúne Geometria e Álgebra ao mesmo tempo, com distribuição gratuita e fácil acesso. Este software foi desenvolvido por Markus Horhenwarter, em 2004, na Universidade de Salzburg. Trata-se de um sistema de geometria dinâmica que permite construções manipuláveis por equações. O software apresenta uma característica voltada para relacionar várias funções ao mesmo tempo; duas visões são características do Geogebra: uma expressão em álgebra que corresponde à representação de um objeto da geometria e uma expressão em geometria que corresponde à representação de um objeto em álgebra,

O movimento de um pistão do motor de automóvel e as funções seno e cosseno

Escolhemos as funções seno e cosseno por serem periódicas e consideradas relevantes para se estudar na Educação Básica, uma vez que diversos fenômenos da natureza são periódicos. Para tanto, fizemos uma analogia com um motor de quatro cilindros de um automóvel, ilustrado nas figuras 1 e 2, pois o movimento periódico dos pistões pode ser modelado pelas coordenadas de um ponto P=(cos(x), sen (x)) no ciclo trigonométrico.

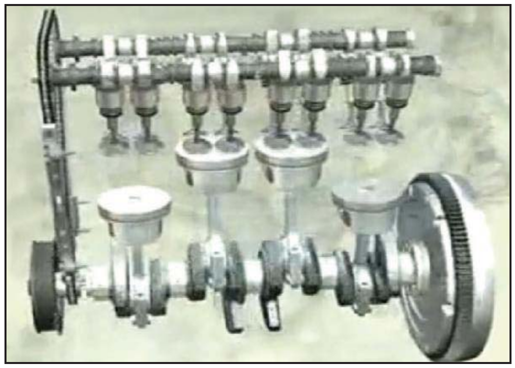
Para visualização do movimento do pistão, foi proposta a análise de um vídeo disponibilizado no endereço http://www.youtube.com que mostra a montagem e o movimento de um motor de automóvel.



Fonte: Acervo próprio dos autores

Figura 1: Motor de Quatro Cilindros representado no Geogebra.

No decimo primeiro encontro, o conteúdo matemático desenvolvido foi uma aplicação das funções seno e cosseno modelada ao movimento periódico do pistão de um motor de 4 cilindros.



Fonte: http://www.youtube.com/watch?v=QPhJKSVI1lI.

Figura 2: Apresentação do Pistão, motor 4 cilindros

Iniciamos a reunião com o questionamento:

Pesquisador: vocês sabem por que uma moto CG é 125 cilindradas?

João: tem a ver com a potência da moto, a 250 é mais potente, mas não sei o significado deste valor.

Pesquisador; 125 cilindradas significa dizer que a câmara de combustão do motor possui aproximadamente $125cm^3$.

Teixeira; Como assim?

Apresentamos ao grupo um texto, disponibilizado no Portal São Francisco, em (http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/motor-a-explosao/motor-a-explosao.php), e no Portal "Brasil Escola" o qual esclarece o funcionamento básico do motor de um cilindro. De imediato mostrei o exemplo:

O motor de uma moto é considerado monocilíndrico (um cilindro). Determine a cilindrada do motor de uma moto com as seguintes especificações: Diâmetro do cilindro: 56,5 mm Curso do pistão: 49,5 mm

Fonte: Brasil Escola

Após a resolução deste exemplo, obtivemos como resultado um valor aproximadamente 124 cm^3 que o fabricante, de motocicleta, arredonda para 125 cilindradas. Em seguida mostrei ao grupo uma tela previamente preparada por mim, (figura XVII), que relaciona o ciclo trigonométrico com o movimento do pistão e durante a discussão destacamos o dialogo:

Pesquisador: podemos associar o movimento do "vai e vem" do pistão pode ao ciclo trigonométrico, (mostrado a animação na tela do data show) e o deslocamento "a vida" do motor a função seno ou cosseno, como se fosse o fio inextensível se deslocando ao eixo real que seria a estrada, o que vocês acham?

João: Legal e podemos falar de vários outros conceitos. (se referindo ao volume, fórmula para calcular a cilindrada, deslocamento vertical para fixar o pistão)

Após este encontro constamos que estavámos nos apropriandos das três categorias do conhecimento desenvolvidas por Shulman (1986):

1) *Conhecimento do Conteúdo* que se refere ao conhecimento específico da disciplina que o professor leciona, incluindo as compreensões, conceitos e procedimentos, entre outros fatores relacionados com esta disciplina em seus diferentes domínios de conhecimentos.

2) *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* referindo-se ao que vai além do conhecimento da disciplina para o ensino, evidenciando uma forma particular de conhecimento para os tópicos mais regularmente ensinados em sua área de ensino, buscamos várias estratégias de representação das ideias, incluindo ilustrações, exemplos, demonstrações de diferentes formas de representar e formular o assunto, tornando compreensível para os outros.

3) *Conhecimento Pedagógico Geral referindo*-se a diferentes mecanismos de ensinar e aprender, valorizando os conhecimentos prévios dos alunos, conhecimento do cotidiano escolar que envolve atitudes pequenas como, por exemplo, esta discussão feita pelo grupo de estudo buscando uma maneira diferente de ensinar e aprender trigonometria.

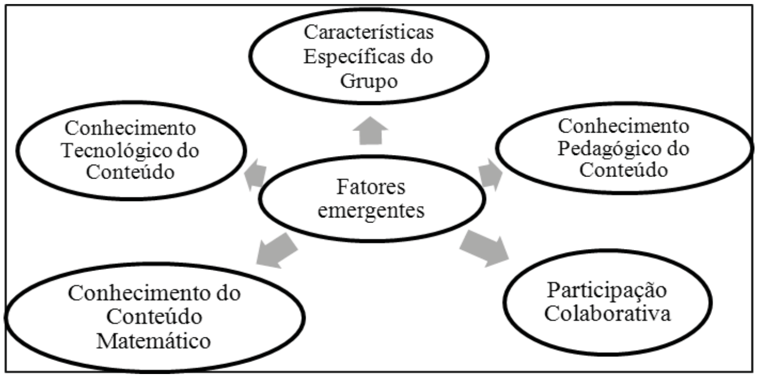
Conclusões

A pesquisa apontou como fatores relevantes para o desenvolvimento profissional docente: características específicas do grupo, tais como, participação voluntária, confiança mútua, objetivos comuns e interesse em buscar alternativas para o ensino de trigonometria; o conhecimento do conteúdo específico – as discussões do grupo favoreceram a (re)conceituação de conceitos, tais como; o de radiano e o de periodicidade. A participação colaborativa durante todo o tempo e especialmente quando aplicaram atividades com os alunos; o conhecimento pedagógico do conteúdo – as discussões viabilizaram a análise e a reflexão sobre ensino de trigonometria, em particular das funções seno e cosseno, temática para o qual desenvolveram metodologias diferenciadas; o conhecimento tecnológico do conteúdo – utilizar o software, analisar pesquisas de seu uso no ensino e criar atividades e aplicá-las com os alunos auxiliaram a construir esse conhecimento.

A análise criteriosa dos encontros do grupo e dos dados coletados nos permitiu concluir que os fatores relevantes para o desenvolvimento profissional docente podem ser agrupados da seguinte forma:

1) Características ligadas ao próprio grupo, 2) Características ligadas ao conhecimento matemático do conteúdo, 3) Participação colaborativa, 4) Conhecimento pedagógico do conteúdo, 5) Conhecimento tecnológico do conteúdo.

O quadro1 sintetiza os grupos de fatores emergentes no Grupo de Estudos.



Quadro 1: características emergentes para o desenvolvimento profissional docente

Construir atividades no computador oportunizou aos professores e aos alunos vivenciarem uma nova maneira de aprender um conteúdo, diferente da maneira tradicional, e dar a ambas as partes a liberdade de exercer livremente a imaginação e a criatividade, o que pode ser considerado um passo fundamental na direção de institucionalizar o uso da tecnologia no cotidiano didático, favorecendo o domínio sobre as ferramentas tecnológicas.

Nesta pesquisa, entendemos que a formação de um grupo de estudos, dentro da unidade escolar e com a característica de ter uma ligação entre a universidade e a escola, foi um fator relevante para impulsionar o desenvolvimento profissional do grupo e pode ser uma alternativa para desenvolver na escola uma perspectiva de organização aprendente.

Quando o professor se apropria da TIC, ele aumenta seu leque de conhecimentos que, aliado a sua experiência e ao seu conhecimento vindo da reflexão, incrementam seu desenvolvimento profissional. Ponte (1998) afirma ainda, que os professores de Matemática precisam saber usar softwares educacionais, principalmente os relacionados com sua disciplina, favorecendo assim o seu desenvolvimento profissional.

Evendeciamos que, no contexto investigado, o estabelecimento de grupos de estudos, envolvendo a parceria universidade-escola foi uma possibilidade viável para impulsionar o desenvolvimento profissional docente e auxiliar na integração dos recursos tecnológicos ao ensino de trigonometria.

Referências bibliográficas

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. e Schäuble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Fiorentini, D. (1995).Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil, *Revista Zetetikê*, (4), 1-37

Hasche, F. (2008). Aprendizagem de funções reais utilizando geometria dinâmica. *IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática-HTEM*. Acesso em 1 de fevereiro de 2011 de http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/39.pdf

Ponte, J.P. (1998) Da formação ao desenvolvimento profissional. Conferência Plenária apresentada no Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat- 1998, realizado em Guimarães. In Actas do ProfMat 98(pp.27–44). Lisboa: APM. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentesjponte Acesso em 10 de mar 2009.

Ponte, J. P. D., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (2003). O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. Em: Fiorentini, D. *Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares* (pp. 159-192). Campinas, SP: Mercado de Letras.

Schön, D. A. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. Em: A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação 2* (pp.77-91). Lisboa: D. Quixote

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14.

FORMAÇÃO, PRÁTICA E MODOS DE PENSAR DE PROFESSORES: UMA ANÁLISE DE TESES E DISSERTAÇÕES EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Juliana França Viol
Universidade Estadual Paulista - UNESP - Rio Claro Brasil
viol.juliana@gmail.com

Resumo. Neste trabalho apresentamos uma pesquisa de Mestrado que objetivou compreender o movimento temático e teórico-metodológico das inter-relações das TIC e a Formação, Prática e Modos de Pensar de Professores que ensinam Matemática. Foi realizada uma pesquisa qualitativa – *Estado do Conhecimento da Pesquisa* – por meio de um mapeamento da produção acadêmica em Educação Matemática, no Estado de São Paulo e selecionamos como objetos de investigação setenta Teses e Dissertações, defendidas nos Programas de Pós-Graduação da USP, UNICAMP, UFSCar, UNESP-Rio Claro, PUC-São Paulo e UNESP-Bauru, no período de 1987 a 2007. A análise dos dados mostrou que elas podem ser categorizadas, de acordo com seu objeto de investigação, em três grupos: *Presença das TIC nos Processos de Formação de Professores de Matemática*; *Modos de Pensar de professores a respeito do uso das TIC nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática*; e *Presença das TIC nas práticas de ensinar e aprender Matemática*.

Palabras clave: formação de professores. tecnologias de informação e de comunicação

Abstract. In this paper we present a master research that aimed to understand the movement thematic and theoretical-methodological of the interrelations between ICT and Education, Practice and Modes of Thinking of Mathematics Teachers, by qualitative research, according to the modality of the State of Knowledge we develop a mapping of academic production in Mathematics Education in the State of São Paulo and selected as objects of research and analysis seventy Theses and Dissertations, produced at the Graduate Program of USP, UNICAMP, UFSCar, UNESP – Rio Claro, PUC – São Paulo and UNESP – Bauru, in the period from 1987 to 2007. The analysis of Theses and Dissertation showed that they can be categorized according to their object of research, into three groups: Presence of ICT in Mathematics Teacher Education Processes; Modes of Thinking of the Mathematics Teachers about the use ICT in the teaching and learning of mathematics, and presence of ICT in teaching and learning practices mathematics.

Key words: teachers education. information and communication technologies

Introdução

Neste artigo discutimos alguns aspectos das inter-relações das Tecnologias de Informação e de Comunicação (TIC) e a Formação de Professores de Matemática. Trata-se de uma investigação de abordagem metodológica qualitativa, segundo a modalidade do *Estado do Conhecimento da Pesquisa*. Para a realização dessa investigação, identificamos que a temática sobre as TIC e a Formação de Professores apresenta-se de forma complexa e multifacetada, que envolve múltiplas dimensões. Essas múltiplas facetas contempladas pela pesquisa sobre Formação de Professores nos levam a refletir acerca de sua relação com as TIC, frente aos avanços tecnológicos e seus reflexos na sala de aula.

Desenvolvemos nossa investigação com o objetivo de *identificar, evidenciar* e *compreender o movimento temático* e *teórico-metodológico das inter-relações das Tecnologias da Informação* e *Comunicação (TIC)* e a *Formação* e *Prática de Professores que ensinam Matemática*. Buscamos descrever como e sob quais abordagens estão sendo desenvolvidas as pesquisas acadêmicas em diferentes Programas de Pós-Graduação, do estado de São Paulo, no período de 1987 a 2007. Selecionamos para análise as Teses e Dissertações produzidas e defendidas nos Programas de Pós-Graduação em Educação da Universidade de São Paulo – USP, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP e Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista – UNESP *campus* Rio Claro e Pontifícia Universidade Católica – PUC – São Paulo e Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Universidade Estadual Paulista – UNESP *campus* Bauru.

Para a realização de nossa investigação, fundamentamo-nos em três perspectivas teóricas relacionadas à pesquisa sobre Formação de Professores: a primeira em uma perspectiva de definição do objeto de estudo da área, fundamentada em aspectos do 'ser professor' (Roldão, 2007); a segunda em uma abordagem do forma-se na ação, não apenas na ação enquanto prática pedagógica, mas também na ação como envolvimento no processo educativo, no processo de produção de conhecimento e de relação com os pares (Bicudo, 2003); e a terceira segundo a perspectiva da formação como processo contínuo e inacabado, não restringindo-se apenas a formação acadêmica do professor, mas aquela baseada no desenvolvimento profissional, que envolve experiências dentro e fora da escola (Espinosa e Fiorentini, 2005).

Apesar de discutidas sob diferentes fundamentações, essas perspectivas da Formação de Professores apresentam em comum a preocupação com a formação reflexiva do indivíduo, ou seja, com o indivíduo capaz de refletir acerca de suas experiências e ações, buscando melhorá-las a cada momento, constituindo-se, assim, em principal responsável por sua formação. Além disso, identificamos que as pesquisas sobre a Formação de Professores abrangem múltiplas dimensões, não apenas aquelas referentes aos processos acadêmicos formais de formação profissional.

Sob essa perspectiva, em nossa pesquisa tratamos desses fatores como as múltiplas dimensões que permeiam a Formação de Professores: *dimensão social, cultural* e *política*; *dimensão da experiência*; *dimensão da profissão, trabalho* e *prática docente*; e *dimensão da tecnologia* e *da virtualidade* da Formação de Professores, e por fim a *dimensão da reflexão*, que se apresenta como parte integrante de cada uma das outras dimensões, visto que nenhuma das outras existiria se não houvesse a reflexão do sujeito em formação sobre suas vivências, experiências e ambientes de interação. Pensando nessas múltiplas dimensões que permeiam a Formação de Professores e considerando que o processo de evolução, introdução e disseminação das TIC influenciam esse campo de pesquisa, apresentamos, a seguir, o resultado da análise e a sistematização das Teses e Dissertações que constituem o *corpus* de nossa investigação.

A presença das TIC nos processos de formação de professores que ensinam matemática

Em nossa investigação, entre as Teses e Dissertações analisadas, identificamos que algumas tratavam da presença das TIC nos processos de Formação de Professores que ensinam Matemática. Nas pesquisas analisadas, essa presença é abordada por meio das temáticas relacionadas às *vivências*, *experiências*, *avaliações de programas* e *propostas, e cursos de Formação de Professores*, além de questões inerentes à *prática docente*, às *condições de trabalho* e à *Educação a Distância*. As Teses e Dissertações que abordam essa temática foram divididas em duas categorias: *Processos de Formação Inicial de Professores que ensinam Matemática* e *Processos de Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática*.

Com a análise das Teses e Dissertações procuramos identificar quais são as inter-relações das TIC nos processos formativos. Fundamentando-nos em Fiorentini, Nacarato, Ferreira, Lopes, Freita e Miskulin (2002), buscamos averiguar o que essas pesquisas nos mostravam em relação à formação e ao desenvolvimento profissional dos professores, bem como buscar indícios de possíveis mudanças nos processos investigativos e de Formação de Professores, visando identificar quais são as contribuições que essas Teses e Dissertações apresentam para a busca de novas alternativas à formação docente.

As pesquisas que tratam dos *processos de Formação Inicial de Professores* trazem como principais problemáticas de investigação os aspectos inerentes à construção do conhecimento do futuro professor de Matemática; a relação entre teoria e prática – conhecimento específico de conceitos matemáticos, prática pedagógica e formação docente e ambiente/realidade escolar; a formação do professor – formador; e a futura prática docente. Essas investigações nos mostram a necessidade de reformulação dos currículos dos Cursos de Licenciatura em Matemática, para que seja priorizada a abordagem do uso das TIC, não apenas nas chamadas disciplinas didático-pedagógicas, mas também nas disciplinas de conteúdo específico da Matemática, para que o futuro professor possa ter contato, desde o início de seu processo acadêmico de formação, com a abordagem que privilegie esse uso das TIC e que, futuramente, poderá influenciar sua na prática docente.

Já as pesquisa sobre os *processos de Formação Continuada de Professores* apresentam problemáticas de investigação acerca da elaboração e análise de propostas, cursos e programas de Formação Continuada de professores em uma abordagem de uso das TIC nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática e também na abordagem da EaD; da prática colaborativa, dos grupos colaborativos e das experiências de formação contribuindo para possíveis mudanças na prática docente; das parcerias entre professores e pesquisador; da necessidade de uma Formação Continuada vinculada à escola e à prática docente; e do domínio do conteúdo específico de Matemática. Todas essas problemáticas estão contextualizadas no uso das TIC como recurso didático-pedagógico ou como agente potencializador dos ambientes de formação.

As pesquisas sobre os processos de Formação de Professores e uso das TIC parecem avançar no sentido de uma possível transformação do paradigma de Formação de Professores. Saem da abordagem da "racionalidade técnica" – que considera a prática profissional como "uma resolução instrumental de problemas baseada na aplicação de teorias e técnicas científicas construídas em outros campos" (Tardif; Raymond, 2000, p. 211 *apud* Fiorentini, Nacarato, Ferreira, Lopes, Freita e Miskulin, 2002, p.1 56) – para a abordagem de pesquisa que considera o professor como sujeito ativo, participante e reflexivo no processo de investigação, passando para a perspectiva abordada por Fiorentini (2000), de pesquisa *sobre* professores para a pesquisa *com* (*ou dos*) professores (Fiorentini, 2000 *apud* Espinosa e Fiorentini, 2005).

Consideramos que as práticas formativas, apresentadas pelas pesquisas analisadas, caminham para a abordagem da Formação de Professores na perspectiva do desenvolvimento profissional e de práticas contextualizadas, no sentido de desenvolver investigações com os professores considerando o ambiente escolar em que se dá sua prática e trabalho docente, seus anseios, perspectivas e dificuldades.

A presença das TIC nos modos de pensar de professores que ensinam matemática

Em nossa investigação, identificamos, também, que algumas Teses e Dissertações analisadas tiveram por objetos de investigação aspectos inerentes aos *modos de pensar de professores que ensinam Matemática* e *suas relações com o uso das TIC*. Trata-se de pesquisas que descrevem e caracterizam o pensamento, as concepções, o perfil/formação e a prática de professores e suas possíveis relações com o uso das TIC em ambientes de ensino e aprendizagem da Matemática. Consideramos os *modos de pensar de professores* como aspectos que caracterizam o '*ser professor'* – seu trabalho, sua formação, seus saberes e sua realidade contextual do exercício da ação docente – e que se configuram como objetos de investigação. Segundo as pesquisas analisadas, esses modos de pensar do professor relacionam-se às *suas práticas pedagógicas* já concretizadas, que são influenciadas pela *infraestrutura da escola* e *condições de trabalho* dos professores investigados, pela sua *Formação Continuada*, pelo *currículo da disciplina* e pelo *cotidiano escolar*.

As pesquisas sistematizadas acima nos mostram que o processo de evolução e disseminação das TIC caracteriza-se como um desafio para a profissão docente, visto que o processo de introdução e disseminação das TIC na sociedade e, por consequência, na escola, acaba por influenciar tanto a formação quanto a prática dos professores. Imersas nesse processo, as concepções dos professores acerca do uso das TIC para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática mostram-se, nas Teses e Dissertações analisadas, caracterizadas por aspectos inerentes aos campos nucleares da função do professor que são: ensino, currículo e alunos (Roldão, 2007), e relacionadas à iniciativa autônoma dos professores para seu envolvimento em projetos e propostas de Formação Continuada. Essas pesquisas apresentam as tensões presentes no ambiente escolar e no trabalho docente, que configuram o "ser professor", como discutido por Lüdke e Boing (2004), ao considerarem que, atualmente, o profissional da docência encontra-se na situação de enfrentamento dos desafios inerentes à introdução de novas tecnologias e terceirização de serviços educacionais, fatores que têm contribuído ainda mais com a precarização do trabalho docente e com a crise da identidade do professor.

Essa abordagem nos leva à reflexão de que as elaborações de Cursos e Propostas de Formação de Professores, tanto Inicial quanto Continuada, relacionadas ao uso das TIC nos processos de ensino e aprendizagem, em nosso caso específico da Matemática, devem estar contextualizadas na escola e nas reais condições de trabalho oferecidas aos professores. Além disso, as pesquisas apontam que as concepções e crenças dos professores relacionam-se às suas experiências de Formação e prática docentes, o que nos remete à consideração de que os ambientes de ensino e aprendizagem da Matemática permeados pelas TIC constituem-se em desafios para os professores, visto que, para que esses ambientes sejam formados, muitos fatores devem ser considerados, entre eles: currículo, projeto político-pedagógico da escola, infraestrutura, suporte técnico e contexto sociocultural do aluno.

Consideramos, ainda, que os modos de pensar delineados pela análise das Teses e Dissertações nos mostram uma mudança paradigmática no papel do professor nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática quando se faz uso das TIC, uma vez que o professor passa a ser incentivador e parceiro do aluno nesse processo, o que acaba por refletir nas relações que estabelece com os alunos.

A presença das TIC nas práticas de ensinar e aprender matemática

Entre as Teses e Dissertações analisadas deparamo-nos com àquelas que tiveram como objetos de investigação aspectos inerentes às TIC. São pesquisas que não investigam especificamente os processos de Formação de Professores, mas apresentam contribuições para esse campo de investigação e foram dividias em duas categorias: *aspectos epistemológicos das TIC* e *aspectos didático-pedagógicos das TIC*. Essas pesquisas tratam de temáticas como:

construção do conhecimento matemático com o uso das TIC, *desenvolvimento de ambientes baseados nas TIC*, *construção do conhecimento matemático em ambientes de Educação a Distância*, *intervenções em sala de aula fazendo uso das TIC*, *utilização das TIC como recurso didático-pedagógico* e *visão dos pais em relação ao uso das TIC na Educação*.

Por meio da análise dos aspectos epistemológicos e didático-pedagógicos da presença das TIC nas práticas de ensinar e aprender Matemática identificamos alguns limites e possibilidades, que se configuram como: *potencialidades das TIC para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática*, *estratégias didático-pedagógicas para a sala de aula fazendo uso das TIC*, *a interação alunos e TIC*, a *interdisciplinaridade*, a *diversidade sociocultural da sala de aula*, *cumprimento do currículo disciplinar*, *a infraestrutura da escola* e *questões relacionadas ao projeto político-pedagógico da instituição de ensino*.

A análise das pesquisas nos mostra que a utilização das TIC nas práticas de ensinar e aprender Matemática está, muitas vezes, condicionada ao contexto sociocultural de alunos e professores, ao currículo disciplinar, à infraestrutura da escola e ao trabalho docente. Quando se faz uso das TIC nos processos de ensino e aprendizagem, a importância da presença do professor como mediador torna-se eminente, uma vez que este pode condicionar a intencionalidade das TIC e o conteúdo que está sendo abordado. Além disso, nessas pesquisas encontramos a presença do professor que ensina Matemática, como *sujeito*, como *pesquisador*, ou mesmo *contribuições para a sua prática docente*.

Miskulin (2003) discute as características e necessidades exigidas dos indivíduos diante da nova cultura profissional permeada pela introdução e disseminação das TIC na sociedade e destaca que a participação de professores e futuros professores em projetos de pesquisa que privilegiem experiências educativas, mediadas pelas TIC, faz com que, gradativamente, os professores se apropriem das TIC, "de forma crítica e reflexiva, desencadeando, assim, novas formas de exploração do saber matemático em sala de aula" (Miskulin, 2003, p. 245). Portanto, consideramos que a participação dos professores em situações de pesquisa, a investigação na prática docente e mesmo as contribuições trazidas por investigações acerca das TIC na Educação podem proporcionar, aos professores, elementos teórico-metodológicos para a construção de uma metodologia de ensino para a criação de cenários interativos e investigativos de aprendizagem colaborativa baseados nas TIC.

As Teses e Dissertações que investigaram aspectos inerentes às TIC apresentam diversificadas abordagens teórico-metodológicas, entretanto, buscam a mesma mudança do paradigma educacional, saindo de um paradigma fundamentado da instrução – *Abordagem Instrucionista* –

para outro que considera o aluno como principal agente da construção do conhecimento – *Abordagem Construcionista*.

Esses aspectos teórico-metodológicos, que permeiam as investigações analisadas, influenciam diretamente o campo de Formação de Professores, uma vez que podemos observar o movimento do desenvolvimento de pesquisas acadêmicas relacionadas a esses fatores, abordando tanto a Formação Inicial do professor que ensina Matemática quanto a formação e prática dos professores que se encontram em sala de aula. São aspectos que nos mostram que as práticas de ensinar e aprender Matemática caminham por questões complexas que envolvem *as condições de trabalho*, a *escola* e os *cursos de Formação de Professores*, que necessitam de reflexão e, cada vez mais pesquisas, sobre os múltiplos contextos socioculturais permeados pelas TIC.

Algumas considerações

Depreendemos que as pesquisas analisadas aproximam-se dos campos estruturantes da Formação de Professores (Roldão, 2007), ao abordar a produção do conhecimento de professores, a função docente frente às TIC e os aspectos do desenvolvimento professional. Essas pesquisas também se aproximam da abordagem da formação contínua (Passos, Nacarato, Fiorentini, Megid, Freitas, Melo, Grando, Gama e Miskulin, 2006), ao tratarem da necessidade de formação contextualizadas para professores em Formação Inicial e as experiências de Formação Continuada. Tratam dos campos adjacentes da Formação de Professores (Roldão, 2007) ao investigar as concepções, os pensamentos e as práticas de professores em relação às TIC. Representam as perspectivas tratadas por Bicudo (2003), ao tratarem da produção do conhecimento, do reconhecimento da identidade e da necessidade desses professores se verem atuando nas escolas, ressignificando suas práticas pedagógicas. Temos também a abordagem da formação em serviço, ou forma/ação (Bicudo, 2003), nas pesquisas que abordam os professores-pesquisadores. E destacamos também as pesquisas sobre TIC que envolvem os professores como sujeitos e que, portanto, enfatizam o "formar o professor e alunos "na ação de fazer, de perceberem-se fazendo e de refletirem sobre o sentido do feito" (Bicudo, 2003, p. 44).

Consideramos que os aspectos temáticos e teórico-metodológicos que permeiam as investigações analisadas influenciam diretamente o campo de Formação de Professores, uma vez que podemos observar o movimento do desenvolvimento de pesquisas acadêmicas relacionadas a esses fatores, abordando tanto a Formação Inicial do professor que ensina Matemática quanto a formação e a prática dos professores que se encontram em sala de aula. São aspectos que nos mostram que as práticas de ensinar e aprender Matemática caminham por questões complexas que envolvem *as condições de trabalho*, a *escola* e os *cursos de Formação de Professores*, que necessitam de reflexão e, cada vez mais pesquisas, sobre os múltiplos contextos socioculturais permeados pelas TIC.

Referências bibliográficas

Bicudo, M.A.V. (2003). A Formação do Professor: um olhar fenomenológico. In Bicudo, M.A.V. (Org) *Formação de Professores? Da incerteza à compreensão.* (pp.7-46). Bauru: EDUSC.

Espinosa, A.J. e Fiorentini, D. (2005). (Re)significação e reciprocidade de saberes e práticas no encontro de professores de matemática da escola e da universidade. In Fiorentini, D. e Nacarato, A.M. (Orgs.), *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática* (pp.152-174). Campinas: Musa Editora.

Fiorentini, D., Nacarato, A. M., Ferreira, A. C., Lopes, C. S., Freitas, M. T. M, Miskulin, R. G. S. (2002). Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em Revista 36*, 137-160.

Lüdke, M. e Boing, L.A. (2004). Caminhos da profissão e da profissionalidade docentes. *Educação & Sociedade 25* (89), 1159-1180.

Miskulin, R.G.S. (2003). As possibilidades didático-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de Matemática. In Fiorentini, D. (Org). *Formação de Professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. (pp.217-248). Campinas: Mercado das Letras.

Passos, C.L.B, Nacarato, A.M., Fiorentini, D., Megid, M.A.B.A., Freitas, M.T.M., Melo, M.V., Grando, R.C., Gama, R.P., Miskulin, R.G.S. (2006). Desenvolvimento Profissional do Professor que Ensina Matemática: Uma Meta-Análise de Estudos Brasileiros. *Quadrante 25* (1 e 2), 193-219.

Roldão, M.C. (2007). A formação de professores como objecto de pesquisa - contributos para a construção do campo de estudo a partir de pesquisas portuguesas. *Revista Eletrônica de Educação 1* (1), 50-118.

FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA: DISCUSSÕES ACERCA DE SUAS POTENCIALIDADES DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS

Juliana França Viol, Rosana Giaretta Sguerra Miskulin
Universidade Estadual Paulista UNESP - Rio Claro Brasil
viol.juliana@gmail.com, misk@rc.unesp.br

Resumo. Este artigo apresenta uma pesquisa de doutorado que possui como objetivo *compreender as potencialidades da EaD na constituição de espaços que favoreçam o processo de Formação de Professores de Matemática*. Estamos desenvolvendo uma pesquisa qualitativa, segundo a *meta-pesquisa*, por meio do mapeamento da produção acadêmica em Educação Matemática, no Estado de São Paulo, analisando Teses e Dissertações que têm por objeto de investigação aspectos relacionados à Formação de Professores de Matemática e a EaD, defendidas no período de 2002 a 2010, nos Programas de Pós Graduação da UNESP – Rio Claro, PUC – São Paulo, USP – São Paulo, UNICAMP – Campinas, UFSCar – São Carlos e UNESP – Bauru. Além disso serão realizadas Entrevistas com pesquisadores envolvidos na elaboração, coordenação, realização e avaliação de cursos de Formação de Professores a distância. Os dados advindos das Teses, Dissertações e Entrevistas serão triangulados ao referencial teórico relativo a EaD e Formação de Professores que fundamenta a investigação.

Palavras chave: educação a distância, formação de professores, meta-pesquisa

Abstract. This paper introduces a doctoral research that has aimed to understand the potential of Distance Learning in the constitution of spaces that improve the process of Mathematics Teacher Education. We are developing a qualitative research, according to the meta-search, by mapping the academic production in Mathematics Education in the State of São Paulo, analyzing Theses and Dissertations that focus on research aspects related to Mathematics Teacher Education and Distance Learning, defended in the period from 2002 to 2010, the Graduate Programs UNESP - Rio Claro, PUC - São Paulo, USP - São Paulo, Campinas - Campinas, UFSCar - São Carlos and UNESP - Bauru. Moreover, we will develop Interviews with researchers involved in the development, coordination, implementation and evaluation of Teacher Training courses distance. The data obtained from the Theses, Dissertations and Interviews will be triangulated to the theoretical framework on Distance Learning and Teacher Education that supports research.

Key words: distance learning, teacher education, meta-research

Introdução

Consideramos a Formação de Professores um processo multifacetado que envolve aspectos de distintas naturezas, que interferem e participam desse processo. Abordamos esses fatores como as múltiplas dimensões que permeiam a Formação de Professores e que tratamos segundo a *dimensão social, cultural* e *política*; *dimensão da experiência*; *dimensão da profissão, trabalho* e *prática docente*; *dimensão da tecnologia* e *da virtualidade* da Formação de Professores, e por fim a *dimensão da reflexão*, que se apresenta como parte integrante de cada uma das outras dimensões, visto que nenhuma das outras existiria se não houvesse a reflexão do sujeito em formação sobre suas vivências, experiências e ambientes de interação (Viol, 2010; Miskulin, 2009).

Neste trabalho apresentamos uma pesquisa em nível de doutorado em andamento que está fundamentada na *dimensão da tecnologia* e *da virtualidade* da Formação de Professores. Acreditamos que esta dimensão está relacionada aos aspectos de desenvolvimento e oferecimento de cursos a distância para a Formação de Professores, em âmbito inicial e/ou continuada, propiciado pela expansão da Internet e pelo desenvolvimento de ambientes/plataformas para o oferecimento desses cursos, tais como: TelEduc , Moodle, WebCT, entre outros.

Discussões a esse respeito têm levado à realização de diversas pesquisas e publicações, no campo da Educação e da Educação Matemática, sendo que entre os temas pesquisados temos os aspectos referentes à elaboração e ao oferecimento de cursos a distância, enfatizando quais aspectos devem ser considerados para que se tenha uma formação contextualizada ao ambiente sociocultural e ao campo de atuação dos professores que estão sendo formados. Conforme as discussões de Prado e Almeida (2007), a EaD, que se fundamenta em princípios educacionais, deve privilegiar aspectos inerentes à [...] (re)construção do conhecimento, a autoria, a produção de conhecimento em colaboração com os pares e a aprendizagem significativa do aluno, requer uma maneira bastante peculiar de conceber o planejamento, a organização das informações, as interações e a mediação pedagógica. (Prado e Almeida, 2007, p.67).

Identificamos também que tanto a profissão quanto a prática do professor dentro da *dimensão da tecnologia* e *da virtualidade* apresentam inúmeros limites e possibilidades, limites no sentido de uma formação contextualizada ao ambiente sociocultural que se encontra o indivíduo em formação e prática em um contexto diferenciado do habitual (presencial), e possibilidades remetendo-se ao fato do rompimento de distâncias geográficas e constituição de um ambiente de discussão e reflexão sob diferentes pontos de vista, que se inter-relacionam às dimensões socioculturais advindas de diferentes culturas escolares.

Consideramos, ainda, os ambientes educacionais a distância, como ambientes que propiciam momentos de *interação* e *colaboração*. *Interação* no sentido de propiciar

> [...] o suporte ao compartilhamento de informação, e a comunicação entre alunos e entre alunos e professores, mantendo viva uma conexão entre as pessoas; e a *colaboração*, que apoia o desenvolvimento de projetos e trabalhos colaborativos, possibilitando a reflexão compartilhada e o desenvolvimento conjunto de conhecimentos e significados a EaD. (Miskulin, no prelo, p.15, grifo da autora).

Esta autora enfatiza, ainda, que a interação e a colaboração

> [...] promovem o desenvolvimento: da capacidade de pensar criticamente,

> habilidade mais difícil de dominar individualmente; de habilidades de pensamento crítico; e de diálogo. Contribuem para níveis de conhecimento mais profundos: em atividades *online* que buscam uma postura colaborativa, o objetivo principal é a construção conjunta de significados, o que é ampliado nos trabalhos em grupos, nas discussões em fóruns, entre outros. (Miskulin, no prelo, p.15).

Fundamentando-se nos aspectos apresentados acima estamos desenvolvendo uma pesquisa, em nível de Doutorado, no âmbito da Educação Matemática que possui como objeto central de investigação as inter-relações da Educação a Distância (EaD) e a Formação de Professores. Esta pesquisa tem como objetivo *investigar, evidenciar* e *compreender as potencialidades didático-pedagógicas da EaD para a constituição de ambientes que favoreçam o processo de Formação de Professores que Ensinam Matemática*.

Para a realização desse estudo voltaremos nossas atenções para pesquisas acadêmicas, por meio da realização de um estudo bibliográfico e exploratório-investigativo, caracterizado como *meta-pesquisa* (Bicudo, Paulo, 2011) da produção acadêmica, analisando Teses e Dissertações em Educação Matemática, que têm por objeto de investigação aspectos relacionados à Formação de Professores que ensinam Matemática e a EaD, produzidas e defendidas no período de 2002 a 2010, nos Programas de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista – UNESP, *campus* Rio Claro e da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – USP, da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP e da Faculdade de Educação da Universidade Federal de São Carlos, e Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Universidade Estadual Paulista – UNESP, *campus* Bauru.

Além disso, para a realização dessa *meta-pesquisa*, tomaremos como base Depoimentos, Narrativas e/ou Entrevistas de professores e/ou pesquisadores envolvidos na elaboração, realização e avaliação de cursos de Formação de Professores a distância, não tratando necessariamente dos professores/ou pesquisadores presentes nas Teses e Dissertações a serem analisadas.

Neste estudo, tomando por base a investigação realizada junto às Teses e Dissertações e aos professores e/ou pesquisadores da área de Educação a Distância realizaremos o trabalho de busca e compreensão de aspectos implícitos aos dados e que nos conduzirão à interpretação das principais potencialidades didático-pedagógicas da EaD para a constituição de ambientes de Formação de Professores. Assim, pretendemos, entre outros aspectos, identificar como a EaD pode favorecer a criatividade, a colaboração, a produção de conhecimentos e a autonomia dos professores que estão sendo formados.

A meta-pesquisa como estratégia metodológica de investigação

A pesquisa em andamento que apresentamos neste trabalho originou-se por meio da realização de uma investigação de mestrado (Viol, 2010), em que analisamos as inter-relações das Tecnologias de Informação e de Comunicação (TIC) e a Formação e Prática de Professores que Ensinam Matemática, por meio da análise de Teses e Dissertação em Educação Matemática, produzidas e defendidas em alguns Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática do estado de São Paulo, no período de 1987 a 2007.

Os resultados advindos desta investigação nos incitou a continuarmos na busca e investigação do objeto de pesquisa – Formação de Professores e as TIC – , porém nesse momento, elegendo como foco para a investigação as inter-relações da EaD e a Formação de Professores que ensinam Matemática.

Assim, nossa investigação está fundamentada na modalidade de pesquisa qualitativa denominada *meta-pesquisa*. Para Bicudo e Paulo (2011) a meta-pesquisa, conduz a uma meta-interpretação ou meta-compreensão, leva ao olhar da "pesquisa sobre a pesquisa, ou ainda, sobre sua própria produção" (p.5). Essas autoras caracterizam que, pesquisas que se fundamentam nessa abordagem metodológica apresentam como principal objetivo "[...] compreender e explicitar as tendências que marcam as pesquisas em Educação Matemática no Brasil, enfocando as interrogações que as sustentam e o rigor científico, filosófico e metodológico que perseguem." (Bicudo; Paulo, 2011, p. 3).

Assim, pretendemos realizar uma análise crítica de um universo definido de pesquisas acadêmicas realizadas, nos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro e PUC – SP, nos Programas de Pós-Graduação em Educação da UNICAMP, USP e UFSCar, e no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da UNESP – Bauru, buscando extrair dessas pesquisas elementos adicionais que poderão mostrar novos resultados, indo além dos obtidos pelos pesquisadores.

Assim, visando atender o objetivo desta investigação encontramos no Paradigma Indiciário (Ginzburg, 1989), fundamentos para realizar o processo de constituição e análise de dados, na busca pelos indícios das potencialidades didático-pedagógicas da EaD para a Formação de Professores, no campo da Educação Matemática, uma vez que de acordo com Passos, Nacarato, Fiorentini, Megid, Freitas, Melo, Grando, Gama e Miskulin (2006)

> [...] em estudos meta-analíticos o *paradigma indiciário* e a abdução tornam-se imprescindíveis. Isso porque concebemos a meta-análise como uma modalidade de pesquisa que objetiva desenvolver uma revisão sistemática de estudos já realizados em torno de um mesmo tema ou problema de pesquisa, fazendo uma análise crítica dos mesmos com o intuito de extrair deles, mediante contraste e inter-relacionamento, outros resultados e sínteses – dados ou pormenores não considerados pelos pesquisadores, em decorrência de seus objetos de investigação (p. 198, grifo nosso).

Corroborando com estas ideias, temos Ginzburg (1989) no que diz respeito a escala de observação dos dados a serem analisados, já que "[...] para demonstrar a relevância de fenômenos aparentemente negligenciáveis, era indispensável recorrer a instrumentos de observação e escalas de investigação diferentes dos usuais" (Ginzburg,1989, p. 10). Assim, compreendemos que o *Paradigma Indiciário* trará subsídios metodológicos para esta análise, ao auxiliar na compreensão de apontamentos e aspectos presentes nas Teses, Dissertações e Depoimentos/Entrevistas que serão analisadas.

Teses e Dissertações

Considerando que a pesquisa de doutorado em desenvolvimento apresenta-se como uma continuação de uma pesquisa desenvolvida em nível de Mestrado (Viol, 2010), parte das Teses e Dissertações que irão compor o *corpus* desta investigação, encontra-se previamente selecionada, visto que esse processo já foi desenvolvido na pesquisa citada junto aos Programas de Pós-Graduação citados anteriormente, no período de 1987 a 2007, em que foram selecionadas as pesquisas.

Assim, as pesquisas produzidas e defendidas pelos Programas de Pós-Graduação do Estado de São Paulo selecionados para esta investigação no período de 2008 a 2010, serão mapeadas posteriormente, segundo uma busca criteriosa no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, bem como uma investigação junto as Bibliotecas Virtuais das instituições.

Entrevistas professores e pesquisadores

Visando favorecer a *meta-pesquisa* proposta neste projeto, pretendemos constituir dados por meio da realização de Entrevistas com professores e/ou pesquisadores envolvidos com a elaboração, desenvolvimento, coordenação e avaliação de cursos à distância para a Formação Inicial ou Continuada de Professores que ensinam Matemática. Estes professores e/ou pesquisadores, não serão, necessariamente, os professores/ou pesquisadores constantes nas Teses e Dissertações a serem analisadas, mas serão identificados e selecionados de acordo com seu envolvimento com a EaD.

As Entrevistas terão por objetivo constituir subsídios para análise das Teses e Dissertações ao trazerem uma visão diferenciada das potencialidades didático-pedagógicas da EaD para a constituição de ambientes formativos. Procuraremos com as entrevistas identificar como os princípios educacionais, colocados por Prado e Almeida (2007, p.67), entre eles: (re) construção do conhecimento, a autoria, a produção de conhecimento em colaboração com os pares e a aprendizagem significativa, são planejados para esses cursos, como é feita a organização das informações para que esses princípios sejam privilegiados, e de que maneira acontecem a interação entre alunos/alunos, tutores/alunos, alunos/professores e tutores/professor, e, também, como se dá a mediação pedagógica em ambientes de EaD.

Nesse sentido, consideramos que as Teses e Dissertações apresentam uma visão pontual, ou seja, analisam cursos ou ambientes de formação a distância específicos. Acreditamos que a visão dos professores e/ou pesquisadores envolvidos em processos formativos a distância, subsidiarão a análise dos dados da pesquisa apresentando características relacionadas aos aspectos políticos, sociais e culturais que estão implícitos na elaboração e oferecimento de cursos de Formação de Professores a Distância.

Assim pretendemos entrevistar professores e/ou pesquisadores que durante algum tempo têm se envolvido com a elaboração, oferecimento, análise e avaliação de cursos de Formação de Professores que Ensinam Matemática a distância, ou seja, pesquisadores que vêm dedicando suas pesquisas à essa temática e profissionais de diferentes instituições educacionais públicas ou privadas que trabalham como docentes e/ou turores de cursos à distância.

Algumas considerações

Após a realização e análise das Entrevistas, Depoimento e/ou Narrativas, bem como a análise dos dados provenientes das Teses e Dissertações que farão parte do *corpus* desta investigação, os dados provenientes dessas duas fontes serão submetidos a outro mecanismo de análise, a triangulação de dados da pesquisa, com a finalidade de confrontarmos os dados e darmos mais fidedignidade e abrangência ao objeto de investigação.

Acreditamos que a triangulação e análise dos dados coletados na investigação nos conduzirão às potencialidades didático-pedagógicas da EaD, vista como um ambiente que favorece o processo de Formação de Professores de Matemática.

Referências bibliográficas

Bicudo, M.A.V. e Paulo, R.M. (2011). Um exercício filosófico sobre a pesquisa em Educação Matemática no Brasil. *Bolema 25* (41), 251-298.

Ginzburg, C. (1989). *Mitos, emblemas, sinais: morfologia e história*. São Paulo: Companhia das Letras.

Miskulin, R.G.S. *Potencialidades Didático-Pedagógicas da Educação a Distância: Um Mito para os Cursos de Licenciaturas?*. No prelo.

Miskulin, R.G.S. (2009). Curso de Licenciatura a Distância: uma perspectiva social e seus possíveis reflexos na prática do Professor. In *X Congresso Estadual Paulista sobre Formação de Educadores* (pp. 6779-6792). São Paulo: UNESP.

Miskulin, R.G.S., Rosa, M e Silva, M.R.C. (2009). Comunidade de Prática Virtual: possíveis contribuições para a formação de professores de matemática. In Fiorentini, D.; Grando, R.C.; Miskulin, R.G.S. (Orgs), *Práticas de Professores que Ensinam Matemática* (pp.257-278), Campinas: Mercado das Letras.

Miskulin, R.G.S., Silva, M.R.C. e Rosa, M. (2006). Comunidade Virtual como Lócus do Resgate da Cultura Docente: contribuições para a formação continuada do professor de matemática. In *III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)* (pp.1-12). Águas de Lindóia.

Passos, C.L.B, Nacarato, A.M., Fiorentini, D., Megid, M.A.B.A., Freitas, M.T.M., Melo, M.V., Grando, R.C., Gama, R.P., Miskulin, R.G.S. (2006). Desenvolvimento Profissional do Professor que Ensina Matemática: Uma Meta-Análise de Estudos Brasileiros. *Quadrante 25* (1 e 2), 193-219.

Prado, M.E.B.B. e Almeida, M.E.B. (2007). Estratégias em Educação a Distância: a Plasticidade na Prática Pedagógica do Professor. In Valente, J.A.; Almeida, M.E.B. (Orgs) *Formação de Educadores a Distância* e *Integração de Mídias* (pp. 67-84), São Paulo: Avercamp.

Viol, J.F. (2010). *Movimento das Pesquisas que Relacionam as Tecnologias de Informação e de Comunicação e a Formação, a Prática e os Modos de Pensar de Professores que Ensinam Matemática*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

A HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA COMO LINHA DE PESQUISA EM UM MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Lucia Maria Aversa Villela
Universidade Severino Sombra Brasil
luciavillela@globo.com

Resumo. A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) criou no Brasil, desde 2002, uma segunda modalidade de pós-graduação em nível de mestrado: aos mestrados acadêmicos juntaram-se os mestrados profissionais. As pesquisas nesse nível de formação na linha de História da Educação Matemática têm sido normalmente desenvolvidas por programas acadêmicos. Como contribuição ao debate, trago as experiências vividas pelo Laboratório de Pesquisa em História da Educação Matemática (LaPHEM), em especial sobre as adequações que vem desenvolvendo em produções de um mestrado profissional nessa linha de pesquisa.

Palavras chave: pesquisa histórica, educação matemática, mestrados profissionais

Abstract. The Coordination of Personal Perfection of Superior Level (CAPES) created in Brazil, in 2002, a second mode of postgraduate master level: the master scholars joined the professional masters. Incoming search terms for this level of education in Mathematics Education story have been normally developed by academic programs. As a contribution to the debate, we bring the experience by the Laboratory of Research in History of Mathematics Education (LaPHEM), in particular on the adjustments that have been developing in productions of a professional master in this line of research.

Key words: historical research, mathematics education, professional masters

Introdução

O que é um "mestrado profissional"?

Durante o governo do Presidente Getúlio Vargas, o Brasil vivia grandes transformações, visando tornar-se uma nação desenvolvida e independente. O mundo estava vivendo o pós-guerra e era preciso investir na qualidade dos profissionais. Por conta disso foi criada "sob a Presidência do Ministro da Educação e Saúde, uma Comissão [...] para o fim de promover uma Campanha Nacional de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior" (Governo Getúlio Vargas do Brasil. Decreto nº 29741, de 11/6/1951, Art 1º). Essa iniciativa posteriormente deu origem a atual Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) que, como indica o nome, coordena as iniciativas e avaliações das pós-graduações *stricto sensu* no país.

A CAPES, na ânsia de atender às demandas e enquanto lugar de mando "de onde se podem gerir as relações com uma exterioridade" (Certeau, 1990, p. 99), cria estratégias. Assim, em 2002, somada à modalidade "mestrado acadêmico", surgem os "mestrados profissionais".

A última regulamentação sobre tais programas afirma que:

> Art. 3º O mestrado profissional é definido como modalidade de formação pós-graduada stricto sensu que possibilita:
>
> I - a capacitação de pessoal para a prática profissional avançada e transformadora de procedimentos e processos aplicados, por meio da incorporação do método científico, habilitando o profissional para atuar em atividades técnico-científicas e de inovação;
>
> II - a formação de profissionais qualificados pela apropriação e aplicação do conhecimento embasado no rigor metodológico e nos fundamentos científicos;
>
> III - a incorporação e atualização permanentes dos avanços da ciência e das tecnologias, bem como a capacitação para aplicar os mesmos, tendo como foco a gestão, a produção técnico-científica na pesquisa aplicada e a proposição de inovações e aperfeiçoamentos tecnológicos para a solução de problemas específicos. (Ministério da Educação do Brasil. Portaria Normativa nº 7, de 22/06/2009).

Esses programas, que de início foram subestimados pelos acadêmicos, encontram-se hoje em pleno desenvolvimento, exigindo uma aplicabilidade direta ao campo profissional a que se vinculam. De acordo com a relação de cursos recomendados e reconhecidos fornecida pela CAPES (20/9/2012), classificados na grande área multidisciplinar e ligados à área de ensino totalizam hoje quarenta e sete mestrados profissionais. Desses, apenas quatro programas oferecem, especificamente, a titulação em Educação Matemática, embora existam outros treze cursos que de alguma forma exibam também a palavra Matemática em sua titulação.

Pertenço a um desses quatro programas de Mestrado Profissional em Educação Matemática (MPEM). No caso, o oferecido desde 2008 pela Universidade Severino Sombra (USS), Campus Vassouras/ RJ, e que fora aprovado no segundo semestre de 2007.

Vassouras - cidade histórica e universitária – e a linha de pesquisa História da Educação Matemática em um Programa de MPEM

Vassouras é uma cidade histórica oficialmente criada em 1859 e que em 1958 foi tombada pelo Patrimônio Histórico e Artístico Nacional (IPHAN). O grande desenvolvimento que alcançou durante o século XIX vincula-se ao período da cultura cafeeira no Vale do Rio Paraíba do Sul. Veio a ocupar o primeiro lugar mundial em exportação desses grãos (Petrucelli, 1994) e tornou-se a capital econômica do Império, também por conta de seu papel no comércio de escravos. Enquanto ainda sesmaria, sua história começa em 1782. Como se pode imaginar, é possível encontrar muitos vestígios históricos nessa região, que se localiza na região centro sul fluminense, a uma altitude de 434 m.

Vassouras, além desse lastro histórico, também é considerada uma cidade universitária. Foi para lá que se transferiram os primeiros cursos universitários criados pelo general Severino Sombra, que, desde 1969, estavam alocados no Município de Paraíba do Sul. A Fundação Educacional Severino Sombra (FUSVE) foi criada em 1975 e, em 1997, integrando essa Fundação, surgiu a Universidade Severino Sombra (USS).

Essa Instituição, em julho de 2007, vê aprovado o seu segundo programa de mestrado: o seu MPEM que teve início efetivo em 2008, e oferecendo duas linhas de pesquisa (Metodologias e tecnologias de informação aplicadas ao ensino de matemática; Organização curricular em matemática e formação de professores). Pelo Regulamento criado pelo Colegiado do Programa para o MPEM da USS, além das exigências da CAPES para tal modalidade, optou-se em também exigir a elaboração de uma dissertação a ser defendida e aprovada perante uma banca, com pelo menos um avaliador externo à Instituição.

Embora trabalhe na USS desde 2001, o meu ingresso na equipe do referido programa só se deu no início de 2010. Minha pesquisa de doutoramento (Villela, 2009), sob a orientação do Dr Wagner Rodrigues Valente, recém-defendida, vinculara-se à linha de História da Educação Matemática.

Foi a paixão por esse tipo de pesquisa que me levou a oferecer nesse Programa desde 2010, como eletiva a disciplina de História da Educação Matemática, que, segundo avaliações dos mestrandos, muito lhes tem ajudado a entender o processo histórico de construção da Educação Matemática. Em consequência, foram se aglutinando interessados pela área e se constituindo um grupo de pesquisa, que logo viu seus esforços serem reconhecidos pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) ao ter o Projeto "A Matemática do ensino primário em Vassouras, RJ: analisando um século de provas de alunos (1869-1969)" aprovado em edital de fins do ano de 2010. Inicialmente esse projeto contava com dois docentes, quatro discentes, sendo dois do Programa MPEM da USS e dois licenciandos de Matemática, além da valiosa contribuição do meu ex-orientador, que passou a compor o grupo como colaborador externo. No desenvolvimento dos subprojetos que o compõem temos contado, desde o início com o auxílio de cinco alunos dos dois últimos anos do Ensino Médio, que são bolsistas de pré-iniciação científica pelo Projeto Jovens Talentos, outra iniciativa da FAPERJ.

Com o fomento recebido por esse trabalho, tornou-se possível criar na USS a estrutura que, em 29 de setembro de 2011, veio a constituir o Laboratório de Pesquisa em Educação

Matemática (LaPHEM). Paralelamente a essas ações, o Colegiado do Curso de MPEM da USS, em fins de 2011 aprovou a inclusão de uma terceira linha de pesquisa no Programa: a História da Educação Matemática.

Alegrias e problemas foram surgindo ao longo dessa até agora breve existência do LaPHEM. Se há o prazer de perceber que cada vez surgem mais alunos da Instituição querendo desenvolver pesquisas ligadas à referida linha, por outro lado há os dissabores em se enfrentar dificuldade de acesso a fontes consideradas basilares às nossas investigações. Trata-se do Arquivo Público da Secretaria Municipal de Educação de Vassouras (APSMEV), que está sob a guarda da seção Vassouras do IPHAN e que, desde final de abril de 2011 e há dezessete meses, está inacessível a pesquisadores externos ao IPHAN, o que vem exigindo adequações aos trabalhos previstos.

Mas essa não chegou a ser a maior barreira a ser vencida pela equipe, pois, tínhamos que resolver como cumpriríamos as exigências de estágio supervisionado e a elaboração de produtos finais que atendessem ao que se a CAPES espera dos Programas de MPEM. Não havia experiência anterior alguma a ser tomada como modelo, uma vez que as produções na área de História da Educação Matemática sempre estiveram vinculadas a programas de doutorado e mestrado acadêmico. O grupo teve que criar seu próprio caminho e é essa experiência que desejo socializar.

Acreditando, tal como Valente (2007), que para se produzir História da Educação Matemática há que se estar de posse da base teórico-metodológica que norteia os atuais pesquisadores em História da Educação, o grupo caminhava em suas leituras sobre as práticas e representações (Chartier, 1990, 2008), as concepções sobre cultura escolar (Julia, 2001; Viñao Frago, 2007), a fim de que pudesse melhor tecer a história das disciplinas escolares (Chervel, 1990) e, particularmente, sobre a Educação Matemática. Por meio desses textos, tentava-se entender o porquê, mesmo nos programas acadêmicos se produzia História da Educação Matemática. Por que e para que se produz História e particularmente, História da Educação Matemática? As respostas passam das formas aligeiradas e não totalmente verdadeiras de que, ao se pensar o passado, busca-se entender o presente e, de algum modo, tenta-se conduzir da melhor forma os passos futuros, a afirmações mais consistentes e claras como as que Chartier coloca:

> Para situar melhor as grandezas e misérias das transformações do presente, talvez seja útil apelar a uma única competência de que podem gabar-se os historiadores. Sempre têm sido lamentáveis profetas, porém, às vezes, ao recordar que o presente está cheio de passados sedimentados ou emaranhados, têm podido contribuir para um diagnóstico mais lúcido das novidades que seduziam ou

> espantavam a seus contemporâneos (Chartier, 2008, p. 15, tradução livre da autora).

O historiador não é profeta e as produções realizadas no presente a partir de reflexões sobre vestígios do passado são, em síntese, um bom exercício sobre o vivido. Nesse texto, Chartier de que "[...] A história deve assumir diretamente sua própria responsabilidade: tornar inteligíveis as heranças acumuladas e as descontinuidades fundadoras que nos fizeram o que somos" (2008, p. 18, tradução livre da autora).

Transpondo essas ideias à História da Educação Matemática, passa a ter significado perceber essas heranças acumuladas das culturas escolares que nos antecederam e que, uma vez minimamente conhecidas, nos tornam mais críticos e conscientes de nosso papel enquanto educadores matemáticos. Dessa forma, percebe-se a importância de pesquisas nessa linha também em Programas de MPEM e encontra-se o objetivo que deve nortear os produtos que devem ser elaborados por esses mestrandos: há que se produzir e socializar leituras das heranças recebidas junto a professores e alunos de cursos de formação de professores. Sabendo-se o porquê de se produzir História da Educação Matemática e, em especial, em um MPEM, só faltava a equipe operacionalizar essas ideias.

Foi com base nessa crença que já foram produzidas pelo LaPHEM duas dissertações nessa linha: *Uma história do ensino primário em tempos de modernização da matemática escolar, Vassouras 1950-1969* (H. Salvador, 2012a), e *Uma história de paixão: Estela Kaufman Fainguelernt e o ensino da Geometria*, (M. Salvador, 2012a).

H. Salvador desenvolveu sua pesquisa de mestrado pautando-se em dados coletados nas poucas visitas que conseguiu realizar ao IPHAN, seção Vassouras, junto ao APSMEV. Além disso, foram tomados como fontes entrevistas; programas que regiam a educação primária, na época, em Vassouras; livros didáticos que haviam sido citados em algum registro encontrado no Arquivo. Sua dissertação atendeu plenamente a que se refere o título. Apensada a essa publicação e fruto de oficinas realizadas em espaços de formação inicial e continuada de professores, tal como exige a legislação dos Mestrados Profissionais, foi criado o produto *Dividindo histórias e opiniões: compartilhando e polemizando a operação de divisão* (H. Salvador; 2012b).

Figura 1: Capa da versão preliminar do produto de H. Salvador (2012b)

Nesse texto H. Salvador (2012b) não se prendeu só a livros publicados no período histórico a que a dissertação estava atrelada. Usou até mesmo encaminhamentos encontrados em livros do século XIX, para a resolução de divisões, comparando-os aos utilizados por autores atuais:

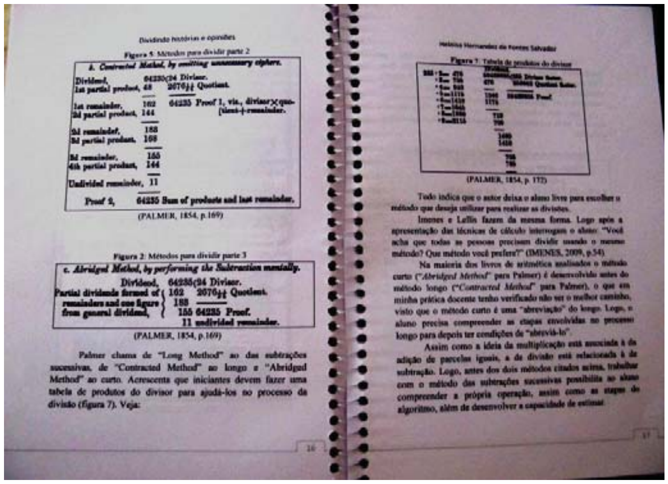


Figura 2: Duas páginas da versão preliminar de H. Salvador (2012b)

Em breve este produto será publicado pelo LaPHEM/ USS e, creio, será muito útil às discussões de natureza metodológica que envolvem a operação numérica focada.

A pesquisa de M. Salvador (2012a) buscou vestígios que conduziram a professora Estela a ter a atração que sempre teve pela Geometria. Para isso, enquanto equipe, investimos na organização do Arquivo Pessoal Estela Kaufman Fainguelernt (APEKF), enquanto o referido pesquisador também voltava-se à análise de livros em que a Professora Estela consta como autora, realizando também entrevistas com os coautores dessas obras.

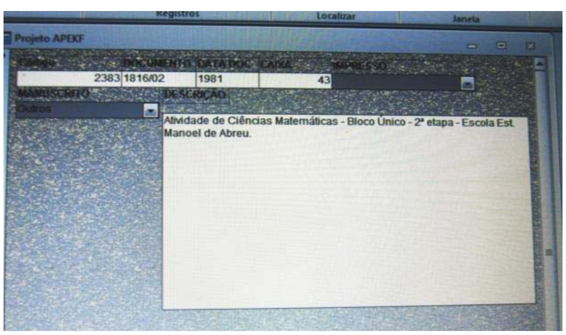


Figura 3: Exemplo de tela do APEKF, disponível no site do LaPHEM

Figura 4: Capa da versão preliminar de M. Salvador, (2012b)

Como não podia ser diferente, o produto anexo à pesquisa de M. Salvador envolve atividades de Geometrias, selecionadas no APEKF e nas publicações analisadas, ou recriadas pelo autor a partir de ideias ali encontradas. Também compartilhado em oficinas de professores e licenciandos de Matemática, nasceu o livreto *Geometria: do arquivo da Estela à sala de aula* (M. Salvador; 2012b).

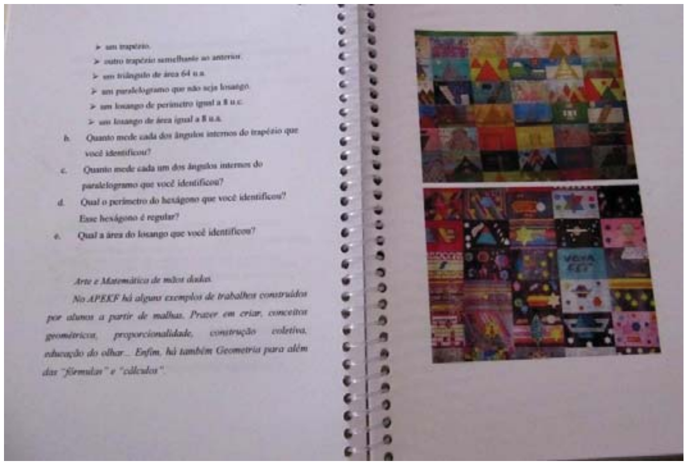


Figura 5: Duas páginas da versão preliminar de M. Salvador (2012b)

Tal como afirmamos em relação ao produto anterior, também esse será publicado pelo LaPHEM/ USS.

Considerações finais

No LaPHEM, a cada nova pesquisa dos mestrandos, novos desafios se apresentam com relação à elaboração das produções aplicáveis à pratica esperadas dos MPEM. No momento há dois mestrandos investindo em suas pesquisas e produções: uma delas envolve *A escola primária republicana e a aritmética do curso primário, 1889-1946* e está a cargo de Carlos Alberto Marques de Souza, com previsão de defesa no primeiro semestre de 2013. Na segunda, Jorge Alexandre dos Santos Gaspar está se envolvendo com o título *O desenho geométrico como disciplina escolar no Rio de Janeiro: uma história da primeira metade do século XX*, que deverá encerrar-se no início de 2014. Esperemos com ansiedade que esses mestrandos, com criatividade e pertinência atendam às necessidades dos colegas professores e em formação.

Convido os colegas a acessarem o *site* do LaPHEM onde, aos poucos, disponibilizaremos todas as produções da equipe e socializaremos documentos e obras raras digitalizadas. Que outros programas de mestrado profissional, quer sejam em Educação Matemática ou ligados ao ensino de Matemática, venham contribuir com a linha de História da Educação Matemática. O que posso afirmar é que tais produções são tão desafiadoras quanto úteis à tomada de consciência de nosso papel enquanto professor que se envolve com os processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

Referências bibliográficas

Certeau, M. (1990). *A invenção do cotidiano.* Rio de Janeiro: Vozes.

Chartier, R. (2008). *Escuchar a los muertos com los ojos. Lección inaugural em Collège de France*. Traducido por Laura Fólico. Buenos Aires/ Madrid: Katz Editores.

_____________ (1990). *A história cultural: entre práticas e representações*. Tradução de Maria Manuela Galhardo. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil S. A.

Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria e Educação* (pp. 177 - 229). Porto Alegre: Pannonica.

Governo Getúlio Vargas do Brasil. Decreto nº 29741, de 11/06/1951. Cria a Coordenação Nacional de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior. Recuperado em 10 de maio de 2005 de http://www2.camara.gov.br/legin/fed/decret/1950-1959/decreto-29741-11-julho-1951-336144-publicacaooriginal-1-pe.html.

H. Salvador (2012a). Uma história do ensino primário em tempos de modernização da matemática escolar, Vassouras 1950-1969. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) não publicada. Universidade Severino Sombra, Vassouras, RJ, Brasil.

_______________ (2012b). Dividindo histórias e opiniões: compartilhando e polemizando a operação de divisão. Produto não publicado, anexo à Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática.Universidade Severino Sombra, Vassouras, RJ, Brasil.

Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. Em D.Gonçalves. J. Gonçalves, M. Cezar de Freitas, M.L. Spedo e M.C. Moreira (Eds.), *Revista Brasileira de História da Educação* 1 (Jan/jun), 9 – 44

M. Salvador (2012a). Uma História de Paixão: Estela Kaufman Fainguelernt e o Ensino da Geometria. Tese de Mestrado Profissional em Educação Matemática não publicada, Universidade Severino Sombra, Vassouras, RJ, Brasil.

_______________ (2012a). Geometria: do arquivo da Estela à sala de aula. Produto não publicado, anexo à Tese de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Severino Sombra, Vassouras, RJ, Brasil.

Ministério da Educação do Brasil, ministro Fernando Hadad. Portaria Normativa nº 7, de 22/06/2009. Recuperado em 13 de abril de 2012 de http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13772:portaria-mestrado-profissional&catid=191:sesu.

Petrucelli, José Luis. (1994). *Café, escravidão e meio ambiente: o declínio de Vassouras na virada do século XIX. Estudos Sociedade e Agricultura*. Recuperado em 29 de novembro de 2011 de http://168.96.200.17/ar/libros/brasil/cpda/estudos/tres/ petruc3.htm.

Valente, W. (2007). *História da Educação Matemática: interrogações metodológicas*. Recuperado em 09 de setembro de 2012 em http://www.redemat.mtm.ufsc.br/revemat/2007_pdf/revista_2007_02_completo.PDF.

Villela, L. (2009). *"GRUEMA": uma contribuição para a história da Educação Matemática no Brasil*. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Viñao Frago, A. (2007). *Sistemas Educativos, Culturas Escolares* e *Reformas*. Tradução Manuel Alberto Vieira. Portugal: Edições Pedago Ltda.

PREPARANDO PARA A APRENDIZAGEM DE CÁLCULO: FUNÇÕES E GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Marcelo André A. Torraca1, Geneci Alves de Sousa, Priscila Dias Corrêa, Lilian Nasser
Universidade Veiga de Almeida - UVA Brasil
UNIABEU - SME-Rio
Secretaria de Estado de Educação - SEEDUC-RJ
Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
torraca@gmail.com, pfundão@im.ufrj.br

Resumo. Professores de instituições de Ensino Superior, públicas e privadas, relatam grandes dificuldades dos alunos na primeira disciplina de Cálculo. Os altos índices de evasão e repetência têm motivado diversas pesquisas, que buscam as causas e as prováveis soluções para esse problema. O objetivo deste trabalho, desenvolvido no âmbito do Projeto Fundão (Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro), é investigar como ocorre a transição do Ensino Médio para o Superior e empreender ações que otimizem esses índices. Foram aplicadas atividades investigativas com calouros de duas universidades particulares para levantar as principais dificuldades. Os resultados indicam a possibilidade de minimizar as dificuldades em Cálculo por meio de uma abordagem adequada dos tópicos de funções e de geometria no Ensino Médio.

Palavras chave: cálculo, transição, funções, gráficos

Abstract. Teachers of public and private institutions of Superior Education report great difficulties of students in the first discipline of Calculus. The high indices of evasion and repetition have motivated various studies, searching for the causes and for probable solutions for this problem. The objective of this work, developed in the scope of Projeto Fundão (Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro), is to investigate how the transition from High School to University occurs, and to undertake actions to optimize these indices. Investigation activities with freshmen of two private universities have been applied to raise the main difficulties. The results indicate the possibility to minimize the difficulties in Calculus, by means of an adequate approach of the topics of functions and geometry at secondary school.

Key words: calculus, transition, functions, graphs

O conceito de função

Esta pesquisa foi motivada pela observação realizada pelos membros do grupo (docentes que ensinam Cálculo em Instituições de Ensino Superior do Rio de Janeiro) em relação às dificuldades, cada vez mais graves, apresentadas pelos alunos ingressantes, no primeiro curso de Cálculo. Os altos índices de evasão e repetência nessa disciplina têm sido tema de estudos nacionais Rezende (2003); Palis (2010); Nasser (2009) e internacionais Even (1990); Robert. e Schwarzenberguer (1991). Para amenizar tal situação, várias estratégias têm sido empreendidas, tal como a inclusão de disciplinas de Matemática Básica (também chamadas de pré-Cálculo ou Cálculo 0). Em alguns casos, são oferecidas atividades concomitantes de monitoria ou mesmo cursos de Fundamentos ou Complementos de Cálculo. Entretanto, a solução para minimizar esse problema ainda está por ser encontrada. Há relatos de que os alunos não sabem calcular o valor de uma função num ponto dado e não têm ideia de como traçar gráficos simples, nem de completar o quadrado de uma expressão. Estes fatos justificam o baixo rendimento e as dificuldades em raciocínio.

Referencial teórico

Esta investigação se caracteriza como uma "pesquisa sobre a própria prática" (PPP), uma vez que os pesquisadores são os próprios docentes de Cálculo ou do Ensino Médio (rede estadual do RJ ou Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro). De acordo com Ponte (2004), "cada vez mais professores empreendem pesquisas sobre a sua própria prática profissional. Fazem-no porque sentem necessidade de compreender melhor a natureza dos problemas com que se defrontam, para poder transformar a sua prática e as suas condições de trabalho. (Ponte, 2004, p. 1)

De fato, o que motivou o grupo para o desenvolvimento deste estudo foi procurar entender um pouco mais as dificuldades apresentadas por alunos nas disciplinas de Cálculo e as boas perspectivas de um enfoque diferenciado adotado no Ensino Médio do CAp-UFRJ.

Analisando os desafios enfrentados por alunos ao iniciar os estudos em Matemática avançada, Robert e Schwarzenberger (1991) apontam mudanças quantitativas:

> mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado. *(*1991, p. 133)

Em sua tese de doutorado, Rezende (2003) afirma que as dificuldades em Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo uma preparação anterior ao início dos estudos de Cálculo. Ele sugere que um trabalho no Ensino Médio sobre a variabilidade de funções pode facilitar a aprendizagem nessa disciplina.

A pesquisa desenvolvida por Palis (2010) utiliza a tecnologia como ferramenta que pode auxiliar no domínio de funções e seus gráficos o enfoque foi nos cursos de pré-Cálculo da PUC-Rio.

Nasser (2009) investigou o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos, constatando que as dificuldades enfrentadas devem-se, principalmente, à falta de preparação prévia e sugere ações que podem ajudar a superá-las, enfatizando exercícios sobre transformações de gráficos (p. 54). A pesquisadora relata como em Cálculo III o mesmo procedimento facilitou a identificação de parabolóides, cones, cilindros e esferas por meio de transformações de superfícies centrais básicas (p.52).

De acordo com Sierpinska (1992), há 16 obstáculos a se transpor para a aquisição do conceito de função. Um desses obstáculos é a concepção ingênua de que "o gráfico de uma função não precisa ser exato". Essa concepção explica alguns dos problemas observados nas tentativas de alunos de Cálculo I ao traçar gráficos de funções simples como $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}}$ ou das funções seno e cosseno, como $f(\mathrm{x}) = \mathrm{sen}\left(\mathrm{x} + \frac{\pi}{2}\right)$. Outro obstáculo apontado por Sierpinska é a concepção de que "apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções". De fato, muitos alunos só reconhecem como funções as relações que são representadas por uma expressão algébrica, e apresentam dificuldades, por exemplo, ao lidar com funções definidas por várias sentenças, como $f(\mathrm{x}) = \begin{cases} -4, \text{para} & \mathrm{x} \leq -3 \\ -\mathrm{x}^2 + 5, \text{para} & -3 < \mathrm{x} \leq 2 \\ \mathrm{x} - 2, \text{para} & \mathrm{x} > 2 \end{cases}$.

Even (1990) também observou essas concepções em sua pesquisa. Ela relata a dificuldade de futuros professores em decidir se $g\ \ x\ = \begin{cases} x, \text{se } x \text{ é um número racional} \\ 0, \text{se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$ é ou não uma função. Checando com a definição de função, um sujeito da pesquisa afirmou que é uma função, já que "há uma imagem única para cada número" (p. 528). No entanto, na tentativa de traçar o gráfico dessa função, esse futuro professor marcou alguns números irracionais no eixo dos x: π, $\sqrt{3}$, $\frac{7}{4}$ (considerando uma fração imprópria como um número irracional) e esboçou uma parte da reta $y = x$ com buracos, conforme os números irracionais escolhidos.

Even (1990) afirma ainda que

> essa situação é compreensível – quase todas as funções encontradas por alunos do Ensino Médio e mesmo de faculdades são do tipo que têm um gráfico "simples" e podem ser descritas por uma fórmula, de modo que o seu conceito imagem de uma função é determinado pelas funções que eles vivenciam, e não pela definição moderna de uma função, que enfatiza a sua natureza arbitrária. (p. 529)

Observa-se que a maioria das dificuldades dos alunos é na representação gráfica ou geométrica adequada e na identificação de relações entre os elementos da figura, como os problemas típicos de "máximos e mínimos", de "taxas relacionadas" e de "área entre curvas". Em geral, o aluno não tem dificuldade na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas em modelar o problema adequadamente.

Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994) afirmam que muitos professores não percebem a ligação da geometria do Ensino Médio com a matemática do Curso Superior. Geralmente os professores não fazem essa ligação devido à sua formação acadêmica, muitos são bacharéis com pós-graduação em Matemática Pura ou Aplicada, poucos têm mestrado e doutorado em Educação Matemática, dominando o saber pedagógico do conteúdo a ser ensinado. Vários conceitos fundamentais de Cálculo são introduzidos por meio de figuras, como os conceitos de integral definida, derivada, área entre curvas, máximos e mínimos, e os problemas de taxas relacionadas. Esses pesquisadores observaram que "apesar da predileção dos professores de Cálculo por diagramas, nossa pesquisa indica que o aluno resiste ao uso de estratégias geométricas e espaciais na resolução efetiva de problemas de Cálculo". (Balomenos, Ferrini_Mundy e Dick, 1994, p. 241)

Essa resistência se deve, com certeza, à falta de domínio dos conceitos geométricos por parte dos alunos de Cálculo, já que "o verdadeiro desafio está na habilidade de desenvolver uma representação geométrica de situações físicas a partir de uma descrição verbal complicada. Muitas vezes, a chave da solução consiste em resolver um problema geométrico em que o tempo é "congelado"". (Balomenos et al., 1994, p. 247).

Os estudos relatados aqui sugerem o debate sobre a investigação de estratégias de ensino que tornem mais amena a transição para o ensino superior, em especial, na disciplina de Cálculo. Por exemplo, nos problemas de taxas relacionadas e máximos e mínimos do Cálculo, a representação gráfica pode ser antecipada no Ensino Médio, como nos exemplos que são apresentados mais adiante.

Atividades de investigação

As atividades preliminares de investigação foram divididas em duas etapas e aplicadas a alunos de duas universidades particulares do estado do Rio de Janeiro, a calouros da UFRJ e, a alunos egressos ou não, do Ensino Médio do CAp-UFRJ. Este último grupo foi escolhido devido ao trabalho diferenciado desenvolvido no CAp-UFRJ no Ensino Médio, cujos alunos egressos têm mostrado bom desempenho no vestibular e nas disciplinas de Cálculo.

Inicialmente, 98 alunos de duas universidades particulares e 18 alunos egressos do CAp-UFRJ responderam a um questionário que buscou identificar as dificuldades encontradas por eles na disciplina de Cálculo I, quais os tópicos de Matemática do Ensino Médio que facilitaram sua aprendizagem, e quais deveriam ser inseridos para contribuir nesse processo. Além disso, resolveram três questões sobre funções. A primeira delas envolvia a análise de duas funções do tipo afim, a segunda abordava o domínio de uma função e, por fim, a última pedia o gráfico de uma função definida por três sentenças.

Na análise dos resultados os alunos egressos do CAp-UFRJ, responderam que o conceito de funções e a análise de gráficos foram tópicos facilitadores. Os demais alunos citaram como tópicos que gostariam de ter estudado para facilitar a aprendizagem de Cálculo: funções, conteúdos do Ensino Superior e maior aprofundamento do conteúdo em geral.

Na resolução das questões propostas, identificamos, nos alunos calouros, uma deficiência na análise de funções afim e quadrática definidas por uma ou mais sentenças. Em geral, demonstram conhecimento superficial de funções e seus gráficos. Eles conseguem marcar alguns pontos no plano cartesiano, que unem por segmentos de reta, deixando de considerar a lei de formação da função. A maior parte dos alunos egressos do CAp-UFRJ que respondeu a essa atividade não apresentou esse tipo de erro.

A segunda etapa da investigação consistiu na aplicação de outra atividade a 153 alunos de duas universidades particulares, dos cursos de Engenharia e Licenciatura em Matemática, cursando o 1º período e a 28 alunos do 2º ano do Ensino Médio do CAp-UFRJ. Nesse caso, os exercícios propostos envolveram os conceitos de função par e ímpar, a translação de gráficos e a identificação, a partir de um gráfico apresentado, do domínio, da imagem, dos intervalos de crescimento e decrescimento e dos pontos de máximo e mínimo locais da função dada. Os alunos do CAp-UFRJ testados demonstraram mais familiaridade com o conceito de função.

Foi possível perceber nesse grupo de alunos que a identificação de funções pares ocorre com mais facilidade do que a de funções ímpares. Em particular, foi observada a dificuldade em completar o gráfico de uma função ímpar, quando esta não passa pela origem (função descontínua).

Pela observação dos professores deste grupo de pesquisa que dão aula de Cálculo, as dificuldades dos alunos estão localizadas no trato com funções, principalmente quando estas são definidas por mais de uma sentença, e no traçado de gráficos, até mesmo de retas e parábolas. Por outro lado, a professora do grupo que leciona no CAp-UFRJ descreve como bons resultados o enfoque diferenciado adotado para o ensino de funções nessa instituição, que indica ideias que podem ser facilitadoras no processo de ensino e de aprendizagem no curso de Cálculo. Os primeiros resultados desta investigação apontam para a possibilidade de diminuição das dificuldades em Cálculo I por meio de uma abordagem apropriada no Ensino Médio.

Análise de livros textos

Na tentativa de entender as dificuldades apresentadas no curso de Cálculo, foi necessária a análise de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio e de livros de Cálculo do Ensino Superior. Dessa forma, foi possível avaliar alguns exemplos de como é feita a transição entre esses níveis de ensino nos conteúdos que geram maior dificuldade para os alunos na prática. Foram analisados seis autores de livros do Ensino Médio e nove autores de livros de Cálculo. Os livros analisados do Ensino Médio e de Cálculo já não definem função a partir do conceito de relação, e não existe mais uma ênfase em diagramas de flechas. A introdução de funções por meio do diagrama de flechas limita a visão mais abrangente do conceito de função, além de restringir o domínio a um conjunto finito.

O enfoque ao gráfico de funções usando transformações, como translação, reflexão, rotação e homotetia, usado no curso de Cálculo, já tem sido incluído em livros do Ensino Médio. Dois autores desse nível de ensino abordam transformações, analisando a função quadrática na forma canônica $f(x) = a(x-m)^2 + p$, e outros dois usam translações para obter gráficos de funções modulares e trigonométricas.

Surpreendentemente, dos nove livros de Cálculo analisados, apenas três autores abordam transformações de gráficos. A princípio, os autores usam as ferramentas de Cálculo para fazer análises gráficas e dois destes trabalham o Cálculo com Geometria Analítica.

Todos os autores do Ensino Médio e do Ensino Superior enfatizam a análise gráfica, incluindo crescimento e decrescimento, domínio e imagem, pontos críticos, zeros da função, mas dos livros do Ensino Médio, somente um aborda o conceito de assíntotas, que é enfocado por todos os autores do Ensino Superior.

Quanto ao conceito de função par e ímpar, apenas um autor de Ensino Superior não apresenta esse conceito no capitulo de funções, mas o apresenta em exercícios de cálculo de áreas e volumes. No Ensino Médio, dois autores abordam a definição e as representações gráficas de funções pares e ímpares, inclusive enfatizando a simetria em cada caso. Os conteúdos analisados acima devem ser cuidadosamente explorados no Ensino Médio, a fim de promover uma transição amena para a aprendizagem de Cálculo no Ensino Superior.

Representações geométricas

Em sua pesquisa, Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994) apresentam diversos exemplos de problemas do Cálculo que poderiam ser facilitados, por uma abordagem adequada da geometria ensinada no Ensino Médio, desenvolvendo a prontidão para o Cálculo.

Por exemplo, para resolver o problema de Cálculo:

> Uma esfera de raio 4 é inscrita num cone circular reto.
> Determinar as dimensões do cone de volume mínimo

é preciso exprimir o volume do cone como uma função de uma variável para depois aplicar a derivada. Essa etapa do problema pode ser explorada na geometria do Ensino Médio, por meio da seguinte tarefa:

> Uma esfera de raio 4 é inscrita num cone circular reto.
> Expressar o volume do cone como função de sua altura h.

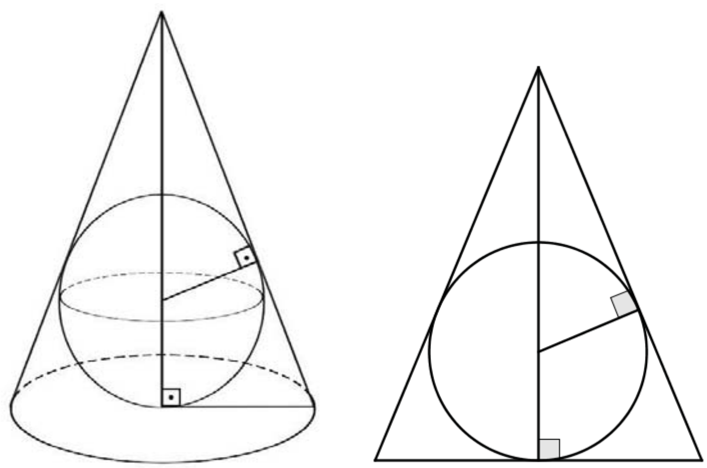


Figura 1: Seção transversal de uma esfera inscrita em em cone

A representação gráfica desse problema requer a identificação de triângulos semelhantes na seção transversal de uma esfera inscrita num cone, que pode ser vista na figura ao lado. (Balomenos et al., 1994, p. 245).

A representação gráfica também é fundamental no cálculo de área entre duas curvas. Consideremos, por exemplo, o problema:

> *Determine a área compreendida pelos gráficos de* $y = x^3$ e $y = x$*, entre* $x = -1$ e $x = 1$

Os alunos normalmente utilizam a integral definida $\int_{-1}^{1}(x^3 - x)dx$ ou $\int_{-1}^{1}(x - x^3)dx$ para resolver este problema, não percebendo que essa fórmula só é válida no caso em que é possível comparar as funções do integrando em todo o intervalo de integração. Neste caso, como a função é ímpar, há simetria em relação à origem, e essa integral tem zero como resultado, que certamente não pode ser o valor da área requerida.

O aluno que faz os gráficos das funções envolvidas atenta para a necessidade de calcular $\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)dx$ ou $2\int_{0}^{1}(x - x^3)dx$ para obter dessa expressão o resultado correto.

Observações finais

As considerações e os resultados desta pesquisa recomendam dois desdobramentos. O primeiro é desenvolver uma proposta alternativa para as aulas de Matemática no Ensino Médio, que antecipe situações e problemas do Cálculo, gerando o que chamamos de prontidão para o estudo de Cálculo. Tal proposta deve incluir um estudo mais aprofundado de domínio e imagem de funções, traçado de gráficos, inclusive com recursos tecnológicos, funções pares e ímpares, funções definidas por várias sentenças e translação de gráficos. Em relação à Geometria, a proposta deve contemplar representações gráficas de figuras bi e tridimensionais, típicas de problemas de taxas relacionadas e de máximos e mínimos, como os exemplos mostrados neste trabalho. Essa proposta não pretende introduzir mudanças no currículo de Matemática no Ensino Médio, mas apenas sugerir um outro enfoque. O segundo desdobramento é incentivar atividades de Matemática básica com os calouros das Universidades, visando preencher lacunas de aprendizagem e auxiliando na abstração necessária para o domínio do pensamento matemático avançado.

Referências bibliográficas

Balomenos, R., Ferrini-mundy, J. e Dick, T. (1994). Geometria: prontidão para o Cálculo. In M. Lindquist e A. Shulte (Org.), *Aprendendo e Ensinando Geometria*. (pp. 240-257). São Paulo: Atual Editora.

Even, R. (1990, Dezembro). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, *21*, 521-544.

Nasser, L. (2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In M.C. R. Frota e L. Nasser (Org.), *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates* (pp. 43-58). Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Palis, G. (2010, julho). *A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática, 4*. Recuperado em 07 abril, 2013 de http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra4.pdf.

Ponte, J. P. (2004, Dezembro). Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática. *Educar em revista*, *24* (pp. 37-66), Curitiba: Editora UFPR.

Rezende, W. M. (2003). *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese de Doutorado não publicada. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, Brasil.

Sierpinska, A.(1992). On understanding the notion of function. In Dubinsky, E; Harel, G (Ed.), *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy*. (pp. 25-58). MAA Notes.

TEXTOS INSTRUCCIONALES: SU NATURALEZA, FUNCIÓN E IMPLICANCIAS EN LA FORMACIÓN EFECTIVA DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Nora Inés Lerman, Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"., Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, CICATA-IPN. México
nlerman@infovia.com.ar, crccrespo@gmail.com

Resumen. Este trabajo presenta avances de investigación en la línea de la construcción social del conocimiento con enfoque socioepistemológico pues se centra en identificar y analizar la presencia, uso e implicaciones de los textos instruccionales en el discurso matemático escolar; fenómeno resultante de acciones de una comunidad específica en un escenario sociocultural determinado: la formación de profesores de matemática. Motiva la presente investigación la necesidad de analizar las inconsistencias presentes en la construcción y comunicación de textos instruccionales verbales y no verbales en el aula de matemática, los problemas de comprensión del discurso matemático escolar por parte de alumnos y profesores; asimismo, la intención de proponer posibles medidas preventivas o reparadoras para su mejora.

Palabras clave: discurso didáctico del profesor, textos instruccionales

Abstract. This paper presents a research progress in line with social knowledge construction with a socioepistemological approach because it focuses on identifying and analyzing the presence, use and implications of instructional texts in the school mathematical speech; a phenomenon that is the result of the actions of one specific community that is immersed in a certain socio-cultural setting in this case, in the training of teachers of mathematics. What motivates this research is the need to analyse the inconsistencies that arise in the construction and communication of verbal and nonverbal instructional texts in mathematics classroom scenarios, the problems of understanding school mathematical speech by pupils and teachers and the intention to propose possible preventive or restorative measures for their improvement.

Key words: teacher's instructional speech, instructional texts

Introducción

La presente investigación está motivada por la necesidad de analizar las inconsistencias que se presentan en la producción y comunicación de textos instruccionales verbales y no verbales en aulas de la formación inical de profesores de nivel medio y superior de matemática; es decir, analizar los problemas en la comunicación y entendimiento entre alumnos y profesores debido a su uso. Se espera que con el mencionado análisis se puedan proponer medidas preventivas o reparadoras.

Más adelante se presentan algunos avances de la investigación referenciada arriba y que se está llevando a cabo en la línea de la construcción social del conocimiento con soporte socioepistemológico pues sus objetivos son los de identificar y analizar la presencia, uso e implicaciones de los textos instruccionales en el discurso matemático escolar, fenómeno resultante de acciones de una comunidad específica e inmersa en un escenario sociocultural determinado.

En el aula de matemática, los enunciados del profesor son elementos clave que hacen posible y materializan su intención didáctica. Al mismo tiempo, existe muy poca conciencia por parte de los docentes de que un estudio crítico y pormenorizado de sus características y variedades favorecería la calidad de las respuestas de los alumnos en las dinámicas de enseñanza-aprendizaje de la disciplina durante la formación de los cuadros de futuros profesores.

Todo saber es socialmente construido y que el lenguaje utilizado es una práctica social (regula las recurrentes maneras de hacer las cosas en una comunidad) normadora/mediadora por antonomasia de ese proceso.

El Discurso Matemático Escolar (DME), también como práctica social, tiene en cuenta cómo se generan y de qué naturaleza son los consensos sobre un saber escolar en la noosfera y considera cómo organizarlos para su circulación y utilización didáctica. Asimismo valida el lenguaje y las formas de comunicación de esos saberes dentro del sistema escolar formal.

El enfoque socioepistemológico, del cual el DME es uno de sus emergentes, adopta aspectos socioculturales que intervienen en la construcción y difusión de ese conocimiento, además de otros factores como lo didáctico, lo cognitivo y lo epistemológico. Al estudiar el discurso didáctico de los profesores (su naturaleza y sus usos y desarrollos, por ejemplo) se puede entender y caracterizar las prácticas que norman esos procesos y sus bases teórico/científicas que rigen la actividad de los profesionales docentes.

Aspectos orientadores de la investigación

Un antecedente directo de esta investigación, es un trabajo previo de Lerman (2011), en el cual se identificó la presencia de argumentaciones gestuales y visuales en el aula de matemática. En la misma línea, se ha indagado acerca de las funciones lingüísticas predominantes en argumentaciones gestuales y visuales que se presentan en los escenarios de la matemática educativa (Lerman y Crespo Crespo, 2010) y más recientemente, se ha analizado la importancia de las claves de contextualización y el uso de tecnología a la hora de resignificar el discurso matemático escolar en el aula (Lerman y Crespo Crespo, 2011) y las ambivalencias del discurso matemático escolar (Crespo Crespo, Homilka y Lestón, 2011).

Fuera del ámbito de la matemática educativa, los aportes de Barnes (1976), Cazden (1991) y Silvestri (1995) quienes abordan las problemáticas de las formas de comunicación tomando en cuenta el discurso en el aula, o los de Briggs (1986) quien, desde un enfoque sociolingüístico sobre las técnicas de entrevista, los relaciona con los repertorios meta-comunicativos nativos o con el análisis de los errores de comunicación. Asimismo Atorresi (2005) realiza diversas consideraciones al momento de elaborar textos instruccionales para evitar ambigüedades.

Algunas de las preguntas iniciales de la investigación han sido las siguientes:

> *¿Cuáles son las razones por las que los alumnos del profesorado de matemática manifiestan dificultades en la comprensión de textos comunicados por sus profesores?*

Cuando se expresa que "[…] manifiestan dificultades […]" debe entenderse de modo literal, dado que está evidenciada en comunicación verbal de la queja al profesor, a los tutores o entre los mismos alumnos y se ha registrado en incontables situaciones de observación de clase y lectura de foros virtuales.

> *¿Cuáles son las características que están presentes en los diseños de los textos instruccionales del aula de matemática a nivel de profesorado?*
>
> *¿Cómo pueden aprovecharse las formas textuales verbales y no verbales en la comunicación de textos instruccionales para la construcción de conocimiento por parte de los alumnos de profesorado de matemática?*

Una causa posible de la problemática que acontece en el universo investigado (formación inicial de profesores de matemática) es que en los programas de estudio de las asignaturas del campo de la práctica docente no se preste especial atención en el aprendizaje del género instruccional puesto que habitualmente se entrena a los futuros profesores en la elaboración de narraciones, reportes de lectura y ensayos o monografías, argumentaciones y demostraciones pero no así en el desarrollo de textos directivos con consignas o instrucciones. Esto provoca que no se entrenen en las competencias cognitivas y discursivas necesarias para hacer consciente primero lo accional (ya sea tanto de procesos mentales como físicos) para luego organizarlo en una dimensión lingüística.

Al realizar una revisión de medios en los cuales los textos de los docentes de la formación inicial de profesores de matemática suelen encontrarse –por ejemplo: transcripciones, apuntes y carpetas de clase de alumnos; enunciados de evaluaciones, las correcciones posteriores de los mismos por parte del profesor, materiales teóricos impresos, guías de trabajos prácticos, etc.- se puede observar cierta naturalización de patrones de uso estereotipado que no contemplan un análisis previo de sus elementos estructurantes ni de la posible decodificación de su sentido por parte de los destinatarios. El conocimiento y la adopción de una perspectiva pragmática de la comunicación efectiva permitirían al profesorado, la elaboración de textos instruccionales más eficientes que habrían de disminuir los problemas acarreados por la falta de comprensión de sus enunciados.

La investigación de referencia muestra algunos ejemplos relevantes en el ámbito de la formación inicial de profesores de matemática. Un análisis cualitativo posterior de las características y funciones presentes en los textos de los docentes permitiría detectar y clasificar los hallazgos en beneficio de la calidad de las respuestas de los alumnos y en consecuencia, de la tarea docente.

Textos instruccionales: los enunciados del profesor de matemática

Como elementos de un discurso tecnológico mediador

Un sistema educativo de enseñanza (p. e.: la escuela) es una tecnología social creada para resolver determinados problemas que tienen que ver con cómo impartir instrucción a grandes cantidades de personas en un Estado Nación. Esta tecnología (el conjunto de respuestas que se ponen en práctica para resolver esos problemas) involucra procesos complejos y es por ello que necesita de un discurso mediador para funcionar (antiguamente el conocimiento se transmitía del maestro al aprendiz directamente y era casi innecesario poner en juego un discurso pues simplemente por observación, imitación y posterior entrenamiento, ese saber hacer se lograba).

En la enseñanza sistematizada de la matemática, una de las dimensiones del Discurso Matemático Escolar (DME) es el discurso didáctico del profesor (DDP) quien, con sus textos instruccionales, genera y aplica los medios necesarios para que esta tecnología de enseñanza-aprendizaje prospere en el aula.

De Silvestri (1995) se infiere que el discurso instruccional es un constructo semiótico (signos, sus relaciones y significados) socio-instrumental (construido socialmente y como un medio) cuya función es la de organizar esquemas de comportamiento y concatenar acciones (mentales o físicas). Es normativo (prescriptivo, regula las prácticas) y descriptivo (las caracteriza), pero también es directivo (incita a la realización de la acción mediante indicaciones). En la sociedad, los exponentes más habituales donde se materializa el discurso instruccional desde hace siglos es en los reglamentos, los manuales y las recetas, respectivamente.

En el ámbito educativo, el discurso didáctico (DD) corresponde a un género discursivo con una regularidad en las formas de circulación y comunicación de conocimiento. Un género discursivo está conformado por enunciados característicos y relativamente estables, propios de determinadas actividades humanas. El DD se manifiesta no solamente en la estructura o formato de los textos de los profesores (sus enunciados) sino también en su significado. Esos textos pueden ser orales (presenciales en las clases o a distancia) o escritos (apuntes teóricos, guías de trabajos prácticos, exámenes, pizarrones, correcciones de carpetas y exámenes, etc.), tanto verbales como o no verbales (gestos, miradas, actitud corporal, proxemia, etc.), en soportes analógicos o digitales.

Como actos de habla que organizan y regulan la acción didáctica

Los textos instruccionales como actos del habla propios del lenguaje, dan un espacio y un marco para la acción docente del profesor que emite sus enunciados intencionalmente, con significado y sentido; asimismo evidencian formas recurrentes de hacer ciertas cosas dentro de las instituciones y comunidades y por ello conforman una práctica social. Estos enunciados, como actos de habla mediadores, se constituyen en herramientas organizadoras que regulan la acción mental del interlocutor en cualquier escenario social/cultural donde se los use. Existe un vínculo entre el habla y la actividad. Son intermediarios en el pasaje desde el discurso a la tarea, dado que el destinatario deberá interpretarlos y trazarse un plan para llevar a cabo la acción si los recursos con los que cuenta no son los mismos o si puede obviar o reorganizar la secuencia de algunos pasos. Son textos cuya función comunicativa es la de enseñar e impulsar el aprendizaje (como se mencionó arriba: promueven la realización de actividades mentales o prácticas).

Como formato textual característico de los enunciados del profesor

Los enunciados del profesor son textos instruccionales y suelen contener conectores y organizadores de las acciones que se deben realizar para entender cómo hacer, usar o comprender algo. Estos conectores y organizadores indican el orden de los pasos (1°, 2°…) e indicadores de la acción (verbos).

Werstch (1993) manifiesta que el discurso didáctico permite al alumno asumir responsabilidades mayores en la regulación de la actividad por medio de instrucciones orales y escritas del profesor que va internalizando y dominando. Por ello es que los textos instruccionales de los docentes corresponden a un formato textual descriptivo-directivo.

En la oralidad, la retroalimentación es inmediata y no puede borrarse lo dicho. Los enunciados son espontáneos e interactivos; el significado está otorgado por el contexto extralingüístico. Todo interviene en esa situación comunicativa: ambiente, miradas, gestos, tonos de voz, mobiliario, proximidad, etc. En cambio cuando los enunciados se presentan de manera escrita, al no estar presente el emisor, no puede regular su discurso en función de las reacciones y acotaciones surgidas de la interacción con los mismos por parte del destinatario. Son diferidos y elaborados, en vez de espontáneos e inmediatos. Por ello, no deberían contener ambigüedades y se debe ser más preciso porque el significado está dado por el texto mismo. (Figura 1)

Fig. 1 – Diferencias entre texto instruccional escrito y oral, diferencias

En estos casos, los textos escritos cumplen una función mediadora del aprendizaje y el profesor es quien debe compensar/reponer el contexto perdido en el intercambio cara a cara (no puede solicitar que p. e. se: –construya la recta *ahí*– sino que debe ser más explícito, de modo verbal o visual apelando a datos complementarios: – […] construya la recta *ab* siendo *a* el punto de intersección entre el segmento *pq* y […] –). Para ello debe apelar a la competencia de construcción relacional del alumno para su decodificación. Esto último significa que tiene que anticipar la pérdida de referencia con la inclusión de información adicional que el alumno, por medio de inferencias y puesta en acto de conocimientos previos, reponga para lograr así, autonomía en sus acciones.

Según Bronckart (1997) por ser un texto, el texto instruccional utilizado por el profesor en su discurso didáctico es un objeto empírico que está organizado lingüísticamente y su función es provocar un efecto de coherencia en el receptor. Por lo tanto es, además de procedural, prescriptivo, intencional, tiene su propia lógica y posee una formulación discursiva. Como es un instrumento de enseñanza, un dispositivo concreto, es dialógico y en consecuencia puede ser cuestionado, analizado, categorizado y reformulado para conocer su naturaleza, funciones y alcances. Es una poderosa herramienta discursiva instruccional del DME y por ende, presente en el DD del profesor de matemática, quien la usa para la intervención pedagógica que es cuando adopta su forma y cobra sentido en el contexto histórico y sociocultural propio de su tiempo. Al referirse, en este caso a un determinado contexto, no solamente se tiene en cuenta el contexto físico sino que también es considerado el contexto mental de los interlocutores y sus comunidades.

La intervención didáctica que ha sido referida en los párrafos anteriores está en relación directa con la tarea, la actividad y la finalidad en las que interviene ya que permite el planteo de la primera, cómo se presentan, cómo se ordenan e imbrican las acciones de la segunda y finalmente, las propuestas que le dan fundamento. (Figura 2)

Fig. 2 – Enunciados de profesor mediadores en su intervención didáctica

Como fenómeno de comunicación efectiva pero también de significación y conación

Los enunciados del docente permiten establecer un alcance, orientar la acción y verificar los resultados de la misma. Invitan a la acción mental o física del otro.

Se entiende por conación a todo aquello que implique esfuerzo (voluntad, inferencias, búsqueda y transformación matemática/lógica de datos, toma de decisiones, representación y comunicación de los resultados, etc.). Es por ello que cuando el profesor de matemática redacta sus enunciados debería conocer y aprovechar sus tres capacidades fundamentales para que sea claro en la formulación de sus consignas y pueda pensarlas en cuanto a la plausibilidad de su resolución. Debiera tener en cuenta los aspectos básicos mínimos y necesarios para el éxito de cualquier comunicación efectiva y debe considerar cuestiones que tendrán que ver no sólo con cuidar la redacción sino con sobrentendidos, presuposiciones, códigos y convenciones, idiosincrasia de sus alumnos, el campo (tema), el tenor (nivel de formalidad) y el modo (canal); proxemia, pertinencia, validez, confiabilidad y practicidad de sus emisiones textuales, entre otras características.

Es así que las tres capacidades a tener presentes cuando se caracterizan los textos instruccionales son:

- *Capacidad Planificativa:* permite organizar la enseñanza dado que otorga un marco para la acción.
- *Capacidad Directiva:* puede implementar lo planificado pues facilita la actividad en sus clases.
- *Capacidad Evaluativa:* otorga la posibilidad de comprobar su alcance para evaluar la acción llevada a cabo o que se está realizando en el aula.

Ejemplos de textos instruccionales de los profesores. Su deconstrucción y análisis.

En el presente apartado se considera que un texto instruccional no es una unidad estática, acabada y permanente sino que puede recomponérselo en sus partes constitutivas cada una con su naturaleza epistemológica, su función didáctica, su alcance cognitivo y su contexto sociocultural de pertenencia, en un proceso sistémico y dinámico.

Para generar un texto instruccional, el profesor de matemática utiliza estrategias que refieren al uso y comunicación en su discurso de distintos tipos de enunciados:

- *Constitutivos*: Donde establece y describe el tipo de situación comunicativa (para poner en autos a los potenciales alumnos) y donde especifica las *reglas de constitución*. Para el área de las reglas normativas, en el caso en que el medio de comunicación sea escrito, en este trabajo se introduce el término *cabecera*. El docente incluye en esta área/fase las reglas deónticas que normarán la comunicación mientras el proceso esté activo. (Figura 3)

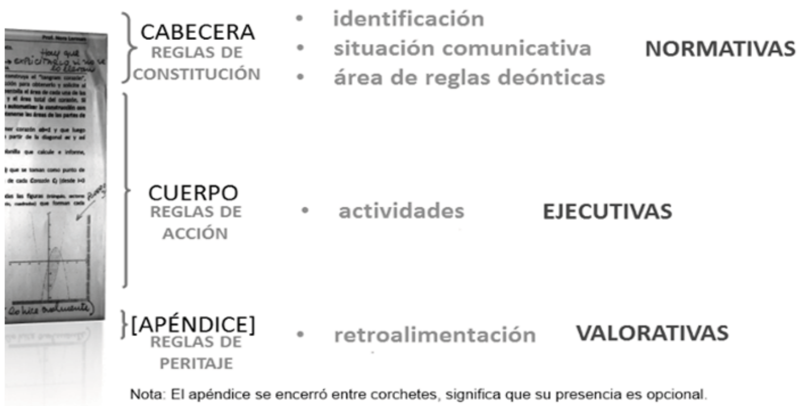


Fig. 3 – Texto instruccional: fenómeno de comunicación y de significación

- *Realizativos:* Donde el profesor enuncia de manera verbal o no verbal, los pasos que deben realizarse (es el área o etapa de las actividades específicas a llevarse a cabo, las instrucciones propiamente dichas) y donde establece las *reglas de acción*. Análogamente se introduce el término *cuerpo* si el medio de comunicación fuera escrito. Las palabras que caracterizan este sector/fase son los verbos en infinitivo, en gerundio, imperativo, etc. y combinaciones de estos como por ejemplo: "Conociendo (…) calcule (…)".

- -*Valorativos:* Sirven para otorgar retroalimentación al receptor. El *apéndice* (en la comunicación escrita) generalmente consta de dos partes o etapas. Por un lado, la grilla anticipada de evaluación con los puntajes y/o un ítem extra para resolver/responder por el alumno en caso de ser necesario; y por el otro las correcciones posteriores del profesor (por ejemplo, textos como los siguientes: *"incompleto", "no responde", "mal", "✓"*), una vez que haya sido resuelto el trabajo, el examen, etc. La primera parte puede estar o no estar presente de manera explícita, muchos profesores la consignan oralmente. Ambas corresponden al área de las *reglas de peritaje*, término introducido *ex profeso* para este análisis. *(Figura 4)*

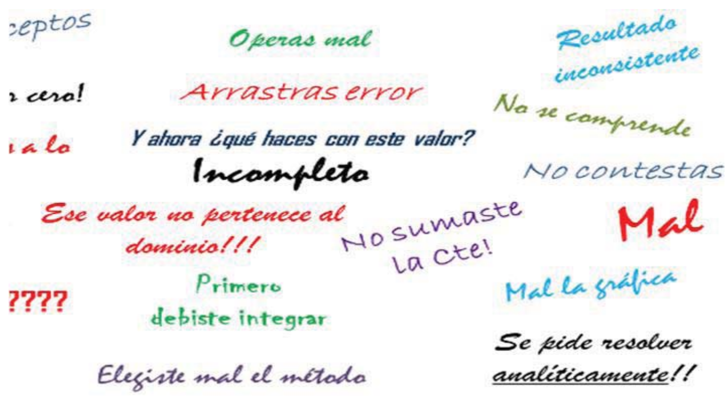


Fig. 4 – Ejemplos de enunciados de los profesores en las evaluaciones escritas

Conclusiones y discusión

Es recomendable robustecer las habilidades discursivas prescriptivas/directivas durante la formación de profesores pues se observa la reiteración de los mismos errores y omisiones en los materiales didácticos utilizados por los propios docentes en actividad. La visibilidad de esta cuestión y que mediante el presente trabajo de análisis se pretende elucidar, es de vital urgencia para lograr una la práctica reflexiva/efectiva de los futuros profesionales.

Las problemáticas que manifiestan tener los alumnos son provocadas por los malentendidos que acarrean frecuentemente los enunciados de sus profesores, y serían salvables si se tomase en cuenta que pueden ser reformulados a la luz de su naturaleza, funciones e implicaciones descriptas.

Poner el acento en su construcción criteriosa prevendría situaciones incómodas con los alumnos y se aplacarían en gran medida, los consecuentes efectos no deseados. Gran parte del trabajo que hace el profesor cuando establece las reglas de peritaje para sus exámenes es implícito, *a posteriori*, en soledad fuera de las horas de clase y no se comunican al alumno, es por esto es que tiene todas las características de una evaluación calificativa, arbitraria a los ojos del aprendiz en vez de cumplir la función para la cual fue implementada: la función formativa. Los trabajos y exámenes de los alumnos son devueltos con enunciados recurrentes y con las características descriptas sin analizar por qué se persiste en prácticas que producen abandono y desmoralización en los futuros profesores; y que a su vez, repetirán seguramente con sus propios alumnos cuando se gradúen.

La *Figura 4* presenta algunos de los enunciados con los que los profesores de matemática suelen responder a las producciones de sus alumnos. La inclusión de los mismos en el final del presente texto tiene la intención de provocar la reflexión e invitar a la modificación de estas prácticas expulsivas.

Referencias bibliográficas

Atorresi, A. (2005). Construcción y evaluación de consignas para evaluar la escritura como competencia para la vida. *Enunciación 10,* 4-14. Disponible en http://revistas.udistrital.edu.co

Barnes, D. (1976). *From comunication to curriculum.* Londres: Penguin.

Briggs, C. (1986). *Learning how to ask. A sociolinguistics appraisal of the rol of the interview in social science research*. Cambridge: Cambridge University.

Bronckart, J. (1997). *Activité langagière. Textes et discours*. Paris, Delachaux et Niestlé.

Cazden, C. (1991). *El discurso en el aula: El lenguaje de la enseñanza y del aprendizaje.* Buenos Aires: Paidós.

Crespo Crespo, C., Homilka, L. y Lestón; P. (2012). *Ambivalencias del discurso matemático escolar.* En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25, 1049-1057*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lerman, N. (2011). *Argumentaciones gestuales y visuales en escenarios escolares: su aprovechamiento en la construcción del conocimiento matemático*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Lerman, N., Crespo Crespo, C. (2011). Claves de contextualización y uso de tecnología: su importancia a la hora de resignificar el discurso matemático escolar en el aula. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25,* 1059-1067. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lerman, N., Crespo Crespo, C. (2012). *Funciones lingüísticas predominantes en argumentaciones gestuales y visuales que se presentan en los escenarios de la matemática educativa.* Veiga, D. (Ed.). *Acta de la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática*, 454-461. Buenos Aires: Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Silvestri, A. (1995). *Discurso Instruccional.* Buenos Aires: CBC-UBA.

Werstch, J. (1993). *Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada*. Madrid: Visor.

HACIA UNA FORMACIÓN DOCENTE CON LA MIRADA EN EL AULA

Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Argentina
patricialeston@gmail.com

Resumen. El Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de Argentina está desde hace casi 10 años en proceso de actualización de los diseños curriculares de todas sus carreras, entre ellas, el Profesorado de Matemática. El cambio más profundo de este nuevo plan de estudios se fundamenta en la aparición de un nuevo eje de formación: El Eje de Aproximación a la Realidad y de la Práctica Docente.

En este nuevo eje se incluyen cuatro espacios, uno en cada año de la formación. El objetivo de cada uno de estos espacios es lograr que los futuros docentes articulen los conocimientos que han construido en el Eje Disciplinar y los conocimientos del Eje de Formación Común de Docentes, con la mirada puesta en el aula de matemática, que es donde finalmente van a desarrollar su tarea los futuros docentes cuando hayan egresado. En esta oportunidad, reflexionaremos sobre los cambios que este nuevo diseño curricular ha logrado en la formación de los docentes.

Palabras clave: trabajo de campo, diseño curricular del profesorado

Abstract. Since the last decade, the Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" has been going through a revision and correction for its curriculum in order to make them better fitted to current needs. Within this process, we are focusing this paper in the Curriculum of the Teacher's Training Course for Mathematics. The most relevant improvement so far has been the inclusion of a new set of subjects organized in a third track in the preparation of Math's Teachers: The track of Reality Perception and Teaching Practice.

This new track includes four different subjects, one per year of the teacher's formation. The aim of each of the subjects is to achieve the articulation between what they have studied within the Mathematic's Track and what they have studied in the General Knowledge for Teachers Track, bearing in mind that their focus should be inside the Math's Classroom, which is the natural habitat for teachers, since that is their desire. In this paper, we will reflex on the changes that this new Track induced within the Math`s Teachers Preparation.

Key words: field work, teacher training curriculum

Introducción

La Matemática Educativa tiene "siempre la intención, explícita o implícita, de contribuir a la mejora progresiva de la educación científica regional, favorecer la constitución de una ciudadanía con una visión más científica del mundo, y fortalecer a una comunidad profesional emergente" (Cantoral, 2009a, p. 302). En esta concepción de nuestra disciplina científica nos encontramos enmarcadas un grupo de profesoras del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina. Y es con esa concepción que enfrentamos la tarea diaria de formar futuros docentes de matemática. Entendemos que en nuestra tarea está inserta la necesidad de mejorar, a través de la formación docente, la realidad educativa de las escuelas de nuestro país. Nuestro Profesorado es una de las instituciones más reconocidas en su rama, y es por eso que sus egresados siguen siendo buscados por los directivos de las escuelas y destacados entre los egresados de otras instituciones. Sabiendo esto es que entendemos que la tarea de difusión de las investigaciones que hacemos y que conocemos a través de reuniones, revistas y actas de congresos, debe caer en el seno de esta institución. De esa manera, hemos integrado a diversos espacios curriculares del Diseño Curricular del Profesorado en Matemática, las producciones de la comunidad, con el objetivo que los futuros docentes comprendan, desde el inicio de su formación, que el rol docente debe ser considerado no sólo una vocación, sino una profesión fundamentada con una mirada científica.

El diseño curricular del Profesorado en Matemática

En el año 2005 se implementó un nuevo Diseño Curricular en el Profesorado en Matemática con un cambio fundamental, la inserción de un nuevo eje que permite la interacción de los dos ejes tradicionales. Hasta ese momento, el Profesorado de Matemática tenía sus materias divididas en dos ejes que no se conectaban: el Eje Disciplinar, que contenía las materias específicas de matemática (Álgebra, Geometría, Análisis, Estadística, etc.) y el Eje de la Formación Común de Docentes, que contenía a las materias que tienen que ver con la formación didáctico-pedagógica de los docentes (Psicología, Teorías de la Educación, Conducción del Aprendizaje, Filosofía, etc.). El nuevo eje, llamado Eje de Aproximación a la Realidad y de la Práctica Docente, incluye una serie de cuatro espacios que tienen por objetivo poner de manifiesto la interacción entre las disciplinas de los ejes anteriores, al tiempo que están orientados hacia un desarrollo más cercano a la investigación con la mirada puesta en las aulas de matemática.

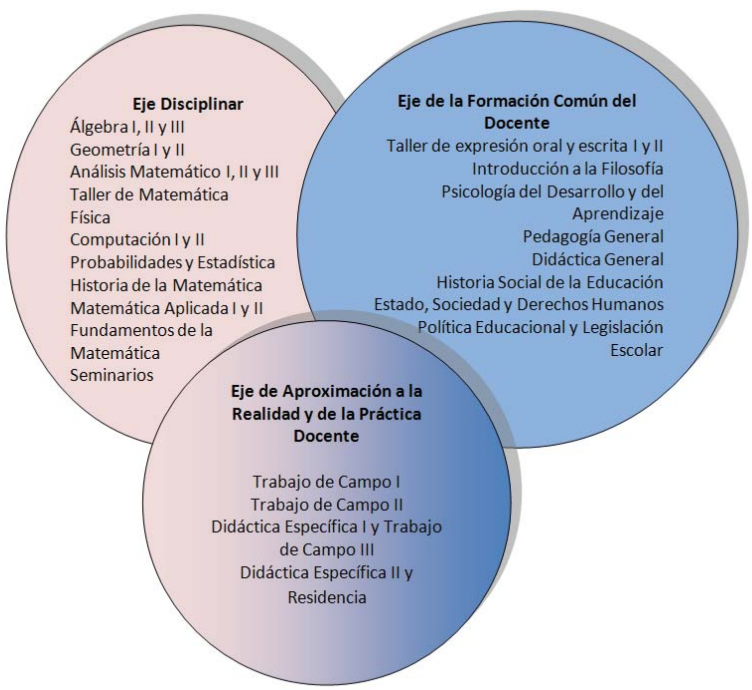


Diagrama 1 – Diseño Curricular por Ejes

En particular, en esta oportunidad, vamos a abocarnos a los dos primeros espacios de este nuevo eje: Trabajo de Campo I y II. Estos dos espacios se destacan por intentar lograr que los estudiantes se acerquen a la tarea del profesor de matemática, sus problemáticas y su contexto de desempeño: las instituciones educativas. Los principales objetivos de estos espacios, según consta en el Diseño Curricular son:

- Describan, analicen, interpreten y diseñen prácticas educativas apelando a conceptos y modelos teóricos de campos disciplinarios en general y de matemática y didáctica de la matemática en particular.
- Comparen esos desarrollos teóricos con referentes empíricos cotidianos, contemplando vacíos o áreas cuasiexploradas por la teoría y/o recreando nuevos conceptos.
- Ensayen alternativas diversas para la introducción de cambios deliberados y sistemáticos en las prácticas docentes, de manera hipotética y/o real.

> […] Las finalidades formativas de este eje se apoyan en el dominio de la práctica como un proceso en el cual intervienen diversas disciplinas cuyo objetivo es lograr el aprendizaje. Este eje permite enmarcar la tarea docente a partir de investigaciones didácticas que se volcarán en el diseño de actividades para la práctica docente a partir de la reflexión. (Diseño curricular del Profesorado en Matemática, 2005, p. 13)

Resulta evidente entonces que es necesario en estas materias de los primeros años de formación docente proveer a los alumnos con elementos teóricos que les permitan comenzar a construir un marco teórico que les servirá luego, al momento de ingresar efectivamente en el sistema educativo, para tomar decisiones fundamentadas en la investigación en Matemática Educativa.

> Nuestro enfoque ante esta problemática, exige de una incesante interacción entre la elaboración teórica y la evidencia empírica; para lo cual nos auxiliamos permanentemente de investigaciones sobre la formación de profesores y sobre las condiciones de la enseñanza en las aulas escolares y los laboratorios. Nos interesa sobremanera esclarecer las condiciones del aprendizaje de ideas complejas en situación escolar con la finalidad de usar dicho conocimiento en la mejora de los procesos educativos (Cantoral y Farfán, 2003, p. 29)

Estos alumnos, futuros docentes, que hoy tenemos en las aulas del Profesorado son los que esperamos respondan a la comunidad con sus experiencias, que basadas en estos elementos teóricos de los que hablan Cantoral y Farfán (2003) permitirán construir conocimiento de la Matemática Educativa en el futuro.

El objetivo de la cátedra que integro, sin embargo, no busca en esta instancia que los estudiantes construyan un conocimiento teórico, sino que reconozcan el lugar que la investigación debe tener al momento de pensar el rediseño del discurso matemático escolar. Nuestros alumnos no están abocados a la preparación de clases ni al diseño de actividades sino al análisis y diagnóstico de lo que ocurre en las aulas de matemática. En base a observaciones y entrevistas nuestros alumnos describen, interpretan y analizan la realidad de las escuelas a las que asisten; para luego poder concluir en la construcción de una mirada que les permita ser críticos de la actualidad de la enseñanza de la matemática y plantearse preguntas que los acompañen en la construcción de la propia identidad del rol docente que tendrán a futuro. Es en este sentido en que les acercamos los resultados de la investigación: no esperando que los implementen en el aula (lo que aún no están habilitados para hacer) sino para que interpreten lo que sí se da en las aulas bajo la mirada de las perspectivas teóricos que otros que se dedican a la educación han construido.

> Llevar al aula propuestas didácticas que rediseñen dicho discurso no se limita a secuencias que el profesor debe seguir como algoritmos, sino que debe reconocer en ellas cómo se problematiza un saber, el tipo de interacción que se genera en el sistema didáctico, los momentos de construcción de conocimiento, cuándo se logran los objetivos de aprendizaje, cómo se generan construcciones personales y colectivas, cómo pasar del consenso a la institucionalización del saber, reconocer los momentos de intervención para provocar respuestas del alumno, etc. Es decir, la comprensión de aquello que fundamenta la propuesta didáctica se torna más importante que la propuesta misma. (Montiel, 2010, p. 71)

Es ésta la tarea que les damos a nuestros estudiantes, y son algunas de sus producciones las que queremos compartir hoy. Consideramos esta comunicación como una oportunidad para invitar a quienes se encargan de la formación docente a reflexionar en cuál es el objetivo de hacer que los futuros docentes se acerquen a la investigación y a las comunidades de matemáticos educativos. Nosotros entendemos que nuestra principal tarea es la de lograr que reconozcan la existencia de problemáticas en la educación, que conozcan maneras de abordarlos y que se constituyan en docentes críticos que en el momento en que tengan que hacerse cargo de sus aulas, puedan tomar decisiones informadas y fundamentadas, y reconstruir el discurso desde ese lugar.

La propuesta de Trabajo de Campo I y II

Como ya se ha mencionado, este trabajo está centrado en las actividades que se realizan en los cursos de primero y segundo año del Profesorado en Matemática, específicamente en las materias Trabajo de Campo I y Trabajo de Campo II. Ambos espacios tienen por objetivo colaborar con la construcción de la identidad docente de los futuros profesores, con base en el estudio de lo que ocurre en la actualidad en las escuelas secundarias de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, o en el Conurbano Bonaerense.

Desde Trabajo de Campo I, los ejes temáticos que se proponen a los alumnos para la reflexión son:

- Rol de la escuela
- Rol docente
- Rol alumno
- Matemática escolar

Estos temas, que se les presentan a inicio de la cursada son los que ellos tienen que abordar en dos entrevistas semiestructuradas (Rodríguez Gómez, Gil Flores, García Jiménez, 1999) que realizan a un docente de matemática en actividad y a un alumno de matemática, ambos de escuela media. Es la información que recolectan en esas entrevistas la que luego interpreta y analizan en base a elementos teóricos que obtienen de textos de Psicología Educativa, Pedagogía y Matemática Educativa.

En Trabajo de Campo II, los alumnos asisten a una institución educativa con la intención de recolectar información en relación a:

- Dimensiones de la escuela: organizativa, estructural, administrativa
- Documentos que rigen las instituciones
- La comunicación en las instituciones
- Proyecto Escuela
- La clase de matemática

En este espacio curricular los alumnos realizan lectura de documentos, entrevistas, observaciones y documentación fotográfica de la institución para poder analizar lo anterior. El sustento teórico con que cuentan es el mismo con el que cuentan en la materia anterior, al que se agregan textos de Didáctica General.

Cabe aclarar que en ambos espacios los alumnos reciben orientación en relación a qué literatura de Matemática Educativa deben considerar. En el caso de TCI lo que les ofrecemos son algunos textos de Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa y algunos textos de Premisa. En el caso de TCII los invitamos a que ellos realicen una búsqueda bibliográfica, orientándolos hacia el análisis de las páginas de Soarem y Clame.

Ambas materias concluyen con un Informe, que luego de ser evaluado y defendido frente al resto del grupo, es lo que constituye la herramienta de evaluación y acreditación del espacio. Es de algunos de esos informes de los que tomaremos evidencias para mostrar lo que nuestros alumnos logran.

Algunos resultados obtenidos

A continuación, presento las reflexiones de algunos alumnos en sus informes y las vinculaciones que lograron hacer con la bibliografía consultada. Por supuesto que las dificultades son muchas, sin embargo, las reflexiones a las que llegan resultan interesantes, así como la bibliografía que consultan y la manera en que la interpretan. Los párrafos están tomados de las cátedras de Trabajo de Campo I (TCI) y Trabajo de Campo II (TCII), y en cada caso se indica el año de cursada.

Primer caso: La matemática como castigo o como conocimiento para la vida

Este grupo de tres estudiantes estaba planteando en su informe una situación que criticaban, y de la que había dado evidencias el estudiante al cual habían entrevistado.

> Frases tales como " si se portan mal les doy cinco problemas" o " tienen tarea extra por su mal comportamiento" suelen escucharse en las aulas, cuando sería mucho más sencillo y productivo captar la atención de los alumnos a través de actividades motivadoras que le permitan descubrir que pueden aplicar sus conocimientos previos, y descubrir nuevos a través de situaciones prácticas. "Es indispensable que el profesor actúe en forma creativa y busque los problemas que más interés promuevan en sus estudiantes y que cada conocimiento sea funcional en sus vidas" (Reyes Gasperini, 2010, pág. 45.).
>
> Debemos incentivar al alumno a conocer el mundo de las matemáticas, a explorarlo y recorrerlo, ayudándolo y apoyándolo con las dificultades que se les presenten, sin olvidar que cada alumno es un ser individual, que tiene su tiempo y modalidad de aprender, que es siempre distinta de uno al otro. Para eso elegimos ser profesores, para formar a una persona culturalmente dándole nuestro conocimiento para que se apropie de él y así lo utilice en su bienestar personal. (TCI - Año 2011)

Lo llamativo de esta reflexión y de esta cita es que reconocen la importancia de poner la mirada sobre el otro, sobre el alumno, y no sobre el conocimiento matemático. Es al alumno al que hay que cuidar, no al conocimiento involucrado. Por otro lado, que la cita sea de una reciente egresada de la misma institución habla del reconocimiento de un lenguaje que les es cercano, familiar, compartido. Eso es lo que hace de una institución una comunidad: puede uno reconocer a sus miembros aún sin saberlo.

Segundo caso: La matemática como construcción influenciada por lo cultural

Este grupo de alumnos estaba abocado a la tarea de sugerir cambios en la escuela a la cual asistieron: una escuela media nocturna con serios problemas sociales. Realmente se manifestaron desesperados frente al panorama que encontraron.

> Hay que hacer lo posible por enseñar la matemática con mayor conexión con lo cotidiano fuera del aula, y con la subjetividad de cada joven. Impartir el "saber hacer" matemático a través de la práctica y de la interacción social. Y tratar de comprender cómo la óptica cultural de cada alumno puede afectar a su modo de pensar y sentir la matemática. (TCII – 2010)

Una vez más, lo que lograron reconocer, en base a todo lo que se había leído y discutido es la importancia de lo cultural, o lo social, en la búsqueda de opciones para impactar en el sistema educativo.

Tercer caso: La importancia de lo visual y los cambios de registro

En este caso, el grupo de alumnos había observado una clase en la cual se estaban trabajando cuestiones relacionadas con trigonometría, de un modo absolutamente algorítmico. Eso los escandalizó y entonces llegaron a la siguiente reflexión.

> Que significa todo esto, a que queremos llegar, nada más ni nada menos a que es imposible hoy pensar en acercar el conocimiento a un tercero si lo fragmentamos, si no nos es posible interiorizarlo, hacernos de él, ejemplificar con aspectos de la vida cotidiana, esquematizar o imaginar una situación representada en combinaciones de símbolos, números y letras.
>
> Además, que "construir la representación en una práctica de interpretación o construcción del conocimiento a partir de la gráfica sobre la base de la relación dual dibujo-objeto matemático, permite incorporar significados, nociones y herramientas que trascienden a la matemática misma." (Buendía Abalos y Carrasco Henríquez, 2009, p.40)

> En síntesis, de lo que se trata es de no quedarse siempre con "repetir fórmulas", sino de tratar también de, por medio de lo visual llegar a conseguir que el que quiere aprender razone y construya su conocimiento y no sea simplemente un receptáculo de información, fórmulas o datos que los repite sin cesar. (TCII – 2010)

Lo interesante de estas ideas es que la educación que ellos están recibiendo ponen a lo visual en un segundo lugar, pero aún así en el proceso de lectura y discusión han comprendido que la visualización como práctica puede resultar una herramienta muy útil para la construcción de conocimiento.

Cuarto caso: El error como elemento de construcción

Del análisis de una clase de funciones, los alumnos rescataron lo que esa docente logró a partir de los errores de sus alumnos. En contraposición a lo que ellos suelen enfrentar en el Profesorado, donde el error es motivo de aplazo, el docente del curso logró llevar al grupo a la reflexión y a la construcción.

> Ante el error de los alumnos al asegurar la inexistencia de la intersección de la función con el eje x, la docente da un contraejemplo para hacerlos reflexionar sobre la validez del argumento, previa discusión grupal. Es así como se identifica nuevamente la importancia de que el alumno identifique las razones del error y discutirlas en forma grupal, para poder superarlo (Engler, 2007). (TCII – 2011)

El texto de Engler (2007) al que hacen referencia es un trabajo sobre el nivel superior, y fue uno de los que más impacto les generó: esa docente era como sus docentes, y sin embargo lo que ella proponía con sus reflexiones no era lo que ellos siempre se encontraban.

Quinto caso: El lenguaje formal y la frustración

Esta alumna iniciaba su trabajo sobre las bases de lo que ella había vivido en el Profesorado, como alumna de Geometría I. En la experiencia que había tenido en el colegio, se había encontrado con algunas situaciones que le habían hecho rememorar situaciones que evidentemente, no tenía resueltas.

> Sin duda la definición del libro era más clara a los efectos prácticos de lograr una representación mental de la mediatriz, sin embargo usaba elementos que aún no habíamos definido en clase, entonces, no servía. ¿Por qué no servía? uno de los objetivos del curso de Geometría I es que, como futuros profesores de matemáticas, los alumnos comprendan cómo se construye una ciencia formal, por lo tanto la "regla de oro" de la materia es que NO se pueden usar elementos para

> las demostraciones o definiciones que no hayan sido previamente definidos o demostrados en clase. Terminado el episodio, la clase se convirtió en un lamento en masa, por parte de los alumnos, acerca de las dificultades que presentaba la materia al ser tan formal y, por lo tanto, poco comprensible. La profesora defendió su postura, sin dejar de animar al curso a seguir adelante con la materia, a estudiar más, a buscar otras fuentes, a ser críticos, etc. Y final del asunto.

Esa experiencia fue la que le quedo en la cabeza… No es lo más importante entender, sino respetar a la matemática como ciencia formal. Pero eso en el fondo, iba en contra de lo que ella pretendía: ayudar a que otros aprendieran matemática.

> Ahora bien, la cuestión es: ¿cuántos de esos alumnos pudieron terminar felizmente el curso? ¿Cuántos se quedaron en el camino y tuvieron que recursar o simplemente dejaron la carrera? ¿De quién es la culpa: de la escuela secundaria que no sienta bases firmes o del estricto enfoque formal al que defendemos a muerte? ¿Cómo lograr un acercamiento de los alumnos a la matemática formal sin que esto resulte frustrante?
>
>> Una de las características del lenguaje matemático es la precisión, no ser ambiguo, es decir, que cada significado sea perfectamente definido; que a cada término o símbolo sólo se le atribuya un significado y que cada significado sólo corresponda a un término o símbolo, lo cual no sucede en el lenguaje común, en el que una misma palabra puede tener diferentes significados y la misma idea puede expresarse de maneras diferentes (Lomelí Plascencia, 2009, p.331).
>
> Acuerdo con esto, es ese el sentido de que la matemática tenga un lenguaje propio, pero ¿es ese el centro de la matemática que se enseña en la escuela? No sé si podré responder todos estos cuestionamientos, pero, en principio, intentaré fundamentar que *el discurso matemático que en el aula sobrevalúa la formalidad y abstracción de la matemática termina por frustrar a los alumnos en general, es decir, en todos los niveles de enseñanza.* (TCII – 2009)

La frustración, el fracaso, la rigidez, la pérdida de claridad en los objetivos de enseñanza preocupan sinceramente a esta alumna, que no sólo logra reflexionar sobre esto, sino plantearse preguntas en relación a eso que observa.

Conclusiones

¿Cómo hacemos para llegar al sistema educativo con los productos de nuestras investigaciones? ¿Cómo logramos impactar en el discurso matemático escolar para lograr su rediseño? Esas preguntas nos las hemos hecho todos los que en algún momento nos dedicamos a hacer investigaciones, o a escribir sobre la realidad de nuestras aulas. La respuesta, que seguramente no sea la única, pero es la que de esta experiencia surge es *llegando a los institutos de formación docente*. La manera de impactar en las prácticas escolares es impactar en lo más íntimo de los futuros docentes. Son ellos quienes serán en los próximos diez o veinte años quienes tengan en sus manos la educación de las nuevas generaciones. Y si logramos que ellos entiendan que es en base a la reflexión sistemática, acompañada por una teoría que les dé sustento, como deben tomarse las decisiones didácticas, ya tenemos un gran terreno ganado.

Para finalizar, voy a compartir la conclusión de uno de los trabajos que se mencionaron antes. Si uno solo de los alumnos siente esto, gran parte de la tarea ya está hecha.

> Abramos nuestra mente, a veces limitada por la formalidad que tanto nos apasiona, a nuevas formas de enseñar. Pongámonos del otro lado, del que aprende (porque aunque a veces creemos lo contrario, todavía tenemos mucho por aprender), o del que desea aprender y no puede o no lo logra.
>
> Abramos nuestros oídos a lo que los alumnos tienen para decir, eso nos dará la pauta de qué es lo significativo para ellos, dejemos que sean parte de la enseñanza y no meros espectadores atados a un banco, observemos cómo se comunican, es más, pensemos en cómo nos comunicamos nosotros mismos en estos tiempos, tampoco vivimos en una burbuja.
>
> Es necesario un cambio de mentalidad, de visión, acorde a la sociedad en la que estamos inmersos. Debemos comenzar a, primero, explorar cada uno para luego explotar todos los recursos que las nuevas tecnologías nos ofrecen y salir de la comodidad de lo establecido, de lo que siempre hemos hechos y a lo que estamos acostumbrados.

Referencias bibliográficas

Buendía Abalos, G. y Carrasco Henríquez, E. (2009). Gráficas de variación: reflexiones sobre la visualización de la curva. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1297-1304. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2009a). Revistas Latinoamericanas en Isi Wok, reflexiones con la comunidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12 (3)*, 301-304.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003) Matemática educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6 (1)*, 27-40.

Castañeda Alonso, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1379-1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina: Secretaría de Educación Superior. (2005). *Diseño Curricular del Profesorado en Matemática*. Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González".

Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en Matemática Educativa. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1145-1153. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Engler, A., Aquere, S., Vrancken, S., Hecklein, M., Müler, D. y Gregorini, M. (2007). Nos preparamos para el cálculo trabajando sobre la recta real. *Revista Premisa*, 9(32), 24-36.

Gascón, J. (1998) Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18 (1)*, 7- 34

Lomelí Plascencia, M. (2009). Como intervienen las estructuras del lenguaje en la resolución de problemas matemáticos escritos verbalmente. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 327-335. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 13 (4 – I)*, 69-84

Reyes Gasperini, D. (2010). Reflexiones acerca del aula actual, como desafío para el profesor de matemática. *Premisa 12,* (44), 44-50.

Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J., García Jiménez, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

LA ELECCIÓN DE LA CARRERA DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA: MOTIVOS Y EXPECTATIVAS

Cecilia Rita Crespo Crespo, Liliana Inés Homilka, Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico
crccrespo@gmail.com , lhomilka@yahoo.com.ar, patricialeston@gmail.com

Resumen. En este trabajo se presentan resultados de una investigación realizada acerca de las causas de elección de la carrera docente por parte de estudiantes del profesorado de matemática y sus expectativas sobre el rol docente y la formación que van a recibir. Esta información se compara con una segunda instancia en la que se interrogó a egresados sobre estas mismas cuestiones y sobre las falencias que han podido detectar en su carrera. Todo esto con el objetivo de repensar en profundidad la formación docente y las instancias posteriores para la formación continua.
Palabras clave: : rol docente, vocación, profesionalización docente

Abstract. This paper reports the outcomes of a research held aiming to find the causes of the election of Teaching as a profesion, their expextations about what they are going to learn and the way they see the teacher's role inside a classroom. The data was collected with the use of questionaires and personal interviews, both with Teachers to be and already working Teachers. This information was ment to be used to deeply think over the teacher's primary preparation and the later education they may receive as Continuos Formation.
Key words: role of the teacher, calling, teacher's professionalizing

Introducción

En Argentina, a diferencia de algunos países de Latinoamérica, las carreras de profesorado se imparten en Institutos de Formación Docente (IFD). Estos centros son instituciones educativas de nivel superior no universitario que se dedican específicamente a preparar a docentes en las distintas disciplinas que se imparten en la escuela media. Los planes de estudio, en general, contemplan tres ejes de formación, por un lado la formación académica en el contenido propio de la disciplina elegida, en el caso de este trabajo, contenidos de matemática; por otro lado, una formación general de docentes, dentro de la cual se destacan nociones generales de Psicología, Pedagogía, Didáctica General, entre otros; y un tercer eje en el cual interactúan estas disciplinas, donde aparecen, entre otras materias, las prácticas docentes.

Los estudiantes de estas instituciones eligen realizar estos estudios no como una alternativa laboral, sino como una profesión que responde a un llamado *vocacional* que tiene que ver específicamente con la tarea de la docencia. Si bien, aún hay en algunas escuelas profesionales de otras áreas ejerciendo la docencia, un muy alto porcentaje de quienes son profesores de escuela media son docentes egresados de los IFD. Y a pesar de que en otros campos de desempeño profesional, un título universitario supera en valoración a uno no universitario, como es el de docencia, las escuelas eligen a los segundos, porque su formación fue dirigida específicamente para el desarrollo profesional de la docencia.

Sin embargo, como ocurre en todas las instituciones educativas, los Profesorados (IFD) están atravesando una etapa de crisis. En algunos casos, por la baja matriculación en sus carreras; en otros, porque los estudiantes que egresan de esos centros exigen mejoras a la calidad de la educación que allí se ofrece: la escuela media actual es un escenario con múltiples complejidades, y los profesorados parecen estar alejados de la escuela actual, haciendo propuestas para una escuela y un alumnado que ya no existe.

Esta crisis está reconocida por los actores de la Formación Docente, y se están intentado mejorar aquellas situaciones que presentan problemas. En particular, en el caso de Argentina, una nueva Ley de Educación Nacional está en plena implementación, y de su aplicación se espera se logren mejoras en la Formación Docente. Sin embargo, algunas cuestiones en relación a la docencia como actividad y al rol de los docentes en particular siguen siendo elementos que no se han incorporado a la discusión. La formación académica de los futuros profesores sigue siendo pensada mayoritariamente como una formación en la disciplina que después enseñará: si un estudiante sabe matemática, debería ser capaz de poder enseñarla. El conocimiento matemático no se problematiza, se considera aun ahora transparente (Gascón, 1998). Y queda todavía una concepción social de la docencia como una actividad de servicio, asociada con un llamado vocacional que debería ser suficiente para proveer herramientas a los profesores para ejercer su trabajo con pericia: si al profesor le gusta enseñar, será buen docente.

La profesionalización docente continúa siendo un problema, no se espera del docente que investiga o se forme con posterioridad a su formación inicial, salvo en el caso de que tome cursos específicos sobre algún contenido de la escuela secundaria (Por ejemplo: "¿Cómo enseñamos puntos notables del triángulo?") o sobre alguna herramienta tecnológica que puede usarse en las escuelas (Por ejemplo: "Herramientas informáticas en el aula de matemática"). Sin embargo, no hay por lo general, en ese tipo de cursos, una reflexión teórica del campo de la matemática educativa, no se estudian marcos teóricos que sirven de sustento para el cambio de la realidad de las aulas. No se entiende a la docencia como a una profesión basada en el desarrollo teórico. Falta fuertemente un trabajo y aceptación de la matemática educativa como disciplina científica que es propia de aquellos que se dedican a la docencia. La investigación en matemática educativa sigue estando, para gran parte de los docentes, aislada de las escuelas y de los profesores que allí se desempeñan.

> Este rol de construir conocimiento, y de su incidencia en la sociedad, no es ajeno a la Matemática Educativa. Desde la escuela de pensamiento que referenciamos en esta investigación, la Matemática Educativa interpreta y estudia fenómenos

> vinculados a la construcción social del saber matemático, con la clara intención de lograr equidad en la construcción de este conocimiento en los diferentes planos de la sociedad, tales como el escolar y la cotidianeidad, con la expectativa de que este conocimiento transforme la vida de los ciudadanos. (Cordero y Silva, 2012, p. 299).

Entendemos que los cambios en los IFD deben ir orientados hacia la inclusión del estudio de la Matemática Educativa, como disciplina orientadora de las acciones y reflexiones de los docentes de aula. Y es en ese sentido que realizamos una indagación con estudiantes y egresados para lograr sustentar nuestro argumento con elementos propios de quienes se están formando o ya están en ejercicio de la docencia y que reclaman un tipo de conocimiento que es ajeno a la formación que se les ofrece.

La socioepistemología y la formación docente

Entendemos la docencia como una actividad social, como un servicio que se presta a la comunidad para lograr que aquel conocimiento que es relevante para ese grupo pueda transmitirse de manera intencional, ordenada y sistematizada de una generación a otra. El problema es, en parte y como se ha mencionado anteriormente, que ese conocimiento no se problematiza en el nivel de la formación docente (ni en el nivel medio); y por otra parte, que ese grupo o comunidad en la cual la escuela está inserta, está alejada de la misma: las escuelas mantienen políticas de puertas cerradas y los estudiantes viven una disociación entre lo que hacen, dicen, piensan y sienten en las aulas y fuera de ellas. (Barbero, 2008).

El marco teórico que elegimos para explicar nuestras visiones e interpretaciones de la información obtenida sobre las necesidades de cambio en el nivel Superior del Profesorado, da cuenta de la importancia que tiene comprender que el conocimiento es relevante si está asociado a un uso y que son las comunidades las que norman esos usos.

> La Socioepistemología, en tanto aproximación teórica emergente de la Matemática Educativa, da explicaciones incorporando la dimensión social sobre cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático situado, poniendo en primer plano la idea de práctica social como norma de la construcción del saber. Dentro de esta disciplina, la Socioepistemología ha hecho planteamientos novedosos, poniendo al centro de la discusión, más que a los conceptos, a las prácticas sociales asociadas a determinado conocimiento. […] En este sentido, [se ha logrado] romper la centración en conceptos y en individuos que aprenden, por otra que pone el énfasis en las prácticas y en las comunidades. Ello exige de marcos teóricos adecuados a los tiempos. (Cantoral, 2010, pp. 1051-1052)

Parece no tener sentido encarar un cambio de Diseño Curricular del Profesorado de Matemática si no se asumen primero estas cuestiones: la solución no es poner más o menos matemática, o poner más o menos materias de formación común. Es necesario darle a los futuros profesores un campo disciplinar donde puedan crecer y desarrollarse, una mirada científica que les permita entender la complejidad de lo que ocurre en el aula, no sólo porque los grupos sociales son complejos; sino porque el conocimiento involucrado es complejo; un conocimiento y entendimiento del rol que juega lo no escolar en la escuela, el entender que lo que enseñamos dentro del aula debe permitirle al estudiante desarrollarse en la comunidad; herramientas para que pueda comprender la relación que hay entre los procesos que llevan a la concreción de un saber (prácticas sociales) y la manera de reflejar eso en las aulas.

Y así como la Socioepistemología da pautas de las cuestiones que son parte de la construcción del conocimiento matemático, ha dado también elementos de análisis para entender al rol docente y a la Formación Docente en particular. Consideramos por un lado los aportes de Lezama (2009) sobre los contextos en que se desarrollan la formación docente y las prácticas docentes:

> La formación de los profesores de matemáticas está determinada por la región o país donde ésta se produce, responde a condicionamientos sociales, políticos y culturales así como a tradiciones institucionales. Las prácticas de los profesores de matemáticas responden en muchos casos a sistemas de representación sobre dicha labor, construidos en largos y complicados procesos de naturaleza cultural. (Lezama, 2009, p. 1393)

En el caso de esta investigación, las autoras conocen, por ser docentes y egresadas de alguno de estos centros, la naturaleza del escenario, su historia, su público. No intentamos en este trabajo dar pautas de un diseño curricular general para cualquier institución que se dedique a formar docentes. Estamos intentando hacer aportes locales a una realidad que enfrentamos de modo cotidiano y que exige que se actúe prontamente para la superación de las dificultades que vemos en las aulas. Sin embargo, es necesario dar evidencias de esas dificultades, para poder transmitir a quienes toman finalmente las decisiones sobre nuestras instituciones. Tomamos estas evidencias de dos fuentes distintas: por un lado, un cuestionario que presentamos en el próximo apartado; y por otro, una investigación realizada sobre las prácticas docentes en una de estas dos instituciones a las cuales nos referimos. En ese trabajo, se llega a algunas conclusiones que permiten comprender cómo las experiencias, y en particular esas primeras experiencias, son determinantes en la construcción del rol docente.

> La práctica docente genera en los alumnos y estudiantes imágenes positivas o negativas muy fuertes de lo que significa ser docente, de las actitudes que se tienen hacia el trabajo profesional, las características de sus clases, y acerca de las habilidades y competencias que debe desarrollar el profesor. (Homilka, 2008, p. 158)

El problema surge cuando esas imágenes que se construyen en relación a la docencia los coloca en una situación de indefensión: sienten que las herramientas que tienen no son suficientes para enfrentar la tarea, y no tienen ni siquiera un campo de conocimiento al cual ir a buscar eso que les falta. Los alumnos del Profesorado egresan sabiendo cómo se puede aprender algo de matemática si no lo saben, conocen los textos, conocen las estrategias, pueden identificar si es un conocimiento de álgebra o de geometría. Pero no conocen a la matemática educativa, y eso los deja afuera del campo que podría ayudarles a buscar respuestas a sus preguntas. Los docentes toman conciencia de su necesidad que es cada vez mayor y que se deja ver en las demandas que realizan con gran frecuencia e intensidad para poder dar respuesta a sus problemáticas (Crespo Crespo, 2011).

A continuación, presentamos las instituciones en las cuales se trabajó con el cuestionario, y la herramienta construida para la indagación.

Escenarios de la indagación y metodología

Se ha trabajado en esta investigación con alumnos de dos de las instituciones de la Ciudad de Buenos Aires que forman docentes de matemática y con algunos egresados de las mismas que continúan realizando estudios de posgrado y postítulo.

Particularmente se trabajo en los siguientes cursos:

<table>
<tr><th colspan="3">Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico</th><th colspan="3">Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Profesorado de Matemática y Matemática Aplicada</td><td rowspan="4">Extensión de la carrera: 4 años</td><td rowspan="4">Historia de la Matemática (3° Año)</td><td rowspan="2">Profesorado de Matemática</td><td rowspan="2">Extensión de la carrera: 4 años</td><td>Trabajo de Campo II (2° año)</td></tr>
<tr><td>Fundamentos de la matemática (4° año)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Diplomatura Superior en Matemática Educativa</td><td rowspan="2">Extensión de la carrera: 2 años</td><td>Análisis del Discurso Matemático Escolar (1° año)</td></tr>
<tr><td>Naturaleza del pensamiento geométrico (2° año)</td></tr>
</table>

Tabla 1 – Descripción de escenarios de indagación

Sobre esos cursos que se presentan en la tabla, se aplicó un cuestionario que indagaba sobre las siguientes cuestiones:

- Motivos de elección de la carrera
- Rol docente
- Aportes de la formación docente inicial
- Deficiencias de la formación docente inicial
- Motivos de la formación posterior (sólo con los estudiantes de la diplomatura)

El instrumento de recolección de datos era un cuestionario abierto, con preguntas no dirigidas. De un primer análisis de las respuestas de esos cuestionarios se seleccionaron algunos estudiantes con los cuales se llevó a cabo una entrevista semiestructurada, con el objetivo de poder comprender en mayor medida sus concepciones acerca de estas cuestiones (Rodríguez, Gil y García, 1999).

Respuestas a las indagaciones

A continuación presentamos los resultados y análisis de las indagaciones, tanto de cuestionarios como de entrevistas, agrupadas por temas. Si bien en algunos casos hay respuestas de diversa índole, hemos hecho foco en aquellas respuestas que aparecen con mayor frecuencia para esta presentación. Clasificamos a los estudiantes de acuerdo a su posición en la carrera:

- Grupo 1: Alumnos de Trabajo de Campo 2

  Son estudiantes que llevan menos de 2 años de formación inicial en el Profesorado de Matemática

- Grupo 2: Alumnos de Historia de la Matemática y Fundamentos de la Matemática

  Son estudiantes que están más próximos a egresar que a estar empezando, algunos de ellos incluso en año de Residencia o Prácticas Docentes

- Grupo 3: Profesores en Formación Continua

  Son profesores de Matemática en actividad que están estudiando la Diplomatura Superior en Matemática Educativa

Motivos de elección de la carrera

Se destaca en los tres grupos el gusto o facilidad para la práctica de la matemática y para explicar a otro algo que no entendió, así como las imágenes de los docentes que han tenido, ya sea como modelos positivos o negativos.

En los ingresantes, aún se conserva con mayor fuerza la idea poética de cambiar cómo se enseña matemática a través de su propia manera de explicar.

Los egresados que ya han pasado por las aulas saben que no es tan sencillo promover cambios.

Rol docente

Se ve en los estudiantes que están empezando su camino una visión bastante más "idealista" de lo que es ser docente: piensan en buscar formas novedosas, creativas de acercar a los alumnos a la matemática, cambiar la imagen de la matemática y la manera en que se enseña.

En el grupo de futuros egresados, se destaca más lo que le sucede al alumno que lo que hace el docente: el rol queda definido porque el otro pueda aprender o tenga las herramientas para poder construir conocimientos.

El grupo de los docentes ya egresados destacan cosas que surgen de la propia tarea: lo que creen que deben hacer los docentes es enseñar a pensar, ayudar a que la usen y principalmente que la conozcan.

Aportes de la formación inicial

Los ingresantes buscan principalmente formación matemática, se mantiene fuerte la idea de que con saber matemática es suficiente para poder dar clase, aunque se destaca el pedido generalizado de herramientas didácticas.

Del grupo de alumnos que ya han pasado por el Joaquín y van de salida, se destacan conocimientos matemáticos y didácticos, aunque también se reconocen algunas ideas respecto a los modelos docentes, pero distinguiendo el modelo a imitar y el modelo a "olvidar".

Del grupo de los egresados, lo único que todos reconocen haber recibido es formación matemática, aunque se destaca en segundo lugar la formación didáctica y las herramientas para enfrentar la clase.

Deficiencias de la formación inicial

A los Profesorados le falta escuela en dos sentidos: le falta lo que permite entender al aula, mirar al aula y trabajar en el aula. Y eso que demandan, se demanda desde lo teórico (conocimiento didáctico y pedagógico) y práctico (residencias más largas, más tiempo de contacto con la escuela).

Motivos de la formación posterior

Los egresados saben lo que la formación inicial no les dio, y lo buscan de distintas maneras. En particular, este grupo está buscando elementos para poder enfrentar sus clases, para poder resolver los conflictos que en ella se generan, desde la tecnología o los recursos didácticos que puedan encontrar en un posgrado. Pero sobre todo buscan elementos para comprender y afectar a esa clase en la cual se sienten superados por la realidad.

Conclusiones

Al profesorado se lo mira, en esta investigación, como el ámbito en el que hay que comenzar a trabajar para impactar en el sistema educativo actual, ya que es en él que se empieza a formar a los futuros profesores tanto en aspectos disciplinares como pedagógicos y didácticos. El rol del profesor debe ser repensado (Homilka y Crespo Crespo, 2010) para que sea capaz de asumir los cambios y poder enseñar en una escuela que forma parte de una sociedad educativa y cuyas demandas y necesidades le presentan constantes desafíos. En la actualidad, la formación docente se da en una sociedad educativa, en la que el profesorado y la escuela se encuentran atravesando momentos de crisis. La sociedad reclama un cambio en la escuela (Barbero, 2008; Tenti Fanfani, 2008). Por lo que ya no es pensable una formación matemática rígida.

Los estudiantes de profesorado de matemática inician sus estudios en muchas oportunidades con concepciones idealizadas de la carrera y de su profesión. Esperan adquirir a lo largo de sus estudios conocimientos sólidos de matemática. Encuentran que además de los contenidos disciplinares, la carrera les ofrece materias de formación común y orientadas a la práctica de la docencia. A lo largo de los cuatro años en que se lleva a cabo la formación la mirada de los alumnos cambia, reconociendo en algunos casos la necesidad de un conocimiento que trasciende a lo puramente disciplinar.

Los resultados de nuestras investigaciones demuestran que es el momento en el que se enfrentan al aula el que genera este cambio en la visión de lo que necesitan en su carrera. El egresado del profesorado, manifiesta usualmente la necesidad de continuar sus estudios tanto a través de sistemas educativos formales como de manera independiente. El concepto de formación docente continua es relativamente reciente, y desde hace pocas décadas también es conocida como formación en servicio.

Las expectativas de los estudiantes de la carrera de Profesorado de matemática se encuentran centradas en las dimensiones que consideran relevantes de la actuación docente. A través de las respuestas obtenidas, se infiere que la identidad docente se transforma de manera continua, el docente se elabora a sí mismo de acuerdo con sus propias experiencias y con los vínculos con otros actores sociales, sin los cuales no puede definirse, ni reconocerse. Necesitan un campo disciplinar que los acoja y les dé sentido de identidad y de pertenencia; en el cual existan elementos teóricos que los ayuden a impactar favorablemente en sus clases. La actividad docente lleva a cambios en las expectativas iniciales de los ingresantes, haciendo que se reconozca a la tarea como profesión y la vocación idealizada en un inicio se comprende como resultado de factores socioculturales propios de su escenario.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99). Buenos Aires: Siglo XXI.

Cantoral, R. (2010). Tendencias de la investigación en Matemática Educativa: del estudio centrado en el objeto a las prácticas. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 1043-1053

Cordero Osorio, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, identidad y Latinoamérica: El quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educvativa 15 (3)*, 395-318.

Crespo Crespo, C. (2011). El profesor de matemática y su formación. Un camino continuo en busca de respuestas. *Unión 28*, 11-20.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18 (1)*, 7-34.

Homilka, L. (2008). *Influencia de las prácticas docentes en la visión de estudiantes y profesores de matemática acerca de la matemática en el aula y las decisiones didácticas.* Tesis de Maestría en Matemática Educativa no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Homilka, L. y Crespo Crespo, C. (2010). En busca de una caracterización del profesor de matemática. *En* P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 1023-1032. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lezama Andalón, J. (2009). Relevancia de los estudios sobre el campo del profesor de matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1391-1393.

Rodríguez, G., Gil, J., García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Tenti Fanfani, (2008). Mirar la escuela desde fuera. En E. Tenti Fanfani (Comp.), *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.11-26). Buenos Aires: Siglo XXI.

EL EMPODERAMIENTO DOCENTE DESDE LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA: CAMINOS ALTERNATIVOS PARA UN CAMBIO EDUCATIVO

Daniela Reyes-Gasperini, Ricardo Cantoral-Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. México
dreyes@cinvestav.mx; rcantor@cinvestav.mx

Resumen. Este trabajo es la continuación del presentado en Relme 25 (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2012) y amplía la noción de la relación empoderamiento - práctica docente - problematización del saber matemático. Postulamos al empoderamiento docente como un proceso que permite al docente hacerse dueño de su propia práctica. Se plantea a la problematización del saber matemático como eje transversal de dicho proceso. Problematizar el saber matemático enfatiza la reflexión sobre el qué se enseña, más allá del cómo se enseña, mediante la localización y análisis del uso, la razón de ser, del saber matemático escolar. La esencia del empoderamiento reside entonces, en el cambio de práctica del docente, considerando a esta como la relación al saber matemático por parte del docente, más allá de sus herramientas didácticas, pedagógicas, etc.

Palabras clave: formación docente, Socioepistemología, educación continua

Abstract. This work is a continuation of that presented in *Relme 25* (Reyes-Gasperini & Cantoral, 2012) and extends the notion of the relationship empowerment - teaching practice - problematization of mathematical knowledge. We postulate teacher empowerment as a process that allows teachers to become master of his own practice. It raises the problematization of mathematical knowledge as a central focus of the process. Problematize mathematical knowledge emphasizes reflection on *what* is taught, beyond *how* is taught, by the location and use analysis, the rationale, the school mathematical knowledge. The essence of empowerment lies then in changing teaching practice, considering this as the relation to mathematical knowledge by the teacher, beyond their teaching tools, teaching, etc.

Key words: teacher education, socioepistemology, continuing education

Introducción

Desde la Teoría Socioepistemológica postulamos que es preciso el rediseño del discurso Matemático Escolar (dME) para una favorable apropiación del conocimiento matemático y por tanto, una considerable mejora educativa. Para entender la noción de dME es necesario, por un lado, reconocer que la matemática que vive en el sistema educativo es resultado de un proceso de selección y reorganización mediada, la transposición didáctica, que lleva al saber sabio hacia el saber enseñado (Chevallard, 1999). En otras palabras, el saber matemático sufre modificaciones adaptativas progresivas con el objeto de seleccionar, organizar y estructurar los conocimientos matemáticos que estarán en el currículum escolar. Por otro lado, debe aceptarse que la matemática presentada en estos currículos está centrada en objetos matemáticos concebidos como entidades abstractas ejemplificadas, sin considerar el proceso de construcción del conocimiento matemático por parte de los estudiantes. Entonces, el dME actual trabaja con objetos abstractos, anteriores por tanto a la praxis social y en consecuencia externas al individuo, siendo el profesor quien comunica "verdades preexistentes" a sus alumnos, normado por este dME (Cantoral, 2003).

El rediseño del dME precisa de una nueva mirada y una relación hacia la matemática escolar por parte de los actores educativos y para lograr esto no basta con ofrecer al docente "talleres o cursos" en los que se discutan herramientas didácticas o pedagógicas, ni siquiera con reflexiones de largo aliento sobre el quehacer de los docentes con especialistas, sino que se precisa de un replanteo del posicionamiento frente al saber matemático, a su constitución y difusión. Desde la Socioepistemología replanteamos, primeramente, el *qué* se aprende, además de preguntarnos *cómo* se aprende. Esta matización induce una reorganización de la perspectiva teórica: el qué y el cómo como unidad de estudio.

De este modo, son dos los planteamientos teóricos fundamentales que sustentan la presente investigación, en primer lugar, el hecho de que el dME está centrado en objetos matemáticos y por tanto *excluye* a los agentes del sistema didáctico de la construcción social del conocimiento (Soto, 2010). En segundo término, la evidente fragilidad existente en la reproducibilidad de *situaciones de aprendizaje* cuando se llevan de la investigación al aula (Lezama, 2005).

Al respecto nos preguntamos: si el dME, legitimado por el sistema educativo, es el que excluye de la construcción del conocimiento matemático y los docentes a cargo de las clases de Secundaria fueron y son formados con base en el mismo discurso (Reyes-Gasperini, 2010; Reyes-Gasperini y Crespo, 2011), ¿es posible que los docentes favorezcan la construcción social del conocimiento matemático cuando han sido excluidos también? De igual manera, se estima que los docentes se apropien de las propuestas didácticas realizadas por la investigación y sean quienes puedan llevar al aula las discusiones, reflexiones y acompañen en el proceso de aprendizaje (Lezama, 2005), pero… ¿Podrán ellos favorecer la problematización del saber si no lo han hecho durante su formación, ni inicial ni continua? Dado que para nosotros este no es un camino simple de transitar por los docentes, en esta investigación se postuló al *empoderamiento docente* como uno de los procesos para acompañar el rediseño del dME, en cuanto a la profesionalización docente, considerando que si los docentes localizan y analizar el uso y la razón de ser del saber matemático escolar podrán ser dueños de su propia práctica y así poder adaptarse a cualquier cambio propuesto, ya sea por la investigación, o bien, por las entidades educativas. El proceso de empoderamiento docente refiere al estudio de la relación al saber matemático por parte del docente (Cantoral y Reyes-Gasperini, 2012); es decir, comenzar a interpretar a la matemática como producto de la construcción social del conocimiento matemático por encima del objeto matemático *per se*.

Problemática

Se ha evidenciado en Argentina, Chile y México (Iturbe y Ruiz, 2011; Salazar y Díaz, 2009; Valdemoros, 2010), que aunque se realicen propuestas de formación continua donde se les acerque material de investigación o se reflexione sobre la enseñanza de un conocimiento matemático (en particular la proporcionalidad), si bien los docentes reconocen que han "avanzado como maestros", no han podido modificar su práctica: siguen impartiendo las clases de la misma manera. Nosotros ante esta cuestión nos preguntamos ¿qué es lo que está faltando en los programas de profesionalización docente que todavía no logran una mejora, o bien, un cambio en la práctica docente? Y de aquí nos surge la duda, ¿a qué llamaremos práctica docente? Si bien la práctica docente es entendida en cuanto al manejo de tareas, o bien, a las interacciones didácticas que tiene el docente en el aula con sus estudiantes, para nosotros hablar de un cambio de práctica considerará al cambio que se produzca por parte del docente con relación al saber matemático puesto en juego. Desde una mirada socioepistemológica, los programas de profesionalización docente deben problematizar el saber matemático, es decir, hacer del saber un problema localizando y analizando su uso y su razón de ser (Montiel, 2011).

Para ello es preciso estudiar *cómo se produce el cambio de práctica docente en relación al saber matemático*, en donde se deje de interpretar a la matemática como un cúmulo de objetos prexistentes a la praxis humana y comience a privilegiarse la articulación de distintas argumentaciones, se permita la emergencia de diversas racionalidades situadas o contextualizadas, se desarrolle el carácter funcional del saber, se favorezca la resignificación progresiva al considerar varios marcos de referencia en donde puede producirse dicho conocimiento matemático, todo sobre la base de la consideración de que la matemática emerge como producto de una construcción social. En particular, analizaremos estos fenómenos a partir del saber matemático de la proporcionalidad.

Empoderamiento docente

En esta investigación caracterizamos el fenómeno que denominamos *empoderamiento docente*. Para ello nos dimos a la tarea de analizar distintas vertientes existentes sobre el tema, ya sea sociológica, de psicología comunitaria, del feminismo, y en particular, aquella que aborda la educación matemática (Howe y Stubbs, 1998, 2003). De dicho análisis se extrajeron los elementos transversales que caracterizan al empoderamiento, a saber: es un proceso del individuo en colectivo; no es un suceso que se otorga, sino que se produce desde el individuo; parte de la reflexión y se consolida en la acción; y transforma la realidad. Por tanto, caracterizaremos al empoderamiento docente como el proceso que vive el docente, en conjunto con sus colegas e investigadores, que permita problematizar el saber matemático escolar para hacerse dueño de su propia práctica y así transformar su realidad.

Unidad de análisis socioepistémica

Si bien el estudio a profundidad de esta temática se aborda en (Reyes, 2011), retomaremos aquellos elementos indispensables que permiten hacer explícito el proceso de empoderamiento en cuanto a la relación al saber matemático por parte del docente.

La unidad de *análisis socioepistémica* permitió a través del análisis de las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social, problematizar el saber matemático con lo cual, posteriormente, se problematizó el saber matemático escolar que trabaja el docente.

En primer lugar, realizamos un análisis de la dimensión epistemológica a partir del análisis del trabajo realizado por Euclides en *Los Elementos* (Euclides, 1991) en la sección que trabaja con geometría. Entendimos al surgimiento de la noción de proporción, como respuesta al problema de medir magnitudes inconmensurables. En el Libro V (Euclides, 1991) define que las magnitudes proporcionales son aquellas que tienen la misma razón y define a la razón como una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad. De lo cual se interpreta que la relación "guarda la misma razón" pretende resaltar el hecho que a pesar de que cambien los tamaños de las magnitudes, la relación que se establece entre ellas se conserva. Actualmente podríamos decir: la razón se mantiene invariante y se llama constante de proporcionalidad.

En cuanto a la dimensión cognitiva, existen investigaciones que analizan esta noción matemática. El primer nivel de pensamiento que se postula es el denominado *pensamiento cualitativo*, el cual evoluciona en cuanto a su complejidad. Piaget e Inhelder (1977) enuncian que "la noción de proporción se inicia siempre de una forma cualitativa y lógica, antes de estructurarse cuantitativamente" (Piaget e Inhelder, 1977, p. 141). En este paso de lo coloquial a lo simbólico es donde los estudiantes comienzan a cuantificar y enfrentarse a la construcción de "lo matemático", pudiendo considerarse un medio para construir un significado de "lo proporcional", ya que quedarse con un pensamiento cualitativo de lo proporcional conlleva a errores conceptuales, como por ejemplo: al presentar la gráfica de la función $y=-x$, se afirma que se trata de una función de proporcionalidad inversa dado que la noción de proporcionalidad inversa radica en la argumentación "a medida que aumenta *x*, disminuye *y*". Posteriormente, Piaget e Inhelder (1972) trabajan un experimento con balanzas en donde se busca el equilibrio. En su investigación afirman que el individuo logra la localización de una relación entre las magnitudes intervinientes, pero se concibe que la naturaleza de la relación es aditiva: "en vez de la proporción P/P´= L´/L, se tiene entonces una igualdad de diferencias P –

P´ = L´– L. La formación de la idea de proporcionalidad supone pues que en primer lugar, se sustituyan las simples relaciones de diferencia por la noción de la igualdad de productos PL = P´L´." (Piaget e Inhelder, 1977, p. 152). Es decir, diremos que se trabaja con un pensamiento proporcional cuando se comience a trabajar una relación de productos (o razones en su defecto).

Aunado a esto, el estudio de distintas investigaciones (Godino y Batanero, 2002; Carretero, 1989; Martínez y González, 2008; Vergnaud, 1990), nos permitió construir una síntesis de los modelos de pensamiento proporcional:

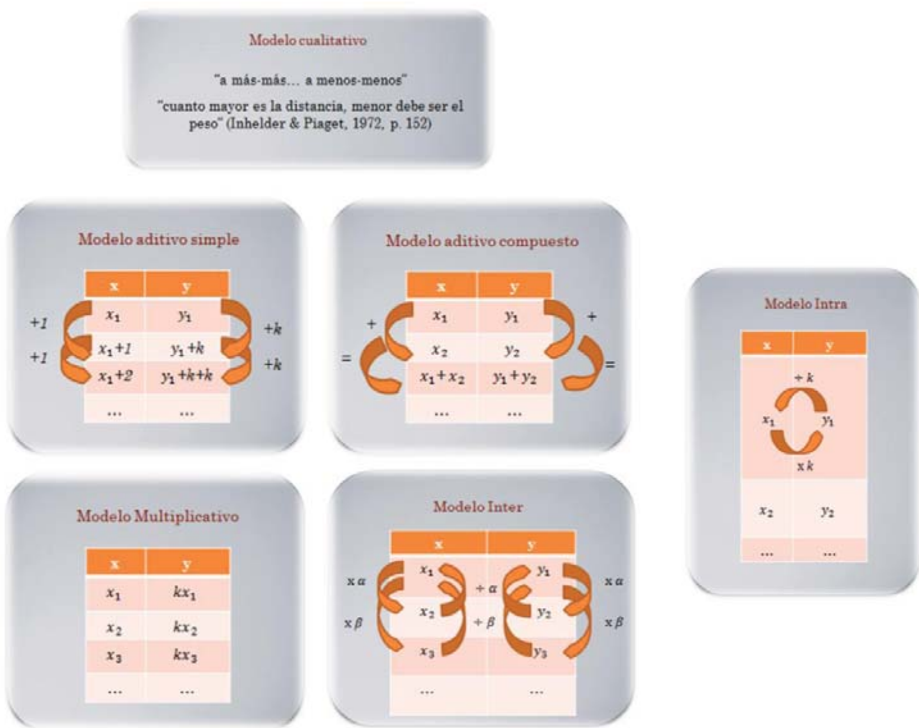


Figura 1. Modelos de pensamiento proporcional.

Carretero (1989), distingue dos tipos de estructuras. Por un lado, aquellas que presentan una relación dada entre magnitudes homogéneas a las que denomina *modelo multiplicativo escalar*; y por el otro, aquellas que presentan una relación entre magnitudes heterogéneas, denominada *modelo multiplicativo funcional*. Posteriormente Lamon (1994, citado en Martínez y González, 2008) realiza también una distinción como estrategias de los estudiantes para hallar el valor faltante de una proporción. Él los denomina *modelo inter* (correspondiente al modelo multiplicativo escalar) y *modelo intra* (correspondiente al modelo multiplicativo funcional).

Respecto al tratamiento didáctico de este saber matemático, se ha dicho anteriormente que aun habiendo participado de cursos de formación continua, no existen cambios fundamentales en cuanto a la práctica docente. Asimismo, podría observarse cómo el tratamiento de lo proporcional en los libros de texto se centra en los modelos cualitativos, aditivo simple o modelo inter, sin abordar el modelo intra, que es el que más se acerca a la idea fundamental de “lo proporcional” (por ejemplo: Block & García, 2009; Pisano, 2011).

Bajo la mirada socioepistemológica, con base en su dimensión social, se concibe que los conocimientos se doten de significados a través de su uso y su funcionalidad. En este caso, la noción de proporcionalidad se resignificará en cuanto el individuo pueda reconocer a ésta como la relación que existe entre magnitudes cuya peculiaridad es que su razón se mantiene constante (reconocimiento de su naturaleza). Para ello, es necesario recurrir a los orígenes de la construcción de este conocimiento emergente de la sociedad misma, así como a los distintos marcos de referencia en los cuales puede encontrarse (leyes físicas, relaciones entre magnitudes de las áreas de las figuras geométricas, construcciones a escala, entre muchas otras) para generar situaciones de aprendizaje que privilegien los distintos tipos de razonamientos y pensamientos proporcionales que en este saber matemático subyacen.

En síntesis, la Teoría Socioepistemológica permite problematizar el saber desde las dimensiones epistemológica, didáctica, cognitiva y social con el fin de localizar y analizar el uso y la razón de ser del concepto de la proporcionalidad.

Evidencia empírica

En trabajos anteriores se mostró que en el estudio de caso realizado en la investigación, el docente durante una clase en donde abordó el tema de proporcionalidad, no aceptó como argumentación válida que un estudiante reconociera a la constante de proporcionalidad como una razón entre dos magnitudes (distancia y tiempo). Asimismo, se explicitó que el docente modificaba su relación al saber matemático “buscando en las reflexiones que realiza con los estudiantes que emerjan argumentaciones y procedimientos distintos a los que hasta ese momento se lograban” (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2012, p. 1012), ya que previamente sólo aceptaba como válido que el estudiante contestara que la constante de proporcionalidad era el valor de la unidad; o bien, que dada una relación cuyo dominio era natural, la suma reiterada de cierto valor en el codominio hacía evidente que dicho valor era de la constante de proporcionalidad.

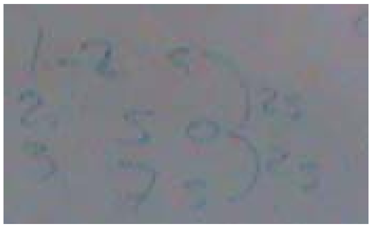
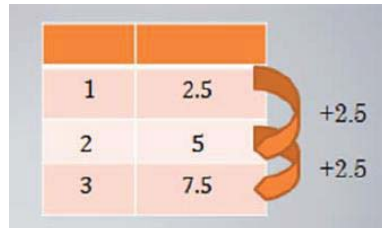


Foto original



Reconstrucción del original

Figura 2. Suma reiterada de la constante de proporcionalidad.

En este momento, con base en la unidad socioepistémica podemos hacer palpable la inmersión en un proceso de empoderamiento a través del cambio de relación al saber matemático luego de su problematización, ya que ha pasado de trabajar con los pensamientos del nivel cualitativo, aditivo simple, multiplicativo e inter, a poder generar interacciones dialécticas con sus estudiantes en donde se promueva la reflexión de la proporcionalidad dentro de un pensamiento intra (lo que a nivel cognitivo según Piaget es el alcance de un pensamiento proporcional), aceptando como una justificación válida el buscar los cocientes de los pares ordenados de una función específica y encontrar que dicho cociente es igual en todos los casos. Así, usando la mirada sistémica la noción de proporcionalidad como la relación entre dos magnitudes que se mantiene constante, podemos evidenciar un factor de empoderamiento por parte del docente: ampliación de los modelos de pensamiento proporcional y llevar esta ampliación a las interacciones con los estudiantes, es decir, llevar a la acción la reflexión y transformar su realidad.

Conclusiones y reflexiones

Ante nuestra pregunta ¿qué es lo que está faltando en los programas de profesionalización docente que todavía no logran una mejora, o bien, un cambio en la práctica docente? Desde la Teoría Socioepistemológica postulamos que es necesario problematizar el saber matemático con el docente, es decir, propiciar la discusión de la matemática misma. La modificación de su relación al saber matemático permite interpretar a la matemática como producto de la construcción social del conocimiento por encima del objeto matemático *per se*. Esta acción permitirá al docente poder ajustar y modificar su práctica en cuanto a lo didáctico/pedagógico de la manera que le sea conveniente según los objetivos que se plantee en sus clases. Asimismo, ante una nueva reforma educativa podrá hacer los ajustes pertinentes ya que el dominio del saber matemático, dentro del proceso de empoderamiento, no se reduce a algoritmos, significados, argumentaciones y procedimientos específicos, sino que la problematización del saber le permite localizar y analizar el uso y la razón de ser del saber matemático escolar.

En síntesis, el empoderamiento docente permite al docente hacerse dueño de su propia práctica a través de la problematización del saber matemático. Es por esto que estudiar la naturaleza de dicho saber es para nosotros indispensables y es la Socioepistemología la teoría que nos ha permitido hacer dicho análisis.

En investigaciones futuras se estudiará cómo potenciar el empoderamiento docente en procesos de intervención de profesionalización docente.

Referencias bibliográficas

Block, D. y García, S. (2009). *Fractal 1. Matemáticas. Secundaria. Primer grado.* D.F.: SM Ediciones.

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente [CD–ROM]. *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática* (tema Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas). Brazil, Blumenau: Universidad Regional de Blumenau.

Cantoral, R. y Reyes-Gasperini, D. (2012). Matemáticas y Práctica social: Construcción social del conocimiento matemático. *Novedades educativas 261*, 60-65.

Carreteto, L. (1989). La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años. *Anuario de Psicología 42*(3), 85 – 101.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico (trad. Ricardo Barroso Campos). *Recherches en Didactique des Mathématiques 19* (2), 221 – 266.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV* (Trad. por M. L. Puertas Castaños). Madrid: Gredos.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Granada: Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Howe, A. C. y Stubbs, H. S. (1998). Empowering Science Teachers: A Model for Professional Development. *Journal of Science Teacher Education, 8* (3), 167 – 182.

Howe, A. C. y Stubbs, H. S. (2003). From Science Teacher to Teacher Leader: Leadership Development as Meaning Making in a Community of Practice. *Science Teacher Education, 87* (2), 281 – 297

Iturbe, A. y Ruiz, M. E. (2011). Modos de acción y decisiones de los docentes. Un ejemplo en la enseñanza de la proporcionalidad. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 1047-1054. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8* (3), 339 – 362.

Martínez, N. y González, J. (2008). *Construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad. Diseño e implementación de actividades desde la experiencia de investigación acción.* Taller realizado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, 16 – 18 octubre 2008. Valledupar, Colombia.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico*. *Un estudio socioepistemológico*. D.F.: Díaz de Santos.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1977). El preadolescente y las operaciones proposicionales. En J. Piaget y B. Inhelder (Ed.), *Psicología del niño* (7a ed.) (pp. 131 – 150). Madrid: Ediciones Morata.

Pisano, J. P. (2011). *Logikamente. Título del tema: Regla de Tres simple. Número de tema: 02. Área: Matemática.* Buenos Aires: Ediciones Logikamente.

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Distrito Federal, México.

Reyes-Gasperini, D. (2010). Reflexiones acerca del aula actual, como desafío para el profesor de matemática. *Premisa 12*(44), 44 – 50.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2012). Profesionalización y empoderamiento docente en matemáticas: una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25,* 1005-1014. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Reyes-Gasperini, D. y Crespo, C. (2011). Un estudio acerca del fenómeno de exclusión a nivel superior en la carrera de profesorado de matemática. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 897-904. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Salazar, M. y Díaz, L. (2009). La actividad de medir aporta significados a fracciones y razones. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 207-216. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Distrito Federal, México.

Valdemoros, M. (2010). Dificultades didácticas en la enseñanza de razón y proporción: estudio de caso. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 217-226. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherchers en Didactiques des Mathématiques, 10* (2), 133 – 170.

EL AULA EN EL IMAGINARIO DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Javier Lezama, Elizabeth Mariscal
Instituto Politécnico Nacional México
jlezamaipn@gmail.com, elimariscal@gmail.com

Resumen. En el marco de las interacciones de la Red social para profesores de matemáticas Docencia en Matemáticas - DocenMat, creada en un ambiente virtual para la interacción y reflexión a partir de compartir ideas, conocimientos y comunicación de las propias prácticas relacionadas con su actividad de docencia como profesores de matemáticas; se reporta el análisis de una actividad sobre la visión de los profesores sobre su propia aula, realizando el análisis a partir del constructo teórico Imaginario Social.

Palabras clave: red social, aula, imaginario social.

Palabras clave: red social, aula, imaginario social

Abstract. In the framework of Social Network's interactions for mathematics teachers Docencia en Matemáticas - DocenMat, wich was developed in a virtual environment in order to interaction and reflection to sharing ideas, knowledge and communication of their own practices related to teaching activity; we report the analysis of one activity about the math teachers' vision of their own classroom, making an analysis based on theoretical construction from Social Imaginary.

Key words: social network, classroom, social imaginary

Introducción

La formación profesional de los profesores de matemáticas es crucial en el proyecto de mejora en la educación matemática de la sociedad. La formación del profesor de matemáticas contemplada en el contexto de lo que se ha denominado "Teacher education" constituye un área específica de estudio. Chapman (2011) afirma que el campo de investigación sobre el profesor de matemáticas ha tenido un crecimiento sustancial. Existe una amplia discusión sobre el carácter profesional de la tarea de profesor de matemáticas y los múltiples aspectos que caracterizan la profesionalización de dicha tarea; se puede hallar una discusión amplia y actual de ese aspecto en (Even, & Ball, 2009). Los estudios sobre el profesor se han enfocado a tres grandes grupos: profesores en formación inicial, profesores en servicio y a los formadores de profesores. También se pueden identificas cuatro aspectos que está tratados en esos grades grupos, los conocimientos del profesor, las creencias del profesor, las prácticas del profesor y un aspecto que se podría denominar el campo afectivo. (da Ponte & Capman, 2006), (Linares & Krainer, 2006). Considerando colaborar en la tarea formativa del profesor de matemáticas la Red Social DocenMat, fue diseñada para profesores de matemáticas interesados fortalecer su desarrollo profesional proporcionándoles un espacio de interacción y reflexión a partir de compartir ideas, conocimientos y la comunicación de las propias prácticas relacionadas con su actividad sustancial de docencia como profesores de matemáticas. DocenMat (DocenMat,

2011) (NING, 2005), busca constituirse en un espacio de interacción entre profesores, estudiantes e investigadores basados en la idea de Red social, incorporando las TIC en la integración y desarrollo de dicha Red. Crovi, D.; López, M A. y López González, R. (2009) proponen la siguiente definición de red: *Las redes son una estructura sistémica y dinámica que involucra a un conjunto de personas u objetos, organizados para un determinado objetivo que se enlazan mediante una serie de reglas y procedimientos.*

Una hipótesis general sobre un efecto de profesionalización en un profesor de matemáticas, es que éste al reflexionar e interactuar con los miembros de la red, reconozca e incorpore a su actividad docente, temas, elementos conceptuales teóricos y prácticos así como productos de investigación y de innovación nacidos al interior del Campo de la Matemática Educativa.

La estructura de Red Social juega un doble papel en nuestro proyecto, constituye el escenario material "virtual" que convoca a los profesores y los pone en contacto y al mismo tiempo se constituye metodológicamente en el motor - por la naturaleza de las redes sociales-, del proceso formativo que nos proponemos estudiar. A partir de la visión de Dabas, quien señala que una *Red Social, implica un procesos de construcción permanente tanto singular como colectivo, que acontece en múltiples espacios y asincrónicamente. Podemos pensarla como un sistema abierto, multicéntrico y heterárquico, a través de la interacción permanente, el intercambio dinámico y diverso entre los actores de un colectivo y con integrantes de otros colectivos, posibilita la potencialización de los recursos que poseen y la creación de alternativas novedosas para fortalecer la trama de la vida. Cada miembro del colectivo se enriquece a través de las múltiples relaciones que cada uno de los otros desarrolla, optimizando los aprendizajes al ser éstos socialmente compartidos*. (Dabas, 2002).

En el marco de la red, se propuso a los participantes una actividad de interacción proponiendo como tema de discusión *El Aula*, entendida ésta como "espacio para vivir, discutir y aprender matemáticas con otros"; la actividad se desarrollaría subiendo a la red un par de fotografías del aula de cada uno de los profesores. Estas podían ser vistas en la plataforma (en la sección de Fotos), por todos los participantes de la red. Subir y compartir una fotografía, lo consideramos ya una forma de participación, sobrentendiendo que la fotografía constituye una forma de discurso. Se asoció a esa forma discursiva, otra forma de participación que le permitía al profesor la posibilidad de expresarse en forma escrita -en un foro- más allá de la imagen. Cómo se utiliza el aula en la actividad de enseñar matemáticas. Es en esta reducida actividad, que presentamos un primer ejercicio de análisis de la actividad de los profesores participantes en la Red DocenMat.

¿Cómo interpretar discursivamente las fotografías que los profesores nos aportaron? Se procedió a utilizar un constructo teórico denominado *imaginario social* como una herramienta que permite una posible interpretación del mensaje o discurso que nos envían los profesores a través de las fotografías que subieron a la red los profesores.

Elementos teóricos-metodológicos para el análisis

En principio tomamos la idea de enculturación de Bishop, esto, con el fin de entender al aula como un espacio formal de enculturación:

> El aprendizaje cultural es un acto de <<re-creación>> por parte de cada persona. Cada persona joven y cada nueva generación de personas jóvenes <<vuelven a crear>> los símbolos y los valores de su cultura, los viven y los validan en el transcurso de su vida y después se relacionan con las siguiente generación […]
>
> La enculturación, como se la conoce de una manera más formal, es un procesos creativo e interactivo en el que se interaccionan quienes viven la cultura con quienes nacen dentro de ella, y que da como resultado ideas normas y valores que son similares de una generación a la siguiente […] (Bishop, 1999 p.118).

El espacio del aula lo podemos interpretar como el espacio en el que:

> *El establecimiento de la enculturación formal permite que este proceso tenga lugar en el nivel apropiado –concretamente en el formal- donde la enculturación puede ser intencional y explicita por lo menos durante un breve periodo de formación de la vida de cada niño.* (Bishop, 1999, p. 119)
>
> *Bishop,* cuando habla del proceso de enculturación, en uno de sus aspectos nos señala*. Los papeles que deben de desempeñar el enseñante y el alumno no son iguales, y uno y otro tampoco se relacionan en pie de igualdad. La tarea del enseñante es crear un tipo concreto de entorno de entorno para el alumno. La tarea del alumno es construir ideas y modificarlas en interacción con ese entorno. Estos papeles son complementarios y, sin duda, la relación mantiene un cierto equilibrio, pero se trata de un equilibrio dinámico*. (Bishop, p. 163).

El aula es un espacio formal, pero puede ser vivido y utilizado de múltiples formas y es eso lo que les estábamos solicitando nos mostraran a los profesores de la red; pero la problemática metodológica radicaba en la interpretación de dichos mensajes que nos enviaban los profesores a través de sus fotografías. Para ello se debe de ubicar el escenario de interpretación.

El análisis o interpretación de una imagen o fotografía como método de investigación entraría en la discusión metodológica sobre la subjetividad que según (Reséndiz García, 2008 p. 136) puede ser considerada en dos aspectos; *el intento de lectura de los social desde los sujetos y, como* *un recurso para penetrar, explorar y comprender la subjetividad, los sentidos y representaciones de los individuos sobre hechos, procesos y acontecimientos que nos interesa explorar y que forman parte de una historia personal* o visión personal.

La interpretación de las fotografías nos llevan al campo de la subjetividad humana y éste es un tema que aparece de cada ves con más fuerza en las investigaciones en el campo de la matemática educativa. Brown (2011) señala que en lo relativo al aprendizaje de las matemáticas escolares, las teorías de la subjetividad humana relativas a las formas en que nosotros mismos damos sentido a lo que hacemos, cómo nos representamos lo que hacemos, y cómo otras personas nos entienden, dan pie a una variedad de marcos interpretativos.

El marco de la investigación en el campo de la matemática educativa, como campo de investigación social se puede reconocer en éste una preocupación análoga a la declarada por Girola (2012, p. 441) en relación a la sociología, al señalar que:

> El sentido de la acción humana, sus significados, sus componentes tanto materiales como simbólicos, los procesos de interacción como constructores de mundo y, por lo tanto el carácter construido del mundo social ha caracterizado a la teoría sociológica en los últimos cuarenta años o más […]

Con el fin de analizar la actividad sobre el aula desarrollada en DocenMat, buscamos el esclarecimiento del concepto de Imaginario Social. Interpretar lo que los profesores nos quieren decir a través de una fotografía de sus aula, lo podemos ubicar en la problemática de lo que se denomina construcciones simbólicas y que según Girola op. cit. se pueden denominar representaciones o imaginarios sociales.

Para ahondar en el concepto de imaginario social, seguimos la discusión que realiza Girola op. cit. sobre la evolución y uso de dicho concepto. *El concepto a evolucionado de acepciones que lo ligan lo imaginario con lo ficticio, fantasioso, irreal e incluso hasta fantasmagórico,* pasando a la consideración de lo imaginario asociándolo más con los marcos sociales de asignación de significado al mundo compartido.

Señala a Cornelius Castoriadis como el constructor de una visión innovadora del concepto imaginario y con base a dicha visión dice que:

> El imaginario social no es el reflejo de una sociedad determinada, ni de ninguna realidad natural o social, sino es una construcción simbólica que permite instituir, crear y modificar a las sociedades concretas, a la ves que cada sociedad concreta constituye como imaginario un cúmulo de significaciones específicas. (Girola, 2012, p.452).

Posteriormente citando a (Anderson, 2007) nos dice que *lo imaginado y representado tiene estrecha relación con los imaginarios construidos prevalecientes en el contexto cultural de los que imaginan.*

Y también considerando a Searle (2007), introduce la idea de "supuestos de trasfondo" que *nos permite ver el mundo de la manera en que supone debemos verlo, porque asimilamos el objeto percibido a alguna categoría que nos resulta más o menos familiar.*

Finalmente, comenta a (Pinto, 1995) quien señala de manera sistemática los imaginarios sociales:

a) Los lugares o ámbitos de creación de imágenes con sentido, que nos permite acceder a la interpretación de lo social.

b) Los lugares de lectura y codificación-decodificación de los mensajes socialmente relevantes.

c) Los esquemas que permiten configurar deformar la plausibilidad de los fenómenos sociales;

d) No son representaciones sociales concretas, sino esquemas (abstractos) de representación hacia los que se orienta la referencialidad social (el poder, el amor, la salud, etc.)

Finalmente al hacerse la pregunta ¿cómo se estudian los imaginarios sociales? Señala que Pinto declara que el escenario privilegiado para su análisis es el de la comunicación. Sin embargo de manera crítica, Girola *señala que es raro que no considere las costumbres, los ritos, la cultura popular, los refranes, la cultura popular, los refranes. Etc.* (Girola, p. 457)

Concluyendo, el análisis de las fotografías podemos abordarlas como representaciones simbólicas y son construcciones hechas por los profesores a partir de su contexto sociocultural en los que se han formado y se desenvuelven. Las fotografías que a continuación mostramos nos aportan diversas imágenes de aulas y de usos de la misma en clase de matemáticas y por ello consideramos que nos pueden decir algo sobre como el profesor entiende la matemática y cómo se aprende. Desafortunadamente este análisis se queda en una primera fase ya que un análisis riguroso requiere de la creación de un aparato más refinado.

Aula especial para actividades especiales.

Se muestra trabajo en grupo. Hay mesas especiales. Se puede observar, un televisor, un retroproyector.

Hay hojas que guían las actividades, empleo de calculadora (pues ocupa un primer plano en la fotografía). Permite el trabajo colectivo.

Sin embargo la profesora que nos proporcionó la fotografía declara que no es su aula usual sino un aula especial que es utilizada para actividades especiales. Podemos interpretar que para actividades especiales como lo que observamos en la fotografía, se requieren entonces aulas especiales.

¿Qué tecnología? ¿Para qué prácticas de aula y qué aprendizajes?

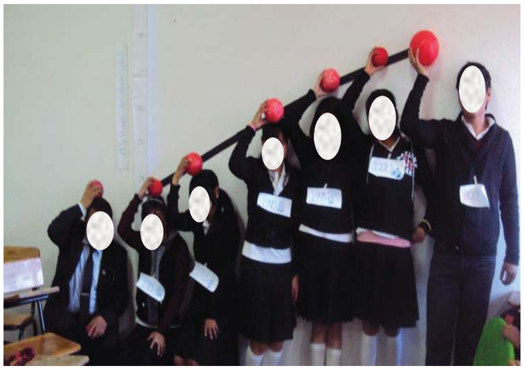
 

Un aula singular: El profesor se encuentra en una sala lejos de los estudiantes. La profesora puede impartir la clase a uno o más grupos. Cada grupo cuenta con tv y pizarrón electrónico. Los estudiantes ven la exposición de la profesora y pueden hacer preguntas a un profesor (monitor que los acompaña en el salón).

El profesor realiza explicaciones y propone ejercicios a los estudiantes además tiene visión del grupo o grupos a través de un televisor. En la fotografía superior izquierda, se puede notar la posición del estudiante de camiseta azul. Tiene los brazos cruzados, está en una actitud contemplativa. Casi todos tienen sus monitores apagados y la que lo tiene encendido parece que tiene un asunto ajeno a la clase. Lo que presenta la pizarra electrónica es lo que la profesora escribe en la pizarra. La profesora que aportó esa fotografía nos indica que esa modalidad de aula es parte de un proyecto piloto.

Propuestas así generan enormes interrogantes alrededor de semejante innovación, es decir ante la manera de presentar el contenido, el contenido mismo mediado por esa modalidad tecnológica y las interacciones alumno-contenido. No sabemos qué aporta en relación a la interacción profesor alumno en dicha modalidad. Pero el profesor no se puede negar al uso de dichas modalidades y explorar la problemática y beneficios que provoca.

Una experiencia física del crecimiento. Se experimenta física y visualmente el cambio de magnitud.



La fotografía nos muestra una representación encarnada o física de una representación gráfica o una gráfica que modela un comportamiento.

Las etiquetas que los alumnos llevan en el pecho corresponden a un año determinado. El punto rojo es la representación puntos sobre la gráfica, la altura de los niños constituyen la magnitud de la ordenada. Es relevante lo que nos muestran, pues los estudiantes observan y experimentan cambio de magnitud, ya que los estudiantes en principio deben inclinarse para ajustarse al comportamiento de los valores de las ordenadas y luego deberán levantar su mano. Es una experiencia física del cambio de magnitud. Es un ejemplo de una actividad de aula que representa un hecho matemático, el cambio de magnitud.

Ruptura con el trabajo privado, al dejar de lado el cuaderno.

Aquí el maestro nos muestra que se puede utilizar el espacio de aula de manera distinta. Empleo del piso. Salir del trabajo individual al colectivo al romper el trabajo en el cuaderno que es el ejemplo característico del trabajo individual y privado.

¿Trabajo colectivo, para construir qué sociedad?

Trabajo colectivo. Tres focos de atención. Todas las niñas tienen un lápiz en la mano.

Las dos primeras (primer plano) constituyen un primer foco de trabajo, se encuentran ensimismadas.

(En segundo plano), dos niñas de frente trabajan en conjunto. La niña de la derecha trabaja sobre el cuaderno de la niña de la izquierda. En tercer plano las dos niñas observan con atención el trabajo de las niñas en segundo plano, siguen las ideas de sus compañeras y aprenden.

¿Es una anécdota? ¿es una propuesta? ¿Qué se protege? ¿Qué es lo valioso?

Reflexionar sobre lo que los barrotes aportan en esta fotografía.

¿La fotografía es una protesta?

Momentos de trabajo individual en un escenario muy conocido.

Esta fotografía nos muestra actividad individual en la forma más conocida por todos nosotros.

El aula un lugar de trabajo.

Es un aula especial, muy equipada. La disposición de los alumnos nos muestra el uso amplio de

sus recursos. También nos habla de la naturaleza de la actividad propuesta a los estudiantes por la profesora. Los estudiantes son dueños del espacio, utilizan la mayor parte de los recursos a su alcance. El trabajo es público, rompe con la privacidad del trabajo individual. La foto nos muestra un instante del trabajo del grupo

Conclusión

Los profesores que nos aportaron sus fotografías, trabajan en distintos niveles educativos y regiones del país, así como en distintas instituciones, sin embargo, todos ellos son usuarios de un espacio denominado aula. No es posible establecer, como se puede observar, un criterio único de aula. Cada uso está determinado por múltiples variables, institución, nivel educativo, recursos materiales y el organizador del escenario en el que se desarrollan las actividades para aprender matemáticas. El uso del recurso aula, pone de manifiesto el imaginario del profesor sobre la matemática y cómo se aprende ésta. Cada profesor nos provee su imaginario y lo podemos entender usando las palabras de Castoriadis; *es una construcción simbólica que permite* *instituir, crear y modificar a las sociedades concretas, a la vez que cada sociedad concreta constituye como imaginario un cúmulo de significaciones específicas.* Eso creemos nosotros es lo que expresan sus fotografías de aulas.

Proyecto SIP2012-1353

DocenMat (2011). Acceso a observadores: http://docenciaenmatematicas.ning.com/main/authorization/signIn?target=http%3A%2F%2Fdocenciaenmatematicas.ning.com%2F

Correo Electrónico: docenmatobs@gmail.com

Contraseña: observador

Referencias bibliográficas

Adler, J.; Ball, D.; Krainer, K.; Lin, F,; Novotna, J. (2005) Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*. 60 (3) 359-381.

Anderson, T. (2011). *The theory and practice of online learning*. Quinta edición. AU Press.

Bishop, A. J. (19999. *Enculturación Matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós. Barcelona, España.

Brown, T. (2011). *Mathematics Education and Subjectivity*. Mathematics Education Library 51. Springer.

Castoriadis, C. (1975). L'Institution Imaginaire de la Société. Paris, Seuil. Versión en español; *La Institución Imaginaria de la Sociedad*, Ed. Tusquets,

Crovi, D.; López, M A.; López González, R. (2009). *Redes sociales: Análisis y aplicaciones. México.* UNAM y Plaza y Valdés.

da Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers knowledge and practices. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds.) *Handbook of research on the Psychology of mathematics Education. Past, present and future*. UK, Sense publishers.

Dabas, E. (2002) "Mapeando una historia". Redes sociales y restitución de recursos comunitarios. En http://revista-redes.rediris.es/webredes/ivmesahis/ MAPEANDO UNAHISTORIA.PDF

Girola, L. (2012). Representaciones e imaginarios sociales: Tendencias recientes en la investigación. En E. de la Garza Toledo y G. Leyva (eds.) *Tratado de metodología de las ciencias sociales: perspectivas actuales.* México D.F. Universidad Metropolitana y Fondo de Cultura Económica.

Linares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (Student) teachers and Teachers Educators as learners. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds.) *Handbook of research on the Psychology of mathematics Education. Past, present and future*. UK, Sense publishers.

Mariscal, E. y Lezama, J, (2011). Docencia en matemáticas. Una red para el aprendizaje de profesores de matemáticas. En Landy Sosa; Ruth Rodríguez y Eddie Aparicio (Eds.) *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. (pp. 16-25). Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C. En Web: http://www.red-cimates.org.mx

NING (2005). http://about.ning.com/

Reséndiz García, R. (2008). Biografía: procesos y nudos teóricos metodológicos. En M. L. Tarrés (Coord.) *Observar, escuchar y comprender: Sobre la tradición cualitativa en la investigación social*. México: FLACSO, El Colegio de México, Porrúa.

.

CAPITULO 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo de Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Marcel David Pochulu

Universidad Nacional de Villa María (Argentina)
mpochulu@unvm.edu.ar

Las diferentes experiencias de clases y trabajos de investigación que se han expuesto en las ALME, y en esta en particular, muestran que los recursos tecnológicos han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y abordaje que se pueden hacer de los problemas, y la relación de estas exploraciones con la construcción del conocimiento matemático. A través de ellos, se advierte que hoy en día existe una cantidad innumerable de recur-sos tecnológicos que permiten generar una especie de realidad virtual asociada a los objetos matemáticos, y los traen virtualizados a una pantalla donde pueden ser manipulados con total amplitud. Para estas herramientas se ha señalado que su mayor impacto se encuentra en el carácter epistemológico, debido a que son capaces de generar un nuevo realismo ma-temático. Esto es, los objetos matemáticos se pueden manipular de forma tal que se genera una sensación de existencia casi material, dando la posibilidad de introducir cambios y comprobar el efecto que produce en ellos.

Asimismo, estos trabajos vienen señalando, por un lado, que el trabajo de los estudiantes en un ambiente con recursos tecnológicos es cualitativamente superior al tradicional, y por el otro, que se modifica sustancialmente la gestión de la clase que lleva adelante el profesor, al igual que su sistema de creencias sobre cómo concibe enseñar y aprender en un ambiente mediado por las TIC. Muestran, además, que en ambientes de enseñanza y aprendizaje me-diados por recursos tecnológicos, los profesores y estudiantes van más allá de los clásicos algoritmos y simples procedimientos de las matemáticas, y aparecen rasgos de clases más innovadoras donde es posible formular conjeturas, refutar, reformular y explicar, verificar inferencias verdaderas o construir contraejemplos para hipótesis falsas, acuñar definiciones, hacer demostraciones, proponer y resolver problemas, y (re)descubrir relaciones matemáticas de nuevas maneras.

No obstante ello, sería ingenuo pensar que la sola inclusión de los recursos tecnológicos en una clase de matemáticas logra producir todos los cambios que se reportan en las investigaciones. Si bien es necesario proponer tareas y actividades adecuadas, se vuelve indispensa-ble organizar procesos didácticos cuidadosamente planificados. Sabemos que no es fácil hacerlo, pues es frecuente que nos dejemos obnubilar por los recursos tecnológicos y termi-namos enseñando cuestiones no matemáticas. Por ejemplo, destinar clases enteras a trabajar con comandos específicos de un software para hacer creaciones interesantes, pero cuando analizamos cuáles son los objetos matemáticos que se están enseñando, la respuesta puede llegar a ser "ninguno".

Tampoco se trata de integrar a los recursos tecnológicos en una clase para que los estudiantes hagan más rápido las tareas que hacían antes en lápiz y papel. Significa reformular lo que estamos enseñando, permitiendo la creación de una nueva matemática, y por lo tanto, el surgimiento de una nueva cultura matemática.

Probablemente una de las características más apreciadas de los recursos tecnológicos es su potencial para estimular y reintroducir la experimentación en las matemáticas, y esa clase de "investigación" orientada a los estudiantes. Esto nos lleva a cambiar nuestro modo de pensar y actuar, y mucho más importante aún, lograr que profesores y estudiantes hagan cosas nuevas, de nuevas maneras y consigan tener una educación diferente o mejor gracias a la tecnología.

En este sentido, el lector podrá encontrar en este Capítulo numerosas investigaciones y experiencias de clase que se han desarrollado en diferentes ambientes y niveles educativos, tanto con profesores como con estudiantes, que sustentan los principios anteriormente for-mulados. Pensamos que estos trabajos ayudarán a reflexionar sobre las propias prácticas docentes, si se ha tomado la decisión de incluir recursos tecnológicos en la clase de ma-temáticas, encontrar problemáticas para iniciar un proyecto de investigación, e incluso, re-cuperar elementos relevantes para realizar una revisión bibliográfica o estado del arte para las investigaciones en curso.

UM AMBIENTE VIRTUAL INTERATIVO COM O GEOGEBRA E O M3 PARA UM ESTUDO DE VOLUME DE PIRÂMIDES

Ana Paula Rodrigues Magalhães de Barros
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP Brasil
prof.anabarros@gmail.com

Resumo. Com a expansão de recursos tecnológicos digitais, como multimídias, o uso desses para os processos de ensino e aprendizagem de Matemática tende a ser cada vez maior. Por outro lado, não sabemos quais são as características dessas multimídias que podem potencializar a aprendizagem. Visando analisar as contribuições de um ambiente virtual interativo, a pergunta norteadora da pesquisa aqui apresentada é: Como um ambiente que contém recursos do M³ e do GeoGeobra pode ser caracterizado construcionista, de forma que esse possa contribuir para a aprendizagem do aluno em um estudo sobre volume de pirâmides? Nesse sentido, essa pesquisa qualitativa foi uma investigação das características desse ambiente composto por atividades relacionadas ao estudo de pirâmides, com ênfase em volume. Para tanto, utilizei como aporte teórico o construcionismo e a teoria cognitiva de aprendizagem multimídia. O ambiente construcionista analisado apresenta características que corroboram com a teoria cognitiva de aprendizagem multimídia.

Palavras chave: multimídias, construcionismo, teoria cognitiva de aprendizagem multimídia

Abstract. With the expansion of digital technology resources, such as multimedia, the use of these processes to the teaching and learning of mathematics tends to be increased. Moreover, we do not know which of these multimedia features that can facilitate learning. To analyze the contributions of an interactive virtual environment, the guiding question of the research presented here is: How an environment that contains resources of M ³ and GeoGeobra can be characterized constructionist, so that may contribute to student learning in a study on volume of pyramids? In this sense, this research will be a qualitative investigation of the characteristics of this environment composed of activities related to the study of pyramids, with an emphasis on volume. For that I used as the theoretical framework the constructionism and cognitive theory of multimedia learning. The environment constructionist analyzed shows characteristics that corroborate the cognitive theory of multimedia learning.

Key words: multimedia, constructionism, cognitive theory of multimedia learning

Introdução

Com a expansão da internet, sabemos que em geral nossos alunos do ensino básico sentem-se atraídos para seu uso. Isso ocorre dentro e/ou fora da escola. Além disso, existem projetos para o uso educativo na internet como o M³ - Matemática Multimídia. Este consiste em um portal que disponibiliza recursos tecnológicos educacionais multimídia para o Ensino Médio. A disponibilidade de softwares gratuitos na internet, como o software de Matemática dinâmica GeoGebra, que podem ser utilizados no ensino e na aprendizagem da Matemática, também vem aumentando. Diante desse cenário, a apropriação das tecnologias digitais no processo educacional tende a aumentar. Por outro lado, não se sabe como tem sido o uso e a contribuição dessas multimídias para o processo de aprendizagem do aluno.

Segundo Mayer (2003), os alunos podem aprender mais profundamente através de mensagens multimídias que contêm palavras e imagens, ao contrário da forma tradicional, que muitas vezes acontece somente através de palavras. Apesar do importante papel das imagens, é necessário salientar que elas podem não ser de fácil compreensão e possibilitar leituras diferentes (Silva, Zimmermann, Carneiro, Gastal, e Cassiano, 2006). Para auxiliar a visualização e interpretação de imagens de difícil compreensão, entendo que multimídias como vídeos e softwares podem ser recursos alternativos.

De acordo com a teoria do Construcionismo, proposta por Seymour Papert, a construção do conhecimento é entendida como uma etapa muito importante que ocorre com o uso do computador (Papert, 1994). Considerando essa teoria, a construção do conhecimento acontece com a interação do aluno com um ambiente de aprendizagem, no computador, que possui uma linguagem atrativa e permite a ele fazer construções, mudanças e estender relações e regras. A abordagem pedagógica construcionista vem sendo pesquisada e aprimorada por Papert e outros colaboradores. Segundo Maltempi (2004), o Construcionismo é tanto uma teoria de aprendizagem quanto uma estratégia para a educação, visto que o conhecimento não pode simplesmente ser transmitido do professor para o aluno, pois compartilhando a ideia construtivista, o desenvolvimento cognitivo é um processo ativo das construções e reconstruções mentais.

Nesse sentido, ambientes virtuais com recursos educacionais multimídia podem contribuir para o processo de aprendizagem. Alguns desses ambientes podem ser caracterizados como micromundos, pois além de serem atrativos, eles permitem que o sujeito explore e transfira para o domínio científico suas habilidades adquiridas na sua vida pessoal. O termo micromundo foi apresentado pela primeira vez por Seymour Papert em 1972, e consiste na ideia de mundos auto-contidos. O primeiro exemplo apresentado por Papert foi o micromundo da geometria da tartaruga da programação Logo, onde a partir dos movimentos do desenho de uma tartaruga a criança se interessa e interage com o programa, construindo conceitos matemáticos como o das representações gráficas (Healy, Kynigos, 2010). Segundo Rieber (2005), micromundos são exemplos de multimídias interativas, ou seja, ambientes exploratórios interativos de aprendizagem com funções de fácil compreensão e motivadoras para o usuário. O usuário pode interagir com um micromundo explorando o domínio e testando hipóteses sobre ele.

Dentre as figuras apresentadas nos livros didáticos de Matemática, as espaciais são as que os alunos mais encontram dificuldades para visualização e interpretação (Souza, 2010). Portanto, em consequência da complexidade para aprender conteúdos relacionados à Geometria Espacial, o assunto que escolhi foi pirâmide. O presente trabalho é parte da minha pesquisa de mestrado, e esta consiste na aplicação de um ambiente virtual interativo com recursos do

GeoGebra e do M³ para um estudo sobre volume de pirâmides. Para o texto aqui apresentado, o foco é o ambiente. Nele organizei os recursos de manipulação e audiovisuais, do software GeoGebra e do portal M³-Matemática Multimídia, ambos sobre geometria espacial, de maneira pedagógica e os disponibilizei como um micromundo. Nesse contexto, a pergunta norteadora do presente trabalho é: Como um ambiente que contém recursos do M³ e do GeoGeobra pode ser caracterizado construcionista, de forma que esse possa contribuir para a aprendizagem do aluno em um estudo sobre volume de pirâmides? Nesse sentido, investiguei as características desse ambiente, segundo a perspectiva construcionista e da teoria da aprendizagem multimídia.

Ambiente construcionista

Algumas características dos ambientes construcionistas foram estabelecidas ao longo dos anos de estudos do ambiente Logo. Maltempi (2004) traz uma abordagem das cinco dimensões que constituem o Construcionismo: pragmática, sintônica, sintática, semântica e social.

A *dimensão pragmática* reporta-se à ideia de que o conteúdo que está sendo aprendido não terá um fim prático em um período muito distante. Ou seja, o ambiente deve permitir a construção de algo concreto que pode ser utilizado, exposto, analisado e discutido. A *dimensão sintônica* permite uma relação de sintonia entre o aprendiz e o ambiente escolhido. Um ambiente contextualizado possui essa característica. A *dimensão sintática* permite ao aluno a exploração dos recursos disponíveis em um ambiente de aprendizagem sem muitos esforços, ou conhecimento de pré-requisitos. A *dimensão semântica* remete-se ao sentido que os aprendizes encontram seus significados pessoais com o ambiente de aprendizado. A partir desses significados que são diferentes do formalismo, o aluno pode descobrir novos conceitos por meio da interação com o ambiente. A *dimensão social* visa à integração das atividades com as relações que tem significados pessoais e com materiais valorizados culturalmente.

Quanto ao uso de ambientes com multimídias e internet, Valente (1999) diz que apesar desses recursos se tornarem cada vez mais interessantes e criativos, a navegação do aluno nos sites pode fazê-lo gastar muito tempo com pouca chance de construção de conhecimento e de compreensão do que se faz. Por outro lado, o mesmo autor salienta que nesses casos o professor deve suprir essas situações de aprendizagem para que a construção do conhecimento ocorra. Sendo assim, os aplicativos escolhidos e a disposição deles no site, foram pensados de forma a minimizar o risco da navegação do aluno em sites indesejados. Entendo que esse

Teoria Cognitiva da Aprendizagem Multimídia

Segundo Mayer (1996), a aprendizagem significativa ocorre quando os estudantes constroem mentalmente uma representação coerente do conhecimento, ou seja, um modelo mental. De acordo com Mayer (1989), esse tipo de modelo é uma teoria pessoal do indivíduo, a respeito de algum conceito ou ambiente. Nessa direção, considero que um ambiente construcionista pode permitir essa aprendizagem.

A animação auxilia a aprendizagem significativa de acordo com a Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia (TCAM). Essa teoria apresentada é baseada em três suposições sugeridas pelas pesquisas cognitivas: *canal duplo*, conceito que o ser humano tem canais separados para o processamento das representações de imagem e representações auditivas; *capacidade limitada de suposição*, somente parte da informação pode ser processada em um canal e *processo ativo*, a aprendizagem significativa ocorre quando o aluno engaja nos processos cognitivos para selecionar, organizar, representar e integrar ao conhecimento prévio. Nesse sentido, de acordo com a TCAM é mais provável que ocorra a aprendizagem significativa quando o aluno tem ao mesmo tempo correspondência visual e verbal em sua memória (Mayer, Moreno, 2002).

Embasados na TCAM, Mayer e Moreno (2002) apresentam sete princípios de aprendizagem multimídias que foram sistematizados a partir de rigorosos estudos experimentais. *Princípio Multimídia:* O aluno aprende mais profundamente com animação e narração, ao invés de com narração sozinha. *Princípio da Contiguidade Espacial:* Os alunos aprendem mais profundamente quando o texto escrito é apresentado próximo da animação do que quando está longe da ação correspondente da animação. *Princípio da Contiguidade Temporal:* Os alunos aprendem mais profundamente quando a narração e a animação são apresentadas simultaneamente do que quando elas estão separadas no tempo. *Princípio da Coerência:* Os alunos aprendem mais profundamente com animações, quando a narração irrelevante, sons (incluindo músicas), e vídeos são excluídos. *Princípio da Modalidade:* Os alunos aprendem mais profundamente com animação e narração do que da animação com texto na tela. *Princípio da Redundância:* Os alunos aprendem mais profundamente da animação e narração do que a animação, narração e texto na tela. *Princípio da Personalização:* Os alunos aprendem mais profundamente quando a narração é uma conversa, ao invés de um estilo formal.

Ambiente

Para a disposição dos aplicativos e vídeos, criei um site disponível no endereço http://www.anapaulabarros.net/ chamado Geopirâmide, que nessa pesquisa caracterizo como micromundo, no sentido exposto por Rieber (2005). Então postei alguns aplicativos do

GeoGebra, já existentes, relacionados ao assunto, mas os modifiquei a fim de aproximá-los ao objetivo das atividades propostas. Esses aplicativos foram escolhidos do link (http://www.geogebratube.org/). Os aplicativos do GeoGebra que foram escolhidos para a composição desse micromundo são complementares aos assuntos dos vídeos escolhidos do M³. O assunto principal envolvido nas multimídias que compõem esse micromundo é o volume de uma pirâmide, mas as primeiras multimídias são relacionadas à planificação.

Selecionei alguns aplicativos com o objetivo de motivar os alunos a buscar e/ou construir modelos mentais a respeito de planificação. A partir desse conteúdo, é possível recordar outros básicos da geometria como áreas e perímetros. Assim, o primeiro momento foi pensado para uma revisão de conceitos básicos e para uma exploração do próprio ambiente. Para tanto, escolhi um vídeo do M³ chamado *Halloween* e alguns aplicativos de animação no GeoGebra que tratam o assunto de planificação, como o da *caixa de papelão*.

O vídeo *Halloween* trata da história de uma estudante que sonha em trabalhar com moda. Ela recebe uma encomenda de chapéus de bruxa para uma festa de Halloween. Fica aflita por não saber começar e recorre à ajuda de uma senhora modista e que entende de Matemática. Dessa forma, a senhora lhe ensina a fazer o molde do chapéu que na verdade se trata de um cone. Esse é um vídeo que apresenta uma *dimensão sintônica,* devido a sua contextualização que permite uma abordagem relacionada à planificação do cone.

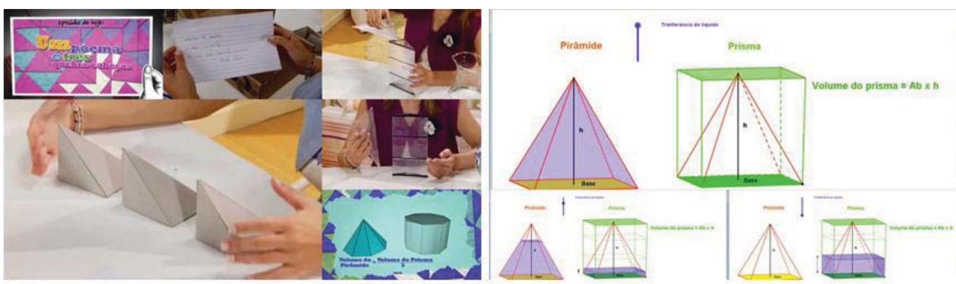
Fonte: <http://www.anapaulabarros.net/>

Figura 1: Halloween & Caixa de papelão

Alguns aplicativos do GeoGebra referentes à planificação também foram postados no ambiente. Por exemplo, a planificação da caixa de papelão (Figura 1) que consiste na imagem de uma caixa que pode ser animada. Após o aluno abrir ou fechar as tampas da caixa, ele pode planificá-la. Ao lado dessa animação está uma imagem de uma caixa de papelão, para que o aluno visualize a animação tendo a imagem real bem próxima. Assim, considero a presença da *dimensão semântica,* pois essa planificação que se aproxima do real permite que o aluno encontre mais significados que no caso de uma planificação formal.

Entendo que essas multimídias são motivadoras para o aluno explorá-las, além de permitirem a ele formular hipóteses que poderão ser testadas. Postei também nesse ambiente um aplicativo de pirâmide feito no GeoGebra. Este consiste na animação de uma pirâmide em que a sua base é modificada. Então, o aluno deve escolher uma base e fazer um esboço da planificação dessa pirâmide. A *dimensão pragmática* dos aplicativos escolhidos para essa primeira atividade dá a ideia ao aluno de que tudo o que foi visto terá um fim prático que poderá ser exposto, analisado e discutido. A partir dessa planificação, assuntos básicos como área de um polígono e perímetro podem ser contemplados com a mediação do professor.

Escolhi algumas multimídias complementares entre si, para trabalhar a ideia de volume de uma pirâmide. Apresento nessa pesquisa alguns exemplos, como o vídeo "*Um poema, três quebra-cabeças".* Esse vídeo mostra a história de uma adolescente que recebe de seu avô um quebra-cabeças acompanhado de um poema. Na tentativa de montar esses quebra-cabeças ela percebe a relação entre os volumes de pirâmides e prismas (Figura 2).

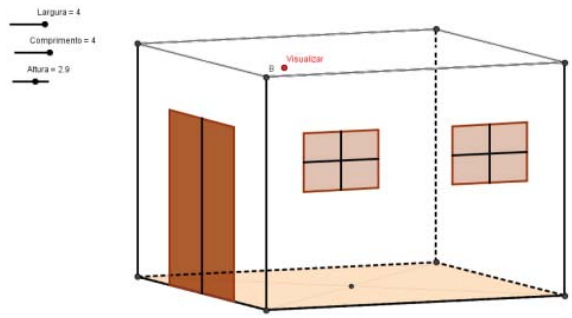


Fonte: <http://www.anapaulabarros.net/>

Figura 2: Um poema, três quebra-cabeças & A transferência de líquidos.

O uso desse vídeo pode estimular a percepção geométrica de objetos tridimensionais. Além disso, é possível apresentar o volume de pirâmides a partir da descrição de prismas formados por três pirâmides de mesmo volume. Também na animação ilustrada na Figura 2, o aluno pode transferir todo o líquido da pirâmide para o prisma e vice-versa. No entanto todo o líquido da pirâmide completa apenas um terço do prisma. Essas multimídias permitem que o aluno faça representações mentais, formule hipóteses e compreenda o conteúdo. Considero que esses aplicativos da Figura 2, possuem dimensões que são pragmática, sintônica e semântica, assim como os aplicativos referentes à Figura 1.

Para que o aluno teste algumas hipóteses formuladas por ele, outro aplicativo foi postado. Uma casa sem telhado (Figura 3), que pode ser animada pelo aluno. Nesse micromundo o aluno também tem a possibilidade de acessar informações sobre o museu *Do Louvre* em Paris e sobre o projeto *Earthscraper* de um edifício subterrâneo em forma de pirâmide na Cidade do México, ambos ilustrando construções com pirâmides invertidas. Essas informações servirão como base para a contextualização da atividade.



Fonte: <http://www.anapaulabarros.net/>

Figura 3: GeoGebra – Telhado invertido

A proposta dessa atividade é a seguinte: *A arquitetura vem se tornando cada vez mais provocativa e arrojada. Agora, imagine que você seja um arquiteto e que inspirado no museu Do Louvre e no projeto Earthscraper decide projetar uma casa diferente das tradicionais. Para isso, em seu projeto coloca um telhado em forma de pirâmide invertida. Suponha que a casa ao lado seja esse projeto, então desenhe esse telhado com a maior altura possível* e *de forma que caiba dentro da casa*. A partir dessa contextualização, o professor poderá mediar com algumas perguntas que promovam a aprendizagem do conteúdo.

Considerações finais

O micromundo analisado permite ao aluno uma correspondência visual (imagens) e verbal (narração) ao mesmo tempo, e de acordo com a TCAM, esse fato torna mais provável a ocorrência da aprendizagem significativa. Também segundo o *princípio da personalização*, as conversas ao invés da narração informal que acontecem nos vídeos permitem que os alunos aprendam mais profundamente. As animações feitas no GeoGebra possuem informações escritas próximas da animação, que segundo o *princípio da contiguidade espacial*, os alunos aprendem mais profundamente quando textos são apresentados próximos à animação. Todo o material que compõe o micromundo trata de atividades complementares entre si, que permitem ao aluno correspondências mais amplas por perspectivas diferentes.

A composição de um micromundo com todas as multimídias citadas aqui, entre outras não mencionadas nessa pesquisa, possui uma *dimensão sintática* e uma *dimensão social.* Nesse sentido, os alunos não precisam de muito conhecimento de pré-requisitos para a exploração dos recursos disponíveis; além disso, a forma como o conteúdo foi abordado em todas as multimídias pode propiciar que os alunos encontrem significados pessoais para eles. Esse micromundo conta com características que indicam a possibilidade do aluno explorar e testar suas hipóteses. Segundo as características que foram identificadas nesse trabalho, considero que esse ambiente de base construcionista possui potencialidades que podem permitir uma aprendizagem significativa, de acordo com a TCAM, a respeito de volume de uma pirâmide.

Nessa direção, a pesquisa de mestrado que está em andamento, visa aplicar essas atividades com alunos e analisar as contribuições desse material para o processo de aprendizagem.

Referências bibliográficas

Healy, L. e Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: Mathematics Education*, *42*(1), 63-76.

Maltempi, M. V. (2004). Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática. En: Bicudo, M. A. Viggiani; Borba, M. de Carvalho (orgs.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento* (pp. 264-282). São Paulo: Cortez.

Mayer, R. E. (2003). The promise of multimedia learning: using the same instructional design methods across different media. *Learning and Instruction, 13(2)*, 125-139.

Mayer, R.E. (1996). Learners as information processors: Legacies and limitations of educational psychology's second metaphor. *Eduational Psychogist*, *31(3),* 151–161.

Mayer, R. E. (1989). Models for understanding. *Review of Educational Research 59(1)*, 43-64.

Papert, S. (1994). *Máquina das Crianças: Repensando a escola na era da informática***.** Porto Alegre: ArtMed.

Rieber, L. P (2005). Multimedia Learning in Games, Simulations, and Microworlds. En: Mayer, Richard (Ed). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 549-567)**,** California: Cambridge University Press.

Silva, H. C, Zimmermann, E., Carneiro, M. H. da S., Gastal, M. L. e Cassiano, W. S. (2006). Cautela ao usar imagens em aulas de Ciências. *Ciências e Educação, 12* (2), 219-233.

Souza, W. R. S. de. (2010). *Representações planas de figuras tridimensionais: um estudo envolvendo visualizações*. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, Brasil.

Valente, J. A. (1999). *O computador na Sociedade do Conhecimento*. Campinas: Unicamp/NIED.

CONTENIDOS TRANSVERSALES Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA: HACIENDO USO DE LA TECNOLOGÍA (SOFTWARE LIBRE)

Rosa Eulalia Cardoso Paredes
IEE "Miguel Grau" de Magdalena Perú
rcardoso@pucp.edu.pe

Resumen. El trabajo trata de mostrar los logros en el aprendizaje de la matemática –área de Geometría– a través del contenido transversal Educación para la gestión de riesgos y la conciencia ambiental, usando recursos tecnológicos como Google Maps y Google Earth. El tema desarrollado para tal fin fue el problema sismológico en el Perú. Finalmente, se señalan temas de geometría involucrados, así como temas anexos a través del uso de contenidos de Estadística, Geografía y Ciencias Naturales. La experiencia se hizo con un grupo de 50 alumnas del Tercer año de Educación Secundaria de una escuela pública del Perú.

Palabras clave: temas transversales, aprendizaje de la geometría, tecnología

Abstract. The paper tries to show the achievements in learning mathematics - geometry area through cross content Education risk management and environmental awareness using resources Google Maps and Google Earth. The theme was posing the seismological problem in Peru. Finally, it identifies issues involved of geometry and annexes issues through the use of contents of Statistics, Geography and Science. The experience was made with a group of 50 students of the third year of secondary education at a public school in Peru.

Key words: transversal topics, learning of geometry, technology

Introducción

El Perú es el país con mayor potencial sísmico del planeta debido a que forma parte del denominado *Cinturón de Fuego del Pacífico* (*Seiner*, 2009). En agosto del 2007 sucedió un sismo que afectó a toda la costa peruana. La Provincia Constitucional del Callao y Lima, la capital, tienen ciudades ubicadas entre 0 y 95 metros sobre el nivel del mar, lo que obliga al Ministerio de Educación (Minedu) a través de las instituciones educativas, especialmente las de zona costera, a trabajar conjuntamente con el Instituto Nacional de Defensa Civil (Indeci) en las actividades programadas para tal fin, sobre todo en los simulacros de evacuación que se realizan desde 1970 a raíz de un sismo que afectó a distintas ciudades del departamento de Ancash y dejó más de 80,000 muertos. Pese al trabajo conjunto, durante los últimos años se ha observado que los resultados de los simulacros no contribuían a optimizar la prevención de riesgos en las evacuaciones.

A partir de este panorama decidimos abordar el problema desde el área de Matemáticas y los temas transversales. En marzo del 2011 (inicio de año escolar), se cumplía un año del terremoto ocurrido en Japón, aniversario que ocasionó que la información dada por los medios de comunicación presentaran una *situación rica* que permitía una contextualización de contenidos matemáticos (Font, 2005) la cual creímos conveniente aprovechar para intentar dar respuesta a nuestra interrogante: ¿Las alumnas lograrían comprender mejor la necesidad de aprender contenidos matemáticos si se utilizan los temas transversales como contexto, o si los conectamos con otras áreas afines y, además, les procuramos el uso de la tecnología? Para ello, fijamos el objetivo de promover y crear conciencia sobre una cultura de prevención de riesgos ante un sismo de grado 8 en la escala de Richter desde los temas transversales como contexto, el aprendizaje de la Matemática (Geometría y Medición y Estadística), áreas afines como Geografía y Ciencias Naturales y el uso de la tecnología (Google Earth y Google Maps), en las alumnas de la institución educativa. Este objetivo incluía tareas específicas a ejecutar:

1) Organizar el cartel capacidades y contenidos matemáticos a partir de los que propone el Minedu (2009) para cada grado de estudios que nos correspondía enseñar, para el logro de las competencias y elegir las necesarias para evacuar en caso de sismo.
2) Determinar los conocimientos que permitirían a las alumnas lograr las competencias necesarias para evacuar en caso de sismo, en la escuela o en sus casas.
3) Organizar las sesiones y actividades de clase utilizando el contexto o tema transversal a partir de la información que dan los medios de comunicación.
4) Utilizar los recursos tecnológicos (Google Maps o Google Earth) como medio para el aprendizaje de los contenidos matemáticos que involucran la prevención del riesgo.
5) Desarrollar y fortalecer competencias para mejorar la cultura de prevención en caso de sismo, utilizando los contenidos matemáticos del grado y otras áreas afines.
6) Mostrar el valor de la Matemática como una ciencia útil que contribuye a la solución de los problemas de la humanidad.

Por todo lo anterior, en el presente trabajo queremos enfocarnos a través de este contexto motivador en el aprendizaje de la Matemática, específicamente en Geometría y Medición y el contenido transversal *Educación para la gestión de riesgos y la conciencia ambiental* (Minedu, 2009) en el que insertamos el problema sismológico que tiene el Perú, que nos obliga a "Cuidar nuestro cuerpo en caso de un sismo de grado 8 en la Escala de Richter", utilizando los recursos tecnológicos *on line*. La intención es mostrar que es posible conseguir aprendizajes más significativos al relacionarlos con temas de interés, tanto de los estudiantes como de la sociedad. Las fases que propone el método de Enseñanza de Ciencias Basado en la Indagación (ECBI) nos sirvió para el desarrollo de las sesiones de clase.

Marco teórico

Contenidos Transversales

La dimensión transversal de un currículo plantea un cambio en la práctica educativa y en el perfil del estudiante como el futuro ciudadano influenciado por sus lineamientos. Los estudiosos indican que este planteamiento, a diferencia de otros, se dirige más a educar que a enseñar, es decir, que tiene en cuenta las capacidades de la persona que incluyen no solo conocimientos sino valores y actitudes, los que harán un individuo con desempeño ético.

De acuerdo con Yus (1998), los contenidos transversales son temas determinados por situaciones problemáticas o de relevancia social, generados por el modelo de desarrollo actual, que atraviesan y/o globalizan el análisis de la sociedad y del currículum en el ámbito educativo en toda su complejidad conceptual y desde una dimensión y reinterpretación ética. Son temas que funcionan como puentes entre el contexto social y el conocimiento científico, que conectan lo académico con la realidad. Siguiendo al mismo autor, la decisión de tratar los temas transversales supone una reflexión sobre el para qué enseñar. En este sentido se pretende dar una reinterpretación al conocimiento y a los actos humanos en cuanto ambos inciden en la convivencia humana y nos ayudan a orientar la educación hacia el marco de valores referentes en que nos hemos situado.

Por otro lado, de acuerdo con Hernández, Garza, Ángeles, Rodríguez, Mandujano, Méndez y Rico (2005), el término transversal se refiere a la ubicación que se pretende que ocupen dentro del plan y los programas de estudio de determinados contenidos considerados como socialmente relevantes, que hacen referencia a problemas y conflictos que afectan actualmente a la humanidad, al propio individuo y a su entorno natural. Dichos contenidos son concebidos como ejes que atraviesan en forma longitudinal y horizontal al currículo, de tal manera que en torno a ellos se articulan los contenidos correspondientes a las diferentes asignaturas. Según los autores las principales características son: a) Reflejar una preocupación por los problemas sociales, en la medida en que representen problemáticas vividas actualmente en las sociedades y se vinculen con las informaciones, inquietudes y vivencias de los alumnos. b) Conectar la escuela con la realidad cotidiana. La educación escolar debe promover el cruce entre la cultura pública y la vida de los alumnos. c) Permitir adoptar una perspectiva social crítica frente a los currículos tradicionales que dificultan las visiones globales e interrelacionadas de los problemas de la humanidad.

En el Perú, los contenidos transversales son introducidos en el currículo de la educación básica desde el año 2000 y se definen como actividades que dan respuesta a los problemas actuales de trascendencia, que afectan a la sociedad y que demandan a la Educación una atención prioritaria. Estos deben tratarse como situaciones que han de abordarse a partir de las áreas curriculares. Son considerados los siguientes contenidos: a) Educación para la convivencia, la paz y la ciudadanía y Educación en y para los derechos humanos, b) Educación en valores o formación ética, c) Educación para la gestión de riesgos y la conciencia ambiental, d) Educación para la equidad de género (Minedu, 2009). En educación secundaria los contenidos transversales tienen como objetivo promover el análisis y reflexión de los problemas sociales, ecológicos o ambientales y de relación personal con la realidad local, regional, nacional y mundial, para que los estudiantes identifiquen las causas, así como los obstáculos que impiden la solución justa de éstos.

El contenido transversal de *Educación para la gestión de riesgos y la conciencia ambiental* en educación secundaria implica a las instituciones educativas y por ende a docentes a que impartan a los estudiantes aprendizajes para ayudar a resolver problemas que afectan a cada sociedad. Se indica que cada sociedad debe preocuparse en disminuir sus niveles de riesgo desarrollando acciones específicas para reducir el impacto de las probables amenazas, ya sean naturales, sociales y socio-naturales; además de reducir sus vulnerabilidades en la organización, preparación, etc. (Minedu, 2006).

Metodología

La pregunta que nos planteamos nos condujo a pensar una posible solución: Si se considera los temas transversales como contexto para enseñar contenidos de Matemática (Geometría y Medición y Estadística) e integramos otras áreas como Geografía y Ciencias Naturales, así como lo plantea Perrenoud, (2012) y aplicando la tecnología, se puede aprender contenidos matemáticos y además se logrará mejorar el cuidado de la integridad de las estudiantes de primer y tercer año de secundaria. Esta razón, nos obligó a elegir en forma intencional y discrecional a las alumnas de los grados mencionados de la institución educativa de gestión pública Miguel Grau de Magdalena, ubicada a 700 metros del mar, para el estudio. Estas estudiantes viven en distintos distritos de Lima y eligen venir a estudiar a esta institución por tener una connotación de “emblemática” por tener más de 100 años de antigüedad o porque sus madres estudiaron en ella. Las edades de las alumnas oscilan entre 12 y 16 años, su nivel socioeconómico está ubicado en el nivel medio bajo.

Los instrumentos para recoger información fueron: listas de cotejo, cuestionarios y los cuadernos, los que utilizamos en la evaluación y sirvieron para observar (de manera directa, no estructurada) el desempeño de las alumnas en el momento de las evacuaciones simuladas, los comentarios que hacían cada vez que sucedía un evento real, el uso de la página web del Instituto Geofísico del Perú (IGP) para informar sobre la ubicación geográfica del sismo y el trabajo de campo realizado para entrevistar a la población, para solicitar la ubicación de lugares afectados por temblores en Google Maps o Google Earth, entre otros.

Etapas de la ejecución del proyecto

El estudio se realizó durante el primer trimestre académico (marzo - mayo) en la hora de ejecución de las clases. Presentamos una breve descripción del mismo:

Primera etapa: Buscamos el sustento teórico en qué apoyarnos para organizar las sesiones de clase, encontrándolo en documentos del Minedu, el Indeci, el IGP, otros organizamos encargados de educar en este riesgo y en investigaciones sobre los temas involucrados para justificar el trabajo ante las autoridades del colegio.

Las sesiones de clase fueron en total 20 y abarcaron los siguientes temas: Conjuntos, partiendo de los lugares donde viven; ubicación de puntos en el plano, a partir de la observación de los planos en el Google Maps; orientación espacial, identificación de formas geométricas y su clasificación, paralelismo, perpendicularidad, ángulos, polígonos y su clasificación, perímetros, áreas, semejanza de formas geométricas, geometría cartesiana, longitud de la circunferencia en grados, magnitudes, unidades de medida como del tiempo, de longitud de las calles, los movimientos de la tierra, diferencia horaria, longitud y latitud, recojo y organización de información e instrumentos de recojo de la información, optimización de caminos. Además de temas relacionados con Geografía, se trató el "costo de las mochilas para casos de sismos", que toda familia debe tener y son sugeridas por el Indeci. En este contexto se trabajó sobre los costos de los alimentos que contiene, aplicando contenidos de los sistemas de números naturales y racionales en sus dos representaciones (decimales y fracciones) y sus aplicaciones como la regla de tres simple y porcentajes. *Segunda etapa:* Se realizó el análisis de los contenidos que el Minedu (2009) propone en el Diseño Curricular Nacional (DCN) para enseñar a los años de estudios que tendríamos a nuestro cargo: primero, tercero; los mismos que se concretaron en un "Cartel capacidades y contenidos" que incluye los tres componentes: Números y Operaciones, Geometría y Medición, así como, Estadística y Probabilidad. Para estos contenidos las competencias son: Razonamiento y Demostración, Comunicación Matemática y Resolución de Problemas y sus respectivas capacidades. Mostramos como ejemplo una parte del cartel para el componente Geometría y Medición:

A) Geometría y Medición	
Capacidades	*Conocimientos*
b.1) Razonamiento y demostración b.1.23• Clasifica polígonos por sus características. 26• Aplica traslaciones a figuras geométricas planas en el plano cartesiano. *b.2) Comunicación matemática* b.2.29• Matematiza situaciones reales usando las unidades de longitud, masa y capacidad del smd *b.3) Resolución de problemas* b.3.30• Estima y calcula el perímetro y área de fi- guras poligonales. b.3.33• Resuelve problemas de contexto matemático que involucra el cálculo de ángulos de un polígono	*b.1.1) Geometría plana* b.1.1.15• Polígonos. b.1.1.16•Perímetros y áreas de figuras poligonal. b.1.1.17• Noción de área. *b.1.2) Medida* b.1.2.18• Conversión de unidades de longitud, masa y capacidad en el sistema métrico decimal. 19• Construcción y medición de ángulos. *b.1.3) Transformaciones* b.1.3.20• Sistema rectangular de coordenadas. *b.1.4) Geometría del espacio* b.1.4.23• Cubo, prisma y cilindro.

Tabla 1. Cartel de capacidades y contenidos - Primer Año de Secundaria (Minedu, 2009)

Si bien en el cartel que se propone, los contenidos están organizados en la lógica de la estructura de la Matemática como ciencia, éste es un instrumento básico para el trabajo, pues permite una visión general de los contenidos del grado y sirve para realizar la elección de los temas de los tres componentes que permitirán abordar el problema y de qué manera se pueden conectar unos con otros. Otra de las virtudes de estos carteles es tener presente qué competencias podemos desarrollar en menor tiempo posible, así como observar los diferentes temas de los tres componentes involucrados en el problema. Aquí también se codifican las capacidades y contenidos para facilitar el uso en las unidades de aprendizaje.

La tercera etapa refiere sobre la elaboración de las unidades de aprendizaje, donde se organizaron los temas que se trabajarían en sesiones de clase. Estas sesiones se planificaron siguiendo el ciclo que sigue el método ECBI: focalización, exploración, reflexión, aplicación, de las que explicaremos parte de tres etapas.

Descripción de algunas actividades de sesión de clase 1

Focalización: La primera clase comienza con algunas interrogantes que relacionan las noticias del sismo de Japón en los diferentes medios de comunicación, que permitan mostrar la información que tienen las alumnas. Esta permite *focalizar* el tema (los sismos y tsunamis) tomando en cuenta la explicación de alguna de ellas sobre lo que vio o escuchó en las noticias. Se resaltó el tema: mapa de vulnerabilidad de Lima si hubiera un sismo de 8 grados en la escala de Richter y motivó a contestar la pregunta ¿Conocen a qué distancia del mar viven?

Predicción: En esta fase de la focalización, las alumnas realizan sus estimaciones (*conjeturas*). Aquí se plantearon nuevas preguntas acerca de lo importante que es para las personas de una sociedad saber que aprender Matemática permitirá tener los conocimientos necesarios para interpretar e informarse bien sobre datos en las noticias, y así preservar su vida y la de sus familiares. Al propiciar el diálogo y la reflexión se logró conseguir la respuesta: es la Matemática, en el área de Geometría y, dentro de ella, la geometría plana (el plano) y esférica; así como otros conocimientos de la misma y de otras áreas como la Geografía y Ciencias Naturales que permitirán conocimientos adecuados acerca del espacio donde estamos ubicados. Otras preguntas: ¿Cómo averiguamos la ubicación de nuestras viviendas en la ciudad? ¿Dónde podemos encontrar esta información? les permite hacer comentarios como, por ejemplo, que puede ser en la guía telefónica o en internet. Se averiguó si conocen alguna forma de hacerlo vía internet y algunas informan acerca de Google Maps, muy pocas sobre el Google Earth. Se indagó sobre el conocimiento que tienen de un plano y cómo lo utilizan. Se les motivó a que ellas se puedan plantear sus propias interrogantes, siendo una ¿Será que las personas que viven cerca del mar saben a dónde deben ir en caso de un tsunami? ¿Podríamos averiguarlo? Es importante señalar que conforme las alumnas van respondiendo a las preguntas, presentan sus argumentos y los registran en sus cuadernos, usando sus expresiones e incluso llegan a conclusiones sin intervención del docente, gracias a la socialización.

Exploración: Esta parte se realiza en el laboratorio de informática; se muestra Google Earth, Google Maps aprovechando también de las que los conocían. Las alumnas comienzan a *explorar* ubicando los lugares que se les indicó como el colegio y otros que les interese, por ejemplo, el lugar donde viven ellas y sus familiares, lugares de evacuación en caso de que ocurriera un tsunami, caminos más directos para llegar a esos lugares desde el colegio o sus casas, local de los bomberos, etc., es decir, aplican aprendizajes para otras situaciones.

Resultados

De acuerdo con los objetivos planteados hemos encontrado los siguientes resultados:

- El cartel de Contenidos es un buen instrumento para conectar contenidos al momento de la planificación de las sesiones de clase.
- Gracias a la dinámica de la tecnología, durante las actividades se observó en las alumnas un alto grado de motivación para trabajar los diferentes temas de Matemáticas y se pudo reforzarlos dejando actividades para sus hogares pues 80% de alumnas tienen acceso a internet y pudieron descargar el Google Maps y Google Earth por ser de acceso abierto.

- Como lo mostraron sus testimonios en las interacciones en clase, muchas alumnas trataron de ubicar otros lugares del Perú y del resto del mundo por iniciativa propia.
- Las alumnas lograron conectar sus aprendizajes de Matemática, en este caso de Geometría y Medición aplicados a la solución de situaciones de su vida, ver las conexiones con otras áreas como Geografía y Ciencias Naturales, al surgir preguntas específicas de las áreas.
- Las alumnas, además del Google Earth, usaron información que proporciona el IGP lo que mostró el logro de un aprendizaje significativo, al permitir desarrollar la competencia para encontrar información de calidad, eficiente y contrastada (Carbolán, 2011).
- Las alumnas han podido trasmitir lo que se ha estado haciendo en relación a los sismos y recoger información a y desde sus familias, permitiendo que los contenidos matemáticos traspasen los muros de la escuela.
- A través de la elaboración de planos se logró la organización del aula, es decir, que las alumnas mantengan los pasadizos entre sus carpetas libres de obstáculos.

Las dificultades encontradas fueron: No todas las alumnas conocían el Google Maps y muy pocas conocían Google Earth. Un buen número de alumnas utilizaba computadoras por primera vez en clase de matemáticas. Previamente, no identificaban conocimientos relacionados con los sistemas numéricos, medición, geometría (perímetros, áreas) o estadística.

Conclusiones

De acuerdo a lo encontrado y después de reflexionar sobre el fin de la enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria que es el de desarrollar competencias y capacidades cognitivas y especialmente las propuestas en el DCN, podemos presentar algunas conclusiones relacionadas al estudio:

La relación de la Matemática y el desarrollo de las competencias, entre ellas, solución de los problemas (en este caso los temas transversales) de otras áreas del conocimiento como Física, Geografía, Geografía, Biología, etc.; la aplicación de, o en los diferentes ámbitos de la vida cotidiana puede permitir preparar a las estudiantes para ser ciudadanas que hagan uso del conocimiento para analizar de manera crítica los hechos.

Los temas transversales hacen más atractivas y dinámicas las sesiones de clase de Matemáticas, en este caso las de Geometría y Medición, optimizando tiempo, abarcando más contenidos y manteniendo la motivación de los estudiantes.

Los temas transversales permiten contextualizar los contenidos matemáticos por aprender y que aparecen sin utilidad en la vida cotidiana, como el de Geometría y Medición. Además, permiten la conexión de la Matemática y otras como Geografía y Ciencias Naturales.

Permiten aprovechar al máximo para aprender Matemáticas algo que les gusta a los estudiantes como es el uso de las computadoras y los celulares (TIC).

La evaluación de los aprendizajes de Matemáticas, pueden realizarse con otros instrumentos que no sean listas de ejercicios y problemas simulados o artificiales. Esto las motiva pues cada alumna aprende a su ritmo y todas tienen algún tipo de participación.

Comentarios finales

Luego de la experiencia pensamos que a partir de los contenidos transversales se puede lograr mejor motivación y desarrollo de aprendizajes y competencias en diferentes áreas de la educación secundaria. En nuestro caso tomamos Geometría y Medición porque los temas del DCN permitían tratar el problema en el momento en que se presentaba.

Los contenidos transversales, por la importancia que tienen como aprendizaje para los alumnos, tienen que tratarse en los contenidos de las áreas curriculares de manera que ellos puedan ver, mediante el uso de la tecnología, una variedad de conceptos, en este caso de Geometría y Medición y otros de Matemáticas, Geografía y Ciencias Naturales.

A pesar de que los resultados del estudio no son generalizables, se sugiere nuevas experiencias que exploren las relaciones entre los aprendizajes y el uso de contenidos transversales porque los aprendizajes que se logran con los estudiantes son útiles y significativos, pues ellos se van observando en los desempeños que tienen los alumnos.

Referencias bibliográficas

Carbolán, F. (2011). Los recursos que utilizar. J. M. Goñi (Ed.). *Didáctica de las Matemáticas.* Barcelona: Graó.

Font, V. (2005). Reflexión en la clase de Didáctica de las Matemáticas sobre una "situación rica". Recuperado el 20/08/2012 de http://webs.ono.com/vicencfont/index_Page349.htm

Google Earth. (sf). Recuperado 20 de agosto del 2012 de http://www.google.com/intl/es/earth/download/ge/

Google Maps. (sf). Recuperado el 20 de agosto del 2012 de http://maps.google.es/

Hernández, B. Garza, E; Ángeles, M; Rodríguez, M; Mandujano, E; Méndez, A y Rico, G. (2005). *La transversalidad curricular en el contexto de la globalización educativa: Las unidades didácticas una opción para la planeación escolar.* México: SEP

Ministerio de Educación del Perú (Minedu, 2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Recuperado el 7 de febrero del 2013 http://www.minedu.gob.pe/normatividad/reglamentos/DisenoCurricularNacional.pdf

Ministerio de Educación del Perú (Minedu, 2006). Guía para la estrategia nacional de aplicación del enfoque ambiental "Instituciones educativas para el desarrollo sostenible. D.S Nº 006-2006-ED Recuperado el 03 de marzo del 2012. http://www.drec.gob.pe/pdf/gestion/guia%20instructiva.pdf

Perrenoud, P. (2012). *Cuando la escuela pretende preparar para la vida. ¿Desarrollar competencias o enseñar otros saberes? Crítica y Fundamentos*. Barcelona. Editorial Graó.

Seiner, L. (2009). Historia de los sismos en el Perú. Catálogo: Siglos XV-XXVII. Lima. Fondo editorial Universidad de Lima.

Yus, R. (1998). *Temas transversales: En busca de una nueva escuela.* Barcelona: Graó.

APROPRIAÇÃO DE TECNOLOGIA POR UMA PROFESSORA DOS ANOS INICIAIS NUM GRUPO DE ESTUDOS DE GEOMETRIA

Edite Resende Vieira, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
edite.resende@gmail.com, nielce.lobo@gmail.com

Resumo. Este artigo refere-se a uma pesquisa de doutoramento e nele apresentamos reflexões sobre a trajetória de uma professora dos anos iniciais em um grupo de estudos de Geometria mediado pela tecnologia. Adotamos a metodologia qualitativa com características da pesquisa co-generativa. Na análise realizamos triangulação dos dados coletados. Discutimos dois episódios, um utilizando o software Régua e Compasso e outro o SketchUp. Os resultados indicam que o grupo de estudos contribuiu para a criação de um espaço favorável ao desenvolvimento da professora, contudo, revelou que dificuldades ligadas ao conhecimento específico do conteúdo interferiram na apropriação dos recursos tecnológicos para ensinar Geometria.

Palavras chave: grupo de estudos, geometria dinâmica, apropriação, tecnologia

Abstract. This article refers to a doctorate research project. We present thoughts about the experience of an early grades teacher whilst in a "Geometry mediated by technology" study group. We have adopted the qualitative methodology with cogenerative research features. Triangulation of data have been used for analysis of the collected data. We discuss two episodes: one when the software Régua e Compasso (Compass and Ruler) was used and another when the SketchUp was used. The results indicate that the study group has contributed to the creation of a favorable environment for the teacher's development. However, these results also revealed that difficulties, related to the specific knowledge of the content, have interfered in appropriation of the technological resources to teach Geometry.

Key words: study group, dynamic geometry, appropriation, technology

Introdução

A vida das pessoas tem se transformado significativamente devido ao desenvolvimento acelerado das tecnologias de informação e comunicação. A cada tecnologia que surge, as relações sociais, culturais, econômicas e de trabalho se modificam, enriquecendo a forma de representar, armazenar e comunicar o saber e a informação. Nesse sentido, o uso da tecnologia, em particular, do computador, em ambientes educacionais, gera um novo envolvimento com a aprendizagem, surgindo novos desafios, novas ideias e novos caminhos de construção de conhecimento e desenvolvimento do pensamento. Sobre o computador na educação, Lobo da Costa *et al* (2008, p.1) ressaltam que "[...] uma vez presente no ambiente de aprendizagem ele não é neutro e interfere no processo exercendo uma influência que deve ser considerada e investigada."

Desde o final dos anos 90, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) apontam a necessidade da utilização de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar e sugerem a utilização de alguns softwares como mais uma possibilidade para auxiliar o aluno a raciocinar geometricamente. Através desses recursos é possível criar ambientes de aprendizagem que favorecem novas formas de pensar e aprender. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), é fundamental que o professor saiba escolher os softwares em consonância com os objetivos que pretende alcançar e com a concepção de conhecimento e de aprendizagem que possui. Ao propor em suas aulas a utilização dos recursos computacionais, o professor se depara com novas funções como mediador desse processo, o que significa enfrentar novos desafios, para os quais nem todos se sentem preparados.

A pesquisa

A pesquisa em andamento que deu origem a este texto tem como objetivo constituir um grupo de estudos na escola e nele investigar os fatores essenciais que favorecem a apropriação de tecnologia no ensino de Geometria nos anos iniciais de escolaridade e impulsionam o conhecimento profissional docente. Para tanto, constituímos um grupo de estudos denominado GEGETEC - *Grupo de Estudos de Geometria e Tecnologia*, formado pela primeira autora deste artigo e três professoras dos anos iniciais de uma escola federal do Rio de Janeiro. Nos encontros do grupo, as participantes conheceram as ferramentas de alguns softwares, resolveram e elaboraram atividades sobre figuras bidimensionais e tridimensionais utilizando os respectivos softwares e, posteriormente, aplicaram em suas turmas as atividades produzidas. Discutimos neste artigo dois episódios vivenciados pela Profª Jade (nome fictício) no GEGETEC, um utilizando o software *Régua e Compasso* e outro, o *SketchUp*.

O aporte teórico-metodológico

Para fundamentar a pesquisa, o referencial foi construído a partir de teorias sobre o conhecimento profissional, apropriação, grupo de estudos e reflexão. Shulman (1992) categorizou os diferentes tipos de conhecimentos necessários ao professor para exercer a docência em três vertentes, a saber, o conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico geral e o conhecimento pedagógico do conteúdo. Para esse autor, o professor deve ingressar na profissão com um cabedal mínimo de conhecimentos que lhe possibilite, a partir dele, construir novos conhecimentos. Inspirados por Shulman, Mishra e Koehler (2006) acrescentaram o componente "Conhecimento Tecnológico", dando origem ao Conhecimento Pedagógico Tecnológico do Conteúdo (TPCK). Segundo esses autores, TPCK é a base para um bom ensino com a tecnologia e requer uma compreensão da representação de conceitos utilizando tecnologias. Ball *et al* (2008), estabeleceram uma teoria de base prática sobre o conhecimento matemático para o ensino de Matemática (MKT). Esses autores ressaltam que o conhecimento necessário para ensinar é especializado e vai além do conhecimento matemático comum. Os pressupostos teóricos sobre o processo de apropriação de tecnologia pelo professor destacados por Sandholtz *et al* (1997), nortearam a nossa investigação. Nesse sentido, esses autores afirmam que o referido processo se dá em cinco estágios e, gradativamente, os professores modificam a sua prática com o uso das tecnologias. Nossa pesquisa apoiou-se também na concepção de Murphy e Lick (1998) sobre grupo de estudos. Conforme esclarecem os autores, esse tipo de organização reúne um número reduzido de pessoas com objetivo de aumentar a sua capacidade por meio de nova aprendizagem para favorecer aos alunos. Adotamos a metodologia qualitativa, com características de uma pesquisa co-generativa (Greenwood e Levin, 2000 apud Lobo da Costa, 2004), visto que entre seus objetivos está a produção de novos conhecimentos. Na análise das informações coletadas utilizamos a triangulação de dados (Mathison, 1988) como uma estratégia que possibilita a comparação entre diferentes caminhos.

A Professora Jade

Apresentamos inicialmente um perfil da Profª Jade construído a partir do questionário aplicado no início da pesquisa. Jade é professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental desde 1983. Sua experiência na rede federal de ensino teve início em 1997, quando ingressou na escola pesquisada, através de concurso público. A professora frequentou e concluiu o curso de Pós-Graduação em Informática Educativa e, atualmente, é professora do laboratório de informática da escola supracitada, lecionando nas turmas do 1º ao 5º anos. Embora tenha experiência pedagógica utilizando os recursos computacionais, ela não conhecia softwares para ensinar Geometria e o primeiro contato com esses aplicativos foi a partir de sua participação no GEGETEC. Quando propunha atividades abordando as figuras geométricas, utilizava o Paintbrush, software de criação de desenhos e edição de imagens. É importante ressaltar que durante a sua escolaridade, o contato que teve com a Geometria foi somente através do livro didático. Ao ser questionada sobre os conhecimentos necessários para usar o computador nas aulas de Matemática, a Profª Jade fez o seguinte comentário: "O professor precisa dos conhecimentos matemáticos propriamente ditos e dos conhecimentos dos softwares." Percebemos no comentário da professora uma das vertentes de Shulman (1992) a respeito do conhecimento profissional do professor. Para esse autor, o professor deve compreender o mínimo da matéria a ser ensinada de modo a possibilitar o ensino e a aprendizagem dos alunos. Nesse comentário encontramos também respaldo em Mishra e Koehler (2006) sobre o conhecimento tecnológico do conteúdo. Nessa perspectiva, os autores ressaltam que os professores precisam saber não apenas o objeto que ensinam, mas também a maneira pela qual esse objeto pode ser tratado através da aplicação de tecnologia.

Os episódios da Professora Jade no GEGETEC

A trajetória da Profª Jade será apresentada nesse artigo por meio de dois episódios. O primeiro episódio refere-se à fase em que pesquisadora disponibilizou várias atividades para familiarização das ferramentas do software *Régua* e *Compasso*. A preocupação inicial da professora participante ao realizar a atividade representada na Figura 1 consistia em se apropriar dos comandos do software, como podemos observar no diálogo logo a seguir.

Atividade 2
a) Desenhe um triângulo utilizando a ferramenta SEGMENTO.
b) Nomeie os vértices desse triângulo.
c) Pinte a região interna do triângulo e mude a espessura da linha.
d) Mostre as medidas dos lados.
e) Determine as medidas dos ângulos internos.
f) Arraste os vértices desse triângulo e observe o que acontece.
g) Esse triângulo é retângulo? Por quê?
h) Esse triângulo é isósceles? Por quê?
i) Em caso negativo, transforme-o em triângulo retângulo isósceles.
j) Salve o seu trabalho com o seu nome_at2_enc10.

Figura 1. Atividade aplicada à Profª Jade no software *Régua e Compasso*

Jade: Eh! O meu não ficou colorido!
Pesquisadora: Você já escolheu a cor?
Jade: Já.
Pesquisadora: Então, vamos clicar na *Ferramenta Polígono*.
Jade: É. Eu tinha clicado só aqui, no colorido.
Pesquisadora: Agora você une os pontos.
Jade: Ah! Ok!

Ficou registrado nesse diálogo que a Profª Jade encontrou dificuldades para colorir a região interior do triângulo conforme o item **c** da atividade, pois não tinha conhecimento da função do referido comando. Entretanto, ao interagir com a pesquisadora, a professora se apropriou dos conhecimentos necessários para realizar tal tarefa. Richit (2010, p.123) corrobora com a situação apresentada nesse contexto quando esclarece que a apropriação

> [...] refere-se ao processo em que o conhecimento constitui-se em um movimento espiral, um processo dialético em que o sujeito se relaciona com os outros e com a realidade, atribuindo significado às suas experiências nessa realidade e produzindo conhecimento a partir dessas significações. Em outras palavras, o sujeito, ao interagir com o outro em sua prática social, imerge em um processo de significação em que a apropriação é permeada pelo pensar e pela ação do próprio sujeito. Portanto, a apropriação é um processo dialético que

abrange o pensar e a ação do sujeito, bem como a realidade em que essa ação se materializa.

Dando continuidade ao diálogo, observamos que a pesquisadora levou a professora a refletir sobre os conceitos geométricos enquanto apresentava os comandos *Mover ponto* e *Ângulos*.

Pesquisadora: Ao arrastarmos os vértices, o que você observa?
Jade: Modificamos as medidas.
Pesquisadora: Medidas dos lados e dos ângulos.
Jade: Aí se transforma em outro triângulo.
Jade: Ele pode ficar assim?
Pesquisadora: Olha a letra g: Qual a característica de um triângulo retângulo?
Jade: Ter um ângulo de 90°.
Pesquisadora: Ele é retângulo?
Jade: É.
Pesquisadora: Ele é isósceles?
Jade: É. Ele é isósceles.
Pesquisadora: Qual a característica de um triângulo isósceles?
Pesquisadora: Tem que ter somente dois lados ...
La Reine: Ter dois lados iguais.
Jade: É.
Pesquisadora: Então, ele é isósceles?
Jade: Não.
Pesquisadora: Não, não é. Então, você vai usar o comando arrastar para transformar esse triângulo em retângulo e isósceles.

Notamos no episódio acima que a Profª Jade percebeu outro triângulo formado ao arrastar os vértices do triângulo original, no entanto, ela não relacionou na nova figura o ângulo de 90º como condição para classificá-la em triângulo retângulo e responder o item **g** (conhecimento do conteúdo específico, Shulman, 1992). Nesse momento, a pesquisadora decidiu instigá-la com outras perguntas para possibilitar a retomada desse conceito geométrico, o que foi contemplado nas respostas da professora. Observamos também que, a partir da resposta dada por sua colega La Reine à pesquisadora, a professora verificou que o triângulo formado não era isósceles. Tal situação nos reportou aos estudos de Murphy e Lick, (1998). Esses autores afirmam que uma atividade desenvolvida em grupo de estudos, em se tratando do desenvolvimento profissional dos participantes inclui, dentre vários aspectos, a aprendizagem mútua.

O segundo episódio refere-se à aplicação de uma atividade elaborada pela Profª Jade no software *SketchUp* (Figura 2), em sua turma do 3º ano. Durante a atividade os alunos preencheram um protocolo (Figura 3) distribuído pela professora com questionamentos envolvendo conceitos geométricos que pretendia avaliar.

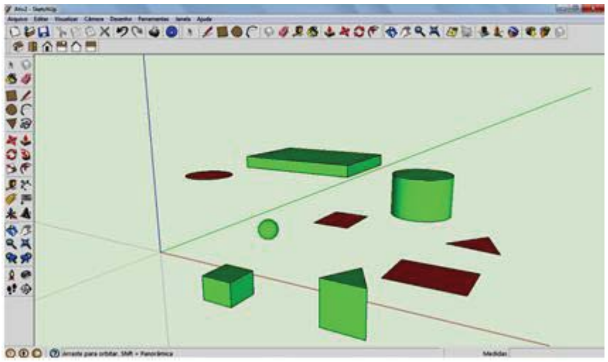


Figura 2. Atividade elaborada pela Profª Jade no software *SketchUp*

Atividade 2: Observe as figuras e ...

a) Identifique as cores das figuras planas e não planas.

planas: ....

não planas: ....

b) Pinte de amarelo as figuras com superfícies arredondadas.

c) Quais as formas das faces da figura com seis vértices? Orbite, se necessário, para ver todas as faces e vértices. ....

d) Podemos afirmar que há um cubo entre as figuras não planas? ....

e) Como você pode ter certeza que a sua resposta está correta?

...

Utilize a ferramenta fita métrica para verificar.

f) Pinte de azul a figura plana que não possui vértice.

Figura 3. Protocolo da atividade aplicada à turma do 3º ano

O diálogo a seguir refere-se à aplicação da atividade pela Profª Jade

Aluno A: Acho que tem superfícies arredondadas, essa e essa daqui. (apontou para a esfera e o cubo)

Jade: O que vocês acham? Ajuda a ele!

Aluno B: Acho que é essa e essa outra aqui, porque também tem superfícies arredondadas (apontando para a esfera e o cilindro)

Aluno A: Essas duas aqui? Apontando agora para a esfera e o cilindro.

Jade: Vê se tem alguma outra.

Jade: Quais são os desenhos que formam as faces? (apontando para o prisma de base triangular)

Aluno A: Triângulo.

Jade: Um é triângulo e o outro, é triângulo também?

Jade: Qual o nome da figura toda? (apontando para o prisma)

Pesquisadora: Prisma.

Jade: Qual o nome dessa figura aqui, apontando, para a face retangular?

Aluno A: Retângulo.

Jade: Então, essa figura é formada por retângulos e tri...

Aluno A: ...ângulos.

Jade: Isso! São as duas formas aqui que a gente vê nessa figura.

A situação acima vivenciada pela Profª Jade é nova. Ainda que ela tenha domínio das tecnologias digitais, o gerenciamento de uma aula em que o software utilizado demande o conhecimento de conteúdos geométricos pelo professor, não é tão simples assim. Observamos nesse episódio a dificuldade da professora em nomear a figura, no caso, o prisma de base triangular, necessitando da intervenção da pesquisadora. Percebemos ainda, a tentativa da professora em manter com os alunos um ambiente de discussão e reflexão sobre as características e as propriedades das figuras geométricas que compunham a atividade, entretanto, concluímos que as questões emergentes do protocolo poderiam ser mais discutidas. Essas situações corroboram o entendimento de Ball *et al* (2008) sobre o conhecimento matemático para a docência. Para esses autores, o conhecimento matemático é fundamental para um ensino efetivo e afeta o desempenho escolar dos alunos.

Considerações finais

Nosso objetivo quando da realização desse artigo foi de discutir alguns episódios vivenciados por uma professora dos anos iniciais de escolaridade participante de um grupo de estudos de Geometria mediado pela tecnologia, a Profª Jade. Embora a análise dos dados da pesquisa ainda esteja em andamento, alguns resultados emergiram dos episódios relatados nesse artigo. Nas fases de familiarização do software e de aplicação da atividade, a professora encontrava-se bastante segura ao lidar com a tecnologia, o que é justificável tendo em vista a sua prática como professora do laboratório de informática. No entanto, encontrou algumas dificuldades relacionadas aos conhecimentos geométricos presentes em cada uma das referidas fases. Era a primeira vez que ela utilizava um software de Geometria e sabia da responsabilidade que havia assumido. Promover discussões e reflexões com os alunos acerca de conceitos geométricos com o uso da tecnologia constituiu um desafio para essa professora. Segundo Murphy e Lick, (1998), o trabalho com grupo de estudos, em se tratando do desenvolvimento profissional dos sujeitos envolvidos, inclui vários aspectos, tais como, o compartilhamento de anseios e ideias, o planejamento e a aprendizagem mútua. Dessa forma, podemos afirmar que o grupo de estudos contribuiu para a criação de um espaço favorável ao crescimento pessoal e profissional da professora por possibilitar a troca, a colaboração, o compartilhamento de práticas, a reflexão na/da prática e a (re) significação dos conceitos geométricos. Todavia, esse estudo revelou também que dificuldades ligadas ao conhecimento específico do conteúdo podem representar uma barreira na interação do professor com o software assim como na apropriação dos recursos disponibilizados por ele para ensinar Geometria.

Referências bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education 59* (5), 389-407.

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ministério da Educação e do Desporto, Brasília: MEC/SEF.

Lobo da Costa, N. M. (2004). *Formação de professores para o ensino da matemática com a informática integrada à prática pedagógica: exploração e análise de dados em bancos computacionais.* Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Educação: Currículo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Lobo da Costa, N. M., Pietropaolo, R. C., Silva, A. C. (2008). O uso de tecnologia na formação do professor de Matemática pode auxiliar na produção de mudanças em sua prática pedagógica?. *In: Anais do IV Colóquio de História* e *Tecnologia no Ensino de Matemática,* (pp.1-8). Rio de Janeiro, Brasil.

Mathison, S. (1988). Why Triangulate? *Educational Researcher 17*(2), 13-17.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record 108* (6), 1017-1054.

Murphy, C. & Lick, D. (1998). *Whole faculty study groups: A powerful way to change schools and enhance learning.* Califórnia: Corwin.

Richit, A. (2010). *Apropriação do conhecimento pedagógico-tecnológico em Matemática* e *a formação continuada de professores*. Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista.

Sandholtz, J. H., Ringstaff, C., Dwyer, D. C. (1997). *Ensinando com tecnologia: criando salas de aula centradas nos alunos.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Shulman, L. (1992). Renewing the Pedagogy of teacher education: the impact of subject-specific conceptions of teaching. En: Montero Mesa e J.M. Vaz Jeremias (Orgs.) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado.* Santiago de Compostela: Tórculo Edicións.

SUPERFÍCIES ESFÉRICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM O AUXÍLIO DE UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

Monica Karrer, Simone Navas Barreiro
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
mkarrer@uol.com.br, sbarreiro@yahoo.com.br

Resumo. Este trabalho apresenta os resultados da aplicação de uma atividade que compôs um experimento de ensino sobre superfícies esféricas, conteúdo desenvolvido na disciplina de Geometria Analítica dos cursos da área de exatas do ensino superior. O estudo foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas e baseado na metodologia de Design Experiment. Teve-se por objetivo investigar as produções de quatro sujeitos provenientes do curso de Licenciatura em Matemática diante de situações inovadoras que integraram os registros algébrico, gráfico, figural e da língua natural, tendo o software Cabri 3D como ferramenta de auxílio nas conversões que envolveram o registro gráfico. Suas produções revelaram sucesso na construção do objeto e avanços principalmente nas análises das relações entre representações dos registros algébrico e gráfico.

Palavras chave: superfícies esféricas, geometria dinâmica, representações

Abstract. This work presents the results of an activity that composed a teaching experiment on spherical surfaces, content developed in Analytical Geometry discipline, in the exact sciences area, in higher education courses. The study was grounded on theory of semiotic representations registers and based on the Design Experiment methodology. It was intended to investigate the production of four individuals attending to Mathematics course when facing innovative situations that integrated algebraic, graphical, figural and natural language registers using the software Cabri 3D as a tool to aid in conversions involving graphic register. The productions of the involved individuals showed success in building the mathematical object and advancements mainly in the analysis of the relations between representations of algebraic and graphic registers.

Key words: spherical surfaces, dynamic geometry, representations

Introdução

Este trabalho expõe os resultados da aplicação de uma atividade sobre superfícies esféricas, conteúdo normalmente desenvolvido na disciplina de Geometria Analítica de cursos superiores da área de exatas. O estudo, que teve por objetivo elaborar, aplicar e analisar situações integrando representações dos registros algébrico, gráfico, figural e da língua natural, foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas de Duval (1995).

Este pesquisador define registro de representação semiótica como o sistema semiótico que permite três atividades cognitivas: a formação de uma representação identificável, o tratamento, que consiste em transformações entre representações no interior de um mesmo registro, e a conversão, que consiste em transformações entre representações de registros distintos. Com relação ao objeto matemático superfícies esféricas, na Figura 1 apresenta-se um exemplo da atividade de tratamento no registro algébrico e outro da atividade de conversão do registro algébrico para o gráfico.

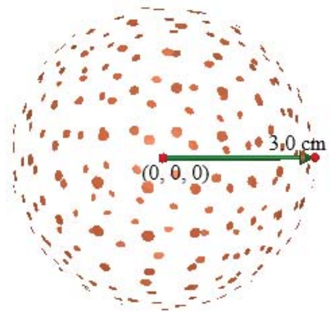
Exemplo de atividade de tratamento	Exemplo de atividade de conversão
$(x-2)^2+(y-3)^2+z^2=3^2$ $x^2-4x+4+y^2-6y+9+z^2=9$	$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=3^2$ 

Figura 1. Exemplos das atividades de tratamento e de conversão

Duval (2009) alerta que a atividade de conversão pode ser afetada pelo fenômeno da não congruência, sendo que, para que haja congruência entre duas representações de registros distintos, é necessário que existam a correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, a mesma ordem de apreensão das unidades das duas representações e a conversão de uma unidade significante de representação de partida para uma unidade significante correspondente no registro de chegada. Caso uma dessas condições não seja verificada, a conversão será classificada como não congruente. Ainda, existe o fato de uma conversão ser congruente em um sentido e não congruente no sentido contrário, o que pode levar o estudante a apresentar desempenhos distintos quando uma situação é proposta nos dois sentidos de conversão. Segundo o mesmo autor, os registros podem ser classificados quanto a sua funcionalidade e discursividade. Se o registro permitir tratamentos algoritmizáveis, ele é denominado monofuncional e, se permitir o discurso, é denominado discursivo. Neste caso, o registro algébrico é classificado como monofuncional discursivo, o gráfico como monofuncional não discursivo, a língua natural como multifuncional discursivo e o figural como multifuncional não discursivo. Duval (1995) revela que, em geral, no ensino de Matemática, os registros monofuncionais discursivos são priorizados em relação aos demais, fato atribuído, dentre outros aspectos, à influência da formação do matemático, cuja atividade valoriza um trabalho envolvendo sobretudo tratamentos neste tipo de registro. Surge, então, a necessidade de conceber as especificidades de se tratar a Matemática do ponto de vista do matemático e do ponto de vista da aprendizagem matemática.

Diversos pesquisadores que trataram da análise de conteúdos de Geometria Analítica e Álgebra Linear e que se fundamentaram na teoria dos registros de representações semióticas, dentre eles, Pavlopoulou (1993), Bittar (1998) e Karrer (2006) evidenciaram, dentre outros resultados, dificuldades dos estudantes em conversões envolvendo o registro gráfico. Pavlopoulou (1993) e Barreiro (2012), na análise de livros didáticos dessas disciplinas, também observaram o predomínio de registros monofuncionais discursivos em relação aos multifuncionais e aos não discursivos, confirmando a afirmação exposta anteriormente por Duval (1995).

Com relação à utilização de ferramentas computacionais no ensino de Matemática, Noss e Hoyles (1996) defendem a inserção desses recursos de forma a favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático, trazendo benefícios que não seriam possíveis em outros ambientes de ensino. Em coerência com esta visão e com a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009), no presente estudo foi utilizado o *software Cabri* 3D, dada a possibilidade de exploração da análise dinâmica e simultânea das relações entre representações dos registros gráfico e algébrico.

Desta forma, partindo da problemática e das evidências detectadas na literatura, neste trabalho teve-se a intenção de propor um experimento de ensino sobre superfícies esféricas, elaborado com a preocupação de se sugerir uma entrada experimental no ambiente *Cabri* 3D, explorando o registro gráfico e suas relações com os registros algébrico e da língua natural. A metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003) norteou tanto a construção do experimento como a sua condução, dado que um desenho inicial foi elaborado, contando com a previsão de adaptações e novas inserções durante sua execução, caso as produções dos estudantes apontassem para tal necessidade. Neste sentido, este tipo de metodologia possuiu caráter flexível, iterativo e cíclico. Participaram do estudo quatro sujeitos do curso de Licenciatura em Matemática, que estudaram em uma instituição privada do estado de São Paulo. Eles já haviam tido contato com o conteúdo de vetores no R^3, mas não com o de superfícies esféricas. O experimento global foi composto de dez atividades, desenvolvidas nos ambientes papel e lápis e *Cabri 3D*, que trataram inicialmente da construção do objeto matemático "superfícies esféricas" e depois da análise de intersecções entre superfícies esféricas e planos e entre superfícies esféricas e retas. Neste artigo são apresentados apenas os resultados da primeira atividade, que objetivou fornecer uma entrada experimental para a construção do objeto matemático "superfície esférica", representando um ambiente favorável para o estabelecimento de relações entre representações dos registros gráfico, algébrico e da língua natural.

Apresentação do estudo

A seguir, são apresentadas as tarefas propostas na primeira atividade.

Considere o sistema de coordenadas ortonormais $S=(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $S=(0,r,r,K)$.

$S=(0,r,r,K)$.*Tarefa a)* No arquivo *1a* é dado o representante de um vetor com módulo 3, cuja origem coincide com a origem do sistema. Usando o comando trajetória do *software*, mexa na extremidade desse representante. Com o botão direito, mude a posição do plano de referência, para obter outras vistas do objeto. Que objeto gráfico você acha que é definido nesta situação? Ao realizar estas alterações, houve mudança no valor do módulo do vetor? *Tarefa b)* Utilizando um comando do *Cabri*, construa o objeto gráfico que você acha que esta trajetória definiu. *Tarefa c)* Verifique se o objeto gráfico fornecido pelo *software* coincide com o objeto que você achou que os pontos da trajetória definiriam. Escreva suas conclusões. *Tarefa d)* Registre, com suas palavras, o que observou e como você definiria uma superfície esférica. *Tarefa e)* Denominando qualquer um dos pontos obtidos na trajetória por (x,y,z), qual seria a equação dessa superfície esférica? *Tarefa f)* Expresse a equação desta superfície esférica por meio do *software* e verifique se coincide com o que você obteve no item anterior. Como você relaciona a equação dessa superfície com a sua representação gráfica? *Tarefa g)* Abra o arquivo *1b* do *Cabri 3D*. Na tela é dado o representante de um vetor cuja origem coincide com a origem do sistema. Construa a superfície esférica com raio igual ao módulo deste representante e solicite sua equação. Altere a extremidade dele e observe o que ocorre no gráfico e na equação. *Tarefa h*) Abra o arquivo *1c* do *Cabri 3D*. Na tela é dado o representante de um vetor cuja origem não coincide com a origem do sistema. Determine as coordenadas de sua origem. Construa a superfície esférica com raio igual ao módulo deste vetor e centro na sua origem. Solicite sua equação. Comparando a equação obtida com a equação $x^2+y^2+z^2=r^2$ $\mathbf{x^2+y^2+z^2=r^2}$, o que você observa? *Tarefa i)* Com o botão esquerdo, selecione a superfície esférica para deslocá-la. Descreva o que você observou no gráfico e na equação. *Tarefa j)* Agora altere o módulo do vetor "esticando-o" pela sua extremidade. O que ocorre com o gráfico e com a equação?

Na tarefa a, pretendia-se que os sujeitos observassem que, movimentando o representante de um vetor com módulo fixo e origem na origem do sistema de coordenadas $S=(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, seria obtida uma superfície esférica, conforme ilustrado na Figura 2.

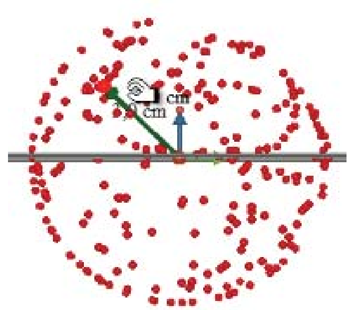


Figura 2. Trajetória definida pela movimentação do representante do vetor

Nas tarefas b e c, pretendia-se que os sujeitos verificassem, utilizando recursos do *software*, se a conjectura obtida na tarefa anterior estava correta. Na tarefa d, intencionava-se observar se os sujeitos conseguiriam relatar a questão da equidistância dos pontos da superfície esférica ao seu centro e expressar, partindo da experimentação realizada e utilizando o registro da língua natural escrita, suas conclusões no ambiente papel e lápis. Na tarefa e, pretendia-se verificar se os sujeitos efetuariam uma conversão para o registro algébrico, determinando a equação reduzida da superfície esférica construída. Na tarefa f, eles poderiam observar se o que determinaram coincidia com o fornecido pelo comando do *software*. Na tarefa g, pretendia-se, por meio da experimentação no ambiente computacional, que os sujeitos observassem o impacto que a alteração no módulo do vetor geraria nos registros algébrico e gráfico de uma superfície esférica com centro na origem do sistema $S=(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dado o dinamismo do *software*, era possível alterar a extremidade do representante do vetor e observar, de forma simultânea, a alteração no registro algébrico, conforme ilustrado na Figura 3.

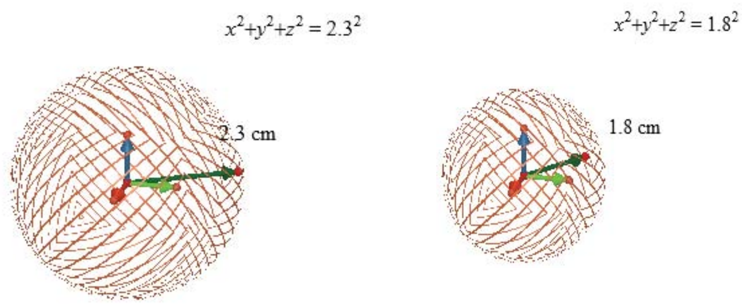


Figura 3. Experimentação da influência do raio nos registros algébrico e gráfico

Na tarefa h, pretendia-se que os sujeitos observassem a influência do centro da superfície esférica na suas representações algébrica e gráfica, por meio do aspecto dinâmico do *software*, especificamente na situação em que o centro da superfície esférica não coincidia com a origem do sistema $S=(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, conforme ilustrado na Figura 4.

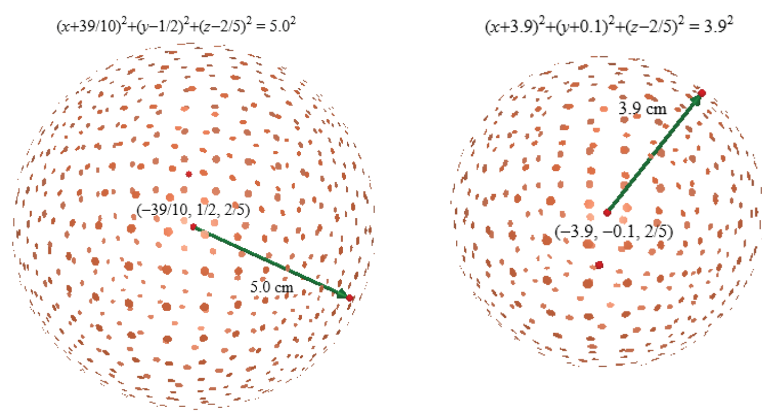


Figura 4. Experimentação da influência do centro nos registros algébrico e gráfico

Nas tarefas i e j, eram sugeridas outras manipulações para a análise das relações entre os registros algébrico e gráfico da superfície esférica. A seguir, são apresentados e discutidos os resultados da aplicação dessa atividade.

Apresentação e análise dos resultados da aplicação da atividade

Nesta seção, apresenta-se a análise da aplicação desta atividade a duas duplas de sujeitos provenientes do curso de Licenciatura em Matemática. Os estudantes não apresentaram dificuldades na resolução das tarefas a,b e c. Na tarefa a, as duas duplas conjecturaram que a trajetória definiria uma superfície esférica e observaram, utilizando comandos do *software*, que a hipótese estabelecida estava correta. No item d, notamos que as duas duplas observaram a questão da equidistância entre qualquer ponto da superfície esférica e seu centro, apesar de a dupla 2 fornecer uma produção na língua natural mais elaborada, conforme ilustrado nas Figuras 5 e 6.

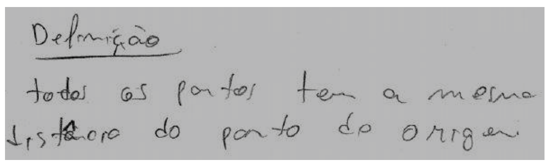

Definição
todos os pontos tem a mesma
distancia do ponto de origem

Figura 5. Descrição da Dupla 1 - Tarefa d

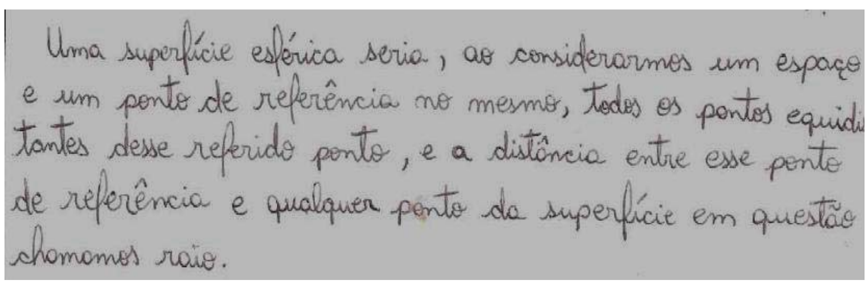

Uma superfície esférica seria, ao considerarmos um espaço
e um ponto de referência no mesmo, todos os pontos equidi
tantes desse referido ponto, e a distância entre esse ponto
de referência e qualquer ponto da superfície em questão
chamamos raio.

Figura 6. Descrição da Dupla 2 - Tarefa d

Ao serem questionados, os alunos da dupla 1 relataram que o ponto de origem presente em sua descrição representava o centro da superfície esférica. A dupla 2 relatou que a descrição fornecida foi influenciada pelo conhecimento da definição de circunferência, incluindo as devidas adaptações. Na tarefa e, as duas duplas deduziram, sem dificuldades e partindo da fórmula de distância entre dois pontos, a equação da superfície esférica presente na tela. Na tarefa f, elas puderam constatar, por meio de um comando do *software*, que as deduções estavam corretas. As duas duplas concluíram que o módulo do vetor representava a medida do raio da superfície esférica e que, naquele caso, o seu centro era dado por (0,0,0). Nas tarefas seguintes, graças ao aspecto dinâmico da ferramenta, os estudantes puderam verificar experimentalmente as relações entre as representações gráfica e algébrica da superfície esférica. Esse tipo de abordagem permitiu que os estudantes identificassem, em atividades posteriores, se uma dada equação era ou não de uma superfície esférica e determinassem o centro e o raio partindo de sua representação algébrica, conforme ilustrado na Figura 7.

Produções da Dupla 1	**Produções da Dupla 2**
A equação seguinte é de uma superfície esférica? c) $x^2 + y + z^2 = 9$ → não; porquê a y não está ao quadrado Determinar o centro e o raio das superfícies esféricas: c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 32$ → $x^2+y^2+z^2 = 16$ Centro = (0,0,0) raio = 4 Tarefa b. $(x- 1/2)^2 + y^2 + (z+3/4)^2 = 7$ centro → (1/2, 0, −3/4) raio → $\sqrt{7}$	Determinar o centro e o raio das superfícies esféricas b) $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ centro (0;0;0) raio $\sqrt{7}$ Tarefa a. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ CENTRO (1; −2; 3) RAIO 4 Tarefa c. $3(x-0,2)^2 + 3(y-1)^2 + 3(z+0,7)^2 = 27$ CENTRO (0,2; 1; −0,7) RAIO 3

Figura 7. Produções das duplas 1 e 2

Na aplicação desta primeira atividade do experimento, não foram necessárias adaptações ou inserções de propostas adicionais ao desenho inicial, conforme previsto na metodologia adotada, uma vez que as produções dos estudantes indicaram compreensões satisfatórias. A partir dessa primeira experimentação, os alunos, em conjunto com o professor-pesquisador, discutiram sobre a representação algébrica de uma superfície esférica genérica de centro C= (a,b,c) e raio r. Partindo das observações realizadas no *software*, das atividades experimentais e da conclusão da manutenção da distância entre os pontos da superfície esférica e o seu centro, os sujeitos não tiveram dificuldades em deduzir e compreender o significado da equação $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$. As demais atividades do experimento trataram da equação geral da superfície esférica e de interseções envolvendo esse objeto matemático, sendo que, principalmente no trabalho com as intersecções, os aspectos inerentes à metodologia adotada se tornaram mais evidentes, dada a necessidade de se propor situações não previstas no desenho inicial, para que os estudantes atingissem o objetivo esperado.

Conclusão

Este estudo permitiu uma entrada experimental antes da formalização do conceito de superfície esférica. Os alunos puderam observar no *software* as condições matemáticas para a determinação desse objeto matemático, bem como as relações entre representações dos registros algébrico e gráfico. Essa experimentação auxiliou na identificação da equação de superfícies esféricas, na determinação do centro e do raio e também na construção da equação da superfície esférica, tanto no seu formato reduzido como no geral. O *software* favoreceu a visualização simultânea das relações entre representações dos registros algébrico e gráfico e permitiu que as conjecturas experimentais fossem validadas no próprio ambiente.

Referências bibliográficas

Barreiro, S. N. (2012). *Superfícies esféricas: uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos com auxílio do software Cabri 3D*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Bandeirante de São Paulo. Brasil.

Bittar, M. (1998). *Les vecteurs dans l'enseignement secondaire*. Tese de Doutorado não publicada, Université Joseph Fourier. França.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher 32(1)*, 9-13.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (2009). *Semiósis* e *Pensamento Humano: registros semióticos* e *aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física.

Karrer, M. (2006). *Articulação entre Álgebra Linear* e *Geometria*: *um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica.* Tese de Doutorado não publicada, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

Noss, R.; Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: learning cultures and computers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Pavlopoulou, K. (1993). Un problème décisive pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de didactique et de sciences cognitives 5(1),* 67-93.

ESPAÇO DE APRENDIZAGEM DIGITAL: O APRENDER A APRENDER POR COOPERAÇÃO

Aline Silva De Bona, Léa da Cruz Fagundes, Marcus Vinicius de Azevedo Basso
IFRS - Campus Osório Brasil
UFRGS
aline.bona@osorio.ifrs.edu.br , leafagun@ufrgs.br, mbasso@ufrgs.br

Resumo. O estudo é uma pesquisa-ação, na área da Informática na Educação Matemática, sobre a forma de aprender a aprender cooperativamente, segundo os Estudos Sociológicos de Piaget, no espaço de aprendizagem digital da Matemática, desenvolvida no IFRS – Osório, em 2011 e 2012, com 60 estudantes do ensino médio técnico em informática. A questão central é como analisar e compreender o processo de aprendizagem cooperativa dos conceitos de Matemática neste espaço. A definição deste espaço e de aprendizagem cooperativa é resultado desta pesquisa. Além disso, demonstra-se a construção dos conceitos de Matemática, e a mobilização dos estudantes em aprender incorporando-se as tecnologias digitais online às aulas de Matemática, sob a autonomia e responsabilidade de cada estudante e/ou de seu grupo.

Palavras chave: aprender, tecnologias, digital, matemática, cooperação

Abstract. The study consists in an action-research in the area of Information Technology in Mathematics Education, on how to learn to learn cooperatively, according to Piaget's Sociological Studies in the space of digital learning mathematics, developed at IFRS - Osório in 2011 and 2012, with 60 High School students in technical computing. The target question is how to analyze and understand the process of collaborative learning of math concepts in this space. The definitions of digital space and cooperative learning are the result of this research. Moreover, the construction of math concepts and the mobilization of students in learning to incorporate digital technologies in online math classes are demonstrated in the study, concerning the autonomy and responsibility of each student and / or his group.

Key words: learning, technology, digital, mathematics, cooperation

Introdução e ação da pesquisa em teoria e prática

O estudo é uma pesquisa-ação, de Barbier (2004), na área da Informática na Educação Matemática, sobre a forma de aprender a aprender cooperativamente no espaço de aprendizagem digital da Matemática, cuja questão central consiste em analisar e compreender o processo de aprendizagem cooperativa dos conceitos de Matemática no espaço de aprendizagem digital. Esta metodologia de pesquisa está articulada com o método de trabalho docente que é dialogado de Freire (1996), e intimamente relacionada com a questão da pesquisa e com seu objetivo de compreender como se dá esta construção de conceitos de matemática por cooperação via tecnologias digitais online, porque a pesquisa-ação integra a pesquisa teórica e empírica à prática da sala de aula.

Fundamentação teórica e metodologia

Os elementos autonomia e responsabilização sobre seu processo de aprendizagem são essenciais à aprendizagem cooperativa, pois o aprender a aprender Matemática exige primeiramente participação dos estudantes, e, nesta sequência, de um contrato didático ou disciplinar para se estabelecer regras autônomas e um respeito recíproco entre todos os estudantes no espaço de aprendizagem digital, de acordo com Bona (2012). Assim, surge o objetivo de analisar como ocorre o processo de aprendizagem de Matemática segundo as ações de cooperação do grupo de estudantes no espaço de aprendizagem digital. Este espaço de aprendizagem digital foi primeiramente construído por uma equipe multidisciplinar entre estudantes, professores e a professora-pesquisadora, e atualmente se adota a rede social *Facebook* como um espaço adequado à definição estabelecida por esta pesquisa, e o mais interessante é que este foi um espaço escolhido pelos estudantes.

A definição de espaço de aprendizagem digital está baseada nas ideias de Peters (2009), Papert (1994) quanto às conceituações da área da informática, e em Piaget (1973, 1977) para a idealização da aprendizagem cooperativa entre os estudantes, em especial, mas também com a professora-pesquisadora. Para Piaget (1973), a aprendizagem primeiramente ocorre por colaboração e depois por cooperação, e é importante diferenciar a metodologia de pesquisa colaborativa daquela denominada de pesquisa-ação deste estudo, que se refere à forma de aprendizagem por cooperação. E ainda é fundamental ressaltar que aprender por colaboração é cada um participar com um conhecimento específico ou juntar partes independentes para constituir um todo, já a cooperação compreende todas as ações sincronizadas e com mesmos valores em prol de um objetivo coletivo, e de resultado de plena construção de todos.

Alicerçada na pesquisa com os Portfólios de Matemática, segundo Bona (2010), tem-se que a tecnologias digitais são recursos atrativos aos estudantes para aprender a aprender Matemática com autonomia e responsabilidade, paralelamente apropriando-se da conceituação de cultura digital e do paradigma da complexidade de Morin (2000), constrói-se a definição de espaço de aprendizagem digital. Mas para que este seja entendido como tal tem-se integrado ao mesmo uma concepção de prática docente baseada na metodologia dialogada de Freire (1996) e no processo de aprendizagem de Piaget (1998), que é baseado na ação do estudante para construir seu processo de aprendizagem e, assim, seu conhecimento. Paralelamente, concebe-se a Matemática como uma ciência presente na vida cotidiana, necessária à vida profissional, e um direito de cidadania, para D'Ambrosio (1996), e todos os estudantes podem aprender os conceitos de Matemática com alegria, segundo Bona (2010). A pesquisa realiza-se no IFRS – Campus Osório, nas aulas de Matemática presencial e online – no espaço de aprendizagem digital. Primeiramente, foi realizado um estudo inicial com 60 estudantes, do primeiro ano do Ensino Médio Técnico Integrado em Informática, em 2011, e a coleta de dados efetiva se realizou em 2012, com os mesmos estudantes, agora no 2°ano. Para a análise dos dados desta pesquisa-ação, adotou-se a Teoria de Piaget, especialmente a Abstração Reflexionante (1977) e os Estudos Sociológicos (1973), como metodologia de análise, na qual os dados são as resoluções dos problemas de Matemática e outras atividades, como projetos de aprendizagem interdisciplinares que os estudantes desenvolveram coletivamente no espaço de aprendizagem digital, seja na forma de comentário como de *chat*, explorando imagens, arquivos do tipo doc, ppt, pdf, e links diversos. Estas atividades são propostas pela professora-pesquisadora de Matemática, ou pelos próprios estudantes no que tange a relação da Matemática com outras disciplinas, ou até mesmo desafios que estes realizam em suas pesquisas, como problemas cotidianos de embalagens comerciais. Ao ler e analisar os dados, os passos adotados pelos estudantes durante a resolução de um problema de Matemática, assim como a busca pela compreensão de cada passo apresentado pelo estudante são também por ele comentados, e neste comentário explicativo e justificativo de porque usou este teorema ou aquela operação ficam evidentes os reflexionamentos e reflexões dos estudantes, e ainda mais específica se torna a sua apropriação dos conceitos que foram construídos de forma cooperativa. O fato de adotar um espaço de aprendizagem digital mediado pelas tecnologias digitais online permite que todas as interações dos estudantes estejam escritas, ou gravadas ou expressas como imagens, ou seja, tudo está registrado, e os momentos de sala de aula que a professora-pesquisadora julgar necessário são filmados e transcritos.

A pesquisa evidencia que as tecnologias digitais em rede são recursos atrativos aos estudantes, novamente, que possibilitam aprender a aprender por meio de cooperação e em qualquer lugar e tempo, além de viabilizar um processo de aprendizagem que valoriza toda a ação do estudante, seja de solução final certo ou não, e a ideia de que todos os agentes do processo de ensino-aprendizagem estão aprendendo, seja o estudante em Matemática ou a professora-pesquisadora em uso das tecnologias digitais em rede, por exemplo. Paralelamente, a pesquisa comprova que é possível tanto ao estudante quanto à professora-pesquisadora compreender seu processo de aprendizagem cooperativa, sendo para esta última um meio de se ter retorno dos estudantes sobre como estão aprendendo e como deve planejar e replanejar suas aulas, e também atividades; e aos estudantes uma maneira importante de reflexão e tomada de consciência dos seus conhecimentos de Matemática, e também de como aprender. Ainda, a forma de aprender a aprender por cooperação, para Piaget (1973), apresentada como atrativa aos estudantes, é um resultado desta pesquisa-ação, com bons resultados de aprendizagem de conceitos de Matemática verificados durante o ano de 2011, não somente no espaço de aprendizagem digital programado em PHP, mas também em outros espaços pesquisados como listas no *Facebook*, *Pbworks*, *Twiter*, e *blogs*, onde todos cumprem a finalidade de possibilitar uma aprendizagem cooperativa dos estudantes quanto aos conceitos de Matemática fundamentais à Escola Básica. Da mesma forma, em 2012, os estudantes adotaram como espaço de aprendizagem digital a rede social *Facebook*. Esta rede social se enquadra perfeitamente na definição e contempla as características estabelecidas por Bona, Fagundes, Basso (2011) para ser um espaço de aprendizagem digital, ou seja, o *Facebook* é um local não situado geograficamente onde o processo de ensino-aprendizagem ocorre através da organização e aplicação de uma concepção pedagógica, baseada na comunicação, interação, trabalho colaborativo do professor com os estudantes, e cooperativos dos estudantes entre si e com o professor. E o ambiente informatizado destinado à aprendizagem passa a ser denominado de "espaço de aprendizagem" quando se trata de vários ambientes em rede, segundo Peters (2009), porque contempla hipertexto, comunicação virtual, mídias, e outras multimídias.

As caraterística apontadas por Bona, Fagundes e Basso (2011) para este espaço são: ausência de limites via Internet, ausência de disposição espacial em muitos momentos, opacidade (criação de conceitos espaciais – simulação - associados ao espaço real, e a possibilidade de relações entre objetos neste espaço), virtualidade (é a representação digital de algo que é real), e a telepresença (presença não-física do professor e/ou estudantes).

Além disso, o *Facebook* dispõe de outros recursos encantadores aos estudantes para ser uma sala de aula digital, como exemplos: aplicativo *Docs,* que permite anexar documentos em formato doc, pdf e outros; o recurso Eventos, que permite aos estudantes usarem como agenda de atividades; é um espaço virtual *free* e pode ser acessado em qualquer lugar e hora, até com Internet 3G, segundo opinião dos mesmos; a possibilidade de criar grupos fechados de estudantes, no caso da turma, com o objetivo de estudar Matemática; todas as interações realizadas neste grupo ficam registradas e salvas por tempo indeterminado com a garantia do gestor desta rede social; a opção de se estabelecer *chat* coletivo, com os participantes que selecionar, e este fica salvo no grupo para que todos possam acessar em diversos momentos; além de outras vantagens.

Mas é lógico que um espaço de aprendizagem digital não é uma rede social somente, pois em um primeiro momento ele tem um objetivo bem específico, que é estudar Matemática. Em seguida, este objetivo está sustentado por uma prática pedagógica que já no início estabelece um contrato disciplinar ou didático com os estudantes, e tem uma concepção construtivista por definição, além da constatação de que a aprendizagem cooperativa é natural aos estudantes neste espaço. Assim, faz-se necessária a compreensão do professor para adotar esta ideia do que é aprender por cooperação e por colaboração, segundo Piaget (1973). A diferença entre cooperação e colaboração é: "[...] cooperar na ação é operar em comum, isto é, ajustar por meio de novas operações (qualitativas ou métricas) de correspondências, reciprocidade ou complementaridade, as operações executadas por cada um dos parceiros, e (...) colaborar, entretanto, resume-se à reunião das ações que são realizadas isoladamente pelos parceiros, mesmo quando o fazem na direção de um objetivo comum" (Piaget, 1973, p.105). Desta forma, para cooperar é necessário colaborar, mas existe diferença entre estas duas formas de aprender, porém o termo colaboração é adotado como método de pesquisa, usualmente em pesquisas na área da Informática, e, consequentemente, na Informática na Educação Matemática também - como é o caso desta pesquisa, cuja metodologia é a pesquisa-ação, um método de pesquisa qualitativa colaborativa. É importante frisar que esta última é um método, não uma forma de aprendizagem. Esta pesquisa-ação, alicerçada as ideias de Piaget (1973; 1977), estabelece uma definição para aprendizagem cooperativa como a forma de aprender a aprender por meio de atividades (ações) – interações sejam estas com objetos ou com estudantes/professor, baseadas em regras autônomas e um respeito mútuo entre todos que fazem parte deste coletivo da aprendizagem, mas tais interações têm de estabelecer umas trocas como uma operação do tipo correspondência, complementaridade e/ou reciprocidade. E nessas interações estão presentes às ações que proporcionam a abstração do estudante, seja empírica, reflexionante ou refletida, onde tais interações, num primeiro momento, parecem apenas trocas sociais; mas agrupamento operatório são trocas intelectuais também individuais. Desta forma, a aprendizagem cooperativa possibilita a conceituação, a generalização e logicamente a construção do pensamento formal do estudante, segundo Bona (2012), através do método da pesquisa-ação e da análise abstrata (alicerçada na abstração reflexionante - empírica, reflexionante e refletida) de cada ação cooperativa (pro correspondência, complementaridade, e reciprocidade) dos estudantes aos resolverem os problemas de Matemática.

A abstração empírica se apoiava sobre os objetos físicos e materiais da própria ação, sendo em Matemática muito comum a associação aos sólidos, por exemplo, em geometria espacial, e/ou ao manusear um sólido concluir da sua ação que este tem arestas iguais, ou outras informações. Já a abstração reflexionante, em seus diferentes patamares de reflexionamento, percorre quase todas as ações dos estudantes enquanto resolvem um problema de Matemática, variando de um patamar mais simples ao mais complexo, como exemplo: ao resolver um problema de geometria sobre o cálculo de volume de um paralelepípedo, um estudante primeiro precisa verificar se tem as informações necessárias para calcular, e depois qual a técnica precisa realizar, mas se o estudante fizer sem verificar se as unidades de medida são as mesmas, encontrará uma resposta sem sentido ao problema; no entanto, conceitualmente o estudante estará correto. Assim, o que ocorre é que perceber as unidades é uma abstração reflexionante, mas depois de encontrar uma resposta sem sentido e ai dar-se conta das unidades e corrigir o erro, também é uma abstração reflexionante, no entanto estes dois exemplos de abstrações estão em patamares de reflexionamento diferentes. E a abstração refletida é muito pouco demonstrada pelos estudantes, às vezes em generalizações matemáticas.

As três formas de cooperação apontadas por Piaget (1973) são: correspondência - quando um estudante concorda com o colega. Por exemplo, ao iniciar-se a resolução de um problema de Matemática, ambos entendem que se deve usar o Teorema de Pitágoras; complementariedade - quando um estudante, além de concordar com o colega, continua a resolução do problema, conforme o exemplo do estudante que estabelece quais são os elementos do triângulo retângulo para se aplicar o teorema, ou faz o cálculo; e reciprocidade, quando os estudantes escolhem métodos diferentes de resolver um problema, mas ambos defendem suas ideias, e os dois entendem as duas resoluções, chegando num mesmo resultado. A reciprocidade é a forma de cooperação mais complexa, pois, além de estabelecer a reciprocidade propriamente, os estudantes devem demonstrar reversibilidade, que em Matemática é basicamente resolver um problema de Matemática por um método, e entender o método diferente dos colegas, capaz de explicá-lo e também se apropriar destas novas ideias. Continuando o exemplo, o estudante usou o Teorema de Pitágoras e outro colega adota um outro método, se possível. No caso desta resolução, se for dado um ângulo, pode-se usar a lei dos cossenos, ou outra forma. As resoluções em raciocínio e lógica serão diferentes matematicamente, nas quais se exploram conceitos de Matemática distintos, proporcionando, assim, aos estudantes um leque de abstrações muito mais ricas, interagindo de forma cooperativa ao invés de individualmente.

Cabe destacar que na exploração deste espaço digital se faz necessária a proposição de que a professora deve possibilitar aos estudantes uma diversidade de atividades para que estes se identifiquem com alguma, no mínimo, de maneira a se sentir envolvido e com curiosidade de resolver um problema. Desta forma, ao trabalhar neste espaço de aprendizagem, proporciona-se sempre uma diversidade de atividades de Matemática previamente planejadas pela professora-pesquisadora, mas que geralmente são incrementadas pelos próprios estudantes depois de suas pesquisas, sejam online, com amigos, na biblioteca ou com outros professores de diversas áreas do conhecimento.

Nesse sentido, esta pesquisa contribui com a ideia de cooperação para aprender a aprender Matemática valendo-se do espaço de aprendizagem digital, e contribui com a ressignificação da prática docente da professora-pesquisadora como apenas um exemplo de que a busca do professor em entender o contexto dos estudantes é condição primordial à "saúde" da educação Matemática, e também ao futuro da educação. Na seção adiante deste artigo, será exemplificado um problema de Matemática resolvido no *Facebook* de forma cooperativa pelos estudantes, apontando as formas de cooperação e as abstrações que evidenciam a construção dos conceitos de Matemática em questão.

Resolução de um problema de matemática no facebook de forma cooperativa

Aplicação da pesquisa

Os dados coletados nesta pesquisa são numerosos e diversificados; assim, foi selecionado um problema para ilustrar o trabalho de análise organizado e realizado segundo orientações de Bona (2012). Cabe destacar que há um termo de consentimento de todos os estudantes assinado pelos pais/responsáveis permitindo a participação dos mesmos na pesquisa, e inclusive se colocaram à disposição para ajudar. Os estudantes são denominados pelas iniciais dos seus nomes, e todos são da turma do 2°ano do ensino médio técnico integrado em Informática do IFRS - Campus Osório. Na análise, há um *print screen* (figura) do enunciado do problema postado por um estudante e de algumas interações para se ter ideia de como é este espaço na rede social *Facebook*, e as outras interações necessárias são transcritas devido à limitação de páginas deste artigo. Observa-se na postagem do problema, primeiramente: a diversão dos estudantes em resolver as atividades de Matemática por eles pesquisadas; a liberdade de comunicação entre todos em dizer que não entenderam o problema; a possibilidade de estudo de noite e a continuação das interações dos colegas até resolver o problema; a linguagem de Internet adotada pelos estudantes para escrever os conceitos de Matemática, como asterisco para indicar a operação de multiplicação; e a grande participação dos estudantes com o problema, onde cabe destacar que cada estudante que curte a postagem está afirmando que compreendeu a resolução feita pelos colegas. Já por estas apropriações dos estudantes no espaço do *Facebook,* fica claro que os estudantes entendem o que é um espaço de aprendizagem digital da Matemática, e naturalmente se identificam com a aprendizagem cooperativa. Pode-se exemplificar (pois não se pretende esgotar a análise deste dado coletado da pesquisa) a operação por complementaridade na interação de M com F e paralelamente por correspondência, já na interação M e L se constata a operação cooperativa por reciprocidade, pois mesmo tendo ideias matemáticas diferentes, estes compreendem a resolução um do outro. Nas ações cooperativas citadas acima, é possível verificar a abstração reflexionante dos estudantes, e também na ação de P com V, referenciando-se inclusive ao problema anterior. A dificuldade inicialmente apontada pelo estudante F é uma abstração empírica que necessitou da cooperação com os colegas para se tornar uma compreensão conceitual do arco e, assim, uma abstração reflexionante. Quando o estudante M mencionou que irá usar o conceito de proporção, este demonstra, inicialmente, uma abstração reflexionante que mais tarde irá generalizar em outras postagens neste mesmo problema que não podem ser aqui demonstradas pela limitação de páginas. Então, neste exemplo se verifica a construção dos conceitos de Matemática presentes na resolução deste problema.

Figura: *Print Screen* de um Problema de Matemática resolvido no *Facebook* em 2012.

Além disso, a autonomia dos estudantes ao participarem do espaço do *Facebook* e sua responsabilidade sobre o seu processo de aprendizagem de Matemática ficam claras quando os estudantes usam o espaço como desejam e postam o que julgam necessário para aprender a aprender Matemática. E é evidente que as tecnologias digitais são elementos atrativos aos estudantes, pois este problema está num site de questões para o vestibular explorado pelos estudantes em busca de conceitos de física inclusive, segundo depoimento dado por V à professora-pesquisadora em *chat* no dia 15 de março de 2012.

Dados quantitativos a serviço da pesquisa qualitativa: em momento posterior a uma série de problemas de Matemática sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo e no Círculo Trigonométrico, com seus elementos como arcos e ângulos, a professora-pesquisadora solicita que os estudantes resolvam uma lista com 12 problemas, explorando novamente estes conceitos, e dos 24 estudantes da turma, apenas um errou um problema e por falta de atenção, segundo o mesmo. Os estudantes resolveram esta lista no *Facebook* em uma tarde de quinta-feira durante 4 horas, todas participaram, registrou-se um conjunto de dados rico à pesquisa e um momento único de estudos aos estudantes. Na avaliação formal - prova do final do trimestre - ficou evidente a compreensão dos estudantes quanto a estes conceitos, agora de forma individual interligados a outros problemas mais complexos. Inclusive, 87% conquistou nota superior a 8,8 de 10 pontos, 12,5% obteve nota entre 8,8 e 7, sendo 7 a média da instituição de ensino para aprovação, e apenas um estudante tirou 6,7. Este último equivocou-se com unidades de comprimento e atrapalhou-se num divisão entre decimais, resultando no erro de uma questão contextualizada que tinha pontuação máxima de 4 pontos; no entanto, o aluno demonstra compreensão conceitual e lógica.

Considerações finais

Em suma, o *Facebook* é um espaço digital de aprendizagem cooperativa dos conceitos de Matemática, valendo-se de elementos atrativos e mobilizadores ao aprender a aprender de cada estudante sobre a Matemática, e, paralelamente, faz com que o professor repense suas atividades/problemas propostos em sala de aula tanto presencial quanto online. A pesquisa conclui, ainda, que há necessidade de pesquisas que demonstrem práticas docentes de como os professores podem se apropriar das tecnologias digitais online para mobilizar a participação e a curiosidade dos estudantes para as aulas de Matemática, sem a ameaça da avaliação ou qualquer outra estrutura antiga da escola, e que esta sala de aula está em todo lugar como no *Facebook*, ou seja, para aprender não há hora e nem espaço fixo.

Referências bibliográficas

Barbier, R. (2004). *A Pesquisa-Ação.* Tradução Lucie Didio. Brasília: Liber Livro Ed.

Bona, A. S. D. (2012). *Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática:* o aprender a aprender por cooperação. Tese, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Brasil.

Bona, A. S. D. (2010). *Portfólio de Matemática:* um instrumento de análise do processo de aprendizagem. Dissertação, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Brasil

Bona, A.S.D.; Fagundes, L.C;Basso, M.V.A. (2011). A cooperação e/ou a colaboração no Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática. *Revista Novas Tecnologias na Educação.* 9(2),1-11.

D'Ambrosio, U. (1996). *Educação Matemática:* da teoria à práxis. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas, SP: Papirus.

Freire, P. (1996) *Pedagogia da Autonomia:* saberes necessários à prática educativa. 22ed. São Paulo: Paz e Terra.

Papert, S. (1994). *A Máquina das crianças.* Porto Alegre: Artmed.

Peters, O. (2009). *A educação à distância em transição*. São Leopoldo: Unisinos.

Morin, E. (2000). *A cabeça bem-feita:* repensar a reforma, reformar o pensamento. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Piaget, J. (1998) *Sobre a pedagogia.* São Paulo: Casa do Psicólogo.

Piaget, J. (1977). *Abstração Reflexionante:* relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artmed.

Piaget, J. (1973). *Estudos Sociológicos.* Rio de Janeiro: Forense.

REDES SOCIAIS E A CULTURA DIGITAL: UM ESPAÇO COOPERATIVO PARA APRENDER A APRENDER MATEMÁTICA

Aline Silva De Bona, Léa da Cruz Fagundes, Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Instituto Federal do Rio Grande do Sul, Campus Osório - IFRS Brasil
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
aline.bona@osorio.ifrs.edu.br ; leafagun@ufrgs.br; mbasso@ufrgs.br

Resumo. O trabalho é baseado numa pesquisa bibliográfica em obras de Piaget, Morin, Peters, e em pesquisas recentes na área da Informática na Educação Matemática, tratando dos conceitos de cultura digital, pensamento complexo, espaço de aprendizagem, redes sociais, comunidade virtual, aprendizagem por cooperação, interação, metodologia de pesquisa por colaboração. Paralelamente a essa pesquisa, encontra-se em desenvolvimento um estudo de caso sobre a verificação da aprendizagem de conceitos de Matemática via publicações no Facebook, o qual está sendo considerado como um espaço de aprendizagem digital da matemática segundo definição dos autores, e já se apresentam bons resultados de aprendizagem de Matemática.

Palavras chave: aprender, redes sociais, tecnologias, matemática

Abstract. The work is based on a bibliographic research in the works of Piaget, Morin, Peters, and recent research in the field of Information Technology in Mathematics Education, dealing with concepts of digital culture, complex thinking, learning space, social network, virtual community, learning cooperation, interaction, collaboration on research methodology. Parallel to this research, a case study on the verification of learning math concepts via Facebook posts is being developed, which is being considered as a space of digital learning mathematics as defined by authors, and is already included with successful results of mathematics learning are already presented.

Key words: learning, social network, technology, mathematics

Introdução e a pesquisa dos conceitos

O trabalho é baseado numa pesquisa bibliográfica em obras de Piaget (1973, 1977), Morin (2000), Peters e Barbier (2009), e em especial em pesquisas recentes na área da Informática na Educação Matemática, tratando dos conceitos de cultura digital, pensamento complexo, espaço de aprendizagem, redes sociais, comunidade virtual, aprendizagem por cooperação, interação, metodologia de pesquisa por colaboração.

Paralelamente a essa pesquisa, encontra-se em desenvolvimento um estudo de caso sobre a verificação da aprendizagem de conceitos de Matemática via publicações no *Facebook*, o qual está sendo considerado como um espaço de aprendizagem digital da Matemática, segundo Bona, Fagundes e Basso (2011). Para Bona (2010), tal estudo de caso contempla os elementos básicos para o processo de aprendizagem: apropriação da tecnologia digital dos estudantes como atrativo e contexto para os conceitos de Matemática, autonomia e responsabilidade pelo seu aprender a aprender Matemática, ações de colaboração com a professora–pesquisadora e ações de cooperação entre estudantes (Piaget, 1973).

Assim, o objetivo deste artigo é a reflexão dos conceitos teóricos supracitados de forma articulada à prática - a ação de estudantes na rede social *Facebook*, tendo esta prática a finalidade de proporcionar espaços para aprender a aprender conceitos de matemática.

Fundamentação teórica e metodologia

A aprendizagem coletiva inserida na cultura digital contempla o paradigma da complexidade, o qual prima pela integração dos saberes escolares e que tem incorporada a ideia de que as tecnologias digitais estão na vida cotidiana e, portanto, incluem a vivência escolar. Para apropriar-se da cultura digital em ambiente escolar é necessário implementar uma metodologia dialogada com os estudantes, tendo como concepção de aprendizagem e de avaliação do conhecimento a ação dos estudantes em diversos meios/espaços/ambientes.

Para Hoffman e Fagundes (2008), a cultura é a representação das manifestações humanas; aquilo que é aprendido e partilhado pelos indivíduos de um determinado grupo, sendo a cultura digital a cibercultura que sintetiza a relação entre sociedade contemporânea e tecnologias da informação.

O paradigma atual é o da complexidade, de Morin (2000), que tem em sua consistência a mudança que é o foco da cibercultura. Tais conceituações se integram e colaboram com o processo de compreensão do contexto do estudante de hoje, que é da geração Z. A ideia de movimento presente na vontade e na curiosidade dos estudantes com as tecnologias digitais dinâmicas é decorrente destes viverem numa cultura digital e pensarem de forma complexa.

O espaço da cibercultura é um convite permanente e aberto à experiência de autoria, e não é apenas o que se faz na rede ou usando computadores, é a forma como se trata a produção intelectual, que cada vez mais trata tudo de forma interativa. Porém, é destacado com os estudantes para se ter cuidado com a "preguiça virtual", plágio e vício com a internet, segundo Barros e Moraes (2011), pois navegar na rede já é uma forma e um meio de aprender devido à associação entre a pesquisa colaborativa e a aprendizagem cooperativa; nesse sentido, é preciso ter todo um conjunto de valores e ética.

Conforme Piaget (1973), o fazer é determinante na ação cooperativa, unindo a ação com a ideia de cibercultura. As tecnologias digitais em rede não mudam a escola sozinhas, mas o que fazer com estas tecnologias e o que decidir e agir com as mesmas é que faz a mudança. Um exemplo de produção coletiva da cibercultura é o desenvolvimento do espaço de aprendizagem digital da Matemática, que foi construído por uma equipe multidisciplinar, e que trabalha colaborativa e ora cooperativamente, constituindo um processo de aprendizagem coletiva. Nesse processo de aprendizagem coletiva surge a interatividade, que novamente demonstra que é urgente mudar a formação da escola para proporcionar aos estudantes o direito de aprender.

Interatividade é a dinâmica adotada pelos estudantes, seja em locais presenciais ou online para se comunicarem e/ou fazer alguma atividade, segundo a definição dos próprios estudantes do estudo de caso, que são do 1° e 2° ano do ensino médio integrado em informática do IFRS-Campus Osório, de 2011 e 2012. Além disso, os mesmos criaram uma representação deste conceito como demonstra a figura 1.

Figura1: Representação de Interatividade para os Estudantes.

Para Lemos (2000), interatividade é um caso específico de interação; e a interatividade digital é compreendida como um tipo de relação tecno-social, ou seja, como um diálogo entre homem e máquina, através de interfaces gráficas, em tempo real. Ainda, interatividade é a abertura para mais e mais comunicação, mais e mais trocas, mais e mais participação, ou seja, segundo Silva (1999, p.155), é a disponibilização consciente de uma mais comunicação de modo expressivamente complexo, e, ao mesmo tempo, atentando para as interações existentes e promovendo mais e melhores interações – seja entre usuário e tecnologias comunicacionais (hipertextuais ou não), seja nas relações (presenciais ou virtuais) entre seres humanos. Essa ideia de um "mais comunicacional" pode e deve ocorrer em todas as formas de relação, sejam elas presenciais ou não, estejam elas utilizando tecnologias hipertextuais ou não, visto que essa predisposição é inerente ao ser humano.

Os registros no *Facebook* se enquadraram perfeitamente na conceituação de espaço de aprendizagem digital da Matemática no processo de construção dos conceitos de funções polinomiais, e geometria plana e espacial, inclusive no período de férias escolares. É importante destacar que espaço de aprendizagem digital é diferente de comunidade virtual de aprendizagem, que difere de rede social na sua forma geral de uso, devido a grande importância da concepção pedagógica, ou seja, da ação docente do professor junto aos e com os estudantes. De acordo com Peters (2009), um espaço virtual passa a ser um espaço de aprendizagem com a condição de ser suportado por uma concepção pedagógica e é nesse sentido que o *Facebook* pode se constituir em um espaço de aprendizagem digital.

Importante destacar que o *Twitter* criado pelos estudantes, de acordo com a figura 2, a seguir, não contempla a definição de espaço de aprendizagem digital, e não é de fácil organização para estudos dos estudantes, assim as regras não ficam claras e a autonomia dos estudantes fica complicada em relação às postagens com marcações de tempo. Mesmo assim, os estudantes usaram este espaço para trocar algumas ideias muito rápidas devido ao número reduzido de caracteres que normalmente fazem referência às ações do *Facebook*, logo, o Twitter pode ser entendido como mais um complemento atrativo para os estudantes se comunicarem apenas.

Figura 2: *Print Sreen* do *Twitter* da turma criado pelos estudantes em 2012.

O ciberespaço possui diversas definições que variam de acordo com os autores, e o mesmo ocorre com a expressão "comunidades virtuais". Para Lévy (1999, p.127), uma comunidade virtual "é um grupo de pessoas se correspondendo mutuamente por meio de computadores interconectados" que se constrói sobre "afinidades de interesses, de conhecimentos, sobre projetos mútuos, por meio de cooperação ou de troca, independentemente das proximidades geográficas e das filiações institucionais". Assim, temos a diferença entre rede e comunidade, segundo o foco das relações e os laços entre as pessoas no contexto, em que a ideia de rede é uma ampliação da ideia de comunidade. Para Bauman (2003), na comunidade as pessoas têm mais compromisso umas com as outras, por conta do estreitamento de laços.

Nas redes, no entanto, os laços seriam menos rígidos pelas próprias características das redes que são: a abertura, a fluidez com que as pessoas se agregam e se desligam, havendo, portanto, um compromisso menor entre os participantes. Assim, pretende-se com este estudo demonstrar que há muitos espaços atrativos aos estudantes para aprender a aprender Matemática sob a forma cooperativa, e, ao mesmo tempo, apropriando-se dos recursos digitais.

A figura 3 aponta a barra de ferramentas do recurso *Facebook* adota pelos estudantes nas férias para estudar Matemática. Participaram estudantes do 1° e do 2° ano do ensino médio integrado em Informática do IFRS - Campus Osório, sendo uma turma de cada série para 2012, com resultados de 2011. Em 2011, aproximadamente 56 estudantes participaram, e em 2012, 24 estudantes, pois em 2011 foram apenas os primeiros anos, e em 2012, somente a turma do segundo ano.

Figura 3. *Print Screen* do *Facebook* - Grupo de Estudos - Matemática Alegre - Jan.2012.

Os conceitos de cultura digital e pensamento complexo estão conectados com os de interação, que contempla a ação de interatividade presente na aprendizagem cooperativa, em que todos estão articulados com a ideia de interação presente no espaço de aprendizagem digital, que pode ser uma rede social, diferindo-se de comunidade virtual apenas. O estudo de caso, realizado em 2012 no IFRS - Campus Osório, aplicando-se a proposta de espaço de aprendizagem digital da Matemática e a aprendizagem cooperativa (Bona, Fagundes, Basso, 2011) como elementos atrativos e mobilizadores do aprender a aprender Matemática foi perfeitamente aceita pelos estudantes e estes adotaram a rede social *Facebook* como espaço de aprendizagem digital, inclusive apontando suas demais vantagens, segundo Bona, Fagundes e Basso (2012).

Estudo de caso com o facebook: espaço cooperativo para aprender a aprender matemática

Aplicação da pesquisa

Um problema resolvido pelos estudantes no *Facebook* sobre geometria plana é demonstrado a seguir, com a finalidade de apontar claramente a apropriação dos estudantes quando ao espaço digital e quando à forma de aprendizagem cooperativa. Além disso, há o objetivo de demonstrar a construção dos conceitos de Matemática pelos estudantes. O problema postado pelo grupo de estudantes que se reuniu via *chat* para resolver é parte de uma lista de exercícios que a professora propôs para estes estudarem sobre geometria plana; no entanto, estas atividades não foram avaliadas com nota, contabilizaram apenas para estudo. A dinâmica adotada pelos estudantes no *Facebook* é geralmente assim: um estudante ou um grupo 'posta' um problema ou atividade e os demais colegas interagem, e esta interação pode ser apenas de colaboração, como fazer uma parte da resolução e não se envolver até o fim; e/ou de cooperação, que é o apontado na figura 4, em que os estudantes estão operando por correspondência, complementariedade, e/ou por reciprocidade, segundo Piaget (1973).

Ao operar por cooperação, se verifica a ação da abstração reflexionante, que dispõe de dois elementos essenciais, segundo Piaget (1977): o reflexionamento, que é a projeção daquilo que foi retirado de um patamar inferior sobre um patamar superior; e a reflexão, que pode ser compreendida como o ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior do que foi transferido a partir do inferior. De forma muito sintética, seria a compreensão de cada passo na resolução de um problema de Matemática, mas não de forma decorada, e sim sabendo justificar cada passo, identificando, inclusive, que há outras formas possíveis de resolver, adotando-se outros passos que resultariam em igual resultado.

Figura 4 : *Print Screen* do *Facebook* com um problema de geometria plana.

Na figura 4, observa-se, primeiramente, que os estudantes são identificados pelas iniciais de seus nomes, pois há um termo de consentimento assinado pelos responsáveis de cada um dos estudantes participantes que garante a preservação de sua identificação ao longo da pesquisa. A primeira interação de Jo com J é identificada como sendo de cooperação por complementaridade, assim como G com J, mas tanto Jo como G estão também agindo por correspondência com J. Na segunda interação de J, é possível constatar que esta conclui o problema de Matemática valendo-se do que os colegas Jo e G fizeram, sendo então uma cooperação por complementaridade e correspondência.

O estudante P, que segue esta postagem com comentários, aponta que fez diferente dos colegas e achou o mesmo resultado, e este mostra matematicamente como fez, e na sequência a estudante J concorda com a solução de P, e Jo diz: "*eu entendo as duas resoluções mas gosto mais da que fiz com J* e *G*". Estas diferentes resoluções para o mesmo problema de Matemática são compreendidas por todos os estudantes e isto constitui-se como um operar cooperativamente por reciprocidade. Cabe destacar que se fez um recorte no *print screen* da resolução, devido à limitação de páginas deste artigo.

A última postagem da estudante J evidencia que aprender é legal, ou seja, a estudante foi questionada sobre como um problema pode ser bonitinho e esta disse: "*Sora, é legal qdo fica td bem certo,* e *qdo conseguimos explicar c/palavras q ferramenta da Matemática vamos usar* e *depois calculamos* e *dá certo, é +tri ainda é qdo fizemos c/os colegas q tb pensam como a gente, entende? E não esquecemos de nada, nem unidade, logo aprender é divertido* e *alegre, como demos o nome ao grupo no Facebook nas férias, tá ligada?*".

A linguagem adotada pelos estudantes, no uso do "internetês" adotado para se comunicarem entre si e com a professora, e a forma como escrevem os sinais da Matemática são elementos importantes presentes na cultura digital destes estudantes, e contemplam a lógica do paradigma da complexidade de que o conhecimento é efetivamente diferenciado entre os grupos de pessoas no tempo, e também a autoria, a expressão e a comunicação são ações que ocorreram nem que para isso se precise escrever "pi" se não existe o sinal no *Facebook*. Paralelamente, se observa que a linguagem dos recursos digitais é trazida para o espaço *Facebook* da Matemática, como representação das operações. Um exemplo é a representação da multiplicação, expressa pelo asterisco na figura anterior. São muitas as apropriações que os estudantes fazem de forma natural e sabem explicar todas as suas ações no *Facebook* quando questionados pela professora, seja via *chat* ou presencial, ou também pelos colegas. Uma observação apropriada quanto a palavra "internetês" é o dialeto co-construído contextualmente entre os usuários da internet com o objetivo de otimizar a comunicação online.

Considerações finais

Em todo este processo de aprendizagem dos estudantes no espaço digital do *Facebook,* se evidencia que a autonomia dos estudantes é fundamental ao aprender a aprender, pois se estes não estiverem envolvidos com as atividades, com o espaço e com os colegas, não irão participar do espaço. Paralelamente, a responsabilização pelo processo cooperativo de cada um inserido no grupo e pela sua aprendizagem de cada conceito de Matemática é condição para que este trabalho também seja bem sucedido. Se os estudantes não se responsabilizarem que o aprender de cada um depende de estudo, pesquisa e das ações destes com as informações e comunicações, não haverá aprendizagem, já que ninguém aprende quando não quer.

A autonomia e a responsabilidade de cada estudante sobre seu processo de aprendizagem permite, junto com o espaço de aprendizagem digital, a aprendizagem cooperativa para a construção de conceitos de Matemática.

A metodologia de trabalho da professora com os estudantes neste espaço digital é dialogada e colaborativa, segundo Barbier (2004), mas para este autor, em certos momentos, é cooperativa, pois tendo como método de pesquisa uma forma colaborativa que é a pesquisa-ação, ocorrem ações entre a professora e estudantes em que ambos estão operando em comum, ou seja, não há uma divisão de atividades e nem uma distinção de patamar. Um exemplo disso é quando a professora chama um estudante do grupo do *Facebook* para pedir ajuda no uso do recurso *Paint*. Neste ambiente, os estudantes constroem o conhecimento paralelamente com a professora, cada qual em sua casa, para identificar a dúvida dela, mesmo que o desenho que a mesma deseja fazer seja algo que ela domine conceitualmente em termos de Matemática. A adequação da conceituação de Matemática e do uso dos recursos digitais, muitas vezes, ocorrem simultaneamente entre estudantes e a professora. Assim, a metodologia de pesquisa-ação, de Barbier (2004), proporciona, além de um método de trabalho colaborativo ao pesquisador, que necessita de um método de sala de aula dialogado, um processo de aprendizagem cooperativo em inúmeros momentos da pesquisa.

Enfim, este artigo cumpre seus objetivos de: discutir conceitos importantes para a área da Informática na Educação Matemática, segundo Fiorentini e Lorenzato (2007), e apontar bons resultados como a necessidade da articulação destes conceitos na vida escolar; a definição de interatividade e de espaço de aprendizagem digital articulado à aprendizagem cooperativa – e, deste conjunto, a apropriação da rede social *Facebook* como um espaço digital para aprender a aprender Matemática cooperativamente; a verificação efetiva da construção dos conceitos de Matemática no espaço digital de aprendizagem. A partir disso, é possível analisar, em pesquisas futuras, como serás a avaliação destes conceitos no espaço *Facebook*?

Referências bibliográficas

Barbier, R. (2004). *A Pesquisa-Ação.* Tradução de Lucie Didio. Brasília:Liber Livro Editora.

Bauman, Z. (2003). *Comunidade:* a busca por segurança no mundo atual. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor.

Barros, S.D.P.S.e Moraes, U.C. (2011). *O uso legal da Internet: Ética e valores para jovens da era digital.* São Paulo: Mackenzie.

Bona, A. S. D. (2010). *Portfólio de Matemática:* um instrumento de análise do processo de aprendizagem. Dissertação, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Brasil.

Bona, A.S.D., Fagundes, L.C. e Basso, M.V.A. (2011). A cooperação e/ou a colaboração no Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática. *Revista Novas Tecnologias na Educação,* 9 (2),1-11.

Bona, A.S.D.; Fagundes, L.C.e Basso, M.V.A. (2012). Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática: o aprender a aprender por cooperação. *Anais da 26 RELME - Reunião Latino-Americana de Educação Matemática* - Comunicação Científica, Belo Horizonte, Minas Gerais.

Hoffann, D. S. e Fagundes, L. C. (2008). Cultura Digital na Escola ou Escola na Cultura Digital? *RENOTE:Revista Novas Tecnologias na Educação, 6*(1), 1-10.

Lévy, P. (1999). *Cibercultura.* São Paulo: Editora 34.

Fiorentini, D.; Lorenzato, S. (2007). *Investigação em educação matemática:* percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados.

Lemos, A. (2000). *Anjos interativos* e *retribalização do mundo:* Sobre interatividade e interafaces digitais.

Morin, E. (2000). *A cabeça bem-feita:* repensar a reforma, reformar o pensamento. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Peters, O. (2009). *A educação à distância em transição.* São Leopoldo: Unisinos.

Piaget, J. (1973). *Estudos Sociológicos.* Rio de Janeiro: Forense.

Piaget, J. (1977). *Abstração Reflexionante***:** relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artmed.

Silva, M. (1999). Um convite à interatividade e à complexidade: novas perspectivas comunicacionais para a sala de aula. Gonçalves, Maria Alice Rezende (Org.). *Educação e cultura: pensando em cidadania.* Rio de Janeiro: Quartet.

ENSEÑAR MATEMÁTICA: UN RETO EN EL NUEVO PARADIGMA TECNOLÓGICO

Agustin De la Villa[1], Alejandro Lois[2], Liliana Milevicich[2], Gerardo Rodrígez Sánchez[3]
[1]Universidad Pontificia Comillas, Escuela Técnica Superior de Ingeniería ICAI España
[2]Escuela Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco Argentina
[3]Escuela Politécnica Superior Zamora, Universidad de Salamanca España
avilla@dmc.icai.upcomillas.es, alelois@hotmail.com, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, gerardo@usal.es

Resumen. Focalizados en la teoría de Situaciones Didácticas, hemos realizado un taller con el propósito de analizar aquellos elementos que concurren para enseñar en situaciones didácticas caracterizadas por los nuevos entornos tecnológicos y de brindar respuestas sobre los modos de abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la Enseñanza Superior, a través de la selección y utilización de programas de uso simbólico más adecuado en cada caso. Los propósitos de este trabajo son: a) analizar las características de nuevos modelos adecuados de intervención didáctica sustentados en nuevos recursos tecnológicos y la transformación en los modos de apropiación del conocimiento, por parte de los alumnos, b) explorar propuestas didácticas para la enseñanza de la Matemática en la enseñanza Superior, a través del material de estudio diseñado sobre diferentes recursos tecnológicos.

Palabras clave: CAS – teoría de situaciones didácticas – recursos tecnológicos

Abstract. Focused on the Didactic Situations Theory, we held a workshop in order to analyze everything that attends to teach in teaching situations characterized by new technological environments and provide answers on ways to address the teaching and learning Mathematics in Higher Education, through the selection and use of more appropriate CAS in each case. The purposes of this work are: a) analyze the characteristics of new suitable educational intervention models supported by new technological resources and the way students learn, b) exploring teaching suggestions for teaching Mathematics in higher education through technological resources study material.

Key words: CAS - didactic situations theory - technological resources

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de CAS (Computer Algebra System) ha tenido un crecimiento exponencial, especialmente en el nivel superior, donde se cuenta, en la actualidad, con la participación activa de un número significativo de profesores que comenzaron a emplear los nuevos recursos para la enseñanza de las matemáticas.

Estamos viviendo las primeras fases de una revolución educativa, aunque, como señalan Benavides y Pedró (2007), se necesita mucha más investigación acerca de los nuevos modelos pedagógicos y de las condiciones bajo las cuales profesores y alumnos encuentran más incentivos para adoptar estrategias que contribuyan a:

a) el desarrollo de modelos adecuados de intervención didáctica,

b) la transformación del rol del docente,

c) la transformación en los modos de apropiación del conocimiento por parte de los alumnos (Milevicich y Lois, 2008).

Desde la perspectiva anteriormente planteada, adoptamos la teoría de Situaciones Didácticas como marco para el estudio de los nuevos entornos tecnológicos y las características de los procesos de enseñanza y aprendizaje que allí tienen lugar.

Brousseau define situación didáctica como:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución"(Brousseau, 1986, p. 35).

La situación didáctica debe crear la necesidad de que el alumno se apropie del conocimiento, pero al mismo tiempo, no debe conducirlo; pues si la respuesta se debe exclusivamente a las virtudes de la situación, entonces nada se debe a las "*virtudes*" o esfuerzo del alumno. Parafraseando al autor, la didáctica no consiste en ofrecer un modelo para la enseñanza, sino en producir un campo de cuestiones que permita poner a prueba cualquier situación de enseñanza, corregir o mejorar las que se han producido y formular interrogantes sobre lo que sucede (Brousseau, 1998).

En ese sentido, la teoría de las situaciones puede concebirse como un recurso privilegiado, tanto para comprender lo que hacen los profesores, como para producir problemas o actividades adaptadas a los saberes, a los alumnos y al medio.

Focalizados en la teoría de *Situaciones Didácticas*, hemos realizado un taller con el propósito de analizar aquellos elementos que concurren para enseñarle al alumno en situaciones didácticas caracterizadas por los nuevos entornos tecnológicos y de brindar a los docentes participantes, respuestas sobre los modos de abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la Enseñanza Superior, a través de la selección y utilización del CAS más adecuado en cada caso.

Específicamente, a través del presente trabajo se pretende:

❖ Analizar las características de nuevos modelos adecuados de intervención didáctica sustentados en nuevos recursos tecnológicos y la transformación en los modos de apropiación del conocimiento, por parte de los alumnos (de la Villa, 2010; Milevicich y Lois, 2010).

- Explorar propuestas didácticas para la enseñanza de la Matemática en la enseñanza Superior, a través del material de estudio diseñado sobre diferentes recursos tecnológicos, (Alonso *et al*., 2001; García, García, Rodríguez, Rodríguez y de la Villa, 2009, 2010; de la Villa, 2010)

Desarrollo

El presente trabajo tiene su origen en el taller dictado durante RELME 26, del cual conservamos su nombre. El mismo estuvo centrado en diferentes presentaciones y posteriores análisis, referidas al uso de los *programas de cálculo simbólico* (CAS) dentro de los cursos de nivel superior, mediante el uso de material electrónico basado en las producciones (libros, artículos científicos, etc) que, a lo largo de más de 20 años, los autores han desarrollado dentro de diferentes Proyectos de Investigación Educativa.

La utilización de los distintos CAS en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las Escuelas de Ingeniería tiene, como es natural, ventajas e inconvenientes.

Podemos resumir las ventajas de la utilización de estos recursos tecnológicos de la siguiente forma:

- Libera del trabajo rutinario de cálculo.
- Contribuye a la comprensión, a partir de la exploración de conceptos y propiedades (de manera visual o numérica)
- Posibilita la implementación de distintos algoritmos, independientemente de que sean largos o engorrosos.
- Permite el modelado eficaz de problemas físicos, económicos y técnicos de la vida real.
- Permite la simulación de diferentes fenómenos.
- Fomenta el espíritu crítico.

En cuanto a las desventajas, creemos que las que merecen más atención, son:

- El uso de los CAS puede suponer una pérdida de la habilidad y destreza en los cálculos manuales (Milevicich, 2012).
- Los CAS pueden hacer olvidar la necesidad de analizar críticamente los resultados obtenidos. Existe una colección de resultados inesperados que pueden presentarse en situaciones cotidianas y que deben alertar a nuestros alumnos sobre el peligro de aceptar sin más el resultado proporcionado por la máquina (Milevicich, 2012).

En ese sentido, la propuesta pretende contribuir a reforzar las ventajas y disminuir los inconvenientes.

Durante el desarrollo del taller se analizaron varios ejemplos vinculados a diferentes situaciones didácticas. Por una parte, los resultados incorrectos que devuelven algunos CAS, originados frecuentemente en un número limitado de interacciones, requieren de los alumnos un análisis profundo sobre los conceptos puestos en juego a la hora de resolver el problema. Por la otra, el caso de la devolución de resultados inesperados, también requiere un análisis profundo.

Una situación didáctica construida ex profeso con el propósito de que los alumnos realicen un análisis previo para determinar si la función es integrable, previo al estudio de la convergencia de las integrales impropias, consiste en proponer el cálculo de una integral definida para una función discontinua en el intervalo de integración, tal como se observa en la figura 1.

Sadovsky (2005) sostiene la posibilidad de una devolución a través de un retorno reflexivo sobre las acciones desplegadas a raíz de los problemas propuestos para configurar la situación a-didáctica, para aquellos alumnos que han funcionado de manera no científica frente a dichos problemas. Tal es el caso de los alumnos que intentan resolver mecánicamente las integrales, prestando sólo atención a los procesos algebraicos.

Retomando el problema, es oportuno proponer los límites de integración como variable didáctica. De ese modo la función puede resultar o no integrable dependiendo del intervalo en cuestión.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)\,\hat{}\,2}\,dx$$

Integrate::idiv : Integral of $\frac{1}{(-1+x)^2}$ does not converge on $\{0, 2\}$.

Figura 1.Resultado proporcionado por el CAS Mathematica® versión 4.0 o superior

Algunos ejemplos presentados en el taller requieren un trabajo más dedicado. Debido a las limitaciones en el número de páginas del presente documento, presentamos sólo dos de ellos.

Problema 1

Encuentre los extremos de la función $f(x,y)=x^3+y^3$ *sobre la circunferencia* $x^2+y^2=1$

La estrategia consiste en llevar a cabo la secuencia de resolución de problema comenzando por definir la función de dos variables, la restricción y la función que vincula ambas fórmulas, tal como se observa en la figura 2.

```
Definición de la función y de la restricción

f[x_, y_] := x^3 + y^3;
const = x^2 + y^2 - 1;

F[x_, y_] := f[x, y] + λ*const
```

Figura 2. Definición de los elementos requeridos para la resolución del problema mediante el CAS Mathematica® versión 4.0 o superior

Aquí es necesario que el alumno tenga presente la base geométrica del método Multiplicadores de Lagrange. Esto es: se deberán buscar los valores extremos de f(x,y) cuando el punto (x,y) está restringido a encontrarse en la curva de nivel dada por la circunferencia de centro (0,0) y radio 1.

Se debe tener presente que los vectores gradientes a las curvas de nivel respecto de f(x,y) y respecto de la función restricción son paralelos. Este concepto es necesario para definir f. En los términos de la teoría de Brousseau, el uso de restricciones en el problema favorece las *interacciones efectivas* del sujeto con los conceptos teóricos.

Luego, es conveniente un análisis gráfico a efectos de inspeccionar las características de la superficie y de la restricción (figura 3).

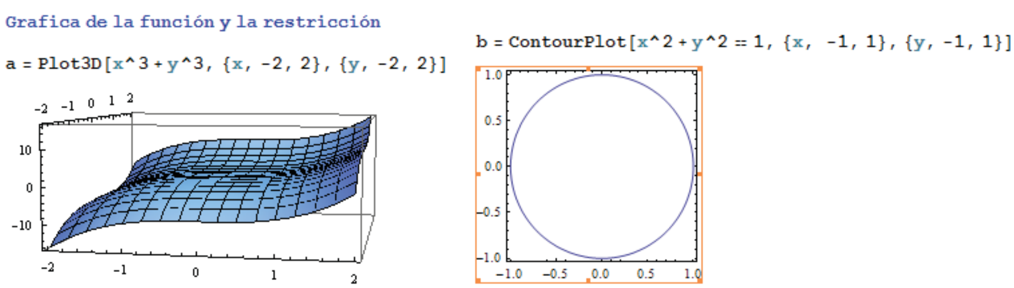


Figura 3. Gráfica de f(x,y) y la restricción sobre los puntos críticos proporcionados por Mathematica® versión 4.0 o superior.

La siguiente etapa consiste en obtener las derivadas parciales y la determinación de los puntos críticos (figura 4). Como se puede observar, el CAS devuelve 6 puntos críticos.

Determinación de los puntos críticos

```
Solve[{Fx == 0, Fy == 0, const == 0}, {x, y, λ}]
```

$$\left\{\left\{\lambda\to-\frac{3}{2},\ x\to 0,\ y\to 1\right\},\ \left\{\lambda\to-\frac{3}{2},\ x\to 1,\ y\to 0\right\},\ \left\{\lambda\to\frac{3}{2},\ x\to -1,\ y\to 0\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\lambda\to\frac{3}{2},\ x\to 0,\ y\to -1\right\},\ \left\{\lambda\to-\frac{3}{2\sqrt{2}},\ x\to\frac{1}{\sqrt{2}},\ y\to\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ \left\{\lambda\to\frac{3}{2\sqrt{2}},\ x\to-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y\to-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

Figura 4. Puntos críticos encontrados con el CAS Mathematica® versión 4.0 o superior

Resulta necesario clasificar dichos puntos críticos.

Los valores extremos de f corresponden a las curvas de nivel tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 1$ La existencia de máximos y mínimos para la función se sustenta en el teorema de existencia de los valores extremos absolutos dado que f es una función continua sobre un dominio cerrado y acotado. Aquí el carácter de necesidad del conocimiento juega un papel fundamental al momento de justificar la existencia de máximos y mínimos y su vinculación con los puntos críticos encontrados.

Finalmente la evaluación de tales puntos permiten concluir que f(0,1) y f(1,0) corresponden a máximos locales de la función y f(-1,0) y f(0,-1) corresponden a mínimos locales de la función. Recordemos que no se ha realizado un análisis en el interior del dominio debido a los requerimientos del problema.

Evaluación de los puntos críticos

$$\left\{f[0,1],\ f[1,0],\ f[-1,0],\ f[0,-1],\ f\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right],\ f\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right\}$$

$$\left\{1,\ 1,\ -1,\ -1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

Figura 5. Evaluación de los puntos críticos en la función original

Problema 2

Encuentre el volumen encerrado entre las superficies $x^2 + y^2 = r^2$ *y* $y^2 + z^2 = r^2$

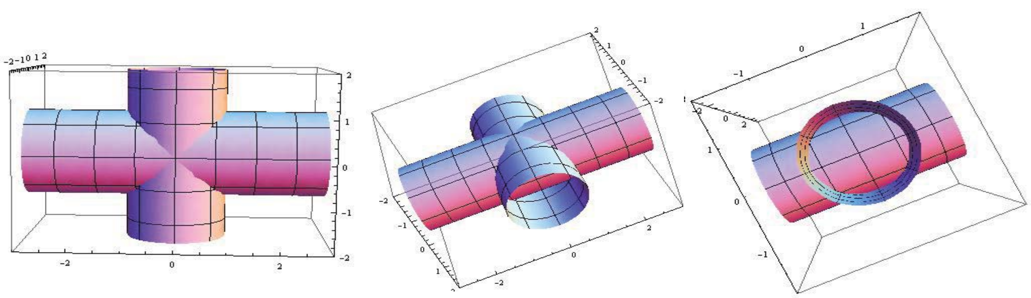


Figura 6. Distintos puntos de vista de las superficies

Esta situación didáctica fue construida para que los alumnos logren identificar la intersección entre dos sólidos sencillos (tal es caso de dos cilindros paralelos a los ejes coordenados), expresen el problema adecuadamente mediante integrales dobles y calculen el volumen. Es esencial la manipulación del gráfico (ver figura 6), de tal modo que los distintos puntos de vista permitan identificar el sólido intersección entre ambos cilindros. La figura 7 muestra un sólido limitado por –r y r (se reemplazó numéricamente r = 1 a los efectos de producir los gráficos).

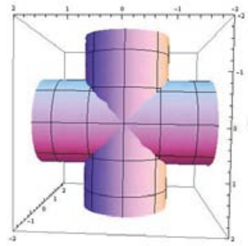


Figura 7. Gráfica de la intersección entre las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$

Si se tiene en cuenta la simetría del sólido respecto del origen de coordenadas, se puede plantear el problema de manera más sencilla y el volumen es 8 veces el obtenido en el primer octante (ver figura 8)

$$\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^\wedge 2 - y^\wedge 2}} \sqrt{r^\wedge 2 - y^\wedge 2}\, dx\, dy$$

$$\frac{2\, r^3}{3}$$

Figura 8. Resolución analítica del problema utilizando Mathematica® versión 4.0 o superior

Es posible modificar la variable didáctica referida al sistema de coordenadas y solicitar la resolución del problema en coordenadas polares, con el propósito de transformar la integral en otra más sencilla de resolver.

Conclusiones

Retomando los principios de la Teoría de Brousseau, el *saber* se estructura y organiza a partir de sucesivas interpelaciones, generalizaciones, puestas a punto, interrelaciones y descontextualizaciones de las elaboraciones que son producto de situaciones específicas. En ese sentido, el uso de un CAS es decisivo.

La selección del CAS más adecuado, de acuerdo a la materia, unidad y tema que se está estudiando, debe ser responsabilidad del docente, competente en el uso de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Es importante fomentar en los alumnos la elaboración de sus propias cajas de herramientas en los distintos CAS para ser utilizadas dentro de sus tareas matemáticas.

La necesidad de los conocimientos para resolver una situación que sólo puede ser dominada adecuadamente mediante la puesta en práctica de los conocimientos o práctica que se pretende está vinculada a la situación didáctica propuesta y a la selección de las variables didácticas adecuadas. El uso de un CAS nuevamente juega un papel decisivo: en la configuración de la situación y en la modificación de las condiciones para provocar un cambio de estrategia en el alumno y que pueda llegar al saber deseado.

Referencias bibliográficas

Alonso, F, García, A, García, F, Hoya, S, Rodriguez, G, de la Villa, A (2001) Some unexpected results using computer algebra systems. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, *8 (3),* 239-252.

Benavides, F Y Pedró, F (2007) Políticas educativas sobre Nuevas tecnologías en los países iberoamericanos. *Revista Iberoamericana de Educación, 45,* 19-69

Brousseau, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques,* (Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega). UNC, Córdoba, *7 (2),* 33-115.

Brousseau, G. (1998) Los diferentes roles del maestro. En C. Parra, C. y I. Saiz, I. comps.), *Didáctica de matemáticas – Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

de la Villa, A. (2010) *Problemas de Álgebra.* Madrid: CLAGSA.

García, A., García, F., Rodríguez, G., Rodríguez, V., de la Villa, A. (2009) A toolbox with DERIVE*, Proceedings of ACA 2009, 15th International Conference on Application of Computer Algebra,* Montreal, Canada.

García, A., García, F., Rodríguez, G., Rodríguez, V., de la Villa, A. (2010) Una caja informática de herramientas matemáticas. *Revista de la Sociedad Puig Adam de profesores de Matemáticas*, *84*, 52-62.

Milevicich, L. Y Lois, A. (2008). E-multimedia test to explore the backgroud of students, *Sixth Conference of European Research in Mathematics Education.*

Recuperado el 6/12/2008 de: http:// educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/actes-en-ligne/wg7-c.pdf

Milevicich, L. Y Lois, A. (2010) La incorporación de la educación a distancia a la enseñanza superior de la matemática. Elementos a favor y en contra. *Congreso Mundial de Ingeniería 2010,* Buenos Aires, 17 al 20 de octubre de 2010.

M*ilevicich*, L. (2012) Enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. Una propuesta para cursos iniciales en la universidad. Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española. Sadovsky, P. (2005), La Teoría las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar en la enseñanza de la matemática, en Alagia H. Y Otros, *Reflexiones para la Educación Matemática,* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

LA REVOLUCIÓN TECNOLÓGICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: EL NUEVO PARADIGMA.

¿ES UNA OPORTUNIDAD DE CAMBIO O UN SIMPLE ENGAÑO?

Agustín de la Villa, Alejandro Lois, Liliana Milevicich Gerardo Rodríguez Sánchez
Universidad Pontificia Comillas. Escuela Técnica Superior de Ingeniería ICAI. Madrid España
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco Argentina
Escuela Politécnica Superior de Zamora.Universidad de Salamanca España
avilla@dmc.icai.upcomillas.es, alelois@hotmail.com, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, gerardo@usal.es

Resumen. Sobre la base de las experiencias de los Grupos de Discusión desarrollados en dos encuentros anteriores (RELME 23 y RELME 24) y en el marco de los Convenios de cooperación entre la Universidad Pontificia Comillas y Universidad de Salamanca de España, por una parte, y la Universidad Tecnológica Nacional, de Argentina, por la otra; en este nuevo encuentro, y en consonancia con los objetivos de la RELME 26 desarrollamos un curso corto que contribuya con el análisis y evaluación: a) del impacto de las nuevas tecnologías en la enseñanza superior, b) de los cambios que se están operando en las universidades, c) de los cambios en la enseñanza superior de la Matemática, d) de la inserción de los recursos tecnológicos en las cátedras.

Palabras clave: TIC – enseñanza superior – matemática –EEES – EIES

Abstract. Based on the experiences of the Discussion Groups developed in two previous meetings (RELME 23 and RELME 24) and in the framework of the cooperation agreements between the Pontificia Comillas University and Salamanca University in Spain, on the one hand, and Tecnológica Nacional University, Argentina, on the other; in this new event, and consistent with the objectives of the RELME 26, we developed a short course to help with the analysis and evaluation about: a) the impact of new technologies in higher education , b) the changes that are taking place in universities, c) the changes in Mathematics higher education, d) the integration of technology resources in the subjects.

Key words: ICT – higher education – mathematics – EEES – EIES

Introducción

El presente trabajo se funda en el Curso Corto desarrollado durante la RELME 26, con el propósito de contribuir con el análisis y evaluación:

- *del impacto de las nuevas tecnologías en la enseñanza superior,*
- *de los cambios que se están operando en las universidades,*
- *de los cambios en la enseñanza superior de la Matemática,*
- *de la inserción de los recursos tecnológicos en las cátedras.*

El impacto de las nuevas tecnologías

La irrupción de las nuevas tecnologías ha supuesto un cambio muy importante en la labor profesional de docentes e investigadores de todos los niveles educativos. Con independencia de la mayor o menor frecuencia en el uso de los recursos tecnológicos en los diferentes países, es innegable que la aparición de los ordenadores y su difusión masiva, de los primeros CAS y de los gestores de contenidos, junto con el imparable desarrollo social de Internet, han llenado los diferentes niveles educativos de nuevas palabras que son de uso cotidiano en la actualidad: e-learning, b-learning, acción tutorial on-line, blogs educativos, etc. (UNESCO, 2008; Tünnermann, 2008).

La primera parte del documento estará destinada a revisar de manera breve esta historia y su incidencia en los entornos educativos

Nuevos tiempos en la enseñanza universitaria: ¿Caminamos hacia un espacio mundial de enseñanza superior?

Es evidente que se están operando cambios en la forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje en los niveles universitarios (Facundo, 2005). Poco a poco se abre paso la idea de que ya no es posible enseñar en las universidades de la misma forma en que se hacía en la década de los sesenta del siglo pasado. Facundo (2005) cita las modificaciones en la normativa, los contenidos y hasta la metodología de la enseñanza universitaria. Un caso interesante es el modelo español, donde los cambios normativos tras la Declaración de Bolonia y la creación del Espacio Europeo de Enseñanza Superior (EEES), han supuesto un terremoto epistemológico, es decir: *la enseñanza universitaria debe estar centrada en el alumno y debe ser una enseñanza basada en la adquisición de diferentes competencias por parte del alumno*. Las directivas actuales ponen el acento, fuertemente, en cambiar el modo de enseñar: de la enseñanza basada en contenidos donde, por ejemplo, los teoremas, corolarios, etc. era lo más importante, hay que ir a una enseñanza basada en competencias, tanto competencias generales, que deben impregnar todas las materias de una titulación tales como la capacidad para trabajar en grupo, el autoaprendizaje, capacidad de comunicación, etc. como competencias específicas tales como la capacidad de aplicar los conceptos matemáticos a la modelización de problemas de ingeniería (García, García, Rodríguez y de la Villa, 2010).

En mayor o menor medida, estas reflexiones se van imponiendo con diferentes ritmos en los distintos países. Y además, empieza a ser frecuente la tendencia a agrupaciones supranacionales en el ámbito educativo. Con la creación del EEES empieza a hablarse a ambos lados del Atlántico de la conveniencia de crear o no un Espacio Iberoamericano de Educación Superior (EIES) que permita, además, una estrecha colaboración entre los distintos sistemas universitarios (Rodríguez, 2007).

Una segunda parte del curso estará destinada al análisis de estos aspectos: documentos, convenios, normativas y otros elementos que brindan evidencia sobre estos cambios.

Y entonces, ¿qué hacemos con las matemáticas?

La enseñanza de las matemáticas, en particular en las escuelas de ingeniería, no se ha mantenido al margen de todo el proceso comentado anteriormente. En este caso particular, se ha producido un cambio en la selección de contenidos y un cambio metodológico en el que aparecen de manera inevitable nuevos escenarios de aprendizaje. La elaboración de material docente de calidad ha dejado de ser una necesidad como vehículo de la enseñanza presencial para empezar a ser una necesidad en la enseñanza a través de plataformas virtuales (Milevicich y Lois, 2011a). Los alumnos aprenden no sólo en las clases presenciales, sino que la existencia de una potente tecnología educativa, permite la existencia de nuevos escenarios de aprendizaje, trabajando on-line con materiales diseñados de manera personal.

Este nuevo escenario general que, por ejemplo, permite la utilización de los potentes paquetes de cálculo simbólico como herramientas importantes de realización de complejos, tediosos y rutinarios cálculos matemáticos, exige de los profesionales de la educación matemática un análisis profundo de los nuevos retos docentes planteados (Milevicich, 2012)

La tercera parte del trabajo está destinada al análisis del rol docente en el nuevo entorno educativo.

Desarrollo

Desde los tiempos más remotos que registra la historia, las matemáticas han estado presentes. En cuanto el primer homo sapiens tuvo la necesidad de contar, numerar y agrupar los diferentes elementos que constituían su mundo cotidiano, surgió la noción más elemental de las matemáticas.

En las primeras culturas que se desarrollaron sobre la tierra aparecen ya representaciones y sistemas numéricos, conceptos avanzados e instrumentos contables que, con el paso de los siglos, vienen a constituir la base de las matemáticas y de las máquinas más avanzadas de nuestro tiempo.

Pueblos tales como: caldeos, sumerios, babilonios o egipcios utilizaban todos los días números, cuentas, representaciones, procesos matemáticos en sus operaciones más elementales. Los mayas, por ejemplo, inventaron el concepto del cero, principio de un sistema numérico tan complicado y perfecto que les permitió resolver complejísimos problemas matemáticos y astronómicos. Los árabes introdujeron, no sólo el sistema decimal, el más usual de los sistemas numéricos que se utilizan hasta la fecha, sino que aportaron también el álgebra, punto de partida de la trigonometría, el cálculo integral y diferencial y otros tantos procesos matemáticos que constituyen las principales herramientas de los científicos modernos. Los griegos también hicieron grandes descubrimientos y aportaciones en este campo: el concepto de infinito a partir de la concepción euclidiana que permaneció vigente hasta nuestro siglo.

Muchas de estas nociones, que se remontan hasta los tiempos más lejanos de la historia de la humanidad, siguen siendo para nosotros los puntos de partida para efectuar los cálculos y las operaciones matemáticas necesarias para resolver los problemas de nuestra era. Y a la par de estos conceptos, como un complemento natural, fueron surgiendo las diferentes máquinas contables para llevarlos a la práctica. Conforme la humanidad ha ido progresando, efectuando nuevos descubrimientos científicos, geográficos, astronómicos, obviamente ha surgido la necesidad de producir máquinas cada vez más complejas que registren todas estas operaciones.

Algunos autores (Bashe, Johnson, Palmer y Pugh, 1985) sostienen que el éxito alcanzado por la computadora parece ser el resultado de la labor de muchas personas que han tratado de resolver múltiples problemas en diversos campos. En resumidas cuentas: es la consecuencia natural del desempeño de nuestras actividades diarias.

La información es un elemento de primera importancia en la sociedad moderna, caracterizada por miles de millones de datos, que representan los infinitos aspectos de la realidad técnica, económica y social del mundo de hoy. Para conservar, organizar y utilizar la información, el hombre precisa de instrumentos adecuados como los procesadores electrónicos. En ese sentido, la importancia para el hombre de una nueva tecnología, reside en gran medida en su carga innovativa y en su papel de factor de transformación social.

Lo que se espera es que ese proceso evolutivo siga acelerándose, aumentado la disponibilidad de información en espacios más diminutos y procesándolos a velocidades cada vez mayores.

Conviene puntualizar que el procesador electrónico es simplemente una máquina, pero es una máquina que para el hombre ha significado la liberación de los trabajos repetitivos, y que le permite pensar y crear nuevas ideas para expandir su creatividad y su imaginación. Por medio de una técnica de simulación matemática es posible experimentar y valorar todas las consecuencias de una acción futura; por ejemplo, la decisión del hombre o un evento natural, sin tener que correr el riesgo de enfrentarse en realidad a esas consecuencias.

Se puede, por ejemplo, conocer con anticipación si el agua de un río se desbordará cuando las lluvias rebasen un cierto nivel, la actividad sísmica, las condiciones meteorológicas actuales y predecirlas a futuro, los efectos que se podrían producir en la economía de un país con una modificación de tipo fiscal o prever las reacciones de los consumidores ante un nuevo producto que se acaba de lanzar al mercado.

Para poder resolver estos problemas, es necesario realizar un modelo matemático, es decir, una serie compleja de ecuaciones que puedan construir matemáticamente la conexión entre todos los elementos que constituyen e influyen en el fenómeno que estamos estudiando.

En este nuevo contexto surge, entre otras, la pregunta sobre si *la accesibilidad a la nueva tecnología posibilita la incorporación o no del uso de los CAS dentro de la estrategia docente, y más aún: ¿Cuándo y cómo se han de utilizar los CAS en el aula?*

Las tecnologías digitales han sido vistas como elementos catalizadores del cambio pedagógico, que demanda la construcción de nuevos espacios y oportunidades para el aprendizaje, así como la redefinición de los roles de todos los actores que intervienen en el proceso educativo.

Por otra parte, en el contexto de la educación superior existe una convicción generalizada entre docentes e investigadores sobre las dificultades en ofrecer una buena formación universitaria, ya que supone un cambio en los modelos de enseñanza-aprendizaje, en las metodologías, en las formas e instrumentos de evaluación, en el papel del profesor y del estudiante. Todo ello también implica un cambio en el desarrollo de los materiales de aprendizaje, para lo cual se debiera pautar la organización de los contenidos a partir de una labor de equipo interdisciplinaria (Milevicich y Lois, 2011a).

La sociedad actual requiere que nuestros egresados universitarios no sean sólo expertos en una determinada materia, se pretende que hayan desarrollado múltiples habilidades, a la vez que una serie de características y competencias fundamentales tales como la capacidad de resolver problemas, de trabajar en equipo, las habilidades comunicativas, las habilidades para el aprendizaje autónomo y para la toma de decisiones, etc. (Milevicich y Lois, 2011a).

Numerosas publicaciones, investigaciones, actas de congresos y producciones de otros encuentros abordan la problemática de la alfabetización científica. En particular, en la Conferencia Mundial sobre la Ciencia para el siglo XXI, auspiciada por la UNESCO y el

Consejo Internacional para la Ciencia, se declaraba:

> Para que un país esté en condiciones de atender a las necesidades fundamentales de su población, la enseñanza de las ciencias y de la tecnología es un imperativo estratégico. Como parte de esa educación científica y tecnológica, los estudiantes deberían aprender a resolver problemas concretos y a atender a las necesidades de la sociedad, utilizando sus competencias y conocimientos científicos y tecnológicos. (Declaración de Budapest, 1999)

Más aún, frente al cuestionamiento: "¿En qué medida esta mayor atención que se reclama para la tecnología no supone una desviación que perjudica a la formación más 'propiamente científica'"? (Gil Pérez, 1998, p. 6), se han publicado numerosos documentos que explican que el desarrollo científico resultaría imposible sin las aportaciones de la tecnología, y que, en consecuencia, una mayor atención a la tecnología es un requisito para una educación científica de calidad, capaz de favorecer la adquisición significativa de conocimientos científicos, el interés hacia la ciencia y la toma fundamentada de decisiones en diversos contextos.

En particular nos referiremos al Espacio Iberoamericano del Conocimiento, tal como se definió en la XVI Conferencia Iberoamericana de Educación celebrada en Montevideo en 2006. Allí se definió al Espacio Iberoamericano del Conocimiento (EIC) como un ámbito en el cual promover la integración regional y fortalecer y fomentar las interacciones y la cooperación para la generación, difusión y transferencia de los conocimientos sobre la base de la complementariedad y el beneficio mutuo, de manera tal que ello genere una mejora de la calidad y pertinencia de la educación superior, la investigación científica e innovación que fundamente un desarrollo sostenible de la región.

En proyectos recientes como Tuning (González, Wagenaar y Beneitone, 2004), se ha hecho un especial esfuerzo por emplear el término competencia para expresar lo que deberían lograr los estudiantes al término de su formación universitaria. El mismo se refiere a objetivos a largo plazo que debieran ser observables al término de todo un ciclo de enseñanza mediante un conjunto de habilidades y capacidades que las caractericen.

En ese sentido, el proyecto Tuning busca iniciar un debate cuya meta es identificar e intercambiar información, y, mejorar la colaboración entre las instituciones de educación superior para el desarrollo de la calidad, la efectividad y la transparencia.

Uno de los objetivos principales es el de contribuir al desarrollo de titulaciones fácilmente comparables, desde los perfiles buscados para los egresados en forma articulada y en toda América Latina. En la búsqueda de perspectivas que puedan facilitar la movilidad de los poseedores de títulos universitarios en la región, el proyecto trata de alcanzar un amplio consenso a escala regional sobre la forma de entender los títulos desde el punto de vista de las actividades que los poseedores de dichos títulos serían capaces de desempeñar. De esta forma, el punto de partida del proyecto estaría en la búsqueda de puntos de referencia comunes, centrándose en las competencias y en las destrezas, basadas en el conocimiento. (Rodríguez, 2007)

Llegamos de este modo a la tercera y última de nuestras preguntas iniciales: *¿Qué hacemos con las matemáticas?*

Las decisiones y acciones que implica enseñar matemáticas en las Escuelas de Ingeniería a partir de nuevas necesidades donde, por otra parte, seguimos conservando los viejos problemas (formación inicial de los alumnos, mecanismos de evaluación, etc.) están estrechamente vinculadas a las nuevas herramientas. (Milevicich y Lois, 2011b).

Las TIC son vistas por docentes e investigadores como las herramientas pertinentes para cubrir algunas de las asignaturas pendientes tales como la renovación de los contenidos y del sistema de evaluación. Frente a un currículo tradicional en el que la adquisición de conocimientos sigue siendo preponderante, que además es poco flexible y donde el conocimiento continúa organizado en asignaturas y por grados, las TIC se presentan como un medio eficaz para avanzar hacia una redefinición curricular que busca, sobre todo, proveer de las estrategias de análisis y resolución de problemas indispensables hoy en día para los alumnos.

Las tecnologías digitales exigen y facilitan la emergencia de nuevos sistemas de evaluación (de alumnos, de profesores, del propio sistema) más aptos, más justos y que una estrategia pedagógica para el beneficio del evaluado. Un ejemplo de esto son las evaluaciones formativas de los alumnos que consisten en valoraciones personalizadas, permanentes, con diferentes elementos y con una retroalimentación regular que busca hacer énfasis en el reconocimiento, el mérito, y la identificación de las áreas de oportunidad.

En el aspecto metodológico, es destacable el hecho que las TIC ofrecen nuevas formas de comunicación, colaboración y participación en procesos formativos y que las innovaciones tecnológicas y metodológicas han propiciado también mejoras en las oportunidades que ofrece la educación a distancia, permitiendo que estudiantes con limitaciones temporales o espaciales puedan ahora acceder a cursos y titulaciones a su conveniencia.

El rápido crecimiento de la educación a distancia, es decir: los modelos basados en *e-learning, b-learning* y otras variantes de modalidades semipresenciales, se practican en la actualidad a lo largo y ancho del mundo. Estos modelos, diseñados adecuadamente, pueden proporcionar un alto nivel de calidad formativa a la vez que permiten construir entornos de enseñanza-aprendizaje flexibles y sin restricciones de espacio, distancia o tiempo. En ese nuevo contexto, el profesor deja de ser un agente de transmisión de conocimientos y podría asumir el rol de un agente especialista en la materia que diseña el curso, guía y supervisa el proceso formativo de sus estudiantes.

Conclusiones

En relación con el área de la formación matemática las reformas son extensas, no sólo en el ámbito de la educación a distancia sino también en la educación universitaria presencial, y muchos profesores han propuesto y desarrollado estrategias innovadoras basadas en: el apoyo on-line a los estudiantes, el aprendizaje colaborativo, la integración del software matemático en los cursos, y el diseño de nuevos currículos formativos que promuevan la comprensión de los conceptos y sus aplicaciones por parte del estudiante en lugar del aprendizaje de procedimientos de cálculo mecánicos y repetitivos.

En particular, la interacción con el software matemático, tanto en el caso de cursos presenciales como en el caso de cursos *on-line*, puede proporcionar beneficios adicionales a los estudiantes, puesto que esta interacción les permite obtener una mejor comprensión de algunos conceptos, procedimientos y aplicaciones de las mismas. Específicamente, el uso de software matemático facilita:

- Una mejor comprensión de los conceptos matemáticos mediante la representación gráfica y/o numérica.
- Una aproximación constructivista al conocimiento matemático mediante los procesos de interacción entre experimentación y simulación.
- El desarrollo de un espíritu crítico mediante la posibilidad de:
  a) comparar distintos métodos de resolución de problemas (analítico, geométrico, numérico, etc.)
  b) realizar análisis más detallados de los resultados.
- Una reducción del trabajo mecánico: una vez el estudiante ha asimilado los conceptos y el proceso de resolución para casos sencillos, puede utilizar ordenadores para resolver cálculos más complejos, tal y como hará en su carrera profesional futura. En este sentido, los ordenadores permiten ahorrar tiempo que tradicionalmente ha sido empleado en resolver operaciones manualmente.

  Este tiempo, a su vez, puede ser empleado en procesos más constructivos, tales como el aprendizaje de un conocimiento más extenso de sus posibles aplicaciones.
- Una reducción en la distancia que habitualmente separa la teoría de la práctica: el uso de software matemático permite el modelado y solución de problemas reales, donde las condiciones de entorno y los datos pueden ser usados sin necesidad de añadir restricciones simplificadoras.

Además de los beneficios mencionados, en la formación en Matemática encontramos, cada vez más la contribución al desarrollo de *habilidades tecnológicas*. Las habilidades y competencias tecnológicas de un estudiante pueden verse significativamente mejoradas gracias a:

i) la interacción con el software matemático,

ii) la comunicación con profesores y otros estudiantes vía *e-mail*, foros o chats, y

iii) la participación activa en proyectos colaborativos mediante plataformas web tales como Moodle.

Estas experiencias sociales y tecnológicas pueden ser muy valiosas para la futura carrera profesional del estudiante en un mundo globalizado.

Referencias bibliográficas

Bashe, C., Johnson, L., Palmer, J., Pugh, E. (1985). *History of Computing*. Massachussets: The MIT Press

Declaración de Budapest. (1999). *Marco general de acción de la declaración de Budapest.* Recuperado en marzo de 2007 de: http://www.oei.org.co/cts/budapest.dec.htm

Facundo, A. (2005). *Antecedentes, situación y perspectivas de la educación superior virtual en América Latina y el Caribe*. Caracas: Iesalc/Unesco.

García, A., García, F., Rodríguez, G., De la Villa, A. (2010). Calculus in one variable: One Spanish overview according EHEA. *15th SEFI MWG Seminar and 8th Workshop GFC Mathematical Education of Engineers, Wismar, Germany*.

Gil Pérez, D. (1998). El papel de la Educación ante las transformaciones científico-tecnológicas. *Revista Iberoamericana de Educación*, *18*.

González, J., Wagenaar, R. y Beneitone, P. (2004). Tuning-América latina: Un Proyecto de las universidades. *Revista iberoamericana de educación 35,* pp.151-164.

Milevicich, L. y Lois, A. (2011a). El aprendizaje de los conceptos matemáticos en entornos virtuales. *VI Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, Salta, Argentina, 14 al 16 de junio de 2011.

Milevicich, L. y Lois, A. (2011b) Perspectiva de las TIC'S en la educación superior en Iberoamérica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, pp. 1170-1178.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Milevicich, L. (2012). Enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. Una propuesta para cursos iniciales en la universidad. *Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española*

Rodríguez, G. (2007). Un proyecto europeo para la enseñanza de las matemáticas: el proyecto EVLM. *II Jornadas de Innovación Educativa de la EPS de Zamora*. Zamora.

Tünnermann, C. (2008). *UNESCO. La educación superior en: diez años después de la Conferencia Mundial de 1998*. Cali: Iesalc-Unesco.

UNESCO. (2008). *Estándares de competencias en TIC para docentes.* Recuperado el 20 de julio de 2008 de http://cst.unesco-ci.org/sites/projects/cst/default.aspx

LICENCIATURA DE MATEMÁTICA A DISTÂNCIA: ESTA FORMAÇÃO REPERCUTE NO USO DE COMPUTADORES NAS ESCOLAS?

Alessandro Calil, Fernanda Campos, Neide Santo[3]
Campus Universitário – Juiz de Fora, MG Brasil
Núcleo de Pesquisa em Engenharia do Conhecimento - Universidade Federal de Juiz de Fora
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
alescalil@oi.com.br, fernanda.campos@ufjf.edu.br, neide@ime.uerj.br

Resumo. As TICs estão desenhando uma nova sociedade, mas o seu potencial vem se concretizando muito lentamente no processo educacional. Por quê? Nossa questão de estudo é identificar a relação entre a familiarização e o uso das tecnologias Web por professores que cursam a licenciatura de Matemática a distância e eventuais alterações na utilização de computadores em suas salas de aula. Analisamos esta questão em um estudo de campo com 18 professores e os resultados apontam que, mesmo vivenciando a Educação a Distância (EaD), os professores não transpuseram para a sua atuação em sala de aula o uso das tecnologias. Algumas possíveis explicações são fornecidas e discutidas, bem como algumas medidas prescritivas são oferecidas.

Palavras chave: formação de professores, TIC, educação a distância

Abstract. ICT are shaping a new society, but its potential is slowly becoming a reality in the educational process. Our research question is to identify the relationship between proficiency and use of Web technologies by teachers who are attending college Math course, in distance learning program, and any increase use of computers in their classrooms. We analyze this question with 18 teachers and our results show that, even attending distance learning classes, they did not take this expertise to their role in the classroom. Some possible explanations are provided and discussed, as well as some prescriptive guidelines are offered..

Key words: teacher training, ICT, distance education

Introdução

Os computadores mudaram nossa forma de trabalhar, de nos comunicar, de ter acesso a diversos serviços e informação e o nosso lazer. Praticamente desde o seu surgimento, formuladores de políticas educacionais, gestores de sistemas escolares, pesquisadores e professores analisam sua inserção na educação formal e informal, como treinamento. Parece ser consensual que o computador e, nos dias atuais, a Internet têm potencial para modificar o processo de ensino e aprendizagem. Para Frota e Borges (2010), o uso de tecnologia nas escolas depende da formação do professor para uma incorporação tecnológica e do sistema educacional que responde pela implementação das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) nas escolas. No caso específico da Matemática, segundo os autores, esse percurso compreende etapas que correspondem a uma evolução do entendimento do professor sobre as concepções do uso da tecnologia na Educação Matemática e de sua atitude de consumir a tecnologia para incorporar a tecnologia, para então matematizar a tecnologia.

Nossa pesquisa relaciona-se com a difusão da educação a distância na formação de professores, em especial os professores de Matemática, e seu eventual impacto no uso de computadores na educação básica. Nos dias de hoje, a formação de novos professores por meio da educação a distância é uma realidade e a atuação da Universidade Aberta do Brasil tem sido marcante. Neste sentido, o objetivo específico do nosso trabalho é identificar e analisar como os professores de Matemática do ensino fundamental e médio utilizam as TICs no processo de ensino e aprendizagem e se o fato de estarem familiarizados com a Web e de estudarem com a mediação dos Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) está alterando sua prática em sala de aula. Em um cenário de reflexão, buscamos respostas para questões como: a popularização da Internet comercial, presente no Brasil há 15 anos, alterou, de alguma forma, a escola e, mais especificamente, o processo de ensino-aprendizagem? O computador é hoje um equipamento familiar à escola? Como os professores, nesta segunda década do século XXI, utilizam o computador como ferramenta pedagógica?

Estruturamos uma situação de pesquisa a ser desenvolvida ao longo de dois anos (2010-2012), composta de dois momentos. Em um primeiro momento (2010-2011), realizamos uma coleta de dados quantitativos, através de um questionário. Em um segundo momento (2011-2012), vamos realizar uma nova análise da atuação destes professores, desta vez qualitativa, através de *follow-up* destes professores, buscando verificar alterações na prática docente. Para atingirmos o objetivo proposto, a seção 2 deste artigo contextualiza nossa pesquisa, a seção 3 apresenta os dados coletados e oferece uma análise, e a seção 4 expõe nossas considerações finais e os trabalhos futuros.

Contextualização da pesquisa e trabalhos relacionados

As estatísticas dão conta de que cerca de 81 milhões de brasileiros, maiores de 12 anos, acessam a Internet e que o Brasil é o 5º país com o maior número de conexões. O principal local de acesso são as *lan house* (31%), seguido da própria casa (27%) e da casa de parentes e amigos (25%). A escola não consta como local de acesso. Se o uso das TICs atrai tanto os jovens na hora do lazer e da comunicação por que não usá-las no ensino em geral e na Matemática em particular que é tida como uma disciplina complexa e de difícil compreensão?

Zulatto e Borba (2006, 1-15) afirmam que é preciso que os professores tenham conhecimento do recurso que pretendem utilizar e que se sintam seguros para trilhar esse caminho. A Fundação Carlos Chagas divulgou estudo sobre os currículos das licenciaturas em Pedagogia, Língua Portuguesa, Matemática e Ciências Biológicas, relacionando a presença das TICs nestes currículos (Gatti e Nunes, 2009, in Barcelos, Passerino e Behar, 2010, 1031-1040). Foi identificado que os conteúdos do tipo "Outros Saberes", que englobam temas transversais e utilização de novas tecnologias, correspondiam a apenas 14,7% do total oferecido nos currículos.

A utilização de TICs pelos professores das diversas disciplinas (incluindo Matemática) é muito baixa em relação a outras atividades, segundo pesquisa divulgada pelo Centro de Estudos da Fundação Victor Civita (FVC, 2009), junto com o Ibope e o Laboratório de Sistemas Integráveis da Universidade de São Paulo (LSI-USP). Foram pesquisadas 400 escolas em 13 capitais brasileiras, para mapear o uso do computador e da Internet e investigar o uso de computador nos níveis fundamental e médio. Segundo a pesquisa, 74% das escolas possuem laboratórios de computação e 57% delas têm computadores na sala dos professores. Entretanto, a maioria dos professores (74%) não foi preparada para o uso da tecnologia e para utilização destes laboratórios, na sua formação inicial. 75% dos cursos oferecidos pelas Secretarias de Educação tiveram como foco principal os professores e 38% destes professores acharam que estes cursos os preparam bem para a utilização de TICs na escola. Mais da metade dos professores entrevistados, porém, afirmou não ter participado de cursos de utilização de tecnologias no ano que antecedeu à pesquisa. A pesquisa detectou que as escolas possuem infraestrutura de tecnologia à frente da formação de professores para o uso adequado dela (FVC, 2009).

Em relação à formação de professores de Matemática para o uso pedagógico das TICs, estudos de Gatti e Nunes (2009, in Barcellos et al., 2010, 1031-1040), com 31 cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, verificaram que apenas 29% das Licenciaturas em Matemática brasileiras possuem disciplinas que contemplam, claramente, o uso da Informática na Educação. As entrevistas realizadas sinalizaram que as ações realizadas na formação inicial dos professores de Matemática, quanto ao uso pedagógico das TICs, foram muito importantes, porém não suficientes para o uso efetivo das mesmas na prática docente. Para Barcelos et al. (2010, 1031-1040), a maioria dos entrevistados (72%) considerou que o curso de graduação os preparou pouco ou nada para o uso de tecnologias na escola.

Há, contudo, diversos produtos de software educacionais disponíveis para apoio às atividades de ensino e aprendizagem da Matemática, prontos para uso e frequentemente com site de apoio para sua utilização educacional: Graphmatica (www.graphmatica.com), Cabri Géomètre II e Cabri 3D (www.cabri.com.html), Geogebra e também excelentes produtos brasileiros de software, entre eles, iGeom e iGraf (http://www.ime.usp.br/~leo/) e Tabulæ Colaborativo. Porque os professores não os utilizam nas escolas?

Nossa pesquisa considera estudos análogos aos citados, mas se diferencia das pesquisas relacionadas, por, além de caracterizar o uso das TICs pelos professores de Matemática, visar identificar uma relação entre a vivência com o uso de Ambientes Virtuais de Aprendizagem

(AVAs) como alunos, e eventuais alterações em sua prática pedagógica, os levando a adotar computadores em suas aulas.

Caracterização do uso das TICs no ensino de matemática

Os sujeitos da nossa pesquisa são dezoito professores, estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, modalidade a distância da Universidade Federal de Juiz de Fora. Todos os entrevistados participam de atividades regulares das disciplinas na plataforma Moodle e se consideram familiarizados com a plataforma. Eles atuam, como professores de Matemática, no ensino fundamental (5ª a 8ª série) e médio mesmo não possuindo licenciatura em Matemática, por terem ou licenciatura curta, formação em área que os habilita legalmente a ensinar Matemática ou situação similar que dê a eles amparo legal. Para atingirmos os objetivos do estudo as perguntas do questionário aplicado englobaram questões sobre conhecimentos gerais de informática; utilização do computador e outros recursos nas aulas de Matemática; recursos tecnológicos que podem ser utilizados em aulas de Matemática; e uso de AVAs no ensino de Matemática.

Caracterização dos sujeitos do estudo

Dos entrevistados, 72,2% são do sexo masculino e 27,8% são do sexo feminino e 74,5% dos participantes são de outros municípios que não Juiz de Fora, sede da UFJF, já que estudam a distância. 61,1% dos professores atuam no ensino fundamental, 38,9% no ensino médio e 16,7% no ensino técnico. Mesmo sendo estudantes de graduação, 27,8% dos alunos possuem especialização por já terem uma formação anterior. É interessante notar que quase 70% dos professores do nosso estudo são jovens com tempo de magistério variando de 1 a 5 anos. Seria legítimo supor que eles estariam mais sujeitos à influência das novas tecnologias e eventualmente mais predispostos a usá-las como apoio às suas atividades de ensino. Como veremos mais adiante, esta suposição não se sustenta.

Conhecimentos gerais de informática

Todos os participantes responderam que utilizam o computador no seu dia a dia, o que era esperado já que todos são alunos da modalidade à distância. Os recursos que mais utilizam em casa são o editor de texto, software de navegação na Web e e-mail. 94,5% desses professores pesquisam na Internet para preparar aulas e materiais didáticos. 94,5% dos entrevistados responderam que possuem conhecimentos suficientes para utilizar o computador dentro e fora da escola e 55,5% responderam que utilizam sempre o computador para estudo. Em relação ao estudo de disciplina(s) voltada(s) para a utilização do computador na educação, 66,7% disseram não ter cursado a disciplina na licenciatura. É importante observar que, mesmo em um curso a distância, não há muitas disciplinas que discutem o uso dos recursos tecnológicos na educação. Em relação a terem participado de cursos ou disciplinas à distância que utilizaram AVA, a maioria (83,3%) afirma ter participado.

Utilização do computador e outros recursos nas aulas de matemática

Quanto ao uso do computador, 50% dos professores/alunos responderam que utilizam e os recursos mais utilizados são softwares educacionais (44,4%) e Internet (22,2%). Aqui há um dado importante que merece ser mais bem investigado: o percentual expressivo de professores que dizem usar software educacional. Como nossa forma de coleta de dados era questionário enviado a diferentes pólos de apoio a Educação a Distância (EaD) da UFJF, não foi possível identificar o que este alto percentual significa. Na continuação da investigação, vamos nos deter neste ponto, para entender o que os professores queriam dizer. Em relação à utilização do computador para preparar aulas, 88,9% responderam que utilizam, e os recursos estão no quadro 1.

P5rOpções	Porcentagem
Editor de texto	88,9%
Software educacional	38,9%
Software de apresentação	38,9%
quPlanilha de cálculo	22,2%
Software de edição de imagens	27,8%
Software de navegação	66,7%
Outros	0,0%

Quadro 1 – Recursos mais utilizados em casa

Sobre receber algum tipo de suporte na escola para utilizar o computador, 55,5% afirmaram não ter esse apoio. Questionados sobre o tipo de material didático que preparam usando o computador, 88,9% responderam "folha de exercícios" e "avaliações". Quanto aos recursos computacionais que poderiam ser utilizados para trabalhar os conteúdos matemáticos com seus alunos o quadro 2 apresenta as respostas. As opções que os entrevistados julgam ser importantes para ajudar na utilização do computador estão no quadro 3.

Opções	%
Editor de texto	72,2%
Software educacional	66,7%
Software de apresentação	72,2%
Planilha de cálculo	38,9%
Software de edição de imagens	44,4%
Software de navegação Internet	77,8%

Quadro 2 - Recursos que podem ser usados no ensino de Matemática

Opções	%
Cursos para professores	72,2%
Suporte técnico nos laboratórios	27,8%
Laboratório de informática funcionando	66,7%
Tempo para preparar as aulas	61,1%

Quadro 3 - Opções que ajudariam na utilização do computador em sala de aula

Uma grande parte dos entrevistados afirma que a elaboração das aulas usando recursos computacionais exige maior tempo de preparação (66,7%), e as vantagens no uso pedagógico dos recursos computacionais seriam a motivação e construção do conhecimento mais rápido. No entanto, temos que considerar que os parâmetros curriculares no Brasil são rígidos e que, de certa forma, utilizar software nem sempre é reconhecido como um diferencial no processo de ensino. A aparente resistência do professor em usar as TICs mostra que a saída da zona de conforto nem sempre é uma opção voluntária. Os fatores que os professores entrevistados acreditam contribuir para o pouco uso do laboratório de informática estão no quadro 4.

Opções	Porcentagem
Turmas grandes	55,5%
Alunos indisciplinados	33,3%
Falta de suporte técnico	66,7%
Insegurança falta de prática	50,0%
Necessidade de cumprir planejamento	27,8%
Falta de apoio da Coordenação Escolar	22,2%
Outros	5,5%

Quadro 4 - Fatores que contribuem para o pouco uso do laboratório pelos professores

Uso de AVAs no ensino de matemática

Todos os participantes da pesquisa conhecem o AVA Moodle do curso de Licenciatura de Matemática à distância, porém, nenhum deles utiliza com os alunos. Quanto às características de usabilidade de um AVA, os professores destacaram as mais importantes (quadro 5). No quadro 6 são destacadas as características dos AVAS que podem ampliar o seu uso e no quadro 7 as ferramentas mais importantes.

Opções	%
Facilidade de utilização	83,3%
Interface amigável	38,9%
Facilidade de compreensão das opções	44,4%
Fácil navegação	61,1%
Não responderam	11,1%

Quadro 5 - Características importantes para usabilidade de um AVA

Opções	%
Sempre disponível para entrada	44,4%
Suporte técnico	44,4%
Cursos sobre o seu uso	33,3%
Disponibilidade de Computadores ligados à Internet	61,1%

Quadro 6 - Características dos AVAS que podem ampliar o seu uso

Opções	%
Para disponibilizar material didático para os alunos	83,3%
Para disponibilizar links para outros sites da Web	50,0%

Para avaliar o progresso e o desenvolvimento dos alunos	50,0%
Para administrar avaliações, testes e exercícios, mantendo os resultados armazenados	55,5%
Para ajudar os professores a administrar aulas e notas	50,0%
Ferramentas de cadastro de usuários	22,2%
Ferramentas de portfólios individuais	27,8%
Ferramentas de comunicação como email, blog, wikis, fóruns	61,1%

Quadro 7 - Ferramentas consideradas importantes num AVA

No quadro 8 os participantes da pesquisa destacaram características imprescindíveis em um AVA. É interessante observar no quadro 9 que os professores veem utilidade pedagógica nos fóruns (77,8%), mas não percebem o potencial dos portfólios (11,1%) como ferramenta capaz de exibir os progressos dos alunos e os caminhos que eles percorrem na formação e sistematização de conceitos.

Opções	%
Atender objetivos e concepções pedagógicas diversas	72,2%
Apoiar projetos à distância e presenciais	72,2%
Contemplar os diversos modelos de avaliação	44,4%
Contemplar as diferentes visões de usuários	33,3%
Permitir o uso flexível dos diferentes recursos e ferramentas	50,0%
Não responderam	11,1%

Quadro 8 - Características que um AVA não pode deixar de ter

Opções	%
Email	55,5%
Chat	55,5%
Fórum	77,8%
FAQ	5,5%
Mural	27,8%
Portifólio	11,1%
Lista de discussão	33,3%
Perfil	5,5%
Acompanhamento	44,4%
Entrega de tarefas	72,2%
Resultado de avaliações	83,3%
Outros	0,0%

Quadro 9 - Recursos que o professor gostaria de usar com seus alunos em um AVA

Apesar de nossa pesquisa ter caráter exploratório, os resultados obtidos confirmam os dados identificados na literatura referenciada. Em décadas passadas, identificava-se que os professores não usavam o computador em suas salas de aula porque o computador não lhes era familiar. Hoje, a imensa maioria dos professores usa o computador em tarefas de sua vida diária. Mais que isto, os sujeitos da nossa pesquisa estudam com a mediação das tecnologias da Web. Ainda assim persiste a baixa inserção das TICs no processo de ensino e aprendizagem. Para os professores do nosso estudo, diferentes razões podem explicar tal fato. A primeira delas refere-se, como esperado e apontado em estudos análogos, à falta, ou baixa oferta de programas para a formação inicial e continuada de professores em uso de TICs no processo educacional. Para este problema, nossos professores entendem que se deve: incluir disciplinas de Informática Educativa no currículo das Licenciaturas em Matemática; adotar currículos da área de Informática Educativa que ofereçam não só a fluência do uso das tecnologias, mas uma discussão ampla sobre as possibilidades das diferentes tecnologias no ensino de Matemática; promover cursos e oportunidades para discutir com os professores sobre os diferentes recursos que podem ser utilizados para preparar material didático como planilhas de cálculo, softwares de apresentação, softwares de edição de imagens, entre outros. Ou seja, não somente discutir como usar o software, mas também instrumentalizar o professor a usar esse software; capacitar professores sobre as possibilidades educacionais do uso da Internet; nas licenciaturas à distância, permitir que os professores utilizem os AVAs não somente como alunos, mas também como professores, em situações pontuais, para que identifiquem possibilidades de uso no ensino de Matemática e aprendam a desenvolver atividades com o apoio destes ambientes.

Outra razão para o baixo uso, também identificada pelos professores, e fartamente apontada na literatura da área, refere-se ao papel desempenhado pela administração escolar na difusão dos computadores na escola. Seria preciso ampliar a presença de suporte e de técnicos especializados nos laboratórios de informática das escolas, capazes de solucionar problemas que possam aparecer durante sua utilização, assim como para instalação de software, operação de equipamentos, entre outros. Seria preciso também garantir que os laboratórios de informática estejam sempre funcionando e em boas condições de uso. Estas questões exigem que o poder público, além de equipar as escolas com laboratórios de informática, necessariamente criem as condições financeiras e de recursos humanos que permitam sua plena utilização.

Pesquisas divulgadas nas décadas de 80 e 90 do século passado davam conta de que a introdução das novas tecnologias no ensino iria demandar mais tempo para a preparação das aulas. Em nosso estudo, os professores entendem que tempo extra remunerado deve ser dado para que eles preparem suas aulas com os recursos computacionais. A viabilidade desta sugestão é um ponto em aberto. Segundo nossos professores, outros fatores poderiam contribuir para a inserção dos computadores e da Web nas escolas públicas: (a) disponibilizar os AVAs como apoio às atividades dos professores com seus alunos em qualquer modalidade (presencial ou a distância); (b) incentivar o uso do computador nas disciplinas como ferramenta motivacional para os alunos; e (c) oferecer oportunidades de ampliação do domínio da utilização dos computadores pelos professores, disponibilizando equipamentos e suporte técnico no seu ambiente de trabalho de forma coletiva e individual.

Considerações finais

A escola parece ser um dos poucos locais onde o computador penetrou muito timidamente. Por quê? É relevante dos pontos de vista sociológico e educacional investigar os porquês. O processo de ensino e aprendizagem é muito complexo não adotando os mesmos elementos usados nos processos de trabalho dos setores secundários e terciários de produção. O processo de aprendizagem envolve fatores internos e externos à escola, como a motivação para aprender, a promoção de atividades que provoquem nos alunos o desenvolvimento de habilidades, atitudes e competências, permitindo-lhe a aquisição de conhecimentos, como também condições para refletir, analisar, sintetizar, classificar, categorizar e de se tornar autônomo no processo de aprendizagem.

As TICs têm grande potencial para a criação de formas mais dinâmicas de mediação entre o sujeito e o objeto da aprendizagem, mas trazem dificuldades na sua transposição e adaptação para o contexto escolar. Talvez uma inserção mais significativa dos computadores na sala de aula exija currículos escolares mais flexíveis aliados a novos, ou pelo menos, outros modelos de aprendizagem como a aprendizagem baseada em problemas e em projetos transversais e significativos, em aprender fazendo, em aprender explorando e em navegando para encontrar respostas. De todo modo, inserir o computador no processo educacional tem sido um desafio em todos os países.

Os dados apresentados neste trabalho ratificam os encontrados na literatura e justificam a continuidade da pesquisa, ampliando o universo e identificando diretrizes que, após esse diagnóstico inicial, apontem ações que ampliem o uso de TICs e destaquem as possibilidades de uso dos AVAs, em especial no ensino da Matemática. Não basta os professores usarem o computador em casa, é necessário que a escola adote as TICs e que elas não sejam atropeladas por habilidades e culturas das gerações Web.

Referências bibliográficas

Barcelos, G. T.; Passerino, L. M.; Behar, P. A. (2010). *Análise dos Impactos da Integração de Tecnologias na Formação Inicial de Professores de Matemática sobre a prática docente: um estudo de caso*. Acesso em 16/06/10 de http://www.inf.pucminas.br/sbc2010/anais/pdf/wie/st01_04.pdf.

Frota, M. C. R.; Borges, O. (2010). *Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologia na educação Matemática*. Acesso em 08/08/10 de http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes.

FVC Fundação Vitor Civita. (2009). *O uso dos computadores e da Internet nas escolas públicas de capitais brasileiras*. Acesso em 03/03/10 de http://www.fvc.org.br/estudos.

Zulatto, R. B. A. e Borba, M. C. (2006). *Diferentes Mídias, Diferentes Tipos de Trabalhos Coletivos em Cursos de Formação Continuada de Professores a Distância: Pode me passar a caneta, por favor?* Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. G06 - Educação Matemática novas tecnologias e educação à distância. Rio Claro.

HERRAMIENTA INTERACTIVA EN LA COMPRENSIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Juan José Díaz Perera, Santa del Carmen Herrera Sánchez, Carlos Enrique Recio Urdaneta, Mario Saucedo Fernández
Universidad Autónoma del Carmen México
jjdiaz@pampano.unacar.mx, sherrera@pampano.unacar.mx, crecio@pampano.unacar.mx, msaucedo@pampano.unacar.mx

Resumen. El propósito del trabajo es dar a conocer las bondades que tiene el uso de las tecnologías a través de la interactividad. Para ello, se realizó un estudio correlacional con un diseño cuasi-experimental con pre test y post test. Además se tuvo una población de 45 estudiantes que cursaban la asignatura de matemáticas II distribuidos en dos grupos. Se utilizó la prueba t de Student para verificar si existía diferencia entre el grupo experimental y de control sobre el grado de comprensión del límite de forma gráfica. De acuerdo a los resultados obtenidos se pudo constatar que existe diferencia estadística significativa entre los grupos (experimental y control), lo cual indica que la herramienta interactiva ayuda a la compresión del límite de una función. Por otra parte, fue considerada por los estudiantes como atractiva y educativa, esto pone en manifiesto que el uso de las tecnologías en la educación matemática puede potenciar la comprensión de los conceptos y algoritmos matemáticos de forma interactiva.

Palabras clave: tecnología, interactiva, comprensión, matemáticas

Abstract. The purpose of the job is to raise awareness of the benefits of using the technologies through interactivity. To do this, we performed a correlational study with a quasi-experimental design with pre-test and post test. In addition, it had a population of 45 students who were studying mathematics II distributed in two groups. Student's t test was used to check whether there was difference between the experimental and control group on the degree of understanding of the limit in graphic form. According to the results we were able to establish that there is significant statistical difference between the groups (experimental and control), which indicates that the interactive tool helps to understand the limit of a function. On the other hand, was considered by the students as attractive and educational, this reveals that the use of technologies in the mathematics education can enhance the understanding of the concepts and mathematical algorithms interactively.

Key words: technology, interactive, understanding, mathematics

Introducción

En el siglo XXI, las tecnologías de la información y comunicación (TIC) están influyendo en los sistemas educativos, tanto así, que su inserción se ve reflejada en las disposiciones deseables de las instituciones de educación superior (IES) como herramientas didácticas que apoyan el proceso de aprendizaje. En consecuencia, las TIC son usadas con mayor frecuencia en la educación matemática. Por lo que Santandreu (2004) menciona que el uso de las herramientas tecnológicas en el proceso de aprendizaje de las matemáticas juega un papel importante. Sin embargo, recomienda tener cuidado al momento de utilizarlas, ya que no tienen la intención de sustituir al docente, ni al alumno.

Para Alfegeme (2002) las potencialidades pedagógicas de las TIC se encuentran en la interacción y la interactividad que se alcance, según el diseño instruccional, entre el usuario de la tecnología y de las condiciones técnica de la herramienta. De manera que la interactividad es caracterizada por la capacidad recíproca de diálogo que existe entre los diversos elementos (persona/persona, persona/aparato y persona/aparato/persona) que constituye el conocimiento en ambientes de aprendizaje interactivos.

Lo anterior hace reflexionar, que las TIC son un medio para acceder a la información y al conocimiento, pero no sustituye a las antecesoras formas de aprendizaje, sino que extiende las posibilidades de aprendizaje a otros niveles de acuerdo a sus potencialidades comunicativas de las tecnologías. De manera que las potencialidades pedagógicas de las nuevas tecnologías dependerán de lo que el docente pueda hacer con ellas desde su posición teórica-metodológica con la que esté casado.

Las tecnologías en la educación

La inserción de las tecnologías en la educación es una realidad, ya que con frecuencia se ha observado su aplicación en el aula en los diferentes niveles educativos.

> Tradicionalmente, las tecnologías educativas se han utilizado como medios de instrucción; es decir, como transmisores de información y como tutores de estudiantes […]. Durante el proceso de "instrucción", y a medida que "interactúan" con la tecnología, los estudiantes perciben los mensajes allí almacenados y tratan de entenderlos (Jonassen, 1998, p.1).

Sin embargo, estas herramientas tecnológicas deben brindar más que la instrucción para tener un cambio en la conducta del estudiante, en otras palabras, deben ser herramientas de construcción de conocimiento para generar las competencias deseadas en el aprendiz.

Hoy día encontramos una variedad de herramientas para la construcción de conocimiento, entre las cuales están herramientas de la mente que "*son aplicaciones de computadoras que, cuando son utilizadas por los estudiantes para representar lo que saben, necesariamente los involucran en pensamiento crítico acerca del contenido que se está estudiando*" (Jonassen y Reeves, 1996, p.1). Además, este tipo de herramientas permiten diferentes formas de razonamiento al momento de interactuar con ella.

Indiscutiblemente, el empleo de las TIC como herramientas de la mente debe ir más allá de simples "herramientas de enseñanza" en el sentido de promover la formación estratégica, reflexiva, colaborativa y crítica que se desea que tengan los estudiantes. Esto hace pensar que la utilización de las herramientas de la mente puedan lograr que los estudiantes se conviertan en diseñadores potenciales al realizar actividades cognitivas y autorreguladoras.

Para Hernández (2009) existen varias clases de herramientas cognitivas que pueden distinguirse según el tipo de uso que se han aprobado en ellas:

a) De organización semántica. Este tipo de herramientas auxilian el análisis y la organización de los estudiantes para conocer que saben o están por aprender. Algunos de estos recursos son: Access Microsoft, Cmap Tools, Free Mind, entre otros.

b) De modelo dinámico. En este apartado podemos encontrar las herramientas que nos ayudan a describir, comprender y explorar relaciones dinámicas entre ideas, objetos o situaciones. Algunas son: Stella, Model - It, MathWorlds, entre otros.

c) De interpretación de la información. Este tipo de herramientas pueden ayudar a visualizar ciertos conceptos, modelos y estructuras a través de imágenes.

d) De construcción del conocimiento. Esta clasificación se refiere aquellas herramientas que auxilian en el proceso de construcción de cosas o situaciones, por ejemplo: Hoja de Cálculo, Power Point, Flash, videos, entre otras.

Indudablemente, las herramientas de la mente pueden resaltar el pensamiento crítico y el aprendizaje de los estudiantes, ya que cuando se trabaja con tecnologías no significa ser controlados por ellas, ni mucho menos controlar el aprendizaje. Más bien deben ser herramientas que ayuden a los estudiantes a la construcción de sus conocimientos.

Una de las herramientas de la mente más utilizada en la educación matemática en los diferentes niveles educativos, es la hoja de cálculo debido a que es una herramienta que puede usarse para la construcción de conocimiento y en cualquier área de estudio. Además de que es fácil de aprender a utilizar y que la gran mayoría de las computadoras vienen equipadas con dicha aplicación.

Por otra parte, Jonassen (1998) señala que las hojas electrónicas pueden usarse para ampliar el funcionamiento mental, modelar la lógica matemática, representar información cuantitativa, calcularla y reflexionar sobre ella. También menciona que la construcción y manejo de la hoja de cálculo requiere de un razonamiento abstracto por parte del estudiante, que sirve como apoyo a actividades de solución de problemas.

Agregando a lo anterior, López, Lagunes y Herrera (2009) mencionan que la hoja de cálculo puede convertirse en una herramienta poderosa para la creación de ambientes de aprendizaje que enriquezcan la representación, modelado, comprensión y solución de problemas, especialmente de matemáticas y estadística. Además de la construcción de graficas para reforzar los conceptos básicos y estimular la capacidades mentales con el fin de explorar conceptos matemáticos abstractos.

Dentro del modelo educativo de la Universidad Autónoma del Carmen se señala que los profesores deben planear de manera diferente las experiencias de aprendizaje, por lo menos a como se hacía tradicionalmente. Acorde con el modelo educativo las actividades y recursos utilizados deben proveer a los alumnos las herramientas que les permitan la adquisición de las Disposiciones Deseables, entendidas estas como: *"el conjunto de atributos: conocimientos, destrezas, actitudes y relaciones, que de manera intencional, sistemática, explícita o tácita, la institución, considera que deben desarrollarse en el alumno, a su paso por sus programas educativos, organizando para lograrlo experiencias de aprendizaje significativas"*(Salazar, 2006, p.69), desde luego como un atributo adicional en la adquisición de conocimiento.

Ante el cambio de paradigma educativo los docentes del Cuerpo Académico de Matemática Educativa de la Universidad Autónoma del Carmen tiene bajo su responsabilidad el curso de Matemáticas II, cuyo contenido temático corresponden a un curso de cálculo diferencial para los estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas Administrativas, es por ello, que se dan a la tarea de buscar y aplicar experiencias que conlleven a un aprendizaje significativo en los alumnos, y una de estas experiencias es la aplicación de las herramientas tecnológicas en los cursos de matemáticas que permitan lograr los objetivos del curso. En consecuencia, se diseñó e implementó una herramienta interactiva para la comprensión del concepto de límite que permita una mejor asimilación de manera visual y numérica del límite de una función.

Materiales y métodos

El tipo de estudio fue correlacional con diseño cuasiexperimental con pre-test y pos-test. La población estuvo constituida por 45 estudiantes del curso de matemáticas II de la Facultad de Ciencias Económicas Administrativas de la Universidad Autónoma del Carmen distribuidos en dos grupos (experimental y de control) como se muestra en la Tabla 1.

Grupos	No. de Alumnos
Grupo de control	23
Grupo experimental	22
Total	45

Tabla 1. Distribución de los estudiantes en los grupos

Con la finalidad de medir la compresión del límite de una función de forma gráfica en los estudiantes del curso de Matemáticas II antes y después del tratamiento se diseñaron dos instrumentos (pre test y post test) para la recolección de datos. Estos instrumentos fueron pruebas objetivas sobre la compresión gráfica de los límites, dividas en cuatro áreas de análisis de acuerdo a las características de las gráficas. Para medir la confiabilidad de los instrumentos se piloteó con grupo de alumnos que tuvieran características similares a los grupos del experimento, seguidamente se aplicó la prueba KR20 obteniendo un índice de confiabilidad de 0.81, esto demostró que la prueba era altamente confiable. Los instrumentos quedaron por 16 ítems de respuestas cortas divididas en cuatro áreas de análisis: comprensión de límites laterales, comprensión de límites infinitos, comprensión de límites al infinito y comprensión de la continuidad de una función. En la tabla 2 se muestran los indicadores y sus correspondientes ítems.

Indicadores	Ítems
Comprensión de límites laterales	1, 4,5 ,6,8
Comprensión de límites infinitos	2, 12, 14, 16
Comprensión de límites al infinito	3,10
Comprensión de la continuidad de un función	7, 9, 11, 13,15

Tabla 2. Distribución de ítems por indicador

Esta distribución de los ítems se encuentra en las dos pruebas (pre test y post test), con objetivo de establecer cualquier modificación en la compresión del límite de una función de forma gráfica en los alumnos antes y después del tratamiento con o sin el uso de la herramienta interactiva. Además se aplicó una encuesta a los estudiantes para medir el nivel de aceptación de la herramienta interactiva en el aula.

La herramienta interactiva fue diseñada en la hoja de cálculo Excel con objeto de facilitar la comprensión del límite de una función de forma visual. Ya que de acuerdo a Mochón (2004) las actividades interactivas en Excel no sólo permiten que el alumno observe, sino que pueda efectuar cambios a través de controles que contienen dichas actividades. Por consiguiente, dicho dinamismo permite contribuir a la construcción de una idea visual en tiempo real, permitiendo al estudiante la formación de habilidades para las transformaciones visuales (Arcavi y Hadas, 2000). En la aplicación podemos encontrar las opciones para analizar de forma gráfica los límites laterales, límites al infinito, límites infinitos y la continuidad de una función. Además tiene el agregado de la interactividad y la animación para que el alumno sea capaz de observar gráfica y numéricamente el comportamiento de los límites en cada una de sus opciones.

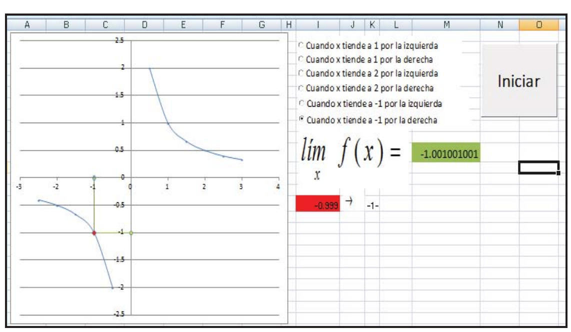


Figura 1

La actividad interactiva que se muestra en la Figura 1, fue utilizada en el aula como auxiliar didáctico para la compresión del límite de forma gráfica. Debido a sus bondades de interactividad y dinamismo a través de los controles de ejecución, permite que el alumno, al manipular la herramienta, construya ideas visuales y numéricas del concepto de límite. Otra característica de la actividad es que los alumnos pueden observar el comportamiento del límite de una función en tiempo real, por ejemplo, específicamente, los limites laterales y, para corroborar su comprensión se plantean cuestiones durante y después de la interacción con la herramienta.

Procedimiento para la obtención de los datos: a) en primer lugar se aplicó el pre test a los grupos experimental y de control para conocer los conocimientos previos de los estudiantes antes del experimento, seguidamente se aplicó la prueba t de Student para determinar la homogeneidad de los grupos; b) posteriormente se aplicó el tratamiento, en donde los estudiantes del grupo experimental fueron dirigidos en el proceso de aprendizaje de la compresión del límite de forma gráfica con el uso de la herramienta interactiva, y los alumnos del grupo de control abordaron la temática sin el uso de la herramienta didáctica; c) por último, se aplicó el post test a los grupos experimental y de control con la finalidad de medir la comprensión del límite de una función de forma gráfica al término del tratamiento. Para el análisis de los datos se empleó la prueba t de Student para determinar si existían diferencias estadísticamente significativas entre los grupos. Además, al grupo experimental se le aplicó una encuesta para determinar el nivel de aceptación de la herramienta interactiva como mediador del aprendizaje.

Resultados

En este apartado se da a conocer el análisis e interpretación de la información recabada por los instrumentos (pre y post test) que mide la compresión del límite de una función de forma gráfica de los estudiantes antes y después del tratamiento.

Análisis de los resultados del pre test.

Para probar la homogeneidad entre los grupos se aplicó la prueba t de Student a los grupos.

Prueba T para la igualdad de medias						
t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Superior	Inferior
-.083	43	.934	-.03953	.47355	-.99453	.91548
-.083	42.838	.934	-.03953	.47372	-.99498	.91593

Tabla 3. Prueba t –Student para probar la homogeneidad de los grupos (pre test)

Como el valor de p es mayor a 0.05, esto significa que no existe diferencia estadística significativa entre los grupos experimental y de control. En otras palabras, se comprueba que los grupos son homogéneos en cuanto al nivel de compresión de la forma gráfica del límite de una función.

Análisis de los resultados del post test

Grupos	N	Media de Calificaciones del Post test
Grupo Control	23	4.7826
Grupo Experimental	22	7.363

Tabla 4. Tabla de medias de los grupos en el post test

De acuerdo a la tabla 4 se puede ver que la media de las calificaciones de los grupos experimental y de control son diferentes. Además el grupo experimental tuvo una mayor media.

Prueba T para la igualdad de medias						
t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior
-4.849	43	.000	-2.58103	.53231	-3.65453	-1.50753
-4.817	38.631	.000	-2.58103	.53586	-3.66525	-1.49681

Tabla 5. Prueba t –Student para probar la diferencia entre los grupos (pos test).

Como el valor de p es menor a 0.05, significa que existe diferencia estadística significativa entre el grupo experimental y el control. En otras palabras, los grupos experimental y de control tuvieron diferente nivel de comprensión del límite de una función de forma gráfica favoreciendo al grupo experimental.

Algunos resultados de la encuesta

En este apartado se muestran algunos resultados obtenidos al aplicar la encuesta a los estudiantes para conocer el nivel de aceptación de la herramienta interactiva en el aula.

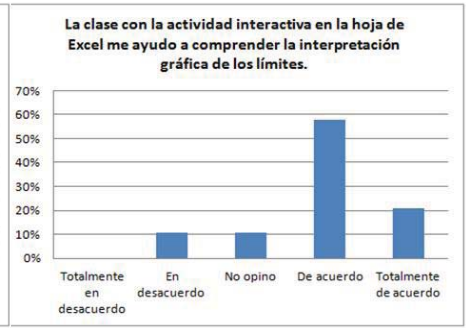


Figura 2

El 79% de los estudiantes encuestados estuvieron de acuerdo que *se comprende mejor la interpretación gráfica de los límites con la ayuda de la herramienta interactiva.* Además en la figura 2 se puede observar que el 77% de los estudiantes encuestados estuvieron de acuerdo que *la herramienta interactiva, es una estrategia novedosa, motivadora y atractiva que propicia el aprendizaje de los límites.*

Conclusiones

De acuerdo a los resultados:

Se concluye que existe diferencia estadísticamente significativa entre los estudiantes que utilizaron la herramienta interactiva con respecto a los que no la usaron. Favoreciendo en la comprensión de límite de una función de forma gráfica al grupo que interactuó con el recurso didáctico en el aula.

El 77% de los estudiantes del grupo experimental consideraron la herramienta interactiva como educativa y novedosa. Por otra parte, fue considerada como una herramienta atractiva y útil para la comprensión de los límites de forma gráfica.

Se puede ver que los recursos interactivos propician un ambiente enriquecido, llamando la atención de los estudiantes hacia el tema en estudio. En consecuencia, el recurso permitió la motivación del estudiante hacia el tema de límites, ya que pudo tener una interpretación gráfica y numérica.

Se debe tener en cuenta, que el recurso didáctico por sí solo no genera aprendizaje, sino que debe contar la disposición del docente como del alumno para su adecuada ejecución. Además este tipo de actividades interactivas deben insertarse en la programación del curso, ya que su aplicación en el aula o fuera de ella no debe ser resultado de la casualidad o de una moda pasajera.

Día a día nos enfrentamos con fuertes deficiencias en matemáticas, que en algunos casos obstaculizan los alcances del curso. Sin embargo, se deben buscar alternativas que motiven al estudiante hacia el estudio de las matemáticas.

Hoy día el uso de las TIC en la educación matemática es una realidad, ya que es un recurso que se encuentra a la mano del estudiante y con el que interactúa diariamente. Es por ello, que el docente debe crear, planear y aplicar actividades con el uso de las TIC, que propicien un aprendizaje significativo en los alumnos, y que no solo queden en la cuestión técnica del recurso. Ya que no solo se busca el conocimiento del alumno, sino también habilidades y actitudes que se requiere para la vida profesional.

Referencias bibliográficas

Alfageme, M. (2002). *La interactividad: como característica de la enseñanza mediante redes*. Recuperado el 15 de junio del 2004 de http://tecnologíaedu.us.es/edutec/paginas/58.html

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: Am example of an approach. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, *5*, 25-45.

Hernández, G. (2009). Las TIC como herramientas para pensar e interpensar: Un análisis conceptual y reflexiones sobre su empleo. En F. Díaz Barriga, G. Hérnandez M. A. Rigo (Comps.), *Aprender y enseñar con TIC en educación superior: Contribuciones del socioconstructivismo* (pp. 18-62) México: UNAM.

Jonassen, D. (1998). *Computadores como herramienta de la mente*. Recuperado el 20 de julio del 2011 de http://www.eduteka.org/Tema12.php

Jonassen, D. y Reeves, T. (1996). Learning with tecnology: Using Computers as cognitive tools. In D.H. Jonassen (Ed), *HandBook of research for educational communications and technology* (pp. 693-719). New York: Macmillan.

López, M., Lagunes, C y Herrera S. (2009). *La habilidad matemática, un enfoque de género en alumnos de nuevo ingreso en el área de educación y humanidades*. VII Encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia.

Mochón, S. (2004). *El Cálculo desde una perspectiva visual y dinámica con actividades en la computadora*. México: McGraw-Hill.

Salazar, A. (2006). *El modelo educativo de la Universidad Autónoma del Carmen. Una experiencia de aprendizaje institucional*. Unacar. México.

Santandreu, M. (2004). Recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje del área de matemáticas. *Comunicación y Pedagogía*, *200*, 65-70.

O USO DO LAPTOP MÓVEL EM AULAS DE MATEMÁTICA

Ana Maria Batista Eivazian, Maria Elisabette Brisola Brito Prado
Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN Brasil
anaeivazian@gmail.com, bette.prado@gmail.com

Resumo. Nesse trabalho procuramos compreender o processo de inserção do Laptop móvel e com conectividade, no cotidiano da sala de aula de professores que ensinam matemática numa escola pública participante do Projeto "Um Computador por Aluno" (UCA) do MEC. A pesquisa desenvolvida de natureza qualitativa e interpretativa teve a participação de cinco professores do Ensino Fundamental. A análise dos dados coletados mostrou que as práticas desses professores usando o laptop nas aulas de matemática, ocorrem de forma distinta. Alguns professores fazem o uso dos recursos tecnológicos de forma inovadora, outros utilizam para completar uma determinada atividade de modo a ampliar e diversificar a situação de aprendizagem do aluno e, ainda outros, utilizam apenas para reproduzir aquilo que faz no seu cotidiano. Isto implica em repensar a formação do professor contemplando ações que propiciem vivenciar de forma articulada as dimensões Tecnológicas, Pedagógicas e do Conteúdo Matemática.

Palavras chave: educação matemática, projeto UCA, laptop

Abstract. In this paper we seek to understand the process of insertion of Laptop and with mobile connectivity in everyday classroom teachers who teach math in a public school participating in the project "One Laptop per Student" (UCA) of MEC. This qualitative and interpretive research study was developed with five elementary school teachers in a public school in a city within the State of São Paulo. Analysis of the data shows that the practices of these teachers using the laptop for teaching mathematics occur differently. Some teachers make use of technological resources in an innovative way, others use to complete a particular activity in order to expand and diversify the learning situation of the student, and still others use just to reproduce what they do in their daily life. This implies rethinking teacher education contemplating actions that provide experience in articulation with the dimensions Technological, Pedagogical and Content of Mathematics.

Key words: mathematics education, UCA project, laptop

Introdução

O uso do computador na escola é um tema que vem sendo estudado por vários pesquisadores, uma vez que implica em repensar os processos de ensino e aprendizagem. Tais estudos mostram que computador ainda é usado de forma pontual e restrita a prática pedagógica do professor da educação básica (Prado e Valente, 2003; Borba e Penteado, 2010). Muitas vezes o computador é utilizado meramente para substituir aquilo que é feito com lápis e papel, ou seja, não há integração dos recursos tecnológicos aos conteúdos curriculares.

De fato, para o professor apropriar-se dessa tecnologia e reconstruir a sua prática requer um processo de formação que possa potencializar o desenvolvimento de novas formas de ensinar os conteúdos escolares. Nesse sentido, as pesquisas também apontam que existem várias iniciativas governamentais criando possibilidades para que os professores possam se preparar para lidar com os novos artefatos da sociedade atual.

No entanto, nessa fase na qual ainda não foi consolidada a integração do computador no cotidiano escolar, eis que surge um novo desafio na educação. A partir de 2010, o Ministério da Educação (MEC) inicia a implantação do Projeto Um Computador por Aluno (UCA) envolvendo 300 escolas localizadas em todos os estados brasileiros.

No Projeto UCA cada aluno passa a ter em suas mãos em sala de aula um computador portátil. Tais computadores, chamados de Laptop Educacional, possuem conexão à web, aplicativos, softwares e jogos educacionais. Além desses recursos, os alunos podem ter acesso a Portais Educacionais, Objetos de Aprendizagem e outros disponíveis na rede. No entanto, essa nova configuração de sala de aula necessita de um professor preparado para criar condições de aprendizagem significativas para os alunos construírem conhecimentos, uma vez que é o professor que atribui o sentido pedagógico ao uso do laptop pelos alunos, tal como salienta Valente (2011) que se reporta a Alan Kay, quando diz "[...] as ideias não estão no laptop, mas na cabeça das pessoas. São elas e não a tecnologia que criará melhores condições para uma educação coerente com as necessidades da era digital e da mobilidade" (p.31).

Diante desse novo cenário da educação surgiram questões instigantes que nortearam esta pesquisa que tem como objetivo analisar e compreender o processo de inserção do laptop pelos professores que ensinam Matemática em sua prática pedagógica.

Fundamentação teórica

O processo de integração da tecnologia ao conteúdo curricular requer do professor a reconstrução do conhecimento profissional. Quanto aos conhecimentos necessários ao desenvolvimento profissional do professor, Shulman (1986) agrupa-os em: 1) conhecimento do conteúdo específico; 2) conhecimento pedagógico geral; 3) conhecimento pedagógico do conteúdo. Todos eles se relacionam ao conhecimento pessoal e informal do professor, ao conhecimento do contexto da escola, da comunidade, da sociedade e de si próprio.

Em relação ao conhecimento do professor de Matemática, Ball e Bass (2003) destacam a importância do conceito de conhecimento do conteúdo pedagógico porque ele distingue o conhecimento próprio do professor (aquilo que ele sabe para ele mesmo), da mistura de conteúdos pedagógicos necessários para ensinar um assunto. Essa noção rapidamente se espalhou entre os pesquisadores não só matemáticos como de outras ciências.

Além desses conhecimentos levantados por Shulman e por Ball, com a chegada das tecnologias nas escolas, e especificamente na área de Matemática, é necessário integrar também o Conhecimento da Tecnologia ao Objeto Matemático. Não basta um conhecimento apenas tecnológico. Ele precisa estar integrado ao conhecimento específico do conteúdo matemático;

do contrário o professor não conseguirá fazer um uso adequado dos recursos tecnológicos, no sentido de propiciar uma nova forma de compreender e representar conceitos matemáticos.

Koehler e Mishra (2009) se apoiaram nos estudos de Shulman (1986) e incluíram o Conhecimento Tecnológico para ensinar matemática. Criaram um modelo ao qual deram o nome de TPACK - Technology, Pedagogy and Content Knowledge. Esta é uma complexa interação entre os três conhecimentos fundamentais: Conhecimento do Conteúdo, Conhecimento Pedagógico e Conhecimento da Tecnologia. A interação entre esses três conhecimentos tanto teóricos como práticos produz os tipos de conhecimentos flexíveis necessários para viabilizar a integração da tecnologia ao ensino.

Em se tratando do Conhecimento Tecnológico, ressaltamos que na perspectiva construcionista, os recursos tecnológicos são utilizados com foco voltado para propiciar ao aluno aprender de forma ativa, ou seja, explorando suas hipóteses, seu conhecimento intuitivo e/ou formal, explicitando suas ideias, registrando seus pensamentos e conclusões, de modo a construir conhecimentos. Na medida em que o aluno vai criando algo no computador ele tem a oportunidade de ir manipulando conceitos, refletindo sobre os resultados, reflexão essa que pode produzir diversos níveis de abstração. A esse processo em que o aluno interage com o computador, vivenciando um movimento de ação/pensamento: descrição-execução-reflexão-depuração-(nova)descrição, Valente (2002) denominou Espiral de Aprendizagem.

Portanto, não basta ao professor ter apenas o conhecimento tecnológico. O professor precisa articular os vários conhecimentos, ou seja, atuar na intersecção entre os três tipos de conhecimento: Tecnológico, Pedagógico e de Conteúdo, conforme o modelo TPACK. De fato, não há como falar em tecnologias em sala de aula de matemática, se não considerarmos os tipos de concepção pedagógica e de currículo de matemática que permeiam essas aulas.

Historicamente o ensino de matemática tem se baseado numa abordagem tradicional, centrada na figura do professor, sendo ele quem define cada passo do processo de ensino. Autores como Skovsmose (2007) e D'Ambrosio (2003) afirmam que situações ricas em aprendizagem matemática são encontradas em vários locais fora do sistema escolar, nas ruas, entre pessoas que nunca foram para a escola. A educação matemática está envolvida em atos simples como comprar mercadorias, ler uma propaganda, usar um cartão de crédito para fazer um pagamento, ou mesmo ao se operar um caixa em um banco, por exemplo, no entanto, dificilmente as pessoas se dão conta disso. Ou seja, geralmente a matemática é entendida como tal, apenas entre as quatro paredes de uma sala de aula regular onde os alunos automaticamente copiam o conteúdo ou ainda a resolução da tarefa passada na lousa pelo professor.

D'Ambrosio (2003) propõe orientar o currículo matemático para a curiosidade, para a criatividade e questionamento, para que se possa formar um cidadão pleno e consciente de sua participação no processo de criar uma sociedade mais justa. Para o autor, matemática é raciocínio. Ser racional não significa saber bem a matemática escolar. O autor também afirma que raciocínio e razão são inerentes à espécie humana, mas a matemática da escola acaba não explorando esses aspectos. Muitas vezes pais e professores se iludem ao achar que se a criança se sai bem em matemática na escola, tem garantias que sairá bem na sociedade e na vida. O autor reitera que é urgente que os professores mudem de atitude, levando em consideração o conhecimento de matemática que o aluno já traz de casa, aproveitando para trabalhar esse conhecimento para integrar as novas tecnologias em seu dia-a-dia. É preciso que as crianças sejam preparadas para lidar com o mundo à sua volta e isso inclui lidar com as tecnologias, as diferentes linguagens e formas de representar o conhecimento.

Valente (2002) destaca que a complexidade da notação matemática tem feito com que esta se torne o objeto central nas práticas escolares. Com isso, segundo o autor, a matemática deixa de explorar a potencialidade de o aluno desenvolver o raciocínio, para adquirir, por exemplo, técnicas de resolver equações, e não a de pensar sobre o problema, que pode ser expresso através da técnica de resolução de equação.

Metodologia

Nossa pesquisa norteou-se pela busca de respostas para as seguintes questões:

- O professor que ensina Matemática fará uso dessa tecnologia na sua prática?
- Quais dificuldades poderão ser encontradas no processo de inserção do laptop em sala de aula?
- Existem possibilidades de desenvolver práticas pedagógicas inovadoras nas aulas de matemática.

Para tanto, o estudo desenvolveu-se no enfoque de pesquisa qualitativa e interpretativa, tendo sido realizada diretamente em uma escola pública municipal do estado de São Paulo participante da fase piloto do Projeto UCA com cinco professores do Ensino Fundamental, sendo quatro de 1º a 5º ano e um de 6º a 9º ano. Tais professores, os quais denominamos de A, B, C, D e E, participaram de um curso de formação em serviço específico para o Projeto UCA que envolvia ações práticas realizadas no próprio contexto da escola. Portanto, durante a coleta de dados, esses professores estavam vivenciando o processo de apropriação pedagógica da tecnologia.

A coleta de dados foi realizada no período de agosto a dezembro de 2011 e os instrumentos utilizados foram questionários para levantamento do perfil dos professores, entrevistas semiestruturadas, conversas informais e registros de observações feitas em sala de aula.

Resultados e discussões

Dentre os cinco professores que ensinam matemática apenas um deles (Prof.A) tem formação matemática. Os demais são formados em pedagogia e isto já demonstra que esses professores que ensinam matemática nos anos iniciais (1º ao 5º ano) têm um preparo sobre o conhecimento específico do conteúdo de matemática restrito aos programas dos cursos de Pedagogia. Em relação ao conhecimento tecnológico, os dados mostraram que alguns professores tiveram oportunidade de participar de cursos de informática para uso pessoal e eventualmente realizavam alguma atividade com os alunos no laboratório de informática, antes da chegada dos laptops e, outros eram iniciantes na área.

O interessante é que todos eles, os cinco professores, foram unânimes em reconhecer que diante dessa nova tecnologia se vê compelido a mudar suas práticas. E foi possível observar alguns indícios de mudanças no fazer pedagógico dos professores.

Entretanto, as práticas dos professores ocorrem de forma distinta. Alguns professores demonstram serem mais ousados ao fazer o uso dos recursos tecnológicos de forma inovadora; outros utilizam para completar uma determinada atividade de modo a ampliar e diversificar a situação de aprendizagem do aluno; ainda outros, utilizam apenas para reproduzir aquilo que fazem no seu cotidiano.

Os professores que atuam nas classes dos anos iniciais (1º ao 5º ano) priorizam o uso de Jogos Educacionais, tanto de memorização quanto de estratégias. A Profa. E do 4º ano, por exemplo, utiliza o laptop nas aulas de matemática para trabalhar com Jogos de memorização, como o jogo de tabuada, bingos de contas entre outros. Sobre este tipo de jogo, Muniz (2010) ressalta que muitas vezes o jogo pode se constituir num erro estratégico pedagógico, quando utilizado em situações matemáticas pouco significativas para o aluno. O autor defende que o uso do jogo em sala de aula deve propiciar o desenvolvimento do espírito matemático do aluno.

Além do jogo a professora faz uso do laptop em outras situações das aulas de matemática, como por exemplo, a calculadora é usada apenas para o aluno constatar se os resultados das operações feitas no caderno estão corretos. Os alunos também são orientados para copiar da lousa o enunciado do problema e digitar o resultado usando o editor de texto. Estes são alguns exemplos de uso da tecnologia que ocorre em práticas tradicionais, ou seja, aquelas que restringem a exploração do pensamento criativo e investigativo do aluno. Nesse sentido, podemos perceber que o uso da tecnologia ocorre apenas na perspectiva na substituição do papel e lápis pelo computador.

Entretanto, essa prática da Profa E pode ser entendida como uma fase inicial do seu processo de apropriação pedagógica da tecnologia. Na medida em que esta fase avança, por meio de ações formativas envolvendo práticas reflexivas, compartilhadas com outras experiências que mostram novas formas de ensinar e de aprender usando os recursos tecnológicos, a professora poderá repensar novos caminhos para fazer o uso inovador do laptop nas aulas de matemática.

Um jeito diferente de utilizar o laptop também na atividade de jogos foi realizado pela Profa D do 3º ano, que selecionou um jogo sobre sistema monetário brasileiro. É interessante porque nesse jogo o aluno precisa assumir o papel de um consumidor num supermercado virtual e tem como desafio não ultrapassar a quantia em dinheiro recebida no inicio da jogada. Portanto é um tipo de jogo que demanda do aluno o fazer cálculos e a antecipação de resultados. Nessa situação, a Profa D ainda solicitava aos alunos a explicitação das estratégias utilizadas, através da escrita, usando o editor de texto e a oralidade no momento de socialização com os colegas da turma.

Outra forma interessante no trabalho da Profa D foi de propor para os alunos construírem o material para um jogo, inclusive suas regras, usando diferentes recursos disponíveis na escola. Essa professora descobriu na internet um jogo de estratégia de nome Kalah que foi inventado na África por agricultores. O jogo surgiu na época do plantio, quando os pais levavam os filhos para a semeadura, fazendo-os jogarem as sementes nas covas feitas por eles. Essa atividade, com o passar do tempo se tornou lúdica e se transformou em jogo.

Assim, conhecendo essa historia, os alunos construíram o tabuleiro, que representa o lugar da semeadura com as covas, utilizando caixas de ovos vazias e as sementes usando lacres de latas de refrigerantes, recolhidos num projeto de reciclagem de Ciências. Nas aulas de Artes os alunos decoraram e personalizaram seus tabuleiros e nas aulas de Geografia e História, eles fizeram pesquisas na Internet sobre a África, com a intenção de conhecerem a região que deu origem ao jogo Kalah. O laptop também foi utilizado para os alunos descreverem as regras do jogo, as quais foram lidas e relidas em sala de aula até ficarem com uma escrita clara e legível pela turma.

A Profa D defende o uso desse jogo, pois além de exigir o raciocínio, trabalha as operações básicas, requer antecipação de resultados e uma lógica na sequenciação das ideias na hora de escreverem as estratégias usadas para ganhar o jogo ou explicarem as regras para os colegas.

Ela mesma afirma "[...] quando o aluno pensa no que faz e descreve seus passos, ele usa a ordenação e a sequenciação de ideias de acordo com uma lógica. E isso é trabalhar matemática também."

Na atividade do jogo Kalah, podemos perceber que, do ponto de vista pedagógico o uso da tecnologia trouxe novas oportunidades de aprendizagem para o aluno, uma vez que ele pode expressar por meio da escrita, as regras e as estratégias que foram sendo depuradas ao compartilhar oralmente com os colegas na turma. A atividade de construção do jogo Kalah propiciou aos alunos a vivenciarem a Espiral de Aprendizagem e a trabalhar de forma integrada as várias áreas disciplinares e os diversos recursos, inclusive os tecnológicos.

O uso do laptop feito pelo Prof A que tem formação matemática e atua com os alunos do 6º ao 9º ano se desenvolveu na perspectiva do trabalho por Projeto. Especificamente com os alunos do 8º ano, o Prof A desencadeou em sala de aula uma discussão sobre o tema "Consumo consciente da água" com a intenção de: propiciar ao aluno aprender a ler uma conta de água (interpretação); a comparar os gastos do consumo de água de suas casas e as dos colegas (comparações); entender o sistema de cobrança progressivo de acordo com o consumo (estabelecimento de relações); conscientizar sobre a importância de reduzir o consumo da água (visão sistêmica da ecologia) e elaborar uma proposta de redução do consumo em suas casas (criação de estratégias para lidar com realidade).

No inicio do desenvolvimento do Projeto, o Prof A colocou na lousa algumas perguntas instigadoras relacionadas ao tema para orientar a busca de informações em vários sites de referencia. Nessa busca, os alunos selecionaram informações textuais e dados expressos em gráficos e tabelas para serem analisados. Num segundo momento, os alunos também trouxeram as contas de suas residências para aprenderem a fazer a leitura comparando-as com as contas dos colegas.

Com base na pesquisa feita e nas discussões em sala de aula, os alunos responderam as perguntas norteadoras, usando o editor de texto e, posteriormente, apresentaram no coletivo da turma, incluindo uma proposta real para diminuir os gastos do consumo de água.

Esta atividade exigiu além do uso da internet para fazer busca de forma significativa, o uso do Editor de texto e da Planilha eletrônica para a elaboração de gráficos que pudessem representar os dados coletados pela turma. Do ponto de vista pedagógico o trabalho por Projeto, que se caracteriza como uma prática pedagógica inovadora integrou o uso dos recursos tecnológicos. O Prof A pode explorar de forma contextualizada os conteúdos matemáticos na perspectiva de Skovsmose e D'Ambrosio em termos de orientar uma prática de ensino voltada para a curiosidade, para a criatividade e questionamento, para que se possa formar um cidadão pleno e consciente de sua participação no processo de criar uma sociedade mais justa.

Considerações finais

O processo de integrar os recursos do computador móvel nas aulas de matemática pode ocorrer de forma gradativa, iniciando muitas vezes complementando aquilo que o professor faz no seu cotidiano. O que sobressai como aspecto inovador e que se tornou quase rotineiro entre os professores participantes, é o incentivo à expressão escrita e oral das ideias dos alunos na resolução de problemas e descrição de estratégias, o que auxilia na vivência da Espiral de Aprendizagem. Esta prática proporciona aos alunos a explicitação do processo de raciocínio dando condições mais reais para o professor fazer a mediação da aprendizagem. Constatamos que o surgimento de novas práticas foi impulsionado pela presença dos laptops nas mãos dos alunos. Esta inovação provocou uma abertura nos professores que eram iniciantes nas práticas tecnológicas e um salto de qualidade naqueles que já tinham uma relação de "conforto" com a tecnologia.

Ao tratar das tecnologias dentro dos conteúdos de matemática, precisamos também pensar qual a matemática que esse professor tem embutida em sua prática. Uma matemática formal, voltada para a notação, para o treino de algoritmos, não será modernizada e sempre será vista pelos alunos como difícil e chata, mesmo se trabalhada em computador. Para conseguir alunos com o perfil de futuros cidadãos a quem caberá os desígnios deste país, a matemática é fundamental, mas precisa dar um passo além, em direção à matemática crítica, do dia a dia, do aprender-fazendo, da etnomatemática, aliados a um uso construcionista do computador.

O desafio agora é tratarmos os laptops como parte integrante do currículo escolar, como foram (e são) os cadernos, as mesas, as carteiras, a lousa e o apagador e irmos muito além da substituição. Eles devem ser usados, de acordo com a expressão do professor Ubiratan D'Ambrosio "como se usam relógios". Só assim estaremos tirando a escola do século XVIII e colocando-a definitivamente e de modo eficaz, no século XXI.

E para isto a formação do professor é fundamental no sentido de contemplar em suas ações, situações que favoreçam ao professor vivenciar de forma articulada as dimensões Tecnológicas, Pedagógicas e do Conteúdo Matemática conforme o modelo TPACK.

Referências bibliográficas

Ball, D.L. e Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis e E. Simmt, (Eds.) *Proceeding of 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Educations Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, A.B – CMESG/GCEDM.

Borba, M.C.e Penteado, M.G. (2010). *Informática e Educação Matemática*. 4ª.edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

Koehler, M.J e Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? In *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9* (1), 60-70.

Muniz, C.A. (2010). *Brincar e Jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Prado, M.E.B.B. e Valente, J.A. (2003). A Formação na Ação do Professor: Uma abordagem na e para uma nova prática pedagógica. In: J. A. Valente (Org.) *Formação de Educadores para o Uso de Informática na Escola.* (pp. 21-38) Campinas, SP: NIED UNICAMP.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Education Researcher,* 15(2), 4-14.

Skovsmose, O. (2007). *Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade.* São Paulo: Cortez.

Valente, J.A. (2011). Um Laptop para cada Aluno: promessas e resultados educacionais efetivos. In: M.E.B. Almeida e M.E.B.B. Prado, (Orgs.) *O computador portátil na escola: Mudanças e desafios nos processos de ensino e aprendizage* (pp.24-44). São Paulo: Avercamp.

Valente, J.A. (2002). A Espiral da Aprendizagem e as Tecnologias da Informação e Comunicação: repensando conceitos. In: M.C. Joly (Org.). *Tecnologia no ensino: implicações para a aprendizagem* (pp. 15-37) São Paulo: Casa do Psicólogo.

E-LEARNING DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO PADRÃO SCORM

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa, Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil Brasil
iaqchan@ulbra.br; claudiag@ulbra.br

Resumen. O objetivo desse trabalho foi investigar o desenvolvimento de uma sequência didática em formato eletrônico, com o conteúdo matemático de Análise Combinatória, utilizando a plataforma eletrônica de aprendizagem ILIAS e recursos metodológicos diferenciados, possibilitando gerar cenários individualizados de navegação. A metodologia de investigação consistiu no desenvolvimento de um e-learning com os principais conceitos do tema: Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Arranjo e Combinação Simples, com diferentes apresentações didáticas, resultando na organização de dezessete objetos de aprendizagem com os conceitos estudados. O e-learning desenvolvido proporcionou, aos alunos, a escolha entre os diferentes objetos multimidiáticos, possibilitando a continuação na sequência ou a revisão do conteúdo já estudado e o acompanhamento da sua aprendizagem, através de um Teste Adaptativo Computacional, valorizando a autoavaliação durante a realização dos estudos.

Palavras chave: educação matemática. análise combinatóeia. e-learning

Abstract. The goal of this study was to investigate the development of a didactic sequence in electronic format, with the mathematical content of Combinatorics, using electronic learning platform ILIAS and methodological resources, making it possible to generate individualized navigation scenarios. The research methodology consisted in developing an e-learning with the concepts of Enumeration, Permutation, and Combination in different didactic presentations, resulting in the organization of seventeen learning objects based on the concepts studied. The developed e-learning program provided the students a choice between the different multimedia objects, enabling the follow-up continuation in the presentation sequence or the revision of contents already studied and the monitoring of their learning, through a Computer-Adaptive Test, valuing the self-assessment during studies.

Key words: mathematics education. combinatorics. E-learning

Introdução

Esse trabalho apresenta as atividades realizadas para o desenvolvimento de um *e-learning* (*eletronic learning*), no padrão SCORM (Sharable Content Object Reference Model), com o conteúdo de Análise Combinatória, direcionadas ao Ensino Médio, com o objetivo de investigar alternativas à apresentação sequencial e linear dos módulos de aprendizagem. Em uma apresentação linear os módulos (os conteúdos de um determinado campo de conhecimento) são apresentados em uma ordem sequencial prefixada com uma avaliação que finaliza a apresentação ou, em caso de não aprovação, a sequência é reiniciada e apresentada tal como anteriormente. O *e-learning* desenvolvido apresenta um modo alternativo, permitindo que cada estudante tenha a sua própria sequência, de acordo com suas preferências e necessidades didáticas.

Análise Combinatória E Sua Didática

Segundo Ribnikov (1988) a Análise Combinatória estuda os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas a partir dos seus elementos, mediante certas transformações que causam mudanças na estrutura ou na composição dos mesmos. De maneira geral, pode-se dizer que é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações entre conjuntos discretos. Para Batanero, Godino e Pelayo (1996) a Análise Combinatória é um componente essencial da Matemática Discreta e, como tal, tem um importante papel na Matemática escolar. Também afirmam que, além da sua importância no desenvolvimento da ideia de probabilidade, a capacidade combinatória é um componente fundamental do pensamento formal.

Dentre as razões para o ensino da Análise Combinatória, descritas por Kapur (1970), destacam-se as oportunidades proporcionadas pelos problemas combinatórios como: os conceitos de contagem, a Modelagem Matemática, a possibilidade de conjecturar, contando sem contar através de generalizações, as otimizações; as aplicações nos campos das Ciências; o desenvolvimento de conceitos de relações, funções, classes de equivalência, isomorfismo; ajuda no desenvolvimento do pensamento combinatório que examina todas as possibilidades, enumera e encontra a melhor solução e, pelo planejamento adequado, trabalha com problemas que não dependem de cálculos complicados, permitindo que seja apresentado nos diversos níveis escolares.

A classificação do tipo de problema a ser tratado facilita na compreensão do mesmo e na identificação do método a ser utilizado para solucioná-lo. Batanero, Godino e Pelayo (1996) classificam os principais tipos de problemas, abordados nos estudos de Análise Combinatória, diferenciando-os nas seguintes categorias:

- De existência, onde se comprova a existência, ou não, de um determinado tipo de estrutura. Ex: O problema dos matrimônios: Ana conhece André, Jose e Carlos; Beatriz conhece Jose e Carlos; Carmem conhece Carlos, Antonio e Julio; Daniela conhece André e Jose; Elisa conhece Carlos, Jose e André; Leticia conhece Antonio, João e Francisco. É possível achar um marido para cada moça entre os rapazes que elas conhecem?

- De enumeração, onde são enumerados ou listados os elementos que possuem determinada propriedade. Ex: Temos que escolher as cores de uma bandeira para um novo país. A bandeira tem 2 faixas de cores distintas que devem ser escolhidas entre as cores: azul, vermelho e amarelo. Para escolher qual bandeira é a mais bonita, faça a todas as bandeiras possíveis;

- De contagem, onde é determinado o número de elementos que possuem uma ou várias propriedades. Ex: O dominó tem 2 tipos de peças, as peças duplas, os dois lados tem números iguais, e as ordinárias, os dois lados tem números diferentes. Quantas peças ordinárias tem a soma dos seus lados igual a seis?
- De classificação, onde, devido a inviabilidade de contagem, é feita uma classificação mediante relações apropriadas. Ex: Quantos inteiros entre 0 e 1000 não são divisíveis por 2 e 3?
- De otimização, quando é possível associar uma função ao conjunto solução, a qual induz no conjunto uma ordem total, podendo então considerar as noções de máximo e mínimo. Ex: Na informática, problemas como o algoritmo de busca linear em uma lista ordenada com *n* elementos, executa *n* operações de comparação entre os elementos da lista e o elemento procurado. A otimização ao problema através de uma *busca binária*, executa para o pior caso, $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ operações, ou seja, tem uma complexidade computacional $O(\log_2 n)$, que é bem inferior a complexidade $O(n)$ da busca linear.

A classificação dos problemas em Análise Combinatória é um facilitador, pois a compreensão do tipo de problema ajuda na escolha da estratégia mais apropriada a ser utilizada na resolução do mesmo.

Para os problemas de contagem, Dubois apud Batanero, Godino e Pelayo (1996) propõe três estratégias:

- *seleção de uma amostra* a partir de um conjunto de objetos - dado um conjunto de *n* elementos distintos, são feitos agrupamentos de *r* elementos selecionados;
- *colocação de objetos em casas* - dado um conjunto de *n* elementos distintos, são selecionados *r* elementos que são distribuídos em *k* posições ou casas;
- *partição de um conjunto* de objetos em subconjuntos – dado um conjunto de *n* elementos distintos, são selecionados *r* elementos que são distribuídos em *k* posições ou casas, considerando-se os elementos nas casas como subconjuntos ordenados tem-se cada distribuição como uma partição ordenada de elementos distintos em subconjuntos ordenados.

A distinção entre os modelos estratégicos é essencial do ponto de vista matemático, pois os objetos e representações dos problemas são distintos e estão diretamente associados aos procedimentos e técnicas a serem empregados na solução dos problemas. Segundo Fischbein e Gazit apud Batanero, Godino e Pelayo (1996) o conceito do Princípio Fundamental da Contagem ou Arranjos com e sem repetição de elementos pode ser explorado com o uso de números, letras e figuras geométricas. Em seus estudos 80% dos alunos, nas idades de 10 a 15 anos, construíram a árvore de possibilidades sem nenhum tipo de ajuda. Uma vez que seja introduzido o Princípio Fundamental da Contagem é aconselhável a introdução do conceito de Permutações Simples, cuja solução consiste na mudança da ordem dos elementos, a estratégia para a dedução da fórmula e sua conexão com a Árvore de Possibilidades. Os mesmos autores identificaram que os alunos têm maiores dificuldades para os conceitos de Permutação e Arranjo com repetição, seguido de Arranjos e Combinações Simples. Quanto à natureza dos objetos a serem manipulados, após os alunos estarem acostumados a operar com números e letras, é possível fazer uso de objetos como bandeiras e comissões.

Em síntese, a organização de uma sequência didática com o conteúdo de Análise Combinatória, segundo Batanero, Godino e Pelayo (1996), levando em conta as diversas categorias de problemas e as possíveis estratégias a serem usadas, deve iniciar-se por situações introdutórias aos conceitos combinatórios, onde seja possível a enumeração sistemática de todas as configurações com um número de possibilidades não elevado. A partir da capacitação em resolver tais problemas é possível a compreensão dos algoritmos de geração sistemática de todas as possibilidades.

Sequência Didática Com Análise Combinatória

Os modos de apresentação, na figura 1, mostram uma sequência linear e uma sequência alternativa com multicaminhos, onde cada conteúdo A, B e C pode ser apresentado, aos estudantes, de três maneiras diferentes. As setas em negrito mostram como um estudante poderia acessar os módulos dos três conteúdos, criando uma sequência de navegação individual entre os conteúdos a serem estudados. Caso a sequência seja reiniciada, os mesmos conteúdos serão apresentados de modo que o aluno possa acessar outros objetos de aprendizagem, criando um novo caminho de navegação.

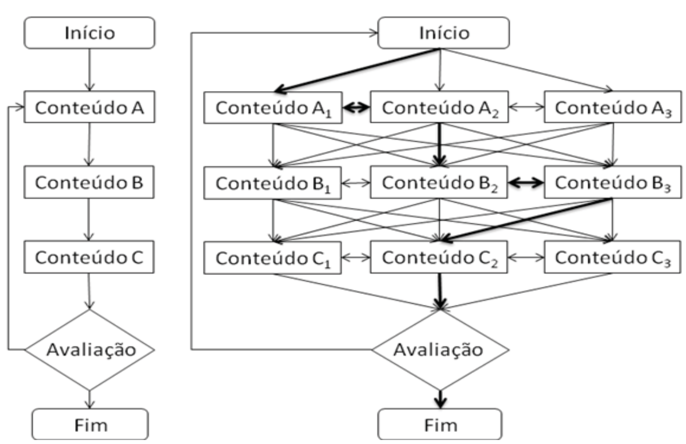


Figura 1: Sequência linear e Sequência alternativa de multicaminhos

Dentro de uma proposta concreta de trabalho, desenvolveu-se um e-learnig que possa ser utilizado por qualquer instituição de ensino, para tal adotou-se o padrão SCORM como diretriz para os objetos de aprendizagem e para a sequência eletrônica.

SCORM

O padrão SCORM é um conjunto das melhores práticas em *e-learning* com contribuições contínuas de entidades como *Alliance of Remote Instructional Authoring & Distribution Networks for Europe* (ARIADNE), *Aviation Industry CBT Committee* (AICC), *Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE), *Learning Technology Standards Committee* (LTSC) e *IMS Global Learning Consortium Inc.* e sob a gerência da *Advanced Distributed Learning Initiative (ADL)*. As principais características são a portabilidade e a granularidade. A portabilidade é a característica que possibilita que um *e-learning* possa ser apresentado em diferentes plataformas de ensino, que adotem o padrão SCORM, mantendo a ideia do objetivo instrucional proposto pelo seu desenvolvedor. A granularidade é a característica que permite que os módulos possam ser utilizados na composição de outras sequências, para tal é necessário que os conteúdos apresentados nos módulos sejam independentes de um contexto específico ou de outros módulos para a compreensão e aprendizagem do conceito abordado.

Teste adaptativo computacional

As avaliações com fins educativos consistem, essencialmente, em determinar as mudanças qualitativas por que passam os aprendizes, em termos de aquisição de aprendizagens, portanto a avaliação da aprendizagem é o processo de determinar em que medida ou grau se conseguem tais mudanças, possibilitando, assim, um juízo de valor acerca da qualidade dessas supostas mudanças (ANDRIOLA, 2008). Nesse sentido, os testes que se fundamentam em um *score* bruto, nos quais os resultados dependem do conjunto de itens que compõem o instrumento de medida, ou seja, as análises e interpretações estão associadas à prova como um todo, característica principal da Teoria Clássica do Teste, torna inviável a comparação entre indivíduos que não foram submetidos aos mesmos testes (ANDRADE, TAVARES e VALLE, 2000), não sendo a melhor alternativa para identificar habilidades e competências. Uma estimativa mais eficiente pode ser conseguida quando se apresentam questões compatíveis com os respondentes.

Segundo Baker (2001), as habilidades, competências e inteligências são consideradas pela Psicologia como variáveis latentes, não visíveis, ou seja, são abstratas, portanto não são passíveis de uma medição direta, logo, do ponto de vista psicométrico, a Teoria de Resposta ao Item (TRI), com seus modelos probabilísticos, apresenta-se como uma alternativa eficaz para a identificação das habilidades e competências.

No *e-learning* desenvolvido utilizou-se de Testes Adaptativos Computacionais (TAC), com base na TRI, como recursos didáticos para o acompanhamento da aprendizagem. Um TAC, segundo Costa (2009), é um sistema que apresenta, como um examinador humano faria, questões com níveis de dificuldades adequadas ao desempenho do estudante, com a intenção de estimar o conhecimento ou a proficiência do indivíduo, em uma determinada área de conhecimento.

Para um TAC é necessário um banco de questões com uma boa qualidade psicométrica, para uma melhor estimativa das habilidades do respondente, e um algoritmo de seleção das questões a serem apresentadas.

O desenvolvimento do banco de questões foi baseado em um estudo realizado por Homa (2011) com o objetivo de identificar os tipos de problemas de Análise Combinatória, classificando-os em cinco níveis de dificuldade, em uma escala de 1 a 5. O desenvolvimento do TAC permitiu, além do uso de questões de múltipla escolha, questões com respostas discretas, necessariamente números inteiros, que diminuíram as probabilidades de acerto casual nas questões do teste. Foi adotada como premissa básica, a compatibilidade com pacotes de *e-learning* desenvolvidos no padrão SCORM, permitindo a utilização por quaisquer instituições que possuam, em seu ambiente de aprendizagem eletrônica, plataformas de apresentação compatíveis com o padrão. A ferramenta, como teste, também possui um caráter generalista podendo ser usado com conteúdos de qualquer campo de conhecimento. A figura 2 apresenta um exemplo de uma questão de Arranjo Simples do TAC.

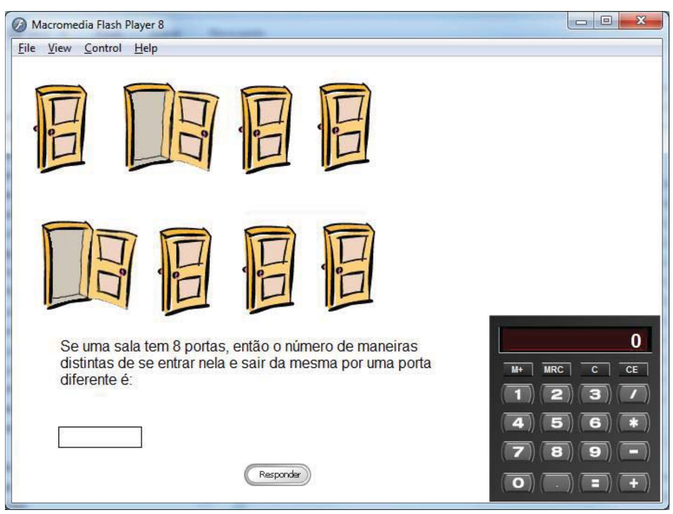


Figura 2 - questão com imagem auxiliar e resposta discreta.

Objetos de aprendizagem

A sequência desenvolvida introduz os conceitos da Análise Combinatória através de situações problema com as atividades sugeridas pelos estudos de Batanero, Godino e Pelayo (1996).

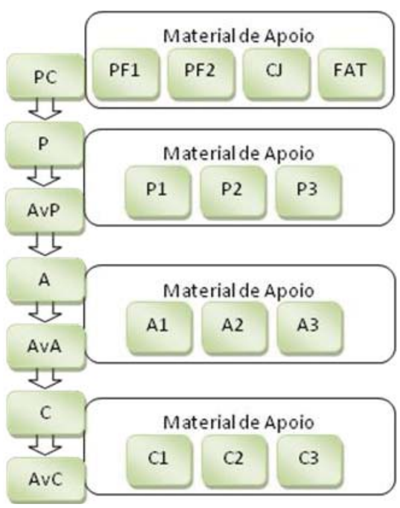
Foram disponibilizados objetos de aprendizagem, em uma abordagem construtivista, com atividades interativas para a realização de agrupamentos com elementos geométricos com a intenção facilitar a generalização dos problemas.

Também foram desenvolvidos objetos de aprendizagem com um material mais explicativo com a apresentação formal dos conceitos e suas fórmulas para cálculo do número de agrupamentos para os principais problemas combinatórios para uma recuperação de conceitos que os alunos podem acessar de acordo com suas necessidades dicáticas.

A sequência foi organizada em quatro módulos: Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples. O acompanhamento da aprendizagem foi realizado, ao final de cada módulo, através do TAC desenvolvido, apresentado ao aluno quando o mesmo estivesse seguro para submeter-se à avaliação, exceto no módulo do Princípio Fundamental da Contagem que não possui um teste associado.

Ao final do teste, a interface informa ao aluno a estimativa da sua habilidade baseada na Teoria de Resposta ao Item. Adotou-se a linha de corte da habilidade em 3, dentro de uma escala de 1 a 5, ou seja, a atividade avaliação é considerada *satisfeita* para um valor igual ou superior a 3.

Na figura 3 apresenta-se a organização dos módulos de estudo e os objetos de aprendizagem para a sequência didática com o conteúdo de Análise Combinatória, a legenda apresenta a nomenclatura dos conceitos utilizados no diagrama.



Atividade	Nomenclatura	Atividade	Nomenclatura
Princípio da Contagem	PC	**Arranjo**	A
Contagem_compl_1	PC1	**Arranjo_compl_1**	A1
Contagem_compl_2	PC2	**Arranjo_compl_2**	A2
Contagem_Conjuntos	CJ	**Arranjo_compl_3**	A3

Contagem_Fatorial	FAT	**Avaliação Arranjo**	AvA
Permutação	P	**Combinação**	C
Permutacao_compl_1	P1	**Combinacao_compl_1**	C1
Permutacao_compl_2	P2	**Combinacao_compl_2**	C2
Permutacao_compl_3	P3	**Combinacao_compl_3**	C3
Avaliação Permutação	AvP	**Avaliação Combinação**	AvC

Figura 3 - Organização dos objetos de aprendizagem.

Para essa sequência didática foram utilizados vinte objetos de aprendizagem, três objetos de uso público da iniciativa RIVED (Rede Internacional Virtual de Educação) e dezessete desenvolvidos, abordando os principais conceitos da Análise Combinatória: o Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples. Os objetos de aprendizagem dos conceitos necessários para a resolução de problemas de contagem foram desenvolvidos em *Flash* e *actionscript 2.0*, e as atividades interativas são do tipo clicar e arrastar, permitindo a organização dos elementos como nas atividades com objetos concretos.

Cada objeto de aprendizagem é organizado em uma sequencia de problemas com uma atividade interativa associada e conta com o recurso auxiliar dos vídeos tutoriais com suporte de áudio ou legendas, que demonstram a solução dos problemas apresentados.

A figura 4 apresenta um problema de Permutação Simples com a atividade interativa relacionada.

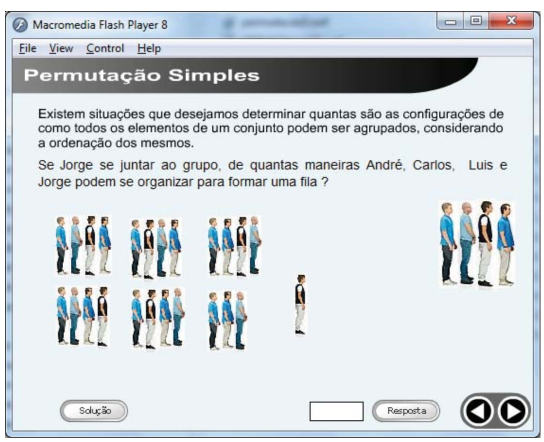



Figura 4 - Problema de Permutação Simples com a atividade interativa associada.

O *e-learning* desenvolvido foi implementado na plataforma eletrônica de aprendizagem ILIAS, e encontra-se disponível no endereço http://matematica.ulbra.br/ilias. O ILIAS foi escolhido, para o desenvolvimento do *e-learning*, por ser uma plataforma de uso livre e em conformidade com o padrão SCORM desde o ano de 2007.

Referências bibliográficas

Andrade, Dalton Francisco; Tavares, Heliton Ribeiro; Valle, Raquel da Cunha. (2000). *Teoria da resposta ao item: conceitos e aplicações*. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística.

Andriola, Wagner Bandeira. (2008). Uso de la teoría de respuesta al item (TRI) para analizar la equidad del processo de evaluación de aprendizaje docente. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa 1(1)*. Recuperado em 18 de janeiro de 2011 de <http://www.rinace.net/riee/numeros/vol1-num1/art12_htm.html>

Baker, F. B. (2001). *The basics of item response theory*. Washington, DC: Eric.

Batanero, Carmen; Godino, Juan Diaz; Pelayo, V. Navarro. (1996). Razonamiento combinatorio em alumnos de secundaria. *Educación Matemática 1*, 26-39.

Costa, D. R. (2009). *Métodos estatísticos em testes adaptativos informatizados*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

Homa, Agostinho Iaqchan R. (2011). *Testes Adaptativos no padrão SCORM com Análise Combinatória*. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, Brasil.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 3, 111-127.

RIBNIKOV, K. *Análisis Combinatorio*. Moscou: Mir.

SCORM 2004 3rd Edition Content Aggregation model. Recuperado em março de 2010 de http://www.adlnet.gov/resources#Tab-Technical-Documentation.

SCORM 2004 3rd Edition Sequencing and Navigation. Recuperado em março de 2010 de http://www.adlnet.gov/resources#Tab-Technical-Documentation.

SCORM 2004 3rd Edition Run-Time Environment. Recuperado em março de 2010 de http://www.adlnet.gov/resources#Tab-Technical-Documentation.

ATIVIDADES DE PROBABILIDADES NO *OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO*

Ana Lucia Nogueira Junqueira e Maria Elisabette Brisola Brito Prado
Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN Brasil
anajunqueira@gmail.com; bette.prado@gmail.com

Resumo. O artigo trata do percurso do desenvolvimento de um curso para professores de Matemática, integrantes do Programa Observatório de Educação da Uniban, como aplicação da pesquisa de doutorado, bem como algumas considerações preliminares, uma vez que se encontra ainda em fase de análise dos dados produzidos durante o processo. Motivada pela relevância atual do ensino de Probabilidades, buscou-se encontrar algumas soluções que minimizassem aspectos dificultadores da aprendizagem. O desenvolvimento do tema contou com ações de formação na perspectiva do design experiment, usando a tecnologia como recurso, para atividades com objetos digitais, e como suporte ao acompanhamento em ambiente virtual, criado por mim na plataforma TelEduc. Essas ações buscaram proporcionar aos professores o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e provê-los de recursos didático-metodológicos para organizar um trabalho que desperte o interesse e favoreça a aprendizagem do aluno.

Palavras chave: probabilidades, metodologia, tecnologias, ambiente virtual

Abstract. The paper discusses the process of developing a course for Mathematics teachers, members of the Education Observatory Program of Uniban, as the application of doctoral research, and also deals with some preliminary considerations, since the data produced during the process is still being analyzed. Motivated by the current relevance of teaching probability, the study aimed to find some solutions that minimized aspects that hinder learning. The development of the topic included training activities from the perspective of design experiment, using technology as a resource for activities with digital objects, and as support for monitoring in a virtual environment, created by this author using the TelEduc platform. These actions are aimed at helping teachers in the development of probabilistic reasoning and to provide them with resources to organize didactic-methodological work to stimulate interest and encourage student learning.

Key words: probabilities, methodology, technologies, virtual environment

Introdução

O Programa Observatório da Educação desenvolvido pela Universidade Bandeirante de São Paulo-Uniban, em convênio com a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES, órgão do governo federal, teve início em novembro de 2008 contando com a parceria da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE-SP). Tem dois propósitos principais e inter-relacionados: a) constituir um grupo colaborativo de formação e pesquisas sobre o desenvolvimento profissional docente de professores de Matemática; b) contribuir com propostas de apoio efetivo ao trabalho do professor em suas aulas na Educação Básica. Centra-se na formação continuada do professor de Matemática da escola pública, na perspectiva do desenvolvimento profissional. Uma das linhas de pesquisa busca compreender as contribuições que o uso de ambiente virtual possibilita para o processo de formação que enfatiza o aprendizado contextualizado e reflexivo do professor.

Visando a produção de dados para análise da pesquisa de doutorado, em comum acordo com minha orientadora, optamos por elaborar um módulo a ser desenvolvido com os professores de Matemática do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, integrantes do Programa Observatório de Educação. O tema escolhido foi o ensino de probabilidades. O módulo denominou-se "Probabilidade Geométrica na educação básica: casos de acaso e incerteza".

A escolha do tema baseou-se nos seguintes aspectos:

- A inserção de conceitos de Probabilidade na Educação Básica, sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e currículos oficiais, tem provocado discussões e gerado dúvidas em professores e formadores sobre a abordagem a ser dada para esse conteúdo nos diferentes níveis de escolaridade. Dados do Indicador de Alfabetismo Nacional-INAF, adotado no Brasil desde 2001, apontam alto índice de desconhecimento/dificuldade da população sobre o assunto.
- O professor de Matemática costuma trabalhar o ensino de probabilidade, em geral, associado à fórmulas e definições sem justificativa plausível, o que provoca desinteresse por não dar sentido ao aluno.
- O estudo de probabilidades é mais complexo do que em geral se apresenta nos cursos e requer outro tipo de raciocínio que provoca uma ruptura do pensamento determinístico.

Além disso, a experiência como professora de Matemática e formadora (de longa data) de professores e, recentemente, como tutora *online* de cursos de formação *lato sensu* na modalidade a distância, me forneceram ainda os seguintes elementos de reflexão:

- Os professores de Ensino Médio em sua prática pedagógica abordam esse conteúdo, em geral, após terem trabalhado Análise Combinatória, o que induz ao uso de fórmulas em atividades prontas, não favorecendo a apreensão de significado nem a construção desse conhecimento pelo educando.
- Isto parece refletir a falta de domínio do conteúdo a ser ensinado e, consequentemente, fragilidade no desenvolvimento de práticas didático-pedagógicas que favoreçam a aprendizagem dos alunos.

Para corroborar estas ideias, encontramos na revisão de literatura algumas pesquisas que já apontam, há algum tempo, essas mesmas premissas.

A visão do mundo estocástico permite adotar um ponto de vista no qual a aleatoriedade é percebida como um aspecto fundamental e a utilização dos métodos da teoria da probabilidade é uma necessidade para reduzir o caos de um único e imprevisível evento a um padrão mais previsível. (Hurtado e Costa, 1999)

> A pesar de evidenciada a existência de um mundo estocástico, a percepção do significado primário desta estocastização ainda tem permanecido evasiva e controversa. Os estudantes, ao se depararem pela primeira vez com esta visão, o que geralmente ocorre no ensino médio, enfrentam um confronto natural com o raciocínio determinístico adotado até então. (Hurtado e Costa, 1999, p. 2)

Existem duas razões que legitimam a introdução das probabilidades no currículo escolar em qualquer nível: 1) ver o pensamento probabilístico como um tipo específico de pensamento, tal como o pensamento geométrico e o pensamento algébrico; 2) as probabilidades constituem uma oportunidade de questionar a dicotomia verdade *versus* falsidade, acrescentando-se a categoria do possível e destacando a impossibilidade de controlar o resultado de uma única experiência. (Borovcnik e Peard, 1996, *apud* Fernandes, 1999).

Tal tipo de pensamento pode beneficiar o estudo das probabilidades na escola. Entretanto, uma das maiores dificuldades em se trabalhar conteúdos de Probabilidade e Estatística na Educação Básica é que, em geral, os professores de Matemática não viram, em seu processo de formação, os aspectos relacionados à didática desses conteúdos.

> Assim, muitas vezes, eles apresentam tais conteúdos de forma descontextualizada, priorizando o uso excessivo de fórmulas, que muitas vezes não fazem sentido para os alunos, opondo-se, dessa forma, à exploração de situações que envolvam aproximação, aleatoriedade e estimação. Essa falta de vivência no "modo estatístico de pensar" parece implicar não só em uma abordagem meramente tecnicista dos métodos estatísticos, como também em um certo desconforto, por parte dos professores, em relação ao assunto. (Kataoka, Oliveira, Souza, Rodrigues e Oliveira, 2011, p 236.)

Diante disso, faz-se necessário buscar soluções para minimizar o problema, uma vez que a apropriação dos conceitos de probabilidades é cada vez mais importante para um indivíduo na sociedade atual. (Cazorla e Santana, 2010)

Para tanto, motivaram-me as seguintes questões de pesquisa:

- Como proporcionar o desenvolvimento do pensamento probabilístico nos alunos da Educação Básica?

- Como proporcionar aos professores de Matemática o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e uma ruptura com a visão determinística da Matemática por meio de situações problemas?
- Como prover professores de Matemática de recursos didático-metodológicos, inclusive digitais, para organizarem seu trabalho de forma a despertar o interesse do aluno e favorecer a aprendizagem de Probabilidades?

Planejamento e desenvolvimento

Para responder a essas questões, optou-se em adotar uma abordagem diferenciada para trabalhar o conteúdo matemático de Probabilidades, que propiciasse a esses professores:

- Usar a tecnologia como *recurso* para favorecer a aprendizagem e como *suporte* para acompanhamento online (Prado, 2005, 2006).
- Contribuir com a formação continuada desses professores e servir de referência para recriarem suas próprias metodologias na prática em sala aula sobre o tema.

Os dados produzidos nesse processo constituiriam a base de análise para a pesquisa. Nesse sentido, o curso foi desenvolvido buscando proporcionar aos professores de Matemática o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e provê-los de recursos didático-metodológicos, inclusive digitais, para organizar seu trabalho de forma a despertar o interesse do aluno e favorecer a aprendizagem de probabilidades.

> O sentido atribuído à ideia de integração de mídias na prática pedagógica tem sido muitas vezes equivocado. [...] Integrar – no sentido de completar, de tornar inteiro – vai além de acrescentar o uso de uma mídia em uma determinada situação da prática escolar. Para que haja a integração, é necessário conhecer as especificidades dos recursos midiáticos, com vistas a incorporá-los nos objetivos didáticos do professor, de maneira que possa enriquecer com novos significados as situações de aprendizagem vivenciadas pelos alunos. Nesta perspectiva, o cenário educacional requer do professor saber como usar pedagogicamente as mídias e, este "como" envolve saber "o quê" e "o porquê" usar tais recursos. Por outro lado, este saber "como", "o quê" e "o porquê" usar determinadas mídias encontra-se ancorado em princípios educacionais, orientadores da prática pedagógica do professor. (Prado, 2005, p. 9).

O trabalho online envolve a construção de um design educacional que contempla a concepção, o planejamento, a produção, a implementação e o desenvolvimento de um curso. Na concepção que se fundamenta em princípios constitutivos de processos reflexivos e interativos e que enfatiza a autoria e a produção de conhecimento do aluno cursista, "a construção do design do curso compatibiliza e integra três elementos fundamentais: os princípios educacionais, as características da virtualidade e a configuração do contexto". (Prado, 2009, p.3)

Adotou-se, então, como metodologia para trabalhar o módulo a elaboração de ações de formação desenvolvidas na perspectiva do *design experiment* para favorecer os processos de ensino e aprendizagem do tema, fazendo uso da tecnologia como recurso para atividades e experimentos com objetos digitais (*applets*, vídeos) e como suporte aos encontros presenciais através de um ambiente virtual de aprendizagem-AVA, criado pela doutoranda na plataforma TelEduc especialmente para este fim.

Essas ações compreenderam: 1) trabalhar sequências de ensino baseadas no *design experiment*; 2) preparar o ambiente virtual e desenvolver os conteúdos online do AVA; 3) realizar a mediação presencial e no ambiente virtual de aprendizagem; 4) utilizar material concreto (dados, roleta, tangram) e objetos midiáticos (*applets*, vídeos); 5) produzir e registrar dados para a análise dos resultados da metodologia e dinâmica adotadas.

> Design experiments ideally result in greater understanding of a learning ecology — a complex, interacting system involving multiple elements of different types and levels — by designing its elements and by anticipating how these elements function together to support learning. Design experiments therefore constitute a means of addressing the complexity that is a hallmark of educational settings. […] Ecology implies a series of interacting systems rather than a collection of activities or a list of separate factors that influence learning. (Coob, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble, 2003, p.9)

A metodologia pode ser utilizada para entender o raciocínio e a aprendizagem matemática por meio da construção de modelos. O *Design Experiment* tem como parte essencial olhar o que está por trás do que falam os aprendizes. Suas raízes surgiram nos Estados Unidos como um tipo de experimento de ensino em pesquisas em Educação Matemática, em que se consideram os progressos do estudante diante de uma comunicação matemática interativa. Como método científico de investigação enfatiza a análise do pensamento matemático do estudante, bem como suas modificações durante o processo. Para tal cabe ao pesquisador criar situações e modos de interação com os estudantes de forma a encorajá-los a modificar seu pensamento (ou modo de pensar) sobre o tema estudado. Uma das características do Design Experiment – e que a distingue de outras metodologias – é a indissolubilidade entre os papéis de formador e pesquisador. (Steffe e Thompson, 2000)

Coob destaca outras características que englobo aqui: a intervenção e a condição de desenvolver modelos a partir de hipóteses, que admitem duas fases, a prospectiva e a reflexiva, o que lhe imprime um *design* cíclico – as conjecturas podem ser modificadas ou redesenhadas durante o processo, estabelecendo um *redesign* em ciclos e refletindo assim suas raízes pragmáticas, nas quais os modelos desenvolvidos preocupam-se com processos de aprendizagem de domínios específicos. (Coob *et al* 2003)

A metodologia adotada no desenvolvimento do módulo, na perspectiva do *design experiment*, impôs uma atenção constante na condução das atividades e discussões, pois demandavam o planejamento de uma programação básica e de diversos recursos extras que pudessem ser inseridos conforme surgiam as questões ou dúvidas por parte dos cursistas, numa constante dinâmica de replanejamento das ações.

O módulo contou com a participação de 15 professores efetivos e realizou-se de setembro a dezembro de 2011, em seis encontros presenciais com acompanhamento a distância, totalizando 60 horas.

Os conteúdos abordados no módulo trataram casos de acaso e incerteza; experimentos determinísticos e aleatórios; noções básicas de probabilidades e definição clássica; breve visão histórica do conceito de probabilidade; o jogo como mola propulsora da criação da teoria das probabilidades e o papel fundamental de Fermat e Pascal, bem como de Bernoulli, Gauss, Laplace e Kolmogorov, para esta teoria; probabilidade condicional, eventos independentes e eventos mutuamente excludentes; visão frequentista de probabilidade; probabilidade geométrica. Esses conteúdos foram desenvolvidos por meio de textos e artigos, vídeos, atividades propostas em sequências de ensino, discussão dialógica nos encontros presenciais e nos fóruns do ambiente virtual, realização de experimentos com objetos concretos e virtuais. No ambiente virtual os professores cursistas puderam interagir com os colegas e com a formadora/pesquisadora, por meio das ferramentas fórum, correio e diário de bordo, enquanto trabalhavam os conteúdos, abordados e disponibilizados em material complementar, e desenvolviam nos portfólios as atividades relativas ao curso, segundo uma agenda semanal.

O ambiente virtual criado

Para melhor entendimento é interessante mostrar um pouco do ambiente virtual, na plataforma TelEduc, que dispõe de diversas ferramentas, entre as quais algumas foram elencadas por melhor atenderem às necessidades do curso. A dinâmica do curso foi explicitada aos cursistas na ferramenta de mesmo nome, com a intenção de familiarizá-los:

O ambiente virtual é um espaço de estudo de cada professor e de compartilhamento e interação com os colegas do curso e com a formadora. Nesse ambiente é disponibilizado como *Material de Apoio*, além dos utilizados nos encontros presenciais, outros arquivos, textos e links que fornecem subsídios e apoio teórico-prático para aprofundamento e acompanhamento dos conteúdos tratados nesses encontros. Para manter a dinâmica do curso, aos sábados será disponibilizada a *Agenda* semanal com as atividades a serem desenvolvidas em consonância com o que estará sendo abordado nos encontros presenciais. Teremos *Fóruns* de discussão e *Atividades* propostas, que serão realizadas e postadas nos *Portfólios* individuais, podendo ser comentadas pela formadora e pelos colegas. O *Correio* também servirá para nos comunicarmos. No *Mural* poderemos postar recados e avisos e, no *Diário de Bordo*, registrarmos livremente nossas impressões e nosso percurso neste espaço de aprendizagem. [trecho escrito por mim no ambiente virtual TelEduc especialmente criado para o curso, grifos destacando as ferramentas do ambiente utilizadas no módulo]

A título de exemplo, segue uma imagem da interface do ambiente virtual utilizado:

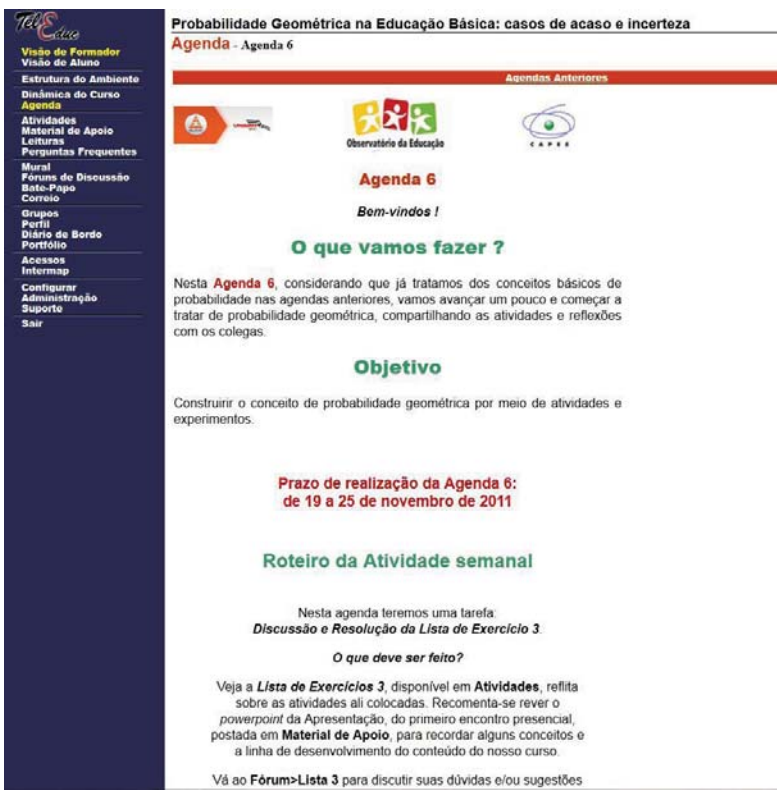


Figura 1 – Parte de uma Agenda do curso (extraída do ambiente virtual)

Considerações finais

A pesquisa se encontra em processo de análise dos dados capturados via instrumentos de coleta: gravação em filme e áudio dos encontros presenciais e registros do ambiente virtual.

Dessa forma, o objetivo do artigo é um relato contextualizado da aplicação da pesquisa, entretanto, dado o caráter de *redesign* cíclico da metodologia adotada, pode-se antecipar algumas observações captadas durante o processo. Nesse sentido, destacamos que a tônica da participação presencial dos professores era a disposição de se manifestarem oralmente, imprimindo um ritmo efusivo de discussões e interações de forma colaborativa. Já no ambiente virtual, encontramos certa resistência por parte de alguns, não muito familiarizados com o uso do computador, ou com o ensino a distância (*online*) ou mesmo justificada pela falta de tempo para se dedicarem para além dos encontros presenciais. Mesmo assim, muitos se esforçaram e realizaram as atividades agendadas postando-as nos portfólios individuais. A participação nos fóruns foi um pouco mais tímida, no entanto, mostravam-se muito empolgados nos experimentos virtuais com *softwares* (*applets*), como a Agulha de Buffon, o Método de Monte Carlo, o Jogo da Roleta, entre outros.

Para concluir, percebemos que os professores vivenciaram um processo de descoberta de uma nova forma de aprender por meio do uso de diferentes recursos que oferecem condições de explorar, refletir, explicitar e compartilhar com seus pares - errando e/ou acertando – mas, caminhando para repensar o próprio conhecimento sobre o conceito de probabilidade. Nesse sentido, a abordagem desenvolvida no curso enfatizou o aprendizado do professor sobre o conhecimento de conteúdo e das estratégias utilizadas, quiçá servindo para recriarem suas próprias metodologias para trabalhar com o tema Probabilidades em sala de aula.

Referências bibliográficas

Cazorla, I. e Santana, E. (2010). *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico.* Itabuna: Via Litterarum.

Coob, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. e Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher 32 (1), 9-13*.

Fernandes, J. A. S. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade*. Tese de Doutorado não publicada, Universidade do Minho. Braga, Portugal.

Hurtado, N. H. e Costa, J. F. S. (1999). A probabilidade no Ensino Médio: a importância dos jogos como ferramenta didática. *Conferência Internacional "Experiências e Perspectivas do Ensino de Estatística-Desafios para o século XXI"*. (1), 124-136.

Junqueira, A. L., e Campos, M. L. T., Watabe, L. (2011). Uma sequência de ensino em probabilidade geométrica: o jogo da roleta. En: EDUMATEC/UFPE (Ed). *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática-CIAEM* (pp. 1-12). Recife: LEMATEC.

Kataoka, V. Y., Oliveira, A. C. S., Souza, A. A., Rodrigues, A. e Oliveira, M. S. (2011). A educação estatística no ensino fundamental II em Lavras, Minas Gerais, Brasil: avaliação e intervenção. *Revista Latinoamerica de Investigación em Matemática Educativa 14(2)*, 233-263.

Prado, M. (2006). A mediação pedagógica: suas relações e interdependências. In: Anais Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. *Anais do Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE 2006 (26)*, (pp. 101-110), Brasília: UNB/UCB.

Prado, M. (2005). *Integração das Tecnologias na Educação*. Recuperado em 29 de abril de 2011 de http://www.tvbrasil.org.br/saltoparaofuturo/livros.asp.

Steffe, L.P., Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En: Lesh, R., Kelly, A. E. (Eds), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

INVESTIGANDO AS CONTRIBUIÇÕES DA GEOMETRIA DINÂMICA NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA COM O ESTUDO DE FUNÇÕES

Davidson Paulo Azevedo Oliveira, Giselle Costa de Sousa, Maria Maroni Lopes
Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG/Campus Ouro Preto Brasil
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Secretaria de Estado, da Educação e Cultura do Estado do Rio Grande do Norte - SEEC/RN
davidson.oliveira@ifmg.edu.br, giselle@ccet.ufrn.br, marolopes@gmail.com

Resumo. Neste artigo discutimos os resultados relativos a práticas pedagógicas realizadas com o ensino de função por meio do *software* GeoGebra. Na primeira delas foram analisadas as estratégias adotadas por alunos do Ensino Médio, referentes à construção e interpretação de gráficos da função, juntamente com o levantamento e análise de conjecturas por meio de alguns dos recursos do *software* mencionado. As demais práticas referem-se à elaboração e aplicação de minicursos destinados a alunos da licenciatura em Matemática. Durante as experiências exploramos, com estas atividades, a introdução do conceito de função a partir de uma abordagem gráfica em paralelo a linguagem algébrica.

Palavras chave: ensino de função, software GeoGebra, práticas pedagógicas

Abstract. In this article we discusses the results of the teaching practices carried out with the teaching function via software GeoGebra. In the first one we analyze the strategies adopted by high school students, for the construction and interpretation of graphs of the function, along with a survey and analysis of conjectures through some of the features of the mentioned software. The other practices refer to the development and implementation of short courses designed for pre-service teachers. During the experiments we explored with these activities, the introduction of the concept of function from a graphical approach to parallel algebraic language.

Key words: teaching function, software GeoGebra, pedagogical practices

Introdução

No presente estudo discutimos os resultados relativos a práticas pedagógicas realizadas com o ensino de função por meio do software educativo GeoGebra. Na primeira delas foram analisadas as estratégias adotadas por alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública do estado de Minas Gerais, referentes à construção e interpretação de gráficos da função exponencial, bem como, o levantamento e análise de conjecturas por meio de alguns dos recursos do software mencionado.

A partir das análises das dúvidas, discussões e questionamentos dos estudantes participantes da primeira prática pedagógica elaborou-se uma segunda prática que consistiu numa oficina destinada a alunos - da licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte/UFRN - bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) que atuam em duas escolas públicas do RN.

Após as duas primeiras experiências desenvolvemos um bloco de atividades com sugestões de uso para sala de aula utilizando os recurso do software GeoGebra referente ao conteúdo de função. Vale ressaltar que esse bloco de atividades foi também utilizado em oficinas para alunos da licenciatura em matemática de outras duas instituições, a Universidade Estadual do Rio Grande do Norte – UERN (bolsistas do PIBID) e o Instituto de Educação Superior Presidente Kenedy – Natal/RN (alunos da graduação).

Exploramos com estas atividades a familiarização dos recursos do software e a introdução do conceito de função a partir de uma abordagem gráfica em paralelo a linguagem algébrica. Preliminarmente às intervenções supracitadas, fizemos um levantamento bibliográfico de pesquisas em Educação Matemática que tratam do ensino e da aprendizagem de funções, tendo como perspectiva situar nosso estudo no contexto da literatura existente, assim como na literatura relacionada às possibilidades didáticas de softwares educativos.

Pontuamos, a partir da nossa prática enquanto professores da rede pública de ensino e das publicações analisadas, as dificuldades dos alunos em relação ao estudo de funções à luz das potencialidades e limitações propiciadas a este assunto pelo GeoGebra. De acordo com as dificuldades apresentadas pelos alunos participantes das práticas pedagógicas e a partir das nossas experiências com o uso de softwares de geometria dinâmica como recurso metodológico nas aulas de matemática, buscamos aliar, em nosso estudo, atividades que tratam da construção de gráficos de funções e da exploração das propriedades associadas a este assunto com alguns dos recursos do GeoGebra tendo em vista que o uso desse tipo de software proporciona a interatividade, além de permitir a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades além de aliar em sua tela inicial a apresentação simultânea da representação gráfica e algébrica das funções.

Com o uso do software é possível plotar gráficos com maior rapidez e precisão, valorizando a observação de propriedades. Além disso, a grande vantagem do GeoGebra é a possibilidade de ligação entre a geometria e a álgebra (Misfelt, 2009). Tal potencialidade do software foi um ponto forte em nosso estudo tendo em vista a interação entre as funções digitadas na caixa de entrada e o gráfico construído na janela gráfica, possibilitando a visualização e a manipulação dos parâmetros na tela do computador e a observação dessas alterações tanto gráfica quanto algébrica.

Geometria dinâmica na sala de aula de matemática

A presença dos mais variados recursos tecnológicos nas escolas nos faz refletir sobre seu uso em sala de aula, analisando de que forma essas ferramentas podem contribuir para uma formação do aluno compatível com os avanços proporcionado pela sociedade da informação.

A inserção da tecnologia na educação deve ser compreendida e orientada no sentido de proporcionar nos indivíduos o desenvolvimento de uma inteligência crítica, mais livre e criadora (Miskulim, 2003, p. 219).

Assim sendo, o processo de ensino e de aprendizagem permeados pelas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) está intimamente ligado a abordagem pedagógica adotada.

Quando a informática faz parte do ambiente escolar num processo dinâmico de interação entre alunos, professores e TIC, ela passa a despertar no professor a sensibilidade para as diferentes possibilidades de representação da Matemática, o que é importante no momento de realizar construções, análises, observações de regularidades e ao estabelecer relações.

Trabalhar a informática na escola, na perspectiva de produzir conhecimentos, permite o aluno fazer análises de modo a poder refletir sobre seus procedimentos de solução, testes e conceitos empregados na resolução de problemas (Scheffer, 2002, p.23).

Encontramos na literatura vários argumentos favoráveis ao uso das TICs na sala de aula de matemática. A exemplo disso, destacamos aqui pesquisas que apontam as potencialidades dos softwares de Geometria Dinâmica na abordagem de conteúdos como trigonometria, geometria, derivada, integral, entre outros.

Uma das principais características do software de Geometria Dinâmica é a possibilidade de movimentar os objetos na tela sem alterar as suas características, com isso, tem-se a possibilidade de numa atividade desenvolvida com os recursos de um software de Geometria Dinâmica, fazer investigações, descobertas, confirmar resultados e fazer simulações, permitindo, inclusive, levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática.

Lopes (2011) ao trabalhar com alunos do ensino médio com o conteúdo de trigonometria usando recursos do software GeoGebra, ressalta que dentre as potencialidades apresentadas pelo referido software estão principalmente a construção, o dinamismo, a investigação, visualização e argumentação. Ainda segundo a autora, o GeoGebra permite que uma construção geométrica seja arrastada na tela do computador em diferentes posições sem modificar suas características, o que possibilita pensar de uma forma matematicamente diferente do que se estivesse trabalhando com uma construção estática ou apenas falando dela, sem nenhum recurso visual (Lopes, 2011, p. 10).

Em relação ao GeoGebra é um software dinâmico, que reúne Geometria, Álgebra, Cálculo e Estatística. Permite a construção de vários objetos como: pontos; vetores; segmentos; retas; secções cônicas; gráficos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem, depois, serem modificados dinamicamente. Permite, ainda, a introdução de equações e coordenadas, digitando-se diretamente na sua caixa de entrada. O software apresenta três diferentes janelas: gráfica, algébrica ou numérica, e a folha de cálculo. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (pontos, gráficos de funções), algebricamente (coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em quaisquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente construídos.

Obtendo informações com as atividades

a. Atividades com alunos do ensino médio

Durante a aplicação das nossas sequências de ensino com os alunos do ensino médio, dentre as potencialidades apresentadas pelo software no ensino e na aprendizagem de funções, destacamos: construção, dinamismo, investigação e argumentação. Inicialmente foram realizadas atividades referentes ao gráfico da função exponencial com a utilização do lápis e do papel quadriculado para, posteriormente, serem discutidas e realizadas atividades com o uso do software GeoGebra. O professor/pesquisador atuou como mediador nas atividades desenvolvidas na medida em que orientava os alunos nos questionamentos e conjecturas levantadas por eles.

O processo de argumentação e dinamismo proporcionado com as atividades envolvendo o software pode ser percebido no comentário da figura 1.

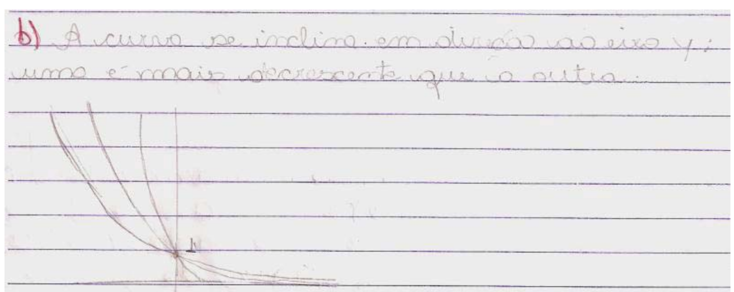


Figura 1: Justificativa de uma dupla de participantes quanto ao decrescimento da função.

Uma dupla de alunas apresentou de forma gráfica a justificativa para o decrescimento da função, como pode ser visto na figura 1. A referida dupla percebe na tela do computador a dinâmica não conseguida quando a atividade foi realizada com o uso de lápis e papel quadriculado. Não ressaltamos aqui a superioridade do computador sobre os outros recursos utilizados, consideramos ambos necessários para o ensino e para a aprendizagem do gráfico de funções. Porém, com potencialidades diferenciadas, sendo que o GeoGebra auxiliou a verificar o decrescimento do gráfico de funções pela dinâmica que ele proporciona. Ademais, Borba e

Penteado (2007) defendem que o computador permite a experimentação e a ênfase no processo de visualização, como foi feito pelas alunas para justificar uma propriedade observada.

b. Atividades com alunos da licenciatura em matemática

Inspirados na argumentação de Ponte (2003) que salienta que os professores de Matemática, em sua prática, precisam saber usar as ferramentas das Tecnologias da Informação e Comunicação em suas salas de aula, incluindo softwares educacionais próprios da sua disciplina ou de educação no âmbito geral e a partir das dificuldades encontradas com duas turmas de alunos do ensino médio elaboramos, como posto, uma oficina que foi ministrada para alunos da licenciatura em Matemática de três instituições diferentes.

Assim, pretendíamos discutir com esses futuros professores tanto o conhecimento matemático, essencial ao professor, quanto o uso de recursos didáticos atrelados a softwares de geometria dinâmica, particularmente tendo sob a ótica do estudo de funções.

No que se refere aos minicursos ministrados com os alunos da licenciatura, procedemos de maneira similar em todas as experiências. Entregamos inicialmente um caderno com atividades propostas utilizando os recurso do software GeoGebra. Os alunos passaram a trabalhar em dupla fazendo as discussões de cada atividade. Percebemos que a discussão entre as duplas fluiu significativamente, os alunos passaram a ler os questionamentos apresentados no roteiro das atividades e discutirem entre si, analisando cada passo das construções, levantando hipóteses, fazendo, analises e argumentando sobre suas conclusões.

Do assunto de funções foram abordamos os gráficos das funções: afim, quadrática, exponencial, logarítmicas. Como ilustração, segue a construção do gráfico da função afim por uma dupla de alunos da licenciatura em matemática.

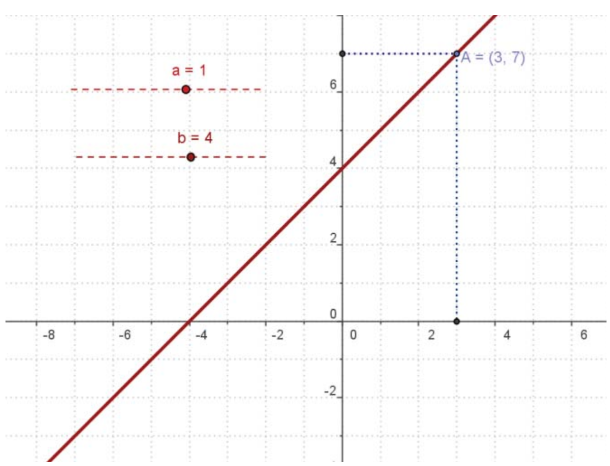


Figura 02 – Construção do gráfico da função afim por uma dupla

Pedimos com essa atividade que construíssem suas figuras e em seguida movimentassem um parâmetro variável por vez, como por exemplo: fixe b e movimente a, fixe a e movimente b. Essa dupla destacou que à medida que o parâmetro a é arrastado é possível notar o crescimento e decrescimento do gráfico, acrescentaram ainda que essa seria uma atividade interessante para ser discutida com os alunos no ensino médio e justificaram suas observações movimentando o parâmetro e em seguida fazendo anotações. De fato, ao fixarem o parâmetro a e movimentarem o parâmetro b observaram que fica mais fácil de perceber que b é o ponto onde o gráfico corta o eixo y.

Construção do gráfico da função quadrática por uma dupla de alunos da licenciatura em matemática.

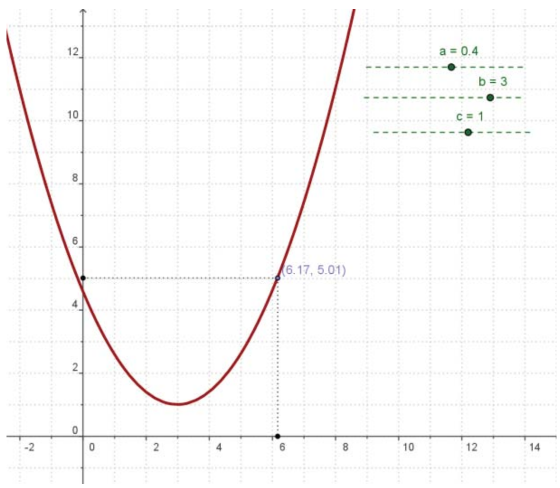


Figura 03 – Construção do gráfico da função quadrática por uma dupla de alunos da licenciatura em matemática.

Solicitou-se nessa atividade que os participantes inserissem inicialmente os parâmetros a, b e c na janela gráfica e digitassem a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ na caixa de entrada. Em seguida foi pedido que movimentassem os parâmetros, sendo um por vez, ou seja, fixe b e c e movimente a, fixe a e c e movimente b e fixe a e b e movimente **c** e observassem o que acontecia com o comportamento do gráfico.

Essa dupla discutiu os resultados obtidos com a construção do gráfico da função quadrática e destacaram que fica fácil, com o movimento dos parâmetros, perceber quando a concavidade da parábola é voltada para baixo e quando é voltada para cima. Notaram anda que fixando os parâmetros b e c e variando apenas a é possível perceber a alteração na abertura da parábola, observaram também que os vértices da parábola se moveram linearmente sobre uma reta. Outro ponto destacado em relação às discussões e conclusões chegadas com as análises da dupla é que ao fixar os parâmetro a e b perceberam que o parâmetro c se refere ao ponto onde a parábola intercepta o eixo y.

Durante todo o minicurso direcionamos alguns questionamentos em relação à possibilidade do desenvolvimento das atividades sobre funções com os recursos do software GeoGebra nas aulas de matemática nas turmas que atuavam na escola pública. Para alguns professores em formação não teriam dificuldades, mesmo aqueles que estavam tendo contanto com o software pela primeira vez.

Ressaltaram ainda a relevância de futuros educadores estarem inteirados dos mais variados recursos para trabalharem em suas salas de aula. Além disso, foi constatado que o minicurso proporcionou uma ampliação das ideias em relação ao uso das TICs no ensino e na aprendizagem da matemática.

Considerações finais

Durante o desenvolvimento das atividades nos dois grupos: alunos do ensino médio e alunos da licenciatura em matemática, fomos pontuando as observações, questionamentos e justificativas. Nesse sentido, os dois grupos conseguiram com as atividades propostas realizar sucessivos testes e discutir suas conclusões.

No tocante as vantagens do uso do GeoGebra em sala de aula pelo professor destacamos não só as pedagógicas, mas as de ordem estrutural, pois pode-se fazer download gratuitamente deste software, sendo de fácil acesso a qualquer usuário. Os alunos, mesmo não tendo conhecimento do *software*, familiarizaram-se com rapidez e não apresentaram dificuldades em manuseá-lo.

Quanto ao ensino e a aprendizagem de funções uma das potencialidades destacadas foi a possibilidade de interação entre a álgebra e a geometria, através das janelas gráficas e algébricas. À medida que os alunos manipulavam os parâmetros conseguiam visualizar as alterações realizadas nas suas construções e fazer inferências sobre as mesmas. Borba e Villarreal (2005) apontam que a visualização em Matemática está vinculada a habilidades de interpretar e manipular imagens figurais. Nesse sentido, destacamos que a visualização foi um ponto forte no levantamento de hipóteses e formulação de conjecturas a partir da análise construções produzidas.

Em relação às limitações de uso do software, evidenciamos na fala dos alunos da licenciatura que atuam em duas escolas públicas, problemas que podem dificultar a implementação desses recursos em sala de aula, como por exemplo: poucos computadores para turmas muito grandes e a falta de conhecimento do sistema operacional instalado nas escolas.

Referências bibliográficas

Borba, M. C. e Penteado. M. G.(2007). *Informática e educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M. C. e Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and reorganization of Mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, Visualization and Experimentation*. New York: Springer Science.

Lopes, M. M. (2011). Contribuições do *software* GeoGebra no ensino e aprendizagem de trigonometria. *In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* Recife, PE, Brasil.

Miskulin, R. G. S. (2003). As possibilidades didático-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de matemática. In: D. Fiorentini (Org.). *Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares* (pp. 217-248). Campinas: Ed. Mercado de letras.

Misfeldt, M. (2009). *Semiotic Instruments: considering technology and representations as complementary*. Lyon. Disponível em: http://www.geogebra.org/publications/ Misfeldt

Ponte J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. Investigar em educação. Disponível em: http://www.fc.ul.pt/docentes/jponte.

Scheffer, N. F. (2002). *Corpo tecnologias matemática: Uma interação possível no ensino fundamental*. Erechim RS: Edifapes.

PROMOVENDO A REFLEXÃO SOBRE A PRÁTICA NO ENSINO DE ÁLGEBRA – UM CURSO SEMIPRESENCIAL

Gilda Maria Q. Portela, João Rodrigo Esteves Statzner, Kelly R. de P. Motta Moura, Lucia A. de A. Tinoco, M. Palmira da Costa Silva, Tatiana Cardoso Maia, Cassius T. Costa Mendes, Karen A. Waltz
Universidade Federal do Rio de Janeiro/Instituto de Matemática/Projeto Fundão Brasil
ltinoco@skydome.com.br, mariapalmira@globo.com, gilda@quiteteportela.com.br

Resumo. Este artigo relata experiência de equipe do Projeto Fundão da Universidade Federal do Rio de Janeiro em duas edições de curso semipresencial sobre ensino de álgebra para professores e futuros professores do Estado do Rio de Janeiro. A satisfação pelo trabalho realizado e a avaliação positiva do mesmo pelos participantes motivaram essa equipe a escrever este texto. São apresentadas aqui a metodologia do curso, com destaque para o uso da Plataforma Moodle, idéias envolvidas nas discussões realizadas, bem como considerações e resultados observáveis. O curso foi inspirado em estudo da equipe sobre o pensamento algébrico, que tem servido de subsídio a professores interessados em inovar sua prática nas aulas de álgebra da Escola Básica.

Palavras chave: álgebra, aprendizagem, formação de professores, curso semipresencial

Abstract. This text relates an experience carried by the team of Projeto Fundão in Universidade Federal do Rio de Janeiro, implementing two editions of a semi presential course about the teaching of algebra. This course was directed to Mathematics teachers and undergraduate Mathematics students of Rio de Janeiro. The coordinators of the course were so happy with the work and its evaluation by the participants, that they were motivated to write this text. The course methodology is presented here, with emphasis on the use of the Moodle Platform. The ideas involved in the discussions, comments and observable results are also included in the text. The course was based on results of an algebraic thinking study carried by this team and has been used by Mathematics teachers, interested in improving their teaching practice.

Key words: algebra, learning, teacher education, semi presential course

Motivação do curso

Um grupo da equipe do Projeto Fundão, que atua no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, realizou estudo sobre aspectos que possam favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico por alunos da escola básica. Esta equipe, formada de professores universitários, professores da rede básica e alunos de Licenciatura desse Instituto, foi motivada pela preocupação dos seus membros com o contraste entre o baixo índice de aprendizagem em álgebra dos alunos da rede básica de ensino e o tempo dedicado a esse tópico na escola desse nível, e com o desinteresse dos alunos em relação ao assunto.

Quanto ao índice de aprendizagem, podem-se citar resultados de avaliações institucionais, como, por exemplo, a Prova Brasil 2011 (Portal do MEC, 2012), na qual o porcentual de acerto nas questões de álgebra é de, no máximo, 40%.

O desinteresse dos alunos vem sendo observado não só pelos professores desta equipe, como indica o fato relatado a seguir. Perguntados sobre isso, cem professores participantes de curso de atualização afirmaram ser verdade que: "*Os alunos consideram a Álgebra como uma coleção de* *regras arbitrárias, aparentemente sem qualquer relação ou fundamento lógico*". Ao comentar a firmação, alguns desses professores reconheceram que "*ensinam exatamente como aprenderam*", com ênfase no simbolismo puro e em cálculos algébricos, sem que os estudantes os compreendam nem percebam a sua utilidade.

O trabalho realizado pelo grupo consistiu então em investigar, criar, adaptar e testar formas de incentivar a reflexão de professores, no sentido de contrapor o ensino mecanizado da álgebra ao ensino significativo desse tópico. Os resultados desse trabalho foram publicados no livro Álgebra: Pensar, Calcular, Comunicar (Tinoco, 2008), pelo Instituto de Matemática da UFRJ e constituem subsídios para que cada vez mais professores, em sala de aula, dêem oportunidade a seus alunos de uma aprendizagem significativa da álgebra.

Esta equipe realizou, ao longo desse trabalho e depois de concluí-lo, muitas ações de pequena duração para divulgação das ideias desenvolvidas, envolvendo professores e futuros professores. O nível de aceitação de tais idéias, pelo público atingido nessas ações, e o desejo de contribuir mais para a alteração do quadro descrito anteriormente levaram à realização de um curso sobre ensino de álgebra para professores e futuros professores de Matemática, de nível fundamental e médio, do Estado do Rio de Janeiro. O objetivo principal do curso foi então provocar a discussão e a reflexão de professores sobre as ideias exploradas e desenvolvidas por meio do trabalho realizado até então.

Foram realizadas duas edições desse curso, com o mesmo nome do livro, nos primeiros semestres de 2010 e 2011, na UFRJ, com 73 cursistas em cada edição.

Base teórica

Do ponto de vista do pensamento algébrico, foi adotada a proposta de Usiskin (1994), seguida por pesquisadores como Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), segundo a qual o ensino de álgebra em nível básico tem quatro dimensões: aritmética generalizada, funcional, das equações e estrutural. Cada uma dessas dimensões está presente em tarefas específicas do ensino da álgebra elementar e a variável assume também um papel específico. Ainda segundo essa proposta, a integração das quatro dimensões ao longo do Ensino Básico de Matemática permite uma aprendizagem significativa da álgebra pelos estudantes, como meio de comunicação de ideias e resultados matemáticos.

Por outro lado pretendia-se que também houvesse, no curso, uma aprendizagem significativa de conhecimentos relativos ao ensino de álgebra pelos seus participantes. Em ambos os casos, a equipe norteou-se pelo estabelecido por Moreira (2000), ao afirmar que a aprendizagem significativa tem por base a ligação entre o conhecimento novo e o construído previamente pelo aprendiz. Por meio dessa interação, o novo conhecimento "*fica mais rico, mais diferenciado, mais elaborado em termos de significados, e adquire mais estabilidade*" (Moreira, 2000, p. 4). O mesmo autor contrapõe a aprendizagem significativa à mecânica, afirmando que: "*Esse tipo de aprendizagem, bastante estimulado na escola, serve para 'passar' nas avaliações, mas tem pouca retenção, não requer compreensão e não dá conta de situações novas.*" (Moreira, 2000, p. 5).

Em relação à metodologia de trabalho em todas as etapas do curso, o grupo tomou por base teórica o que Ponte e Boavida (2002) estabelecem como trabalho colaborativo, como ocorre em geral nos trabalhos do Projeto Fundão. Deste modo, cada um dos membros da equipe tem a possibilidade de opinar e decidir, propiciando crescimento significativo de todos e tornando possível vencer os desafios em conjunto.

> A colaboração não é um fim em si mesma mas sim um meio para atingir certos objectivos. [...] o simples facto de diversas pessoas trabalharem em conjunto não significa que se esteja, necessariamente, perante uma situação de colaboração. Na nossa perspectiva, a utilização do termo colaboração é adequada nos casos em que os diversos intervenientes trabalham conjuntamente, não numa relação hierárquica, mas numa base de igualdade de modo a haver ajuda mútua e a atingirem objectivos que a todos beneficiem. (Ponte e Boavida, 2002, p. 45)

Planejamento e desenvolvimento do curso

Podem-se considerar como etapas essenciais no planejamento do curso: a adoção do ambiente virtual de aprendizagem e a definição da metodologia a ser adotada. Igual atenção foi dada à escolha e adaptação das atividades, usadas até o momento presencialmente, ao ambiente e à metodologia.

O Uso da Plataforma Moodle

Alguns membros da equipe, familiarizados com recursos de ensino à distância, salientavam a relevância atual do uso de ferramentas computacionais para permitir a interação entre as pessoas envolvidas no curso e facilitar o fluxo de ideias. Outros não se sentiam à vontade em relação a tais recursos, particularmente, em relação à Plataforma, o que gerou uma preocupação no sentido de que o seu uso vir a constituir-se uma dificuldade especial para os professores cursistas. Ao longo do curso, tal preocupação se dissipou totalmente.

A reflexão dessa equipe sobre a possibilidade, a conveniência e o modo de usar a Plataforma Moodle como ambiente virtual de aprendizagem propiciou seu crescimento em conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo. Sobre este aspecto, Palis (2010) afirma: "O processo de tomada de decisão em relação a uma inovação é uma atividade de busca e processamento de informações, na qual o indivíduo procura obter dados de forma a diminuir o nível de incerteza relacionado à inovação" (Palis, 2010, p. 439). De fato, o uso dessa Plataforma representou ao longo de todo o curso oportunidade de crescimento significativo de todos, do ponto de vista desse tipo de conhecimento.

> O conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo vai além dos três componentes que o compõem quando considerados isoladamente e emerge da interação entre eles. É a base para um ensino efetivo com tecnologia incluindo a compreensão de representações de conceitos usando tecnologia, técnicas pedagógicas que empregam tecnologia para ensinar conteúdos, de como uma tecnologia pode ajudar a lidar com as dificuldades dos alunos (Palis, 2010, p. 436).

Os recursos da Plataforma Moodle utilizados pelos cursistas foram: envio de arquivo, questionários e fóruns. Por meio deles, a equipe tornou disponíveis aos participantes questões, atividades e artigos, em qualquer data e hora, e acompanhou a discussão entre os participantes e entre cursistas e equipe, para tirar dúvidas ou fazer sugestões. Esse acompanhamento visava a incentivar os cursistas e dar-lhes melhores condições de realizar as atividades, e, por outro lado, auxiliar os responsáveis pelo curso a avaliar o seu andamento e identificar necessidades de reformulação.

Metodologia e temas

Ao decidir os temas a abordar e a metodologia do curso, a equipe levou em conta as seguintes convicções: 1) o estudo de álgebra na Escola Básica deve propiciar ao estudante o desenvolvimento de habilidades de comunicação e justificativa de ideias e de resolução de problemas; 2) um caminho adequado para conseguir tal desenvolvimento é o trabalho equilibrado e integrado com as diversas dimensões da álgebra (Usiskin, 1994); 3) a aprendizagem de um conteúdo não se dá em um só momento e 4) para obter uma aprendizagem significativa, as atividades devem resgatar ao máximo a experiências dos aprendizes. Para atender as condições dos professores, em termos de tempo livre e possibilidade de deslocamento, o curso teve caráter semipresencial, com seis encontros presenciais, em manhãs de sábados, e intervalos de aproximadamente um mês entre eles. A duração total do curso foi de 6 meses.

Foram definidos quatro temas: relação aritmética-álgebra; generalização; variação de grandezas e equações. Dentre os aspectos referentes à relação aritmética-álgebra, foi dada ênfase ao sinal de igualdade e à propriedade distributiva da multiplicação e divisão em relação à adição e à subtração. Cada tema foi trabalhado ao longo de um período abrangendo dois encontros consecutivos e o intervalo entre eles, da forma descrita a seguir.

A exploração do tema iniciava-se presencialmente com a discussão, em grupos, de atividades especialmente preparadas para isso. Nesse momento, os cursistas eram divididos em salas, cada uma sob a orientação de uma dupla da equipe. A discussão continuava durante um período de cerca de quatro semanas, por meio da realização de outras atividades na Plataforma Moodle.. No encontro seguinte, era feita uma sistematização do tema, em exposição plenária, destacando os aspectos mais importantes e os que tinham gerado dúvidas entre os cursistas. Assim, cada assunto foi abordado por meio de atividades presenciais e à distância, o que permitiu manter um nível permanente de reflexão no curso.

No trabalho à distância, eram propostas aos cursistas atividades experimentadas anteriormente em sala de aula com alunos de nível básico, seguidas de questionamentos sobre as mesmas, do ponto de vista do professor. Apenas o envio de respostas a esses questionamentos era exigido deles. Outras tarefas exigiam dos cursistas relacionar trechos de artigos com a sala de aula, analisar erros de alunos, opinar sobre adequação de determinadas atividades para diferentes níveis escolares, reconhecer objetivos de atividades, etc.

Para analisar, comentar e resumir as respostas dos cursistas e sanar suas possíveis dúvidas, o grupo se dividiu em duplas, cada uma responsável por cerca de vinte pessoas. A apreciação das respostas, elaborada a partir desses resumos, era divulgada na Plataforma. O espírito da análise e da apreciação não era o de assinalar o acerto ou o erro, ou mesmo de fornecer respostas fechadas, e, sim, de tornar possível a todos o acesso às ideias expostas, contrapondo-as entre si e, por vezes, comparando-as com conteúdos sistematizados da área da educação matemática. Em todas essas etapas havia prazos bem definidos, para os cursistas e para o grupo.

São apresentados a seguir exemplos de atividades desenvolvidas.

Exemplos de atividades

Avaliação de Resoluções de um Problema - Nesta atividade, a leitura de um texto (em arquivo na Plataforma) propiciava aos cursistas a reflexão sobre o uso das equações como ferramenta de resolução de problemas. O item b), por tratar-se de questão sobre avaliação de respostas de alunos, provocou bastante a discussão entre os cursistas, via fórum.

Enunciado

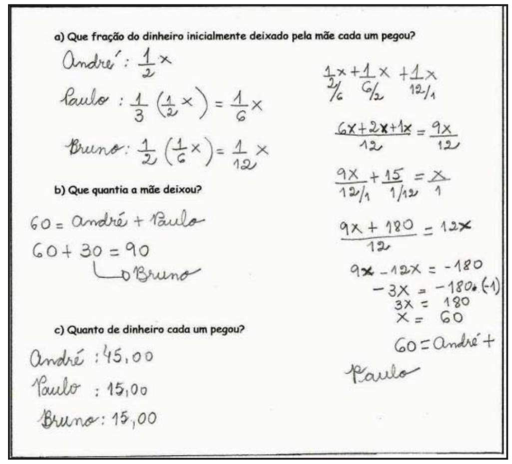
> *a) Leia o texto: Resolução de Problemas: nem sempre as Equações são Necessárias (texto disponibilizado na Plataforma).*
>
> *b) Considere agora o problema a seguir e as três soluções dadas a ele por alunos que já estudaram álgebra. Que nota, entre 0 e 10, você daria a cada solução?*

Por quê?

Problema

A mãe acordou cedo para trabalhar e deixou um dinheiro sobre a mesa com um bilhete para seus 3 filhos: "Dividam igualmente entre vocês."

André é o primeiro a ver o bilhete, mas acha que Paulo já passou, pega o que acha que é seu e sai. Paulo, que é o segundo a ver o recado, acha que é o primeiro; pega o que julga ser seu e sai. João é o último, mas acha que é o segundo, pega sua parte e deixa R$ 15,00 na mesa. Que fração do dinheiro inicialmente deixado pela mãe cada um pegou? Quanto a mãe deixou? Quanto cada um pegou?


a) Que fração do dinheiro inicialmente deixado pela mãe cada um pegou?

André: $\frac{1}{2}x$

Paulo: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{6}x$

Bruno: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}x\right)=\frac{1}{12}x$

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x$

$\frac{6x+2x+1x}{12}=\frac{9x}{12}$

$\frac{9x}{12}+\frac{15}{1}=\frac{x}{1}$

$\frac{9x+180}{12}=12x$

$9x-12x=-180$

$-3x=-180\cdot(-1)$

$3x=180$

$x=60$

$60=$ André $+$ Paulo

b) Que quantia a mãe deixou?

$60=$ André $+$ Paulo

$60+30=90$ Bruno

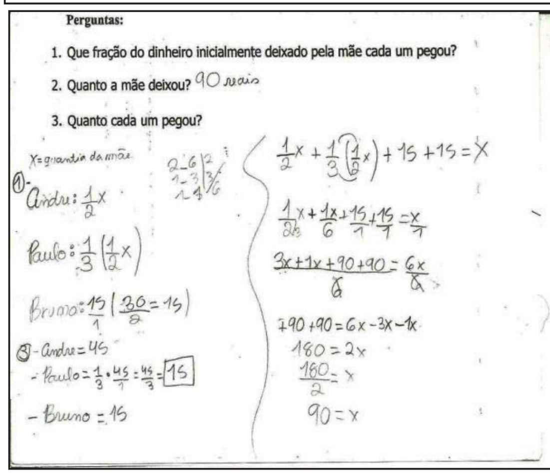
c) Quanto de dinheiro cada um pegou?

André: 45,00

Paulo: 15,00

Bruno: 15,00

Solução deCaroline


Perguntas:

1. Que fração do dinheiro inicialmente deixado pela mãe cada um pegou?
2. Quanto a mãe deixou? 90 reais
3. Quanto cada um pegou?

X = quantia da mãe

① André: $\frac{1}{2}x$

Paulo: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)$

Bruno: $\frac{15}{1}\left(\frac{30}{2}=15\right)$

③ André $=45$

Paulo $=\frac{1}{3}\cdot\frac{45}{1}=\frac{45}{3}=\boxed{15}$

Bruno $=15$

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)+15+15=x$

$\frac{1}{2}x+\frac{1x}{6}+\frac{15}{1}+\frac{15}{1}=\frac{x}{1}$

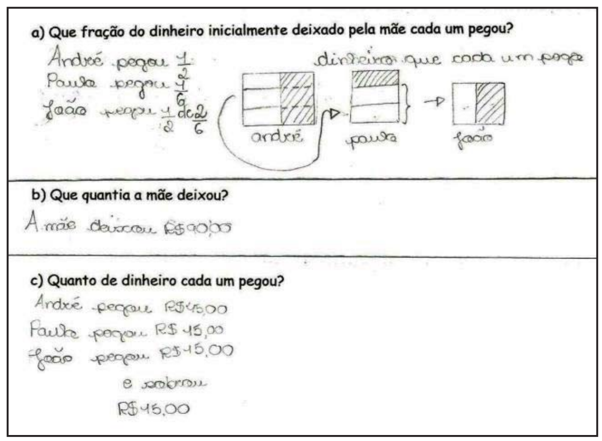
$\frac{3x+1x+90+90}{6}=\frac{6x}{6}$

$90+90=6x-3x-1x$

$180=2x$

$\frac{180}{2}=x$

$90=x$


a) Que fração do dinheiro inicialmente deixado pela mãe cada um pegou?

André pegou $\frac{1}{2}$

Paulo pegou $\frac{1}{6}$

João pegou $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{6}$

dinheiro que cada um pegou

andré paulo joão

b) Que quantia a mãe deixou?

A mãe deixou R$ 90,00

c) Quanto de dinheiro cada um pegou?

André pegou R$ 45,00

Paulo pegou R$ 15,00

João pegou R$ 15,00

e sobrou

R$ 15,00

Solução de Vitória

Solução de Gabriele

Figura 1 – Problema e Soluções a serem analisadas

Reconhecendo as dimensões da álgebra

A atividade abaixo foi proposta após a leitura pelos cursistas de um texto sobre as dimensões da álgebra. A novidade do assunto provocou dificuldades. Para o enunciado e as respostas foi usado o recurso "envio de arquivo", da Plataforma.

Enunciado

a) Selecione, em um livro didático, uma atividade que contemple o pensamento algébrico e reproduza-a no espaço abaixo.

b) Indique a referência do livro do qual a atividade foi selecionada.

c) *Indique a concepção da álgebra mais evidente na proposição ou no processo se solução da atividade selecionada, justificando.*

A Loja R$ 1,99

A discussão desta atividade, presencialmente e em grupos, priorizou as questões, que envolviam a importância do ensino da propriedade distributiva em situações do cotidiano do aluno e seu papel no desenvolvimento de habilidades de cálculo mental. Por meio das questões os professores tinham a oportunidade de se colocar no lugar de seus alunos e compreender suas dificuldades.

Enunciado

O professor Cláudio foi comprar marcador de quadro branco numa loja de R$ 1,99. Os marcadores estavam em promoção: R$ 1,99 cada, e Cláudio decidiu comprar 5. Na hora de pagar, o rapaz da caixa fez as contas de 'cabeça' e disse: "são dez reais menos cinco centavos".

a) Está correta a conta feita pelo rapaz?

b) Por que 5 x 1,99 é igual a 10 - 0,05? Explique sem efetuar as contas.

Questões

i) Como os alunos em geral poderiam explicar o item (b)?

ii) Essa atividade pode ajudar a desenvolver a habilidade de cálculo mental? Por quê?

Considerações finais

Como um dos principais resultados deste trabalho, destaca-se o crescimento da equipe, ao aprofundar e reformular, ao longo de todo o curso, suas noções e crenças sobre o ensino de álgebra. Esse crescimento se deu nos processos de escolha e reformulação das atividades e elaboração das questões a serem propostas aos cursistas e de análise e elaboração da apreciação das respostas dos mesmos, a ser disponibilizada na Plataforma.

A estrutura semipresencial do curso e, mais especialmente, o uso da Plataforma Moodle foram fonte de construção de Conhecimento Tecnológico, Pedagógico e do Conteúdo (Palis, 2010) por parte dos responsáveis pelo mesmo. Como a situação era nova para todos, o aprendizado foi constante; à medida que o curso era planejado, implementado e avaliado, seguindo um modelo de trabalho colaborativo, a equipe responsável crescia.

Nas respostas ao formulário final de avaliação, observou-se que: mais da metade dos participantes pediu que houvesse mais encontros presenciais e escolheu atividades realizadas presencialmente como adequadas para aplicação em sala de aula. Os fóruns foram as atividades menos bem avaliadas. Tais fatos indicam a pouca familiaridade desses participantes com o estudo à distância. Mesmo assim, a participação desses professores por meio da Plataforma foi intensa, contrariando a suspeita de que as dificuldades dos mesmos com esse ambiente poderiam contribuir negativamente para o seu desempenho.

O seguinte exemplo de resposta, encontrada na avaliação final do curso, indica o ambiente de contínua reflexão construído por meio do tratamento dos quatro temas.

Pergunta – Indique aspectos sobre os quais a realização do Curso tenha propiciado reflexão. Justifique.

Resposta – A existência de um pensamento algébrico que deve ser desenvolvido antes de uma formalização e *perceber que fazer pensar é um dos objetivos da Álgebra.*

Em relação aos temas abordados, a importância de um ensino de álgebra integrando as quatro dimensões propostas por Usiskin (1994), com a valorização da álgebra funcional, constituiu novidade para muitos cursistas. De fato, na última edição do curso, apenas três, entre setenta e três, indicaram inicialmente tópicos relacionados a tais conceitos (variação de grandezas, sequências, generalização) como essenciais no ensino para esse nível escolar.

No entanto, a maioria das atividades citadas na avaliação final, como adequadas para aplicação em sala de aula, envolvia esses tópicos, com destaque para a generalização. Isto explica o observado no ensino de álgebra, em geral: ênfase exagerada em procedimentos de resolução de equações e no cálculo algébrico (álgebra estrutural), em detrimento da dimensão funcional, na qual são trabalhados os conceitos de função e de variável.

A satisfação dos cursistas pode ser ilustrada por manifestações espontâneas de muitos deles, no formulário final de avaliação, como a que se segue.

"*Todo o curso teve aspectos positivos, principalmente as reflexões que o curso nos propõe, o conhecimento que nos oferece, enriquece e nos faz chegar mais próximos de um bom professor, aquele que seu aluno realmente aprende. Não vejo aspectos negativos*".

Em conclusão, destaque-se a grande contribuição dessa experiência para o desenvolvimento profissional da equipe responsável e dos cursistas, esperando poder incentivar a realização de outras ações que promovam tal desenvolvimento por outros professores de matemática e a renovação da sua prática pedagógica.

Referências bibliográficas

Boavida, A. M. e Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: potencialidades e problemas. Em GTI (Org.), *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional* (p. 43-55), Lisboa, APM.

Moreira, M.A. (2000). Aprendizagem significativa crítica. Versão revisada e estendida de Aprendizagem significativa subversiva. Em (editor ignorado), *Atas do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa* (pp.33-45), Lisboa.

Fiorentini, D., Miorim, M. Â. e Miguel, A. (1993). Contribuindo para um repensar a educação algébrica elementar. *Proposições, FE/UNICAMP, 4* (1), 78-91.

Palis, G. L. R. (2010). O conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo do professor de matemática. *Educação Matemática Pesquisa 12*, 432-451.

portal.mec.gov.br/dmdocuments/provabrasil, consultado em 26/03/2012.

Tinoco, L. A. A.(coord.) (2008). Álgebra: Pensar, Calcular, Comunicar. Rio de Janeiro, Projeto Fundão, Ed. IM/UFRJ.

Usiskin, Z.(1994). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. Em A. F. Coxford, e A. P. Shulte (org.), *As Idéias da Álgebra* (pp. 09-22), São Paulo, Ed. Atual.

O USO DO *SOFTWARE SKETCHUP* NO ENSINO DE PRISMAS

Ronaldo Asevedo Machado, Adriana Maria Tonini
Faculdade Santa Rita – FASAR Brasil
Universidade Federal de Ouro Preto
amronaldo@ig.com.br, atonini@cead.ufop.br

Resumo. O uso das tecnologias nas salas de aulas representa uma tendência de ensino que, junto a outras metodologias, pode favorecer a relação ensino-aprendizagem e significar uma mudança de paradigma nos ambientes educacionais. A garantia de que essa é uma alternativa viável ao ensino da Geometria Espacial fundamenta-se, entre outros aspectos, no entendimento de que para ensinar aos diferentes são necessárias estratégias variadas. A interface amigável e os amplos recursos em três dimensões encontrados no *software Sketchup* permitiram sua escolha na implementação da pesquisa. Este trabalho fomenta as discussões sobre o uso das tecnologias no ensino de Matemática e deixa contribuições positivas dos ambientes educacionais informatizados para o trabalho de professores e alunos. Evidencia-se aqui um recorte da pesquisa do Mestrado Profissional em Educação Matemática, apresentando o uso das tecnologias como elemento facilitador do Ensino-Aprendizagem da Geometria Espacial utilizando o *software sketchup*.

Palavras chave: prismas, ensino, aprendizagem, software, geometria

Abstract. The use of technology in classroom teaching is a trend, which along with other methodologies, may favor the teaching-learning relationship and signify a paradigm change in educational environments. Ensuring that this is a viable alternative to the teaching of Geometry Space is based, in other aspects, on the understanding that teach to different people are needed varied strategies. The user-friendly interface and extensive features found in three dimensions in Sketchup software allowed their choice in implementing the research. This work fosters discussions on the use of technology in teaching mathematics and leaves positive contributions of computerized educational environments for work of teachers and students. This study is part of a research of the Professional Masters in Mathematics Education, with the use of technology as a facilitator of Teaching and Learning Geometry of Space using the software sketchup.

Key words: prisms, teaching, learning, software, geometry

Introdução

As experiências das salas de aula revelam aos pesquisadores da Educação Matemática as particularidades do ensino e aprendizagem através das inúmeras experiências que vão sendo acumuladas no trabalho com os alunos. Cada dia na sala de aula acaba revelando o universo amplo e desafiador da tarefa de ensinar Matemática. A diversidade de alternativas desencadeada pelos avanços tecnológicos permeia os ambientes educacionais. O ensino de Geometria Espacial ganha um aliado forte frente aos problemas que os alunos encontram na visualização e cálculos de áreas e volumes que são os *softwares.* A dinâmica de *softwares* como o *sketchup* junto à criatividade dos educadores acaba por revelar uma sala de aula mais dinâmica no ensino da Geometria Espacial.

A amplitude de aplicabilidade da Geometria no cotidiano é incontestável. Na escola ela está integrada ao currículo do ensino fundamental e Médio. Esses aspectos são premissas do que será necessário a vários profissionais no exercício de suas profissões. Os pesquisadores estão atentos às evoluções e apresentam suas contribuições ao ensino. Filho(2002) retrata a geometria e suas interseções com outras áreas do conhecimento:

> Considera-se que não haja dúvidas quanto à importância da Geometria em seu papel, básico, não só na Matemática, mas também em diversas áreas, tais como: Engenharia, Arquitetura, Física, Astronomia etc. Além disso, mesmo no ensino dos números são empregados modelos geométricos que devem ser dominados... (Filho, 2002, p.16)

A simples relação entre geometria e realidade não garante sua compreensão e utilização pelos alunos. É necessário uma interferência da escola no sentido de flexibilizar essa relação. Assim, como evidencia Filho(2002) a escola herda mais esse papel:

> A linguagem geométrica está de tal modo inserida no cotidiano que a consciência desse fato não é explicitamente percebida. É dever da escola explicitar tal fato a fim de mostrar que a Geometria faz parte da vida, pois vivemos num mundo de formas e imagens.(Filho, 2002, p.16)

Ao desenvolver um conteúdo através de sua contextualização, como por exemplo, os diversos usos da geometria na construção civil, abre-se espaço para que o educando seja despertado para o aprendizado da Geometria. Dessa forma, desejou-se aumentar a participação dos alunos e dilatar a apropriação de conceitos de Geometria Espacial por eles. Tais ideias estão em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM ,1999, p.251) que ressaltam a importância de "[...] pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção do aluno, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudanças e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional." (grifo nosso)

Em outra vertente, é possível observar as contribuições que surgem a partir do uso dos computadores pessoais que ganham o mundo rapidamente e que é apresentado, não como a única saída, mas como uma porta que se abre ao universo do ensino e da aprendizagem. O uso de programas pode favorecer em um dos aspectos mais complexos frente aos estudos da Geometria Espacial que é a dificuldade de visualização. A superação desse limite pode ser encontrada nas tecnologias segundo Richit, Tomkelski e Richit (2008).

> Sabemos que muitos elementos e propriedades inerentes a Geometria Espacial deixam de ser compreendidos em função da abordagem desse conteúdo basear-se em representações estáticas, como aquelas usadas em livros didáticos. Essa

> deficiência da Geometria Espacial vem sendo gradativamente superada, à medida em que softwares de Geometria Dinâmica são desenvolvidos e incorporados à prática de sala de aula. (Richt, Tomkelski e Richt, 2008, p.2)

As discussões que permeiam o uso da tecnologia podem ser mais atuais, entretanto, suas origens estão plantadas em um passado bem remoto. Partindo da palavra técnica, pode-se encontrar raízes em estudiosos bem antigos conforme apresenta Sancho(1998):

> Uma primeira abordagem do conceito de téchne é encontrada em Heródoto, quem o conceitua como "um saber fazer de forma eficaz". Platão o coloca repetidamente na boca de Sócrates, na sua obra Protágoras, na qual lhe dá o sentido de realização material e concreta de algo. O estado de impotência em que o ser humano se encontra na natureza agrava a sua necessidade de desenvolver mecanismos de subsistência e proteção. (Sancho, 1998, p.28)

Ainda segundo esse autor, o termo técnica era utilizado com sentido similar ao que temos hoje e escritores daquela época já faziam alusão ao uso da técnica como precursora da evolução.

> O primeiro autor a considerar que a técnica poderia contribuir para o desenvolvimento e bem-estar da humanidade foi Francis Bacon, cuja obra New Atlantis (editada em 1627) constitui a primeira utopia na qual invenções são profetizadas. (Sancho, 1998, p.29)

As evoluções vividas pela humanidade estão presentes também no século XX. Após mil novecentos e quarenta e cinco, o período pós guerra inicia-se um tempo em que as tecnologias que estavam enclausuradas em sistemas militares e que serviam de forma restrita para os exércitos, começam a ganhar a sociedade. O que até então era uma arma secreta nos procedimentos relacionados aos objetivos da guerra passa a ser suporte fundamental aos novos equipamentos da vida moderna. Entretanto, os primeiros computadores eram gigantescos, não permitindo a priori sua disseminação como instrumentos de trabalho e como auxiliar onipresente na vida dos cidadãos. Se ainda não era um novo tempo em termos práticos, já que poucos tinham acesso a esse novo tipo de equipamento, porém iniciava uma nova demanda: quem serão os profissionais e quais deverão ser as habilidades requeridas dos mesmos? Levy (1998) corrobora com essa reflexão quando diz:

> Desde o fim da Segunda Guerra mundial, uma parte crescente da população ativa dos países desenvolvidos trabalha no setor da gestão e dos serviços. A maioria de nós produz, transforma ou propaga informação. A disseminação das máquinas

lógicas na indústria modifica o tipo de competência cognitiva exigida dos operários (ou operadores) e dos agentes de manutenção. (Levy, 1998, p.16)

Os avanços tecnológicos, os desafios das salas de aula, os desafios no aprendizado da Geometria, as dificuldades de visualização dos sólidos pelos alunos e a criatividade dos educadores permitem levantar questionamentos que possam iluminar as novas práticas nas escolas: será que realmente não existem formas de dinamizar e enriquecer os processos de ensino-aprendizagem de Matemática se os profissionais não se prenderem em demasia aos procedimentos mais tradicionais? Sendo a Geometria Espacial um assunto que exige uma melhor visualização, e ainda, percebendo que existem *softwares* que possam dar um melhor suporte representando uma interface de desenho mais amigável, não seria conveniente utilizar o potencial dos computadores para vencer as dificuldades do "quadro negro" na visualização dos sólidos?

É a partir de todo esse contexto que se estabelece como questão de investigação: *Que contribuições uma proposta de ensino de prismas implementada em ambientes educacionais informatizados, pode trazer para a aprendizagem de Geometria Espacial?*

O ambiente da pesquisa

A pesquisa, cujo conteúdo norteador foi a Geometria Espacial, foi implementada em uma turma do segundo ano do ensino médio, no segundo semestre de 2009. A escola tinha três turmas de segundo ano: uma no turno da manhã, uma outra à tarde e uma à noite em um total de oitenta e sete alunos nessas séries. Escolheu-se a turma da manhã para a pesquisa tendo por base as seguintes características:

- É uma classe que apresentou, a partir da observação, maior número de alunos pouco motivados em estudar. Eles não apresentam estímulo a continuar estudando;

- O segundo aspecto refere-se à presença de alunos que residem na zona rural. Do total de alunos cinco alunos vivem na área rural e trabalham em atividades no campo;

- Um terceiro aspecto refere-se à motivação dos alunos. Eles demonstraram pouco interesse com as aulas de Matemática e dispersavam muito nas atividades durante a aula;

- Ainda vale pontuar que os rendimentos registrados por essa turma, quando comparados aos das outras, dados obtidos através de contato com a professora, evidenciavam maiores dificuldades de aprendizado;

- As observações também permitiram verificar que nessa turma, a maioria dos alunos não faz atividades escolares em casa, e segundo informações dos próprios alunos, mais da metade deles trabalham em, pelo menos, meio período (quatro horas por dia).

Metodologia

A pesquisa representou uma avaliação qualitativa de alguns aspectos e quantitativa de outros. Para que se pudesse ter um maior controle sobre os processos e resultados, buscou-se relatar os fatos, bem como recolher resultados de atividades desenvolvidas durante as aulas referentes a pesquisa, em uma avaliação contínua. Os alunos eram sempre instruídos sobre os procedimentos e tinham, nas atividades de laboratório, um roteiro a ser seguido.

Efetivada nos moldes de uma pesquisa de intervenção, as aulas foram ministradas em um contexto de parceria entre a professora da disciplina e o pesquisador que assumiu todo o trabalho no laboratório de informática.

Na semana da realização da pesquisa exploratória, pelos alunos, a professora da disciplina iniciou com uma revisão que abordava tópicos da geometria plana, como classificação de triângulos, relação entre ângulos definidos por duas paralelas e uma transversal, atividades referentes a soma de ângulos internos e externos em polígonos.

A aula de laboratório referente a prismas foi implementada através do sketchup. Nessa aula os alunos tiveram instruções da utilização do software, e em seguida fizeram trabalhos referentes à área superficial e o volume do cubo.

Para a conclusão do trabalho da pesquisa os alunos responderam um questionário cujos resultados compõem os dados dessa pesquisa e referem as contribuições que a utilização dos softwares possibilitaram ao ensino e à aprendizagem de prismas.

A pesquisa

A aula selecionada para esse recorte foi referente a prismas e foi implementada através do *sketchup*. Nessa aula os alunos tiveram instruções da utilização do software, e em seguida fizeram trabalhos referentes à área superficial e volume do cubo. O principal objetivo dessa atividade era buscar a compreensão de uma unidade de volume, e a partir da visualização dos sólidos, no *software,* os alunos conseguirem calcular a área, a diagonal, e apresentar as coordenadas de um ponto no espaço a partir de um vértice do cubo, como na atividade 1:

A Atividade 1 envolveu o conteúdo prisma (cubo) e foi desenvolvida no laboratório de informática utilizando o *Software Sketchup* e teve a seguinte sequência didática:

- Use o instrumento de medida do software sobre os eixos e desenhe um quadrado de um metro de lado;
- Trace a diagonal desse quadrado e calcule o seu valor. Confira com o valor que o software apresenta e tire suas conclusões;

- Usando o instrumento de medir do *software,* marque agora a altura de um metro. Desenhe agora um cubo a partir desse quadrado. Transcreva o desenho para essa folha. A figura 1 mostra o resultado obtido pelo aluno utilizando o *software Sketchup*.

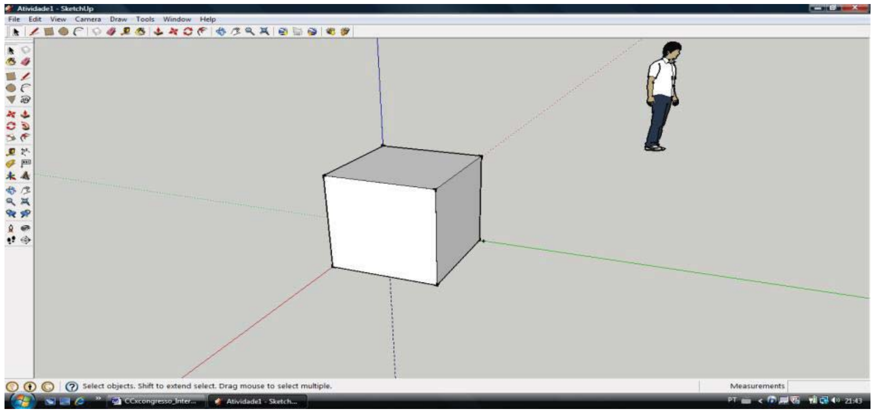


Figura 1- Cubo

Ao terminar o desenho foram feitos os seguintes questionamentos: Qual é o volume desse cubo? Qual é a área superficial desse cubo? Como você encontrou esses valores?

A atividade 2 é iniciada a partir do resultado da atividade 1. Segue descrição da atividade 2.

- Agora retire três faces do cubo de forma que você possa ver a parte interna. Desenhe a diagonal do cubo. Transcreva para o seu caderno esse desenho.

Calcule a diagonal da base e em seguida a diagonal do cubo. A figura 2 mostra o resultado obtido com a utilização do software Sketchup no desenho da diagonal e a visualização da parte interna do cubo com a construção do triângulo retângulo. Destaca-se aqui que na utilização do software, o aluno pode girar o sólido para a posição mais adequada ao seu entendimento.

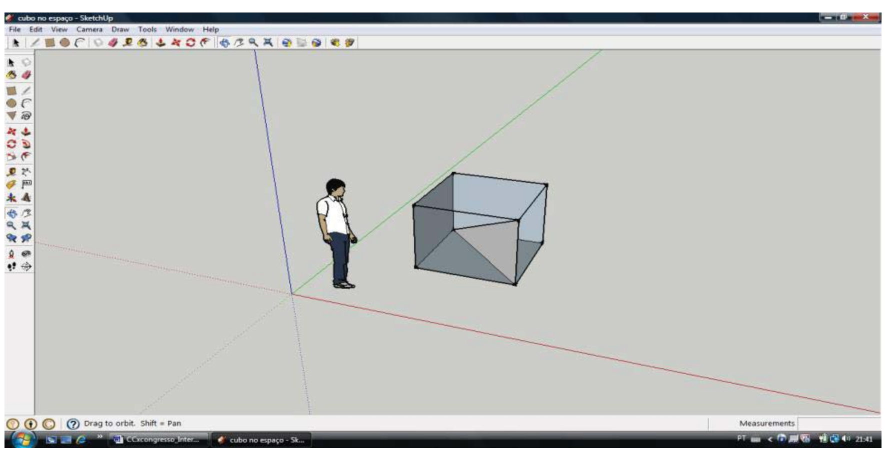


Figura 2 – Diagonal do cubo

Como atividade 3 foi proposto ao aluno utilizar a construção feita e apresentada na figura 1, para identificar coordenadas de dois vértices do cubo, sendo um sobre algum eixo e o outro fora dos eixos de coordenadas. O objetivo desta atividade era proporcionar aos alunos uma primeira idéia sobre um ponto no espaço.

Resultados da pesquisa

Para garantir um registro fiel do que representou para os alunos as atividades, eles registravam seus cálculos e desenhos e ainda responderam à seguinte pergunta ao final dessas atividades: Em que a utilização do *software* mais contribuiu nessa aula?

Entre os vinte e cinco alunos que responderam à pergunta, oito responderam que favoreceu a visualização, pontuando que quatro deles apontaram que favoreceu na visualização dos planos. Outros dez podem ter suas respostas resumidas como: auxiliou no cálculo e entendimento das áreas e volumes. Quatro alunos responderam que ajuda a compreender melhor a Geometria Espacial. E dois outros alunos relataram: “Nos ajuda a analisar melhor as figuras, compreender melhor o que acontece, e aprender mais.”, e o outro que diz: “eu comecei a aprender coisas mais difíceis e isso torna a aula mais agradável.” Os gráficos 1 e 2 retratam informações coletadas dos alunos a partir do trabalho desenvolvido nas aulas de laboratório.

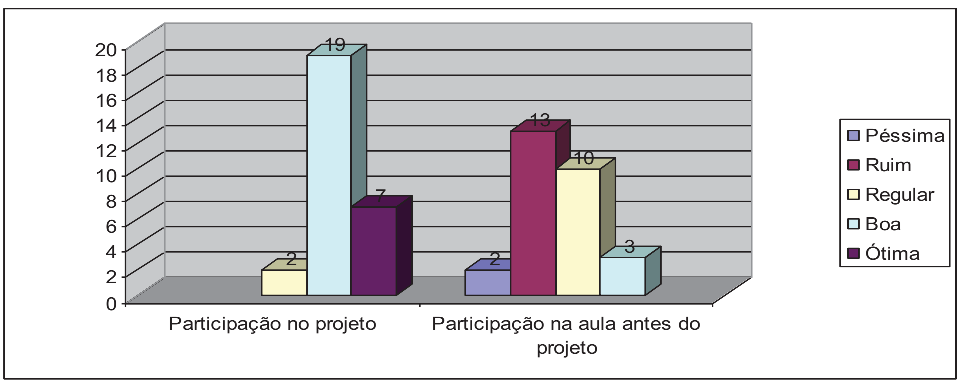


Gráfico 1: A participação dos alunos nas aulas

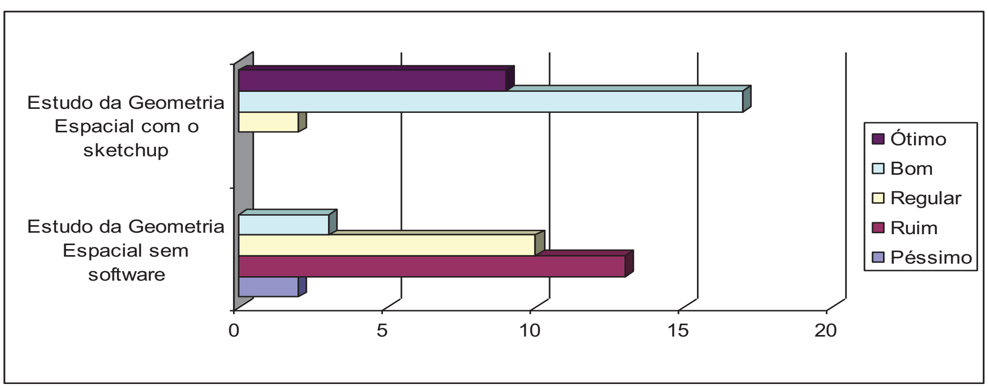


Gráfico 2: Estudo da Geometria e o uso de software

O que se observa nesses gráficos é a comparação entre a dinâmica da aula e a participação dos alunos nas atividades de sala de aula. Os dados refletem o que foi observado antes e durante a pesquisa. Houve por parte dos alunos uma maior participação e interesse nos trabalhos desenvolvidos.

Considerações finais

O ensino aprendizagem de Matemática, em álgebra ou Geometria é desafiador. Ele exige que o profissional que atua na sala de aula seja sensível ao estágio de desenvolvimento dos alunos com os quais vai trabalhar o conteúdo. Não há método salvador ou em grau de superioridade a outro.

No ensino da Geometria Espacial nem sempre a habilidade de desenho do profissional e a representação plana ajudam na compreensão do conteúdo pelos alunos. Nesse estágio o *software sketchup* traz uma contribuição ao professor e consequentemente ao aluno. A utilização das tecnologias abre caminhos. Cada profissional irá selecionar com o momento correto e a metodologia adequada ao ensino de cada conteúdo.

Para tratar dos resultados dessa pesquisa evidencia-se com destaque o novo panorama da sala de aula. Os alunos demonstraram encantamento com as possibilidades do *software* e desenvolveram suas atividades com muito mais interesse. Como as atividades exigiam os cálculos, os próprios alunos perceberam um ganho significativo no entendimento do conteúdo. As atividades, quando retiradas as faces laterais, permitiram a perfeita visualização do triângulo retângulo para o cálculo da diagonal.

Os diversos níveis de experiências encontrados entre os alunos no contato com as tecnologias permitiram criar um espaço de reflexão para o papel da escola na inclusão digital. As tecnologias ainda não faziam parte do cotidiano de vários alunos.

Por fim, antes de encontrar um caminho é preciso saber que há inúmeros. Antes de buscar a solução é necessário perceber que há muitas estratégias para ensinar e aprender. O computador poderá contribuir, entretanto, é o professor mediador que fará a interlocução entre o aluno e o conhecimento para que o primeiro se aproprie verdadeiramente do segundo.

Referências bibliográficas

Ministério da educação e cultura do Brasil. (2006). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* (Vol. 2): Ciência da natureza, matemática e tecnologia. Brasília: MEC, 75,76

Filho, D.M.T.(2002). *O aprendizado da geometria no ensino médio-Origens de dificuldades e propostas alternativas.* Florianópolis.

Levy, P. (1998) *A Máquina Universo: criação, cognição e cultura informática*. Porto Alegre. Brasil

Richit, A., Tomkelski, M. L. & Richit, A. (2008). Software Wingeom e Geometria Espacial: explorando conceitos e propriedades. In: *IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática.* Rio de Janeiro. Anais do IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática.

Sancho, J. M. (Org.).(1998). *Para uma tecnologia educacional.* (2. ed.) Porto Alegre: Artmed.

Machado, R.A. (2010). *O ensino de Geometria Espacial em ambientes educacionais informatizados: um projeto de ensino de prismas e cilindros para o 2ºano do Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil.

OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: REFLEXÕES

Liamara Scortegagna, Eduardo Barrére, Gisele Barbosa
Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF Brasil
liamara@ice.ufjf.br, eduardo.barrere@ice.ufjf.br, barbosagisa@yahoo.com.br

Resumo. As inovações tecnológicas têm causado mudanças em todos os segmentos da sociedade, inclusive na educação. A escola, professores e alunos estão inseridos em um novo contexto onde as tecnologias se fazem presentes e devem ser utilizadas como instrumentos didáticos eficazes. No ensino de matemática, a utilização destas tecnologias (o foco deste estudo são os Objetos de Aprendizagem como recursos digitais) vem tomando espaço e enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem. Desta forma, se faz necessário uma reflexão sobre a forma de desenvolvimento e utilização dos Objetos de Aprendizagem e a postura do professor nesta nova realidade para a completude do ensino de matemática.

Palavras chave: tecnologias educacionais, objetos de aprendizagem, ensino de matemática

Abstract. Each and every segment of the society has been affected by the recent technological innovations. Education is not different: most of the activities performed by teachers and students at the schools may make use of information and communication technologies as a mean to improve its teaching effectiveness. In particular, in mathematics teaching, the use of Learning Objects enriches the teaching and learning processes. In this work, we discuss the development and use of Learning Objects for mathematics teaching. We also evaluate the position of the mathematics teaching faced to this new reality.

Key words: educational technology, learning objects, mathematics teaching

Introdução

As novas tecnologias de informação e comunicação vêm provocando inúmeras mudanças no cotidiano das pessoas, criando diferentes modos de vida, de pensamento e de percepção. Na educação, têm transformado a concepção de ensinar e de aprender, exigindo um redimensionamento desses processos.

O imenso potencial destas novas tecnologias sobre o ensino e a aprendizagem pode trazer muitas contribuições tanto para os alunos quanto para os professores. Os recursos estimulam os alunos a desenvolverem habilidades intelectuais de pesquisa e investigação, pois o conteúdo não lhes é dado pronto. Isso os instiga a estarem mais concentrados e interessados em aprender. Estimulam a buscar informações sobre um assunto e relacioná-las com aquelas adquiridas em outros momentos. E, ainda promovem cooperação entre os alunos.

Para o professor, as novas tecnologias auxiliam na obtenção rápida de informação sobre recursos instrucionais, interação com os alunos diferente daquela ocorrida nas aulas tradicionais. Perrenoud (2000, p.65) defende que a "utilização destas ferramentas permite que sejam criadas situações de aprendizagens ricas, complexas, diversificadas, não fazendo com que todo investimento (trabalho) repouse sobre o professor". O ambiente de sala transforma-se e acontecem mudanças no perfil desse profissional, que, de acordo com Peters (2003, p.69) "assume um papel de facilitador, orientador ou conselheiro". Consequentemente, passa a ver o conhecimento cada vez mais como um processo contínuo de pesquisa, pois adquirem habilidade na detecção dos pontos fortes, assim como das dificuldades específicas que o aluno encontrou.

Neste novo cenário educacional, onde as novas tecnologias se apresentam como auxílio para melhorar a qualidade do processo de ensino e de aprendizagem, alguns recursos estão se destacando. Neste caso, estamos nos referindo à tecnologia de Objetos de Aprendizagem – OAs, definida em nosso estudo como uma unidade de ensino, digital ou não, que pode ser utilizada e reutilizada ou referenciado durante um processo de ensino e de aprendizagem.

No ensino da matemática o uso de OAs apresenta inúmeras vantagens a partir de suas características pedagógicas e técnicas, entre elas, a vantagens de tornar o processo de ensino e de aprendizagem significativo, permitindo o aluno a aprender de acordo com suas possibilidades e seu ritmo e tornando-o um sujeito ativo de sua aprendizagem onde pode criar hipóteses, experimentar, questionar e, dessa forma, construir seu conhecimento.

Para entendimento dos objetivos propostos, o presente artigo está estruturado da seguinte forma, iniciamos apresentando a conceituação, caracterização e forma de desenvolvimento de OAs, na sequência apresentamos o uso destes no ensino da matemática e a postura do professor diante desta nesta nova realidade. E, finalizamos apontando algumas reflexões pertinentes aos temas abordados.

A tecnologia objetos de aprendizagem – OAs

Entende-se por Objeto de Aprendizagem a organização e utilização de um conteúdo educacional em pequenos segmentos, para fins de reutilização. Uma nova ordem de composição desses segmentos gerados pode ser moldada de acordo com a necessidade identificada.

Segundo o *Institute of Electrical and Electronic Engineers - IEEE,* objetos de aprendizagem se define como sendo "qualquer material, digital ou não digital, que possa ser utilizado, reutilizado ou referenciado durante o aprendizado suportado por tecnologia" (Committee, 2002, p.3). A noção básica é a de que "os objetos são tipo blocos básicos com os quais será construído o contexto de aprendizagem de forma estática ou mesmo dinâmica". (Tarouco *apud* Litto & Formiga, 2012, p. 83).

Para que um conteúdo seja considerado um OA, o mesmo deve apresentar características que os identificam como tal. As características dos OAs podem ser divididas em duas áreas:

Pedagógicas e Técnicas. As características pedagógicas estão relacionadas com a concepção de objetos que facilitem o trabalho de professores e alunos, visando a construção do conhecimento, sendo elas de Interatividade, suporte às concretizações e ações mentais; Autonomia, recursos de aprendizagem que proporcionem a autonomia, incentivando a iniciativa e tomada de decisão; Cooperação, troca de ideias e trabalho coletivo sobre o conceito apresentado; Cognição, refere-se às sobrecargas cognitivas colocadas na memória do aluno durante a instrução e Afeto, está relacionado com sentimentos e motivações do aluno com sua aprendizagem e colegas.

Já as características técnicas referem-se, por exemplo, as dimensões de padronização, classificação, armazenamento, recuperação, transmissão e reutilização dos OAs e, conforme a literatura extensa sobre este tema apresenta-se como: Reusabilidade, reutilizável diversas vezes em diversos ambientes de aprendizagem; Adaptabilidade, adaptável a qualquer ambiente de ensino; Granularidade, conteúdo em pedaços, para facilitar sua reusabilidade; Escalabilidade, facilidade de poder ser utilizado com pequeno ou grande número de usuários; Acessibilidade, acessível facilmente via Internet para ser usado em diversos locais; Durabilidade, possibilidade de continuar a ser usado, independente da mudança de tecnologia; Interoperabilidade, habilidade de operar através de uma variedade de hardware, sistemas operacionais e browsers, intercâmbio efetivo entre diferentes sistemas e, Metadados que, descrever as propriedades de um OA, como título, autor, data, assunto e etc.

Desenvolvimento de um OA

Para que os OAs tenham uma boa reusabilidade, escalabilidade, acessibilidade, durabilidade e interoperabilidade, deve-se considerar no momento do seu desenvolvimento, a adoção de padrões amplamente utilizados e que podem ser interpretados por diversos Ambiente Virtuais de Aprendizagem - AVAs. Dentre as soluções existentes, destacamos aqui o padrão SCORM (*Sharable Content Object Reference Model*) desenvolvido pela ADL (*Advanced Distributed Learning)* com o intuito de propiciar a integração entre diferentes padrões existentes. Este faz a integração entre metadados, com uma extensão e adaptação do *IEEE* LOM *(Learning Object Metadata);* empacotamento, com uma extensão e adaptação do *IMS* CP *(Content Package)*; e comunicação, com uma extensão e adaptação do AICC *(Aviation Industry CBT (Computer-Based Training) Committee)*.

E, a outra opção de padrão que consideramos importante e que está sendo utilizada no Brasil é o OBAA (Objetos de Aprendizagem Baseados em Agentes) desenvolvido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) em parceria com a Universidade do Vale dos Sinos (UNISINOS). A base do padrão OBAA é o padrão LOM, com todas as suas categorias e mais alguns metadados, complementando as categorias técnica e educacional e duas categorias novas relativas a aspectos de acessibilidade e segmentação.

A escolha de uma ferramenta de edição que abstraia a tarefa de empacotamento no formato padrão é fundamental. Pois o professor deve se concentrar nas tarefas e especificidades de desenvolvimento dos seus OAs, relacionadas ou seu domínio de interesse. Uma opção pode ser o RELOAD *Editor* que é um instrumento para organização, agregação e empacotamento de objetos de aprendizagem por meio de padrões como o SCORM. Utilizando o RELOAD, professores podem empacotar o conteúdo eletrônico, como páginas Web, imagens, vídeos, etc., em OAs reusáveis e prontos para serem compartilhados. Para o desenvolvimento de materiais interativos, como questionários, chats, etc., outra solução pode ser o próprio AVA.

Após os OAs estarem prontos a partir das padronizações acima citadas e devidamente catalogados e identificados, eles podem ser armazenados em Repositórios de Objetos de Aprendizagem – ROAs para serem compartilhados em qualquer parte do mundo que tenha acesso à internet e serem usados em mais de uma situação e com objetivos diversos. Alguns exemplos de ROAs que são amplamente utilizados no Brasil são RIVED – Rede Interativa Virtual de Educação, CESTA - Coletânea de Entidades de Suporte ao uso de Tecnologia na Aprendizagem, ARES - Universidade aberta do SUS – UNASUS e Banco internacional de Objetos educacionais – MEC.

Os OAs armazenados nos ROAs podem ser facilmente disponibilizados através de AVAs, como, por exemplo, no Moodle onde a tarefa é reduzida a criação de um recurso SCORM ou IMS que recebe o pacote como entrada.

OAs no ensino da matemática

Existem diversas estratégias para o ensino da matemática que são apontadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs, entre as quais é possível destacar a "solução de problemas, uso de jogos, desafios e quebra-cabeças, emprego da História da matemática e o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação - TICs em sala de aula" (Brasil, 1997, p. 45).

Sabemos que o uso das TICs está adquirindo um relevante papel no contexto educacional, pois permitem não somente a troca de informações, mas, a produção, armazenamento destas nos diversos formatos, seja, texto, imagem ou som.

A utilização da tecnologia de OAs no ensino da matemática pode levar o aluno a realizar atividades que consiste em relacionar observações do mundo real com as representações através de desenho, tabelas, manuseio com representações gráficas, funções matemáticas, conceitos geométricos no mundo virtual, as quais são apontadas nos PCNs, buscando a completude do processo de ensino e de aprendizagem.

Para que isso ocorra, um OA para o ensino da matemática deve propor estratégias que motive o aluno a experimentar/simular/testar, observar, explorar, incentivar à criatividade e ao raciocínio lógico, despertando a curiosidade e instigando-o na busca de resolução de problemas.

Ainda nestes OAs devem conter atividades síncronas e assíncronas, para que haja interação e comunicação entre aluno e professor e aluno com aluno, possibilitando a construção do conhecimento colaborativo e cooperativo.

Hoje é possível encontrar inúmeros OAs de matemática com as características apontadas acima e que, estão disponíveis de forma gratuita em diversos ROAs. Podemos citar aqui alguns: Gangorra Interativa, Decifrando Mapas, Tabelas e Gráficos PitágorasNET, Geometria, Ábaco e mudanças de base, Escalonador, GAME - Geometria Analítica: Missão Ecológica, etc.

O professor a utilização dos OAs no ensino da matemática

Borba e Penteado (2007, p.21) advertem que "o nosso trabalho, como educadores matemáticos, deve ser o de ver como a matemática se constitui quando novos atores se fazem presentes em sua investigação".

De modo geral, o ensino de matemática necessita de muita atenção no que diz respeito às estratégias de ensino. Não basta apontarmos os problemas e as grandes dificuldades assinaladas pelos alunos e/ou professores em relação ao processo de ensino e de aprendizagem e compreensão dessa disciplina. Apesar das muitas pesquisas e conceitos em relação à aprendizagem, não conseguimos apontar firmemente como, de fato o aluno aprende e como ele interage com o conteúdo, com o professor ou com os outros colegas, pois estamos vivenciando uma intensa mudança no modo como nos comunicamos e interagimos, seja no mundo real ou no virtual.

Sabemos, porém, que o nível dessas interações são relevantes e influenciam significativamente para a construção do conhecimento e desta forma, devemos nos apropriarmos da diversidade de recursos tecnológicos existentes e estratégias inovadoras para aperfeiçoar o processo de ensino e a aprendizagem. Assim, os conteúdos desenvolvidos a partir do conceito de OAs são pertinentes e contribuem à eficácia deste processo.

No contexto da utilização de OAs no ensino da matemática o professor deve mudar sua postura tradicional de apenas transmissor para uma postura de um professor articulador, planejador, organizador, incentivador e mediador do processo de ensino e de aprendizagem, objetivando oferecer instrumentos (OAs como: jogos online, simuladores, softwares educacionais, vídeos, imagens, textos interativos, etc.) aos alunos para a construção do conhecimento de forma colaborativa e cooperativa.

O professor possui hoje a sua disposição inúmeros OAs já desenvolvidos e armazenados nos ROAs citados anteriormente, desde que satisfaçam o objetivo da aprendizagem, porém, pode desenvolver seus próprios OAs seguindo a descrição apresentada neste artigo, objetivando integrar ainda mais seus conhecimentos com as tecnologias disponíveis, resultando em mais instrumentos para reforçar a aprendizagem em algum conteúdo específico.

Reflexões e conclusão

O ensino da matemática a partir dos PCNs prevê a utilização das tecnologias e de novas estratégias de ensino para sustentar o processo educacional. De forma alguma, estamos propondo o abandono dos demais instrumentos de ensino como quadro, giz, livros ou outros, tampouco que o professor deixe de fazer uso da oralidade da escrita, mas sim, sugerindo para que estes agreguem outras alternativas na forma de ensinar a partir do uso de novos recursos tecnológicos, objetivando um processo dinâmico, interativo e com resultados mais eficazes.

A utilização de OAs no processo de ensino e de aprendizagem, principalmente na matemática tem como objetivo oferecer aos alunos diversas possibilidades para se construir o conhecimento através da análise de objetos, simulações, resolução de problemas, desenhos, jogos, interação, etc., fazendo com que as aulas se tornem mais dinâmicas e atraentes, fugindo da aula tradicional onde normalmente são utilizados apenas os recursos de livro, quadro e giz.

Esta é uma alternativa que o professor deve incluir em sua prática docente na sala de aula ou fora dela, para tornar dinâmico o processo educacional, podendo servir de complemento ou mesmo como parte principal no processo de construção de conhecimento de seus alunos.

Sabemos que nossos alunos possuem diferenças em relação à assimilação do conteúdo, assim a utilização de OAs, por serem conteúdos pontuais e desenvolvidos com tecnologias diferenciadas, respeitam o ritmo e essas diversidades.

Porém, para que tudo isso seja possível, o professor deverá repensar sua atuação/postura em sala de aula. Ao optar por utilizar a tecnologia de OAs ou qualquer outra tecnologia educacional, este deverá ter consciência de que deixa de ser o único detentor do conhecimento e passar a ser um articulador, planejador, organizador, incentivador e mediador do processo de ensino e de aprendizagem, onde passa a ter como principal objetivo a construção do conhecimento de forma colaborativa e cooperativa.

Os OAs, por apresentarem características pedagógicas e técnicas de forma clara e objetiva para o processo de ensino e de aprendizagem, atendem a demanda de melhorar a qualidade do ensino, auxiliando os professores e alunos na completude de um ensino inovador da matemática.

Referências bibliográficas

Brasil. (1997). Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Borba, M. de C., Penteado, M. G. (2007). Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autentica.

Committee, L. T. S. (2002). IEEE standard for learning object metadata. IEEE standard 1484.12.1. En *Advances in Computer Science: IEEE* (pp. 66-95), Institute of Electrical and Electronics Engineers.

Tarouco. L. M. R. (2012). Objetos de aprendizagem e a EAD. En F. Litto, M. Formiga (Orgs.), *Educação a distância: o estado da arte* (pp. 83-92), São Paulo: Pearson Education.

Peters, O. (2003). *A educação a distância em transição*. (Tradução Leila F. de Souza Mendes). Porto Alegre: Unisinos.

Perrenoud, P. (2000). Dez novas competências para ensinar. Porto Alegre: Artmed.

MATEMÁTICA FINANCEIRA E TECNOLOGIA: ESPAÇOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA CAPACIDADE CRÍTICA DOS EDUCANDOS DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Marco Aurélio Kistemann Junior, Luciano Pecoraro Costa
Universidade Federal de Juiz de Fora Brasil
marco.kistemann@ufjf.edu.br, pecorarocosta@gmail.com

Resumo. Este trabalho é fruto de reflexões acerca dos questionamentos inerentes ao dia a dia de uma sala de aula, de estudantes jovens e adultos. A disciplina Matemática não necessita, exclusivamente, trabalhar conteúdos explícitos, contemplando "resolva" e "calcule". Tendo como intenção, proporcionar aos estudantes, além de trazer os conteúdos pertinentes à disciplina, mas também, a emersão, em caráter reflexivo. A pesquisa foi desenvolvida num colégio público, cujo pré-teste ocorrera em uma turma de 9° ano, sendo o pós-teste, aplicado no 3° ano, ambos na modalidade da EJA. A fim de aglutinar aos aspectos de criticidade e cidadania, foram incorporadas ferramentas tecnológicas como meio de intencionar a inclusão digital, e paralelamente, como instrumento auxiliador diante de tomadas de decisão. Diante da escassez de materiais destinados ao público da EJA, forçou-nos a planejar aulas, tanto quanto materiais. As atividades aplicadas converteram-se em produto educacional, o qual aduzimos neste trabalho.

Palavras chave: educação financeira de jovens-adultos

Abstract. This work is the reflections result on the questions inherent in the everyday life of a classroom of young and adult students. The mathematics course does not require exclusively working explicit content, contemplating "settle" and "calculate". The intention is to provide students, in addition to bring in relevant content to the discipline, but also the emergence, in reflective nature. The research was conducted in a public state, whose pretest occurred in a class of 9th the post-test, applied in the 3rd year of high school, both in the form Education of Youth and Adults-EJA. In order to unite the aspects of criticality and citizenship were incorporated technological tools as means of intending digital inclusion, and in parallel, as a tool helper before making decisions. Given the scarcity of materials intended for EJA public, is under editorial and through publications in academic, forced us to plan lessons as well as material intended forth is type of education. The activities implemented have become educational product, which did this work.

Key words: financial education of youth-adults

Introdução

O presente trabalho vem apresentar parte das reflexões e propostas pedagógicas produzidas no Grupo de Investigação Financeiro-Econômica em Educação Matemática – GRIFE, na Universidade Federal de Juiz de Fora/MG. Diante da pesquisa realizada no Mestrado Profissional em Educação Matemática, buscou-se desenvolver a criticidade por meio da Matemática Financeira, em estudantes da Educação de Jovens e Adultos, com utilização de recursos tecnológicos.

Nossos pressupostos são de que o ser humano não adquire conhecimento e saber, apenas com suas vivências de mundo e nem os aprende somente no ambiente escolar. O público jovem e adulto frequentador da escola noturna, constitue a representatividade de nossa sociedade, e como tal, são bombardeados constantemente, aos apelos advindos dos variados meios midiáticos que exercem influência favorável ao capitalismo de consumo, e consequentemente, ao consumismo e descarte instântaneo. Por vezes, indivíduos, em nosso caso, estudantes, acabam por tomar como verdade, creditando que para serem felizes, necessitam ter, consumir e, rapidamente, descartar determinado bem. Entretanto, a interação da Matemática com as Tecnologias pode confrontar os saberes e conhecimentos presumidos como verdadeiros ao universo de crenças e reflexões.

Os apelos ao consumismo são lançados a todo o momento, cujas propagandas vêm sendo desenvolvidas de maneira a atingir públicos cada vez mais específicos. E fazendo alusão quanto à prática docente e aos assédios exercidos pela mídia, pois de acordo com Kistemann Jr. (2011), os indivíduos-consumidores carecem de ter acesso a discussões que envolvam as propagandas: ter/desenvolver a habilidade (Matemacia Financeira-Econômica) de ler uma propaganda e produzir significados para o texto (mensagem) que a mesma apresenta, afim de que possam usá-la para guiar suas decisões de consumo.

Motivações para a pesquisa

Dentre as motivações que despertaram o interesse por desenvolver nossa pesquisa, adveio da percepção diante de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, em um colégio público estadual, localizado no interior do estado do Rio de Janeiro (Brasil). Verificou-se que tais indivíduos mesmo tendo chegado a este nível de escolaridade, não obtiveram contato com os conteúdos relativos à Matemática Financeira, bem como desconheciam sua utilização no cotidiano econômico. Entendemos que existem características distintas entre o ensino regular comparado ao ensino na modalidade da Educação de Jovens e Adultos (EJA), e dentre suas especificidades, destacamos sua composição. Brunel (2008) salienta que a escola noturna vem se tornando mais jovem do que adulta, o que de certa forma se aplica na unidade escolar na qual esta pesquisa fora realizada.

Paralelamente, a composição do público adulto tem entre suas características, possuir indivíduos que estão ausentes do universo escolar há alguns anos. Entretanto, quando se analisa os componentes jovens, estes por sua vez, são oriundos do curso regular diurno. E por ficarem retidos na mesma série por vários anos, evidenciando a defasagem idade/série ou por demonstrarem comportamento impróprio em sala de aula, logo são recomendados a migrarem para o curso noturno.

Questão da investigação e objetivos

Nosso interesse em trabalhar conteúdos matemáticos coaduna-se com nossa questão diretriz: "Como desenvolver competência crítica, em estudantes da Educação de Jovens e Adultos, por meio de ambientes de aprendizagem matemático-financeiros, tendo como ferramentas, os recursos tecnológicos (calculadora e computador)?". Dentro de uma linha de raciocínio norteadora, nosso trabalho busca responder algumas indagações: i) como seria a aceitação por parte do meu alunado, mediante atividade de cunho matemático-financeiro, em que os mesmos seriam encorajados a relatar suas vivências de mundo?; ii) como planejar aulas que integrem diferentes conteúdos matemáticos perpassando pela Matemática Financeira; iii) a inserção de recursos tecnológicos (calculadora e computador) nas aulas de Matemática traria alguma resistência por parte dos estudantes da EJA? e iv) como um estudante da EJA pode se posicionar frente às situações financeiras e globalizadas, expressando-se de forma crítica?

A intenção de inserir recursos tecnológicos em nossas aulas – calculadora e computador – é motivada a partir dos dados divulgados pelo Índice Nacional de Alfabetismo Funcional – INAF, em Fonseca (2004), salientando que indivíduos adultos demonstram maior dificuldade perante a calculadora. Cremos que a escola pode e deve oferecer aos seus estudantes, ambientes instigantes, dentre eles, destacamos as tecnologias da informação e comunicação, até para tornar a escola interessante e atrativa, que fala a linguagem global.

A introdução de ferramentas que utilizem tecnologia pode transparecer pavorosa, justamente aos estudantes mais velhos, devido ao fato de não possuírem familiaridade. Entretanto, é natural a geração de certa ansiedade, pois os mesmos trazem consigo a ideologia de que irão receber atividades prontas, com a percepção de que aulas serão ministradas da mesma forma que aprenderam quando crianças. Quando se deparam com algo o qual terão que construir, em que a interação, segundo Borba (2004), entre *ser-humano-com-mídia* é algo presente, cujo professor não necessita ser o único provedor do saber, para dizer se o que foi produzido está correto ou não. Um estudante adulto, ao término do semestre, não irá possuir bagagem tecnológica suficiente para se dizer um *expert*, mas diante de sua inquietação, de sua descoberta, pode surgir a vontade, a fome, pela busca de algo além do que obteve na escola.

Na tentativa de se buscar inserção ao mundo do trabalho, globalizado, eis que este indivíduo, porém mais velho, em alguns momentos com família constituída, demonstra interesse, na tentativa de fazer parte deste mundo, desejando ultrapassar as barreiras impostas, a exclusão, sejam elas sociais ou até psicológicas. Em relatos, colhidos durante as aulas, o que vem determinando o reingresso destes sujeitos na EJA é o interesse pela entrada no mercado de trabalho ou na tentativa da busca por melhores condições ao trabalho que já possua.

A relevância da investigação para a educação matemática

E ai surge a pergunta: "Em que a Matemática poderá contribuir?". A Matemática tem a ver, principalmente, em nosso caso específico, quando contemplamos a questão Financeira, principalmente quando percebe-se que nossos alunos acreditam que não pagarão juros, comprando um bem tanto à vista ou em parcelas. Porém, de que adianta se continuamos a planejar aulas que contemplem atividades em que são oferecidos exercícios sem caráter reflexivo? A oferta de aulas, as quais envolvam conteúdos relacionados à parte financeira, vem encontrar subsídios, pois os indivíduos que integram a EJA são sujeitos que exercem e que transitam no meio financeiro. Em diversos momentos da vida, são defrontados com situações que necessitam de tais conhecimentos, e como não os dominam, acabam por acreditar em outrem.

Dentro da perspectiva da Educação Matemática Crítica, Skovsmose (2008b, p. 65) quando descreve que "escolas são locais para inclusão e exclusão", traz dentre outros apontamentos, a questão da globalização e da guetorização. Um aluno, ao se matricular no ensino da EJA, possui internalizado características da guetorização. Este indivíduo, ao longo de sua vida, irá se deparar com situações as quais se sentirá excluído, tendo suas possibilidades de emprego restringidas, cujo fator escolarização lhe classificará como apto ou não apto a exercer determinadas funções diante do mundo do trabalho, submetendo-lhe a condição, com baixa remuneração.

Nesse sentido, a escola por sua vez, exerce contribuição perante a exclusão. Mesmo sabendo que esta não seja merecedora de toda a culpa, pelos males, oriundos quanto ao fracasso de seus alunos, pois há outros fatores que contribuem para o insucesso, dentre eles, as questões sociais e familiares. A exclusão poderá se manifestar por meio de: evasões, abandonos e retenções, dos sujeitos ora matriculados em idade correta.

Na tentativa de se reverter o quadro de desfavorecimento, em primeiro lugar nos referimos ao retorno quanto à escolarização, na qual estes indivíduos regressam à escola, na tentativa de sair do ostracismo. Em segundo momento, nos referimos à função financeira, pois diante das leituras, discussões, debates, das mensagens subliminares, as quais vêm a ser retomadas pela classe, dias, semanas após, cujos estudantes depuraram e digeriram informações lançadas durante as aulas. Às inquietações da turma só são possíveis devido à abordagem diferenciada, a introdução de textos, entre outras atitudes, que contemplem assuntos globais e atuais.

Procedimentos metodológicos e referenciais teóricos

Com relação aos procedimentos metodológicos, utilizamos em nossa investigação pressupostos da Metodologia de Pesquisa Qualitativa, que relacionam-se intrinsecamente com nossos referenciais teóricos de cidadania, uso de tecnologias e educação matemática crítica. Por meio de observações-participantes, optando em alguns casos por efetuar gravações de áudio, ou também em vídeo, solicitávamos a leitura de certa situação-problema, percebendo as dificuldades, tanto no concernente à literacia, quanto na materacia e na tecnoracia.

Em nossa proposta metodológica, destacamos ainda os registros escritos efetuados pelos alunos nas vinte e sete situações-problema escolhidas, para compor nosso produto educacional. As situações propostas em nossa investigação vão desde a proposição de cálculos propriamente ditos, até situações advindas de textos adaptados de jornais ou revistas, os quais exigiam certo posicionamento crítico. Destacamos ainda a realização de uma atividade idealizada e desenvolvida pelos alunos (jovens e adultos) participantes da pesquisa mediados pelo professor-pesquisador, numa feira de matemática em que os alunos apresentaram um ambiente em formato de labirinto para simular o mundo dos juros e das dívidas. Essa feira também foi investigada e os dados produzidos auxiliaram na construção do produto educacional da pesquisa

Ainda com relação às ações metodológicas, após os registros dos estudantes, analisávamos os dados produzidos a partir das respostas dos alunos, à luz dos pressupostos da educação matemática crítica de Ole Skovsmose, destacando das escritas dos alunos suas estratégias e tomadas de decisão nas situações-problemas apresentadas e retornávamos para discussão com os mesmos, de modo a desenvolver criticamente o aprendizado dos conceitos matemático-financeiros e de cidadania envolvidos nas situações, de modo que os sujeitos, envolvidos na investigação, pudessem tomar suas decisões de consumo criticamente.

A proposição de situações-problema destinadas à pesquisa foi planejada com enfoque teórico nas características da Educação Matemática Crítica, apontada por Skovsmose (2008a), quando este, em seus trabalhos, retrata que mediante conhecimentos matemáticos, os indivíduos participantes são capazes de interpretar, analisar e tomar decisões que julguem mais adequadas à sua vida ou comunidade. A ideia de planejar atividades que fomentem nos estudantes, além dos conhecimentos matemático-financeiros, a cidadania, atrelando às reflexões de cunho crítico, na qual em nosso trabalho, não é trabalhar o *paradigma do exercício*, mas criando, segundo nossa óptica, ambientes de aprendizagem financeiro-econômicos.

Para Fonseca e Cardoso (2009), cabe aos próprios professores de Matemática a incumbência de planejar aulas que contemplem leituras direcionadas, no intuito de que possam se familiarizar com outras formas de textualização. Os textos direcionados às aulas de Matemática, normalmente, objetivam introduzir algum conteúdo, ou seja, o texto se encontra a serviço da Matemática. Essas autoras destacam que se possuímos a intenção de provocar o aumento da interpretação nos nossos estudantes e a identificamos como deficitária, precisamos apresentá-los a textos específicos que contemplem relações com a Matemática.

Estes textos trazem à tona simbologias, linguagens e até expressões idiomáticas próprias do universo matemático, ao contrário de textos que propõem, somente, a exploração da Língua Portuguesa.

Analisando o currículo escolar, percebe-se que o currículo trabalhado nesta modalidade de ensino é reduzido pela falta de tempo e também por fatores cognitivos, não que não sejam capazes de aprender, mas por necessitarem de mais tempo para que isso possa acontecer. Entendemos que, as aulas destinadas aos alunos da EJA devam ser diferenciadas do ensino regular, assim como os materiais a serem trabalhados. A inserção nas aulas, de ferramentas tecnológicas, pode exercer contribuição contra a guetorização. As aulas com mídias podem ser inseridas de forma a tentar utilizá-las para fins reflexivos, nas quais será possível averiguar resultados das atividades. O ato da inclusão pode fazer parte, inserir, em conjunto, interconectar, cuja questão tecnológica se tornará fator includente.

Como planejamos lançar mão de ferramentas tecnológicas, mesmo não de forma rotineira, mas quando forem trabalhadas, devem auxiliar em possíveis tomadas de decisão, cujo fator decisório seja com base nos conhecimentos matemático-financeiros e de mundo. Não que as aulas, a partir deste momento tornar-se-ão planejadas somente para que sejam incorporadas às tecnologias, mas poderão ser plenamente desenvolvidas, tanto no aspecto didático, quanto no técnico, em consonância com o conteúdo matemático-financeiro, conciliando a Matemática em prol da formação dos cidadãos.

Quando nos referimos sobre a temática vinculada à formação dos cidadãos, nos referendamos a Cidadania, que em nosso caso, no âmbito escolar. Na escola estão integrados indivíduos representativos da sociedade, seja pelo pessoal de apoio, passando pelos estudantes até chegarmos à direção, na qual pensamos a Escola como um ambiente de fomento à reflexão. A tarefa de formação do cidadão é de toda a sociedade, cuja escola encontra-se composta. Para Campos, Wodewotzki & Jacobini (2011), a constituição da cidadania perpassa por projetos individuais, os quais devem ser incentivados como forma de ressaltar a importância do ser humano. Tais projetos, porém, devem evitar o encorajamento do individualismo, e sim pela busca de ações que resultem em produtos que culminem em benefícios para a coletividade, deixando a margem, o bairrismo e o egoísmo.

Reforçamos que quando o professor se propõe a trabalhar conteúdos matemático-financeiros em caráter crítico, não é garantido que tal apropriação se dê apenas pela fala desse profissional. O desenvolvimento ou a incorporação da criticidade por parte de cada estudante não irá ser apreendida somente por simples transferência de conteúdos durante as aulas. Adotando os pensamentos de Freire (2011), e Campos (2011, p. 64), percebemos que planejar aulas de cunho voltado para a Matemática Financeira, deve objetivar o desenvolvimento da "criticidade e o engajamento dos estudantes nas questões políticas, sociais" e econômicas, essenciais "para a sua realidade como cidadãos, pois deverão ter consciência de que vivem numa sociedade democrática e que lutam por justiça social em um ambiente humanizado, desalienado".

A proposição de algo que venha ao encontro de condicionamentos cristalizados, nos faz repensar nossa postura enquanto docente, na qual a alternativa adotada foi a paciência e a resiliência. Paciência no sentido de ter em mente, a espera pelo tempo de cada um, e a resiliência, pois mesmo diante de certa recusa, entendemos que o novo, o não habitual viesse gerar resistências. No decorrer do tempo, as barreiras se diluíam, devido a confiança e, por conseguinte, a confiança estabelecida entre professor e alunos.

Considerações finais

As trocas, as vivências de mundo, as leituras, em nosso caso, no âmbito das finanças, são formas de trazer à tona, temáticas atuais, geralmente relacionadas às desigualdades sociais, pois de acordo com Campos et al (2011), a questão da cidadania encontra-se inserida. Quando trazemos ao debate algum assunto, sempre nos deparamos com questões sociais, em que a desigualdade, seja de que natureza for, aflora de modo inevitável. As discussões são provenientes de assuntos globais, nacionais ou municipais, geradoras de fomento para que os estudantes exerçam oportunidades: de falar, de ouvir, de aceitar outros pontos de vista, exercendo sua cidadania, cientes de seus direitos, mas também conscientes que são possuidores de deveres.

Durante as aulas, percebemos que alguns estudantes apenas ouvem o que é falado. O ouvir pode advir devido ao fato de por estarem afastados da escola por algum tempo, portanto, sentem-se obscurecidos pelos avanços do mundo contemporâneo, acreditando que seus saberes, diante dos saberes escolares, não sejam suficientes.

Mas como planejar aulas com essas intencionalidades? Diante da busca, sem sucesso, por trabalhos que contemplassem temáticas igualmente por nós abordadas, sejam por meio de pesquisas acadêmicas ou em publicações editoriais, houve, portanto, a necessidade de planejá-las, tendo como enfoque, os conteúdos pertencentes à Matemática Financeira. Diante dessa temática, encontramos materiais destinados ao público do ensino regular, o que não ocorre quando falamos em EJA, principalmente quando se oferece destaque quanto ao desenvolvimento da cidadania, atrelado à capacidade crítica do educando, o que reforça para a necessidade de pesquisa neste âmbito da Educação Matemática.

Nossa investigação culminou em um produto educacional que apresenta atividades matemáticas educativas, desenvolvidas no pré-teste e pós-teste da pesquisa, que proporcionam o desenvolvimento da literacia, da materacia e da tecnocracia, nos vieses financeiro-econômicos. Todo material, disponível para professores, tem por interesse, disseminar nossa pesquisa, mostrando que é possível trabalhar de forma a desenvolver criticamente os educandos, não tendo somente o *paradigma do exercício* e o poder *formatador da matemática* como objetivos principais nas salas de aula.

Referências bibliográficas

Borba, M. (2004). Brasil, alfabetismo matemático e tecnologias da inteligência. IN: Fonseca, M. da C. F. R. *Letramento no Brasil – Habilidades Matemáticas: reflexões a partir do INAF 2002*. São Paulo.

Brunel, C.(2008). *Jovens cada vez mais jovens*. 2ª ed. Porto Alegre: Mediação.

Campos, C. R.; Wodewotzki, M. L. L. & Jacobini, O. R. (2011). *Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática*. Autêntica: São Paulo.

Fonseca, M. C. F. (2004). *Letramento no Brasil – Habilidades Matemáticas: reflexões a partir do INAF 2002*. Global: São Paulo

Fonseca, M. da C. F. & Cardoso, C. de A. (2009). *Educação Matemática* e *letramento: textos para ensinar Matemática* e *Matemática para ler o texto*. In Nacarato, A. M.; Lopes, C. E. (Org.). *Escritas* e *Leituras na Educação Matemática* (pp. 20-35). Autêntica: Belo Horizonte.

Freire, P.(2011). *Pedagogia do Oprimido*, 50ª ed.; São Paulo: Paz e Terra.

Kistemann Jr, M. A. (2011). *Sobre a Produção de significados* e *a Tomada de Decisão de indivíduos-consumidores*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual Paulista/Unesp, Campus Rio Claro/SP.

Machado, N. J. (2001). *Cidadania* e *Educação-(Coleção Ensaios Transversais)*. 3ª ed. Escrituras: São Paulo.

Skovsmose, O. (2008a). *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus.

Skovsmose, O. (2008b). *Desafios da Reflexão: em Educação Matemática Crítica*. Campinas: Papirus.

SABERES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA NA PERSPECTIVA DA CYBERFORMAÇÃO

Vinícius Pazuch; Maurício Rosa
Universidade Luterana do Brasil Brasil
viniuch@hotmail.com; mauriciomatematica@gmail.com

Resumen. Neste artigo apresentamos resultados parciais de uma pesquisa que investiga o processo de Cyberformação Semipresencial (formação continuada em matemática com tecnologia) vivido pelo grupo constituído pelo pesquisador (primeiro autor do artigo) e por quatro professoras de matemática da Educação Básica. Os resultados tratam da relação das quatro professoras de matemática com seus saberes profissionais. Em específico, no decorrer da pesquisa investigamos a formação continuada dessas professoras em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos. Neste artigo, em particular, pinçamos dados coletados por meio de um instrumento desta pesquisa, as entrevistas semiestruturadas. Salientamos que as entrevistas realizadas precedem o início dos encontros presenciais e a distância, que compõem a Cyberformação Semipresencial. Os resultados deste artigo suscita um olhar mais atento, crítico e desencadeador dos atos de ser-com, pensar-com e saber-fazer-com os meios tecnológicos disponíveis nas salas de aula de matemática.

Palabras clave: tecnologias digitais, saberes docentes

Abstract. This paper presents partial results of a research that investigates the process of Cybereducation blended (continuing education in mathematics with technology) experienced by the group constituted by the researcher (first author of the article) and four teachers of mathematics Education basic. The results dealing with the relation of the four math teachers with their professional knowledge. In particular, during the research investigated the continued education of these teachers in mathematical terms, pedagogical and technological. In this article, in particular, clamping data collected by means of an instrument of this research, semi-structured interviews. We stress that the interviews preceding the beginning of the meetings and distance, which make up the Cybereducation blended. The results of this paper raises at a closer look, and critical trigger acts of being-with, thinking-with and the knowing-making-with the technological means available in classrooms math.

Key words: digital technologies, faculty knowledge

O contexto da pesquisa

Neste artigo apresentamos resultados parciais de uma pesquisa de doutorando em andamento, no Estado do Rio Grande do Sul, Brasil. Para tanto, tratamos da relação com os saberes profissionais (Tardif, 2002; Borges, 2004) em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos, a partir da análise de entrevistas semiestruturadas, feitas com quatro professoras de matemática da Educação Básica, que participam de um processo de Cyberformação Semipresencial (Pazuch & Rosa, 2011). Salientamos que as entrevistas foram realizadas num período anterior à Cyberformação.

Assim, embora não focaremos, neste artigo, a análise em termos da concepção de Cyberformação (Rosa, 2011), explicitamos que esta abrange "[...] a formação vista sob a dimensão específica (matemática), pedagógica e tecnológica que assume o uso de TIC

(Tecnologia de Informação e Comunicação), em específico, o ciberespaço em ambiente de EaD sob a perspectiva do *ser-com*, *pensar-com* e *saber-fazer-com-TIC* [...]" (Rosa, 2011, p. 11).

Em específico, o *ser-com-TIC* "[...] além de estar no mundo, cria um novo mundo, ou micromundo [...] (Rosa, 2008, p.118)", em que, o sujeito necessariamente está "plugado" ao meio tecnológico; o *pensar-com-TIC* pode permitir a construção de conhecimentos matemáticos "[...] nas relações com o mundo e com os outros" (Rosa, 2008, p. 106), que abrange a (trans)formação das ideias matemáticas possíveis com este meio tecnológico (computador, *software*, vídeo); e o *saber-fazer-com-TIC* "[...] é manifestado pelas ações intencionais efetuadas com o mundo, comigo mesmo e com os outros. Nesse sentido, ações desempenhadas na atividade, na construção de um produto, na prática [...] (Rosa, 2008, p. 136)".

Sendo assim, neste artigo, analisamos os dados das entrevistas a partir da abordagem qualitativa, contemplando as falas de quatro professoras da Educação Básica, buscando responder a pergunta diretriz: De forma se apresentam os saberes profissionais, constituídos ou em fase de constituição de professoras de matemática, em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos? Apresentamos os pressupostos teóricos e metodológicos, que convergem com esta questão.

Pressupostos teóricos

Os pressupostos teóricos que delineiam e permitem a análise dos dados parciais desta pesquisa se referem ao entendimento de saber, produto que pode ser comunicado pelo sujeito (Charlot, 2000). Em particular, tratamos dos saberes profissionais (Tardif, 2002 & Borges, 2004) de professores que ensinam matemática na Educação Básica. Nessa perspectiva, segundo Tardif (2002) não há uma definição consensual a respeito do que é o saber, do que é um saber, enfim, do que são os saberes dos professores. Mesmo não sendo consensual, assumimos o saber como uma "[...] atividade discursiva que consiste em tentar validar por meio de argumentações e de operações discursivas (lógicas, retóricas, dialéticas, empíricas, etc.) e linguísticas, uma proposição ou uma ação" (Tardif, 2002, p. 196). Entendemos o saber como reflexões elaboradas a partir de constructos teóricos, práticas, vivências ou experiências na interação de sujeitos. "O saber é produzido pelo sujeito confrontado a outros sujeitos, é construído em 'quadros metodológicos'. Pode, 'entrar na ordem do objeto', torna-se 'um produto comunicável'" (Charlot, 2000, p. 61).

Assim, ao tratar de saberes dos professores, "[...] chamaremos de 'saber' unicamente os pensamentos, as ideias, os juízos, os discursos, os argumentos que obedeçam a certas exigências de racionalidade" (Tardif, 2002, p. 199). Explicitamos, brevemente, "[...] que as exigências de racionalidade que guiam as ações e os discursos das pessoas não resultam de uma razão que vai além da linguagem e da práxis: elas dependem das razões dos atores e dos locutores, e do contexto no qual eles falam e agem" (Tardif, 2002, p. 199-200).

A elaboração conceitual, proposta por Tardif (2002), sugere que os *saberes docentes* correspondem à trama de *saberes profissionais*, (constituídos na formação inicial, oriundos das Ciências da Educação e da ideologia pedagógica), os *saberes disciplinares*, *curriculares* e *experienciais*. Dentre esses saberes, entendemos que perpassam as concepções pedagógicas e educativas manifestadas pelas formas de ver o ensino de matemática/o currículo de matemática (Fiorentini, 1995; D'Ambrósio, 1996).

Acreditamos que os resultados da pesquisa possam constituir ou inaugurar saberes de professores em atividade profissional, isto é, que se permitam, por meio de reflexões a partir de um *locus* específico, mostrar as "minúcias" conceituais, didáticas, metodológicas, tecnológicas, pedagógicas e, sobretudo, as experiências inerentes à prática docente de professores que ensinam matemática e que começam a desenvolver uma concepção de ensino com TIC (Rosa, 2011). Salientamos que a prática docente "[...] não é somente um espaço de aplicação de saberes provenientes da teoria, mas também um espaço de produção de saberes específicos oriundos dessa mesma prática" (Tardif, 2002, p. 234).

Em suma, as ações de pesquisa vêm permitindo identificar nos seus diversos momentos a relação dos professores com os saberes, considerando tais como heterogêneos e temporais (Tardif, 2002), ao entender que cada professor possui uma formação inicial, uma história de vida, marcada por diferentes experiências em sala de aula ou fora dela.

Aspectos metodológicos

A processualidade metodológica da pesquisa é de natureza qualitativa, pois "[...] engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações ou opiniões [...] noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências [...]" (Bicudo, 2004, p. 104). Para a sua realização, constituímos um grupo com quatro professoras de matemática do Ensino Fundamental e o pesquisador (primeiro autor). Este grupo tem o objetivo de planejar, discutir e refletir sobre atividades/situações de geometria euclidiana na perspectiva do *ser-com*, *pensar-com* e *saber-fazer-com-TIC* (Rosa, 2011).

Assim, particularmente, nossa intenção nesse artigo é promover aproximações com as práticas docentes desses professores por meio de *um dos instrumentos de coleta de dados* (entrevistas semiestruturadas) buscando apresentar saberes de professores que ensinam matemática na Educação Básica, em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos. Salientamos que as entrevistas com as professoras foram realizadas em um período anterior (Agosto de 2011) aos encontros presenciais e aos a distância, ou seja, antecedendo à Cyberformação Semipresencial (que iniciou em Setembro de 2011).

Deste modo, a partir das entrevistas semiestruturadas temos a intenção de traçar perfis, ou ainda, reconhecer saberes profissionais de tais professoras, em relação à (1) formação profissional, (2) à prática em sala de aula, (3) ao ensino de geometria, aos (4) momentos de história de vida e (5) ao uso de TIC. Diante dos aspectos (1), (2), (3), (4) e (5) presentes nas entrevistas semiestruturadas, delimitamos três unidades analíticas: os *saberes docentes em termos matemáticos*, os quais mostram as concepções das professoras sobre a matemática; os *saberes docentes em termos pedagógicos*, que compreendem as formas de tratar os saberes a ensinar no contexto escolar; e os *saberes docentes em termos tecnológicos*, em que se mostram como as professoras concebem o uso de TIC em sala de aula.

Saberes em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos – Uma breve análise

Saberes em termos matemáticos: qual o discurso que prevalece?

Entendemos que os saberes matemáticos, denominados por Tardif (2002) como disciplinares, não necessariamente devem estar prescritos pelo planejamento docente, mas podem também ser derivados das interações produzidas pelos estudantes com o professor. Ao serem questionadas pelo pesquisador (primeiro autor) sobre como consideram suas aulas de matemática e como as produziam no limiar da sala de aula, duas professoras se mostraram da seguinte maneira:

- *No geral, eu acredito que não seja uma professora muito tradicional...eu não gosto de trabalhar em cima só do plano de aula...eu prefiro trabalhar mais com aquela pedagogia liberal, que busca mais saber o conhecimento do aluno, pra depois passar o meu conhecimento para o aluno e depois formar juntos o trabalho...então eu não fico só no plano de ensino, no giz e no quadro, como se diz, mas passar o conteúdo para o aluno e dizer porquê ele precisa aprender aquilo na prática, que acho que é o fundamental o que precisamos hoje em dia de matemática* [...] (Entrevista – Professora 3 – Agosto de 2011 - Grifos nossos).

- *Eu exponho o conteúdo, depois deixo eles* [estudantes] *trabalharem em grupo, depois dou mais um monte de exercícios para eles* [estudantes] *fixarem o conteúdo. Como estou com todo o conteúdo pra dar, eu não tenho tempo para levar os alunos lá no laboratório, por exemplo, para trabalhar...* (Entrevista – Professora 4 – Agosto de 2011 - Grifos nossos).

A concepção de saber que assumimos é a de um produto comunicável (Charlot, 2000), constituído pelas interações dos sujeitos consigo mesmo, com o mundo e com os outros (Charlot, 2005). Nesse viés, a por meio da fala da professora 3, podemos inferir que a mesma conduz a sua aula, em termos matemáticos, pelo entendimento do "*formar juntos*" corroborando as reflexões propostas por Charlot (2005), em que a constituição do saber se dá pelas múltiplas relações com o mundo, consigo e com os outros. Além disso, a professora 3, menciona que considera o "*conhecimento do aluno", o* "*meu conhecimento*" e que "*eu não gosto de trabalhar em cima só do plano de aula*", refletindo a preocupação de D'Ambrósio (1996): "Ensinam-se conteúdos que num determinado momento histórico tiveram sua importância e que são transmitidos segundo uma metodologia definida *a priori*, sem conhecer os alunos (D'Ambrósio, 1996, p. 88)".

Enquanto a professora 4, ao falar que "*eu exponho o conteúdo*" e apresenta um "*monte de exercícios"* para que os estudantes possam *"fixar o conteúdo"* se relaciona com o modelo cartesiano em que o professor entende o saber matemático a partir da exposição/da transmissão e o estudante é aquele que precisa exercitar/copiar e reter informações (Fiorentini, 1995).

Saberes em termos pedagógicos: o que dizem professoras em relação à vivência/prática em sala de aula?

Em termos pedagógicos, de acordo com Tardif (2002) a pedagogia é o conjunto de meios usados pelo professor para atingir seus objetivos no âmbito das interações educativas com os seus estudantes. Assim, "[...] a pedagogia é a 'tecnologia' utilizada pelos professores em relação aos seus sujeitos de trabalho (os alunos), no processo de trabalho cotidiano, para obter um resultado (a socialização e a instrução)" (Tardif, 2002, p. 117). Para tanto, ao falar sobre a prática docente, professora 2 descreve:

> [...] *a relação professor-aluno, isso ajuda muito, quando você tem uma relação de confiança...tá difícil professora, é difícil. Mas, nós vamos conseguir, nós vamos fazer juntos, nós vamos nos ajudar, acho que quando você consegue 'aconchegar' eles assim, você vem aqui para aprender, é um espaço de dificuldades* [se referindo à sala de aula] *sim, mas que nós juntos vamos superar, né...é uma matéria* [matemática] *que às vezes não agrada a todos, mas que todos são capazes de aprender...nesse momento da minha vida tenho me preocupado com o* processo de aprendizagem (Entrevista, Professora 2 – Agosto de 2011 – Grifos nossos).

A professora 2 dialoga com a sala de aula, no âmbito da interação humana, de fato, com sua concepção pedagógica por meio da *"relação de confiança*", do "*nós vamos fazer juntos*" (professor e estudantes), a sala de aula como um "*espaço de dificuldades*", "*mas que todos são capazes de aprender*". Estas falas refletem que estas concepções só podem se revelar em conjunto com a ação docente, com a prática estabelecida no ambiente escolar, ou seja, usufruindo da reflexão sobre o saber da experiência (Tardif, 2002) compreendido pela trama dos saberes pedagógicos, disciplinares e curriculares.

Saberes em termos tecnológicos: quais são as ideias mencionadas pelo professor antes da Cyberformação Semipresencial?

Nas entrevistas semiestruturadas, questionamos sobre a relação das professoras com os saberes tecnológicos, que se constituem, "[...] por meio da ação e de "um saber-fazer", ter domínio tecnológico, habilidade e destreza na utilização da tecnologia e preocupação em estar atualizado em relação ao que está disponível [...]" na rede (Souza & Castro Filho, 2009, p. 11). Em síntese, as quatro professoras não haviam usado meios tecnológicos em suas aulas de matemática. Trouxemos para esta unidade analítica falas de três professoras em que são tratados aspectos sobre o porquê usar TIC para produzir aulas de matemática na Educação Básica.

> *Eu acho que é importante, porque hoje a gente está vivendo em um mundo diferente daquele em que eu aprendi, então, é necessário que eles [estudantes] também tenham esse contato, mas eu não sei fazer isso, eu acho que é importantíssimo, pra eles [estudantes] e pra mim também, eu também vou aprender uma coisa que eu nunca aprendi, que eu não sei né* (Entrevista – Professora 1 – Agosto de 2011 – Grifos nossos).

> *Eu acho importante, mas eu não tenho participado de cursos, pois aqui na escola era meio complicado [usar], mas neste último [evento] eu participei de um curso do GeoGebra, então, muito bacana essa questão de poder movimentar, coisas que com eles no papel você não consegue fazer eles visualizarem* [estudantes]*, a movimentação, assim sabe... Coisas que não teria com o material manipulativo, que é com isso que eu trabalho, o meu manipulativo não dá essa visão pra eles* [estudantes]*, é algo assim diferente* (Entrevista – Professora 2 – Agosto de 2011 - Grifos nossos).

> [...] *Estão aí para serem usadas...só que assim, a calculadora por exemplo, eu tenho medo de deixar o aluno muito preguiçoso, porque assim, ó, eles têm muita preguiça de fazer uma conta com vírgula por exemplo* [...] *mas o software* e *a internet têm que deixar eles* [estudantes] *pesquisarem o que quiserem...* (Entrevista – Professora 4 – Agosto de 2011 - Grifos nossos).

Os discursos da professora 1 que o uso de TIC "*é importante*", "*é necessário*", não passa por uma tomada de consciência, de questionar o porquê usar, com qual finalidade, somente para ilustrar a aula de matemática? A concepção de Cyberformação (Rosa, 2011) contesta o modismo e dialoga com a perspectiva de transformação no processo cognitivo que o professor e o estudante podem construir ao *ser-com*, *pensar-com* e *saber-fazer-com-TIC* (Rosa, 2011) no contexto escolar. Neste sentido, a professora 2, também afirma que "[...] *o software e a internet têm que deixar eles* [estudantes] *pesquisarem o que quiserem*", o que também dissocia da concepção de Cyberformação (Rosa, 2011) que concebe o planejamento de aulas de matemática com TIC de maneira hipertextual, não-linear, mas, com a presença de objetivos por meio do professor que atua ou deseja atuar com TIC.

Por outro lado, a professora 2, infere no sentido de avanço por meio do uso de TIC, ao abordar o uso de um *software* de geometria dinâmica (Geogebra), destacando a questão da movimentação, do arrastar (Zulatto, 2002), pois, "*no papel você não consegue fazer eles visualizarem* [estudantes], *a movimentação*". Porém, o uso do *software* de geometria dinâmica não garante um possível avanço cognitivo, uma vez que, as construções podem ser apenas transpostas para este meio tecnológico e, não refletidas, permanecendo estáticas.

A possibilidade da cyberformação semipresencial

A análise feita, neste artigo, que se refere aos saberes profissionais a partir dos discursos/falas de professoras de matemática da Educação Básica, em termos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos revela a necessidade da Cyberformação (Rosa, 2011). Isso implica considerar as dimensões matemática, pedagógica e tecnológica, atreladas ao *ser-com*, *pensar-com* e *saber-fazer-com-TIC*, para professores que atuam e desejam atuar, sem a presença do modismo, embora a experiência estética (Rosa, 2011), o belo, possível por meio de vídeos, *softwares*, *blogs* exista e deve ser considerada também na construção de saberes-com-TIC.

Em suma, entendemos a Cyberformação Semipresencial (em andamento), como um processo lento, não agressivo, que considera os perfis que permitiram olhar para os saberes já sistematizados pelas professoras, e, brevemente, contemplados neste artigo. Assim, buscamos a vivência de atividades matemáticas com TIC que permitam mobilizar os professores e consequentemente os estudantes à criticidade e à produção de ideias matemáticas por meio de TIC.

Referências bibliográficas

Bicudo, M.A.V. (2004). Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: Borba, M.C., Araújo, J.L. (Eds.), *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática* (pp. 99-112), Belo Horizonte/MG, Brasil: Autêntica.

Borges, C. M. F. (2004). *O professor da Educação Básica e seus saberes profissionais*. Araraquara: JM Editora.

Charlot, B. (2000). *Da relação com o saber*: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artmed.

Charlot, B. (2005). *Relação com o saber, formação dos professores e globalização*: questões para a educação hoje. Porto Alegre: Artmed.

D'ambrosio, U. (1996). *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus.

Fiorentini, D. (1995) Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. *Zetetiké*, *(3)*4, 1-37.

Rosa, M. (2008). *A Construção de Identidades Online por meio do Role Playing Game*: relações com o ensino e aprendizagem de matemática em um curso à distância. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista. Rio Claro/SP, Brasil.

Rosa, M. (2011). Cultura Digital, Práticas Educativas e Experiências Estéticas: interconexões com a Cyberformação de Professores de Matemática. In: Reunião Anual da Anped (Ed.), *Anais da Reunião Anual da Anped 34,* 1-27. Natal/RN, Brasil: ANPED.

Souza, C.F., Castro Filho, J.A. (2009). *Saberes Docentes em EaD*: A prática tutorial em ambientes virtuais de aprendizagem. Acessado em 20 de de 2012 de http://www.nuteds.ufc.br/curso/cpds/modulo/int/material_complementar/Artigo

Pazuch, V., Rosa, M. (2011). Produção de Saberes Docentes em um Processo de Cyberformação Semipresencial de Professores de Matemática: proposições iniciais. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, *Anais do Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação 15,* 1-13. Campina Grande/PB: SBEM.

Tardif, M. (2002) *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis, RJ: Vozes.

Zulatto, R. B. A. (2002). *Professores de Matemática que Utilizam Softwares de Geometria Dinâmica*: suas características e perspectivas. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista. Rio Claro/SP, Brasil.

EL VIDEO TUTORIAL COMO ALTERNATIVA DIDÁCTICA EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Mario Saucedo Fernández, Juan José Díaz Perera, Santa del Carmen Herrera Sánchez, Carlos Enrique Recio Urdaneta
Universidad Autónoma del Carmen México
saferma2006@hotmail.com, jjdiaz@pampano.unacar.mx, sherrera@pampano.unacar.mx, crecio@pampano.unacar.mx

Resumen. La elaboración de los videos tutoriales pretende facilitar el acceso de estudiantes a la información sobre todo tipo material. Como alternativa a esta situación que viven los estudiantes, donde la materia de matemáticas es uno de los temas más complicados, teniendo que aprobar la materia hasta la última oportunidad, el video tutorial es una oportunidad de elevar la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje y desarrollar las competencias de los estudiantes, permitiéndole realizar consultas sobre las dudas que tenga desde la comodidad de su casa, seguir paso a paso la solución de una situación problema, haciendo al estudiante el actor principal, así como también propiciar una práctica docente reflexiva, significativa y situacional, logrando de esta manera un cambio en los modelos de enseñanza y evaluación.

Palabras clave: video tutorial, aprendizaje, tecnología educativa

Abstract. The elaboration of the tutorials videos seeks to facilitate the student access to the information on all types of material. As an alternative to this situation that students live, where mathematics is one of the most complicated issues, having to approve the matter until the last opportunity to raise the quality of the teaching-learning process and develop the skills of students, allowing to querying on the doubts that may have from the comfort of your home, follow step-by-step resolution of a problem situation, making the student the main actor, as well as also to encourage a practice teacher thoughtful, meaningful and situational, achieving this way a change in teaching and assessment models.

Key words: tutorial video, learning, educational technology

Introducción

Estamos inmersos en una sociedad del conocimiento (Webster, 1995), por tal motivo la escuela se convierte en una institución de aprendizaje y de capacitación continua. Las instituciones educativas actuales tendrán que infundir motivación eficaz para continuar aprendiendo hasta el fin de la existencia. Un aprendizaje a lo largo de la vida. Los retos a los que se enfrenta la educación están directamente relacionados con el nivel de formación, la capacidad de innovación y emprendimiento que estos poseen (Marcelo, 2002). Y por si esto fuera poco la nueva sociedad exige de una permanente actividad de formación y aprendizaje, bajo esta circunstancia es necesario crear y preservar un estado de cambio permanente, es decir, es preciso un aprendizaje a lo largo de la vida, donde el no aprender se encuentra abolido. Por tales razones cada vez es más requerido un nuevo estilo de trabajo, estudiantes que sean capaces de superar las limitantes de espacio, tiempo o ubicación geográfica y ante estos retos, el conocimiento es el recurso dominante (Drucker, 1999).

Por ello es importante trabajar sobre ese conocimiento que se quiere generar en los educandos, teniendo la convicción de que la escuela deber ser un espacio movilizador de la capacidad intelectual, de la creatividad y del sentido innovador de sus conocimientos generados en ella al medio social en el que se halla inserta. De la misma manera es necesario promover el uso de los videos tutoriales en la escuela, como herramienta tecnológica con una finalidad esencialmente pedagógica, orientadora del "saber saber" y del "saber hacer", con el objeto de contribuir con el mejoramiento de la calidad de la educación, que permita a la persona, mediante comprensión de los códigos de las nuevas tecnologías, entender el mundo en que vive, adaptarse activamente a la sociedad y conscientes de que el conocimiento aquí y ahora, es dinamizador del crecimiento y herramienta fundamental para el cambio y la transformación social.

Antecedentes

Las tecnologías digitales de la información y de la comunicación están teniendo un peso cada vez mayor en la participación dentro de la educación, exigiendo de esta manera nuevos espacios y ambientes de aprendizaje, así como nuevas funciones del profesorado.

Dentro de la Universidad Autónoma del Carmen (UNACAR), no existe esta cultura de la implementación de los videos tutoriales, existen materiales dentro de la videoteca de la misma institución, pero no están actualizados y por si fuera poco, estos contenidos son muy escasos en el área de matemáticas. Otro aspecto es que estos materiales no son elaborados por los docentes. Mucho de los materiales con los que cuentan los dicentes son apuntes, libros, la información que encuentra en la red y muy pocos materiales en video y ni se diga de video tutoriales, sobre todo en el área de matemáticas. Es indiscutible que el uso del video, como apoyo didáctico a la educación, está ligado al desarrollo económico del país.

En la mayoría de los países desarrollados, las universidades más poderosas utilizan circuitos internos de televisión para transmitir videos didácticos y en algunos casos cuentan con potentes medios para suministrar estos materiales a los clientes interesados. La realidad es que el uso del video en educación es muy poco común y si a esto agregamos que la mayoría de los docentes no están preparados o no han sido formados en el uso de este medio tecnológico, pues la producción de este material es nula. Por ello es importante propiciar una cultura en los docentes sobre la elaboración de los videos tutoriales, que empiecen a generar dicho recurso didáctico y que implementen las estrategias necesarias para su posterior aplicación en el aula. La aplicación de los videos tutoriales dentro de las aulas de clase, no es algo muy común, de hecho fue en los años setentas que se empezaron a publicar numerosas obras relacionadas con las aplicaciones audiovisuales en la enseñanza, y que estas tenían un potencial de provocar en el alumno una mejora en cuanto a su motivación, comprensión y que incrementaban su actividad en el aprendizaje (Area, 2001).

A partir de la aparición del video y ver las posibilidades que se tenían de implementarlo a la educación, este toma otras dimensiones de aplicación, mediante este se podría mostrar situaciones inusuales, mostrar procedimientos, realizar una actividad o ejercicio paso a paso, detenerse en un punto particular del proceso de alguna operación, guiar al alumno, despertar el interés del alumnado, tener el material disponible en cualquier momento que se desee, entre otras tantas ventajas. Tanto así, que Cabero (1989) señala que el video puede ser transmisor de información, instrumento de conocimiento, evaluador del aprendizaje, medio de formación del profesorado, herramienta de investigación psicodidáctica, instrumento de alfabetización icónica y medio para la formación de actitudes del alumno.

Muchas instituciones educativas ya han puesto en marcha la aplicación de videos dentro de sus aulas de clase, como ejemplo podemos mencionar a la facultad de farmacia de la universidad de Sevilla donde han desarrollado una colección completa de videos denominados Prácticas Tuteladas, que corresponden a los aspectos prácticos de la asignatura de química en donde presentan situaciones reales generadas en el laboratorio de química (Cameán, Moreno, Pichardo, Prieto, y Repetto, 2005). La Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Cantabria desarrolló un modelo de enseñanza asistido por ordenador para la asignatura de teoría de la optimización. El objeto central de la misma es la presentación de las técnicas básicas de la programación matemática bajo una perspectiva económica y empresaria. El proyecto se ha desarrollado con la intención de subir dichos materiales a la red internet como tutorial interactivo multimedia y que el alumno lo tenga como complemento de la asignatura (Cobo, 1995). En la Universidad Metropolitana de Xochimilco el uso de los videos tutoriales les permitió a los docentes experimentar el qué, cómo y cuándo de diferentes materiales educativos, relacionándolos directamente con el desempeño de los alumnos. El uso permite al docente planear y probar las ayudas didácticas, así como el tipo y número de ejercicios que cada alumno requiere para lograr un aprendizaje significativo. De igual manera, durante la prueba del sistema tutorial se fue grabando el recorrido individual de cada alumno en las distintas lecciones para poder ver su avance. Esto es, se tiene la información de cómo realiza el alumno su recorrido dentro de cada lección (Rouquette y Ariza, sf)

Planteamiento del problema

Es bien sabido que todas las persona tiene un potencial para aprender, dicho aprendizaje pueden ser más rápido o más lento todo depende de la persona. El aprendizaje es más efectivo cuando las condiciones son adecuadas, es decir, cuando se logra despertar el interés en el individuo por aprender, y es precisamente este, el detonador que se busca ocasionar en los alumnos mediante la implementación de los videos tutoriales, permitiendo ser utilizados por cualquier comunidad docente, estudiantil y ¿por qué no?, público en general. Se planteó realizar una investigación en cuanto a la elaboración de videos tutoriales, cuyo objetivo principal es propiciar un aprendizaje significativo y romper los paradigmas que se tienen con respecto a las materias de matemáticas, en los alumnos de nivel superior de la UNACAR, en función de su complejidad y a los altos índices de reprobación, mediante la elaboración de los videos tutoriales. Es aquí, precisamente donde se desea hacer una aportación, con la inclusión de los videos tutoriales, se pretende lograr que los estudiantes de la UNACAR al consultarlo les permita ampliar y enriquecer su aprendizaje, así como el logro de competencias, tales como la capacidad de pensar con independencia, la creatividad, la solución de problemas y la gestión del propio aprendizaje. En la UNACAR se tiene muy poco material de video, y específicamente de matemáticas casi nulo, ni hablamos que sean tipo tutoriales, por ello con dicho material didáctico se pretende innovar, aportando de esta manera los video tutoriales con respecto a las diferentes disciplinas relacionadas en el área de matemáticas.

Objetivo

Potenciar el rendimiento académico en los alumnos, así como propiciar la construcción de su propio aprendizaje mediante los videos tutoriales, de igual manera se pretende impactar en la disminución de los altos índices de reprobación en la materia de matemáticas.

Marco teórico

En la actualidad se puede hablar que los procesos de aprendizaje se están alejando de la clase tradicional, donde el docente era el centro del sistema, y se está dirigiendo hacia un modelo en donde se fomenta la participación del alumno implicando a la tecnología para poder desarrollar un aprendizaje significativo (Villa, 2011). Sin embargo, la realidad es que el impacto que se esperaba al implementar estas nuevas herramientas tecnológicas no ha sido el esperado. Dentro de estas aplicaciones tecnológicas tenemos a los videos tutoriales. El video tutorial de acuerdo a Márquez (1995) debe favorecer la realimentación, comprobación, aplicación, demostración, resolución de ejercicios, problemas de la vida diaria y proyectos de una manera interactiva brindando un juego de iniciativas a través de organizadores gráficos y animaciones hacia la búsqueda de fundamentación científica y su ejecución, conseguir además un aprendizaje significativo que implica un cambio en los esquemas de conocimientos que se poseen previamente, estableciendo nuevas relaciones entre dichos elementos, mejorando de esta manera el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, es importante saber diferenciar el tipo de video que se requiere utilizar Cebrian (1987) los clasifica entre cuatro tipos diferentes: curriculares, culturales, científico-técnico y los videos para la educación. Posteriormente hay que determinar el video en función de los objetivos didácticos que se pretenden alcanzar, que de acuerdo a Schmidt (1987) estos pueden ser de tipo: instructivo, instruir o lograr que los alumnos dominen un determinado contenido; cognoscitivo, dar a conocer diferentes aspectos relacionados con el tema que están estudiando; motivadores, para disponer positivamente del alumno en una determinada actividad; modelizadores, presentan modelos a imitar o seguir.

De acuerdo a Rodenas (2012), es importante que este cumpla un objetivo didáctico previamente formulado y enmarcado por actividades previas y posteriores al visionado. Sin lugar a dudas que con la implementación de dicho material en el aula se logrará los siguientes beneficios:

- Muestra paso a paso los procedimientos a seguir para elaborar una actividad.
- Facilita la comprensión de los contenidos más difíciles para los estudiantes.
- Está disponible en cualquier momento, permite al estudiante recurrir a él cuando desee y tantas veces como sea necesario.
- Facilita la atención personalizada del alumno.
- En cuanto al aprendizaje, avanzan según su propio ritmo
- Propicia un aprendizaje significativo
- Crear entornos de formación más ricos y flexibles
- Propiciar la autoevaluación
- Gestión del propio aprendizaje

De acuerdo al mismo autor debe atender a los siguientes aspectos fundamentales:

- Que los alumnos valoren la información que le suministra el video
- Que identifiquen el contenido de este con el programa
- Participación del profesor en el video para su mayor apreciación e interés.
- Contar con una estrategia didáctica

Estrategia didáctica

Trabajo previo al video: se realizó una búsqueda bibliográfica para poder seleccionar los ejercicios a tratar en el video, de acuerdo a los objetivos marcados en el mismo. Dichos ejercicios deben orientar a la reflexión, actitud analítica, así como al análisis y a la interpretación de resultados.

Diseño y contenido del video: Una vez que se seleccionaron los ejercicios se apoyó del programa de camtancia para su respectiva edición. El video está dirigido a los alumnos del cuarto semestre que cursan la materia de estadística II y cuyo tema abordado es el de prueba de hipótesis (muestras grandes, pequeñas y proporciones). El contenido del video está diseñado por las siguientes partes: presentación, introducción, objetivo, temas a tratar en el video

- Presentación: Se esclarecen los objetivos y la metodología a seguir en la presentación de los videos. Condiciones de visionado: Se establecen los tiempos, las formas y condiciones en que se llevarán a cabo las sesiones con el video.
- Introducción: En esta parte del video, el maestro tratará algunos antecedentes que considere importantes para que se comprenda mejor el objetivo del video.
- Objetivo: Los alcances que se esperan lograr.
- Temas a tratar en el video: es importante que el alumno sepa previamente los temas que trabajará con la aplicación de los videos, esto le permitirá prepararse con algún material complementario.

Desarrollo del video: de acuerdo a las recomendaciones de los autores previamente mencionados, en donde recomiendan, que el mismo docente encargado de la materia sea el que salga en el video, se siguió con esa directriz, de esta manera se hizo más atractivo. En esta parte del video se explica de manera clara y detallada el procedimiento que se sigue en la solución de problemas de pruebas de hipótesis y cuando es necesario, durante el video, se le va cuestionando sobre que es lo que se podría hacer para resolver la problemática, de tal manera que interactúen.

Actividades complementarias: es importante romper la pasividad en los alumnos, por ello al final del video se les entrega un ejercicio del tema tratado previamente en el video y se les pide que lo resuelvan, es un espacio para que el alumno pueda aplicar lo enseñado en el video hasta el momento. Al final se cierra con una sesión de preguntas y respuestas. Plara poder reforzar los temas vistos en los videos se utiliza la plataforma dokeos para concentrar material complementario a dicho tema, en donde se podrá consultar a gusto del alumno.

Metodología

El estudio se realizó al curso de estadística II en el periodo de febrero-julio de 2012.

La manera en que se trabajo fue la siguiente:

- Elaboración de videos tutoriales sobre el tema de prueba de hipótesis.

- Se seleccionaron dos grupos de manera aleatoria;
- El primer grupo trabajo las clases con el apoyo del video tutorial todos los viernes durante una hora.
- Una vez terminada la sesión de los videos, estos se pusieron en la plataforma dokeos para su consulta.
- El segundo grupo vio los temas solamente en clase
- Se aplicó una prueba después de terminar las temáticas de las diferentes pruebas de hipótesis (aproximadamente entre cuatro y cinco semanas)
- Se recolectaron los datos y se realizó una prueba para diferencias de medias

Herramientas

Programa libre de camtancia, plataforma libre de dokeos, paquete estadístico SPSS

Resultados.

Una vez aplicada la prueba se obtuvieron los siguientes resultado en el ejercicio evaluatorio, en una escala de 0 a 100.

Tabla 1. Resultados del ejercicio evaluatorio.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Grupo 1 con video	86	95	90	65	50	75	50	91	100	20	90	100	95	100
Grupo 2 sin video	86	90	90	0	80	60	0	68	0	80	70	86	50	0

Posteriormente se trabajó con los promedios obtenidos aplicando una prueba t para diferencias de medias.

Tabla 2. Promedio y desviación estándar obtenido de los dos grupos

	Grupos	N	Media	Desviación típica.	Error típ. de la media
Promedios	Con video	14	79.07	24.250	6.481
	Sin video	14	54.29	37.374	9.989

Si observamos los promedios obtenidos nos daremos cuenta que existe una marcada diferencia entre aquel grupo que tomó sus clases con el apoyo de los videos (promedio de rendimiento de 79) y el grupo que solamente tomo las clases en el salón (promedio de rendimiento de 54). Para poder contrastar esta diferencia observada en el análisis estadístico se realiza la prueba de hipótesis para diferencia de medias:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad y \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

H_0: El rendimiento académico con apoyo de los videos tutoriales es igual que sin ellos.

H_1: El rendimiento académico con apoyo de los videos tutoriales es diferente que sin ellos.

De acuerdo a la prueba realizada se encontró un valor p de 0.047 comparado con el nivel de significancia de 5% (0.05), podemos concluir que rechazamos la hipótesis nula, es decir, sí existe una diferencia muy marcada en los resultados obtenidos del grupo que utilizó el video tutorial como apoyo didáctico con aquel que no lo utilizó. Dichas diferencias significativas se deben en gran parte a la interpretación de resultados, puesto que el alumno puede llegar al resultado obtenido en la prueba, sin embargo le cuesta mucho interpretar dicho valor, por consiguiente se le dificulta entender y tomar una decisión sobre si aceptar la prueba o rechazarla. Dentro del material de consulta que se les puso en la plataforma se vio una gran participación, lo cual indica que al alumno se le hace más cómodo, práctico y hasta interesante tener material en video que ir a la biblioteca. Dentro del grupo se notó una gran diferencia con las participaciones, sobre todo en el manejo de los conceptos, favoreciendo a los alumnos que se apoyaron del video.

Referencias bibliográficas

Area Moreira, M. (2001). *Los medios y las tecnologías en la educación*. Madrid: Pirámide.

Cabero, J. (1989). *Tecnología educativa. Utilización didáctica del video*. Barcelona: PPU.

Cameán, A. M., Moreno, I., Pichardo, S., Prieto, A. I., y Repetto, G. (2005). Interés en la elaboración de videos didácticos como material de prácticas en la asignatura de seguridad química. *Revista de Enseñanza Universitaria,* (26), 45-54.

Cebrian, M. (1987). *El video educativo*. Recuperado el 5 de febrero de 2013, de http://www.ice.upm.es/wps/jlbr/Documentacion/Libros/Videdu.pdf

Cobo, A. (1995). *Optimización matemática.* Recuperado el 12 de septiembre de 2012, de http://www.uv.es/asepuma/V/12.pdf

Drucker F., P. (1999). *Gestionarse a uno mismo.* Recuperado el 15 de enero de 2013, de http://www3.mapfre.com/estudios/boletin/pdfs/507084.pdf

Marcelo, C. (2002). *La formación inicial y permanente de los educadores*. Recuperado el 13 de enero de 2013, de http://www.redes-cepalcala.org/inspector/DOCUMENTOS%20Y%20LIBROS/FORMACION/FORMACION%20INICIAL%20Y%20PERMANENTE%20DE%20LOS%20EDUCADORES.pdf

Márquez, P. (1995). *Software educativo; guia de uso y metodología de diseño.* Barcelona: EMA-estudio.

Rodenas Pastor, M. (2012). *La utilización de los videos tutoriales en educación. ventajas e inconvenientes.* Sofware gratuito en el mercado. Recuperado el 20 de enero de 2013, de http://www.sociedadelainformacion.com/33/videos.pdf

Rouquette Alvarado, J. O., y Ariza Gómez, E. (sf). *Enseñanza-Aprendizaje de matemáticas mediante un entorno virtual.* Recuperado el 12 de septiembre de 2012, de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v09/ponencias/at07/PRE1178948187.pdf

Schmidt, M. (1987). *Cine y video educativo*. Madrid: MEC.

Villa, M. (2011). *Tutorial interactivo para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de las operaciones con números fraccionarios para los estuduantes de octavo año de educación básica del colegio Antonio Ante*. Recuperado el 25 de enero de 2013, de http://186.5.26.141/handle/123456789/191?mode=full

Webster, F. (1995). *Theories of Information Society*. Londres: Routledge.

DISEÑO Y DESARROLLO DE SOFTWARE EDUCATIVO PARA CÁLCULO NUMÉRICO

María Eva Ascheri, Rubén Pizarro, Gustavo Astudillo, Pablo García, Eugenia Culla
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar, ruben@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen. En el marco de actividades de investigación, hemos diseñado y desarrollado un software educativo que utilizamos como recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje de temas de Cálculo Numérico, que se dicta en carreras de Matemática, Física e Ingeniería Civil. Pretendemos que este software guíe a los estudiantes funcionando como apoyo a la explicación del profesor. Sus principales características son: su disponibilidad en Internet y la utilización de herramientas libres para su elaboración. En este trabajo, presentamos resultados que surgen a partir del uso de este software y de encuestas realizadas a los estudiantes de Cálculo Numéric.

Palabras clave: software educativo, cálculo numérico

Abstract. In the framework of research activities, we have designed and developed an educational software that is used as didactic resource for teaching and learning topics of Numerical Calculus, dictated in careers of Mathematics, Physics, and Civil Engineering. This software is expected to be used as a guide for students to support teacher's explanation. Its main features are: its availability on the Internet and the use of free tools for developing. In this papers, we report results arising from the use of this software also surveys to students of Numerical Calculus.

Key words: educational software, numerical calculus

Introducción

En el curso de Cálculo Numérico se estudian diferentes métodos numéricos para la resolución de ecuaciones no lineales, sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, aproximación e interpolación, derivación e integración numérica. El desarrollo de estos temas demanda a los estudiantes el aprendizaje de una gran cantidad de contenidos, que incluyen métodos y fórmulas. Esto hace que, frecuentemente, los estudiantes realicen los cálculos matemáticos aplicando las fórmulas sin efectuar un análisis detallado del comportamiento de cada método, según la situación problemática abordada y los resultados obtenidos. Este análisis es de gran importancia para facilitar la comprensión y permitir un aprendizaje significativo (Ausubel y Novak, 1978), en beneficio del uso de estas temáticas en aplicaciones futuras.

Sin duda, la aplicación de software educativo como el que ya hemos elaborado en investigaciones previas y que los estudiantes han utilizado en la realización de sus actividades, es de gran importancia para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las temáticas que se abordan en Cálculo Numérico (Pizarro y Ascheri, 2009).

No obstante, el software que hemos desarrollado en dichas investigaciones previas, presenta ciertos inconvenientes en lo que se refiere a su distribución y a su funcionamiento óptimo. Esto se debe, fundamentalmente, en el primer caso, a los costos del software adicional que se requiere para su uso y en el segundo, a los escasos conocimientos informáticos específicos que los estudiantes poseen, ya que pertenecen a los primeros años de carreras universitarias no informáticas (Matemática, Física e Ingeniería).

Por otro lado, en la actualidad, un gran número de alumnos, además de realizar las actividades que son propias de un estudiante universitario, están insertos en diferentes sectores laborales, lo que hace que dispongan de menos tiempo libre en los horarios convencionales de cursado. Contar con un software de acceso por medio de Internet, les proporciona una oportunidad muy valiosa de poder desarrollar sus actividades académicas en el horario que dispongan o crean más conveniente, sin tener que instalar software muy costoso o incluso adquirir equipos de computación con requerimientos de hardware elevados. Además, una interfase en línea es más familiar para el estudiante actual, habituado a la utilización de los servicios de chat, correo electrónico, navegación y demás, y a la que puede acceder en una mayor disponibilidad horaria.

Desarrollo

En el marco de actividades de investigación, desarrollamos un software educativo con herramientas libres. Para ello, utilizamos PHP, HTML, CSS, la librería JPGraph y GIMP. Cuando comenzamos con el desarrollo de esta aplicación, una de nuestras metas era que la misma se pudiera usar libremente como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de algunos métodos numéricos, en donde se mostrase de forma numérica y gráfica el comportamiento de los mismos.

De nuestra experiencia lograda a partir del desarrollo de un Proyecto de Investigación anterior (Pizarro y Ascheri, 2009), de la búsqueda y análisis de material disponible en línea sobre las temáticas que se abordan en un curso de Cálculo Numérico (Ascheri, Pizarro, Astudillo, García y Culla, 2007), y de la identificación de aquellos contenidos que resultan de más difícil comprensión para los estudiantes, fue que decidimos incluir los temas "Métodos para la resolución de ecuaciones no lineales"; "Interpolación y aproximación polinomial" y "Ajuste de curvas por mínimos cuadrados".

El desafío que nos planteábamos no se centraba únicamente en desarrollar una aplicación Web. Además, debería ser un software educativo, considerando la definición indicada por Pere Marquès (1996, p.2): "*programas para ordenador creados con la finalidad específica de ser utilizados como medio didáctico, es decir, para facilitar los procesos de enseñanza y de aprendizaje*".

Teniendo esto como referencia, avanzamos en la selección de herramientas de libre acceso que nos permitieran desarrollar un software libre. Esto es, "*el software libre es aquél que puede ser distribuido, modificado, copiado y usado; por lo tanto, debe venir acompañado del código fuente* *para hacer efectivas las libertades que lo caracterizan*" (Culebro Juárez, Gómez Herrera, Torres Sánchez, 2006).

Considerando los aspectos anteriores, elaboramos el primer prototipo –opciones para el cálculo de raíces de ecuaciones no lineales– (Ascheri, Pizarro, Astudillo, García y Culla, 2008). Luego, realizamos un proceso de evaluación que nos permitió detectar debilidades y fortalezas de la aplicación y generar así, un segundo prototipo –se le agrega la opción de interpolación polinomial (Ascheri, Pizarro, Astudillo, García y Culla, 2010).

Partiendo de la evaluación mencionada en el párrafo anterior y a partir de la aplicación del software en el aula, pudimos evolucionar hasta completar la aplicación –se le incorpora la opción de ajuste de curvas por mínimos cuadrados (Ascheri, Pizarro, Astudillo, García y Culla, 2011). La versión actual del software incluye los contenidos presentados en la Figura 1:

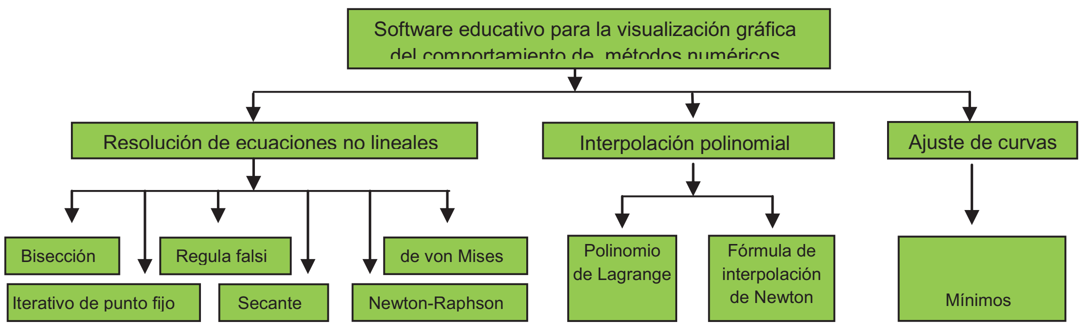


Figura 1: Cuadro de contenidos que aborda el software desarrollado

Al software se puede acceder en http://online2.exactas.unlpam.edu.ar/numerico/.

A continuación, haremos una síntesis de los resultados que ofrece el software educativo de elaboración propia. Al ingresar al software tendremos la pantalla dada en la Figura 2:

Figura 2: Pantalla inicial del software

Ingresando a la opción *"Cálculo de raíces",* podremos acceder a cualquiera de los seis métodos disponibles. Al seleccionar, por ejemplo, el método de *"Newton-Raphson"* aparecerá una ventana en la cual se deberán ingresar los datos necesarios para implementarlo (Figura 3).

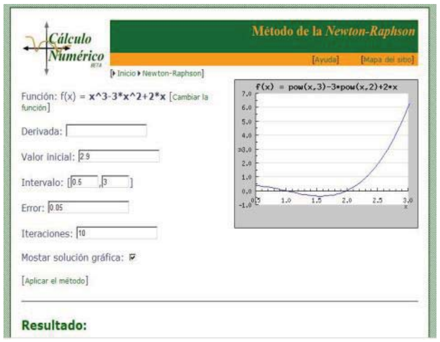


Figura 3: Pantalla del método de Newton-Raphson

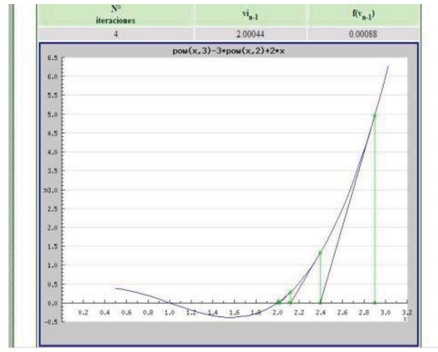


Figura 4:Gráfico que muestra las iteraciones

Al seleccionar la opción *"Aplicar el método"*, se obtienen sucesivas imágenes en las cuales se representan la gráfica de la función y las correspondientes aproximaciones a la raíz que se está buscando (Figura 4). Finalmente, se mostrarán los datos numéricos relacionados con la resolución del problema propuesto. Si elegimos alguno de los otros métodos, el software responde de manera similar de acuerdo al problema a resolver.

Si al iniciar el software (ver Figura 2), elegimos la opción *"Interpolación"* y seleccionamos, por ejemplo, *"Polinomio de Lagrange"*, obtenemos la Figura 5:

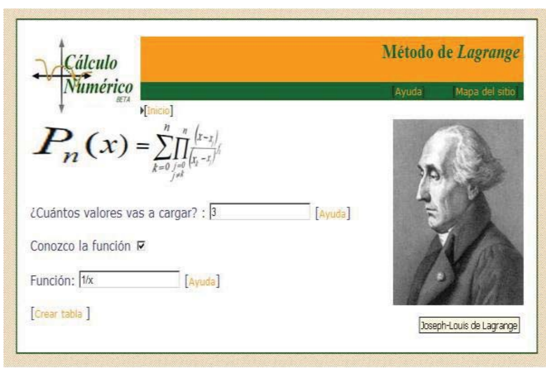


Figura 5: Pantalla inicial del método de Lagrange

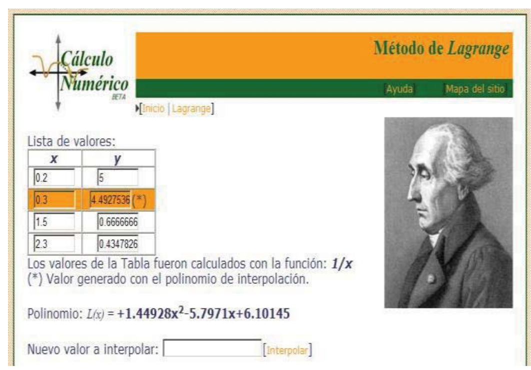


Figura 6: Selección de datos a interpolar

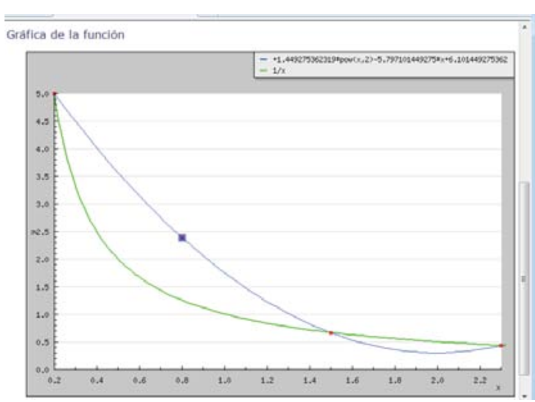


Figura 7: Gráfico del polinomio de interpolación

En este caso, podemos elegir la opción de interpolar aplicando la fórmula de Lagrange. Ingresamos la función, los valores en la cual la queremos calcular y el valor a interpolar, obtendremos los resultados que se muestran en las Figuras 6 y 7 (numéricos y gráficos).

Análogamente, al iniciar el software (ver Figura 2) se podrá seleccionar la opción *"Ajuste de curvas"*, a partir de la cual se podrá ajustar una curva por el método de Mínimos cuadrados, seleccionando un ajuste polinómico o exponencial, y presentará luego los gráficos obtenidos.

Como se desprende de las figuras anteriores, es necesario considerar una serie de requerimientos para aplicar los métodos numéricos. Una vez que el usuario determine estos requerimientos, verá si la respuesta obtenida es adecuada o no, de acuerdo al problema que pretende resolver. Pretendemos así, que el alumno realice una revisión de los conceptos teóricos para confirmar por qué un método está funcionando o no, cuál de los métodos resulta más adecuado para resolver el problema en cuestión y hacer un análisis gráfico de cómo se obtienen los resultados.

Resulta evidente que la aplicación de elementos gráficos realiza un importante aporte al proceso de enseñanza y aprendizaje. El volumen de información que el estudiante recibe es mayor y de mejor calidad en determinados casos. Por ejemplo, podemos invertir mucho tiempo en describirle a un estudiante un paisaje determinado, pero mostrarle material fotográfico generará un nivel de percepción enormemente mayor, además de proporcionar una calidad de aprendizaje diferente. En informática, se han utilizado y desarrollado herramientas gráficas con el objetivo de facilitar las tareas de análisis y diseño de sistemas por consideraciones similares. En matemática, el análisis de la forma gráfica en que se comportan las funciones se encuadra en el mismo renglón. Como opinan Suárez y Cordero (2005), la graficación permite articular el uso de la modelación y de la tecnología en actividades matemáticas. Adicionalmente, según Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996), mostrar el comportamiento analítico y visual de forma integrada, puede ser necesario para comprender mejor ciertos conceptos matemáticos.

Este software es utilizado en las clases teóricas y prácticas. En estas últimas, se resuelven ejercicios de los trabajos prácticos y de las evaluaciones parciales, mientras que para el desarrollo de la teoría, se usa como herramienta pedagógica colaborativa para la interpretación geométrica de los métodos numéricos estudiados, para el planteo y desarrollo de nuevos ejemplos, entre otros.

Resultados obtenidos

Transitando el quinto año en el que utilizaremos el software en el curso de Cálculo Numérico, hemos obtenido información sobre el impacto del mismo en el desarrollo de las clases. Realizamos encuestas y registramos observaciones de clases, además de considerar los resultados obtenidos en las evaluaciones parciales.

Del análisis de las encuestas realizadas en el año 2009, podemos decir que los estudiantes, en su gran mayoría, señalan:

- *Es muy positivo la inclusión del software en el desarrollo de las clases.*
- *El software me facilitó la comprensión de los diferentes métodos vistos.*
- *Me resultó fácil comprender su funcionamiento.*
- *Es muy importante poder acceder al mismo por medio de Internet, porque no tengo que instalar software adicional en mi computadora y además, lo puedo usar fuera de los horarios de cursado.*

Las respuestas a las encuestas fueran positivas. Sin embargo, de las observaciones de las clases podemos señalar los siguientes aspectos:

- Varios estudiantes afirman "…*esto de las computadoras no es para mí*…", al momento de tener que utilizarlas en sus actividades.
- La mayoría de los estudiantes siguen utilizando la calculadora por sobre la computadora para la realización de cálculos.
- Ante la posibilidad de realizar reiterados intentos con diferentes valores en el software, existe una tendencia a quedarse con el primer resultado obtenido, lo que dificulta la extracción de conclusiones.

Como veremos en la Figura 8 y a partir de la encuesta realizada posteriormente en el año 2011, los estudiantes usaron las ayudas de la aplicación y el software fuera de la Facultad.

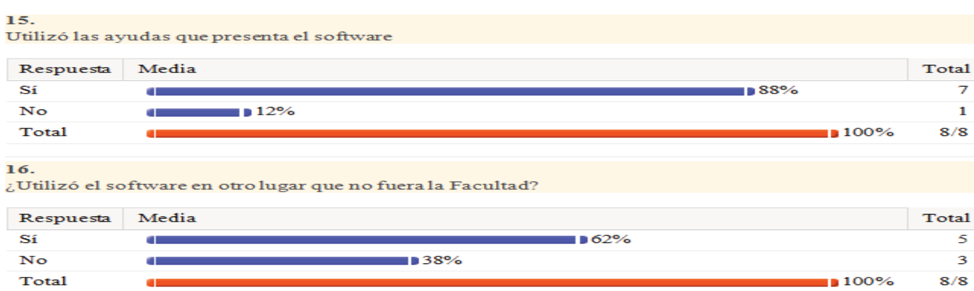


Figura 8: Respuesta de los estudiantes en las encuestas

En la siguiente tabla mostramos las diferentes opiniones de los estudiantes sobre la utilización del software durante el desarrollo de la materia. Se preguntó:

¿Considera que la utilización del software fue positiva para la comprensión de los métodos de resolución de ecuaciones no lineales? Justifique su respuesta.

Respuestas
• Sí, porque muestra el resultado al que uno debe llegar y gráficamente muestra como resuelve cada método implementado.
• Si, tal vez por la rapidez de los cálculos que a mano llevan más tiempo hacia que uno se pueda enfocar en el análisis de los mismos...y no preocuparse en la resolución...o en un posible error de cuentas.
• Sí, sobre todo para ver una solución gráfica y para corroborar resultados
• Creo que la explicación teórica estuvo clara pero al momento de la práctica es útil para ahorrarse un montón de cálculos.
• Si, ya que te brinda las soluciones detalladas por cada iteración y los resultados en caso de que no llegues al objetivo manualmente... así podes entender el comportamiento de cada método...
• Si... sobre todo porque, particularmente, no estoy a favor de realizar cálculos repetitivos y tediosos a fin de hallar algún tipo de solución, sino que el verdadero sentido se encuentra en poder comprender para que sirve, así como los usos a futuro que se pueden dar. También, es interesante la comparación entre los distintos métodos y mediante la utilización del programa se podrían establecer estos análisis comparativos.
• Totalmente, el software funciona eficientemente para la comprensión e interpretación de los métodos, la representación gráfica de cada uno de ellos ayuda mucho
• A modo de comprobación, o también para entender como trabajaba el error de la formula de Newton cuando no conocía la función.

Tabla 1: Opinión de los estudiantes sobre la utilización del software

Por lo que expresan los estudiantes en las diferentes instancias, podemos decir que si bien conocen y acuerdan con la incorporación de TIC en sus actividades de estudio, reconocen ciertas dificultades en el uso de las computadoras, en la mayoría de los casos, por no tener experiencias previas. Sólo la han utilizado en la realización de actividades complementarias u optativas. Esto coloca a las computadoras en un rol secundario y no como una herramienta de apoyo para construir sus aprendizajes.

Como integrantes de la cátedra de Cálculo Numérico y del grupo de investigación, podemos afirmar que trabajar en este software nos ha permitido incorporar herramientas de programación y contar en la actualidad con nuevos instrumentos didácticos para el desarrollo de los contenidos temáticos.

Conclusiones

El software educativo que hemos elaborado es una aplicación gratuita que corre en un entorno Web con mínimos requerimientos y puede ser usado para la enseñanza y el aprendizaje de métodos numéricos, donde se muestra de forma numérica y gráfica el comportamiento de éstos.

Si bien ha sido positiva la implementación de este software en el desarrollo de Cálculo Numérico, aún la utilización de las computadoras no es considerada por los estudiantes como un proceso natural; siguen priorizando el uso de lápiz, papel y calculadora. Dado que esta materia se cursa en tercer año del Profesorado en Matemática, los estudiantes han transcurrido al menos 15 años en un sistema educativo en el cual, en sus actividades, mantienen tareas netamente tradicionales. La mayoría de nuestros estudiantes serán Profesores de Matemática de Nivel Medio y encargados de incorporar nuevas formas de enseñar y aprender, por lo cual sus experiencias con la inclusión de tecnologías en sus clases deberían ser más frecuentes, pudiendo de esta forma aceptar y mejorar su manejo de la computadora y de diferentes software. Las nuevas políticas diseñadas para la inclusión de TIC demandan que los profesores estén capacitados para usarlas. Con la realización de experiencias como la del presente trabajo, tratamos de aportar a este objetivo.

Continuar con la elaboración del software educativo ampliando los contenidos a desarrollar, incorporándolo a otras asignaturas y analizando la metodología de trabajo, son seguramente líneas de trabajo que nos permitirán aproximarnos al logro de los cambios en Educación que se pretenden conseguir. Creemos necesario investigar cuál es el impacto del uso del software en el rendimiento académico de los estudiantes, por lo que incluimos también este tema entre las futuras líneas de investigación.

Referencias bibliográficas

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A., Astudillo, G. J., García, P. y Culla, M. E. (2007). Relevamiento de software en línea para la enseñanza-aprendizaje de métodos numéricos. Herramientas para su desarrollo. *V CIEMAC* (pp. 20-24). Cartago. Costa Rica.

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A., Astudillo, G. J., García, P. y Culla, M. E. (2008). Un software educativo con herramientas libres y acceso Web para temas de Cálculo Numérico: un primer prototipo. *II REPEM* (pp. 223-230). Santa Rosa: EdUNLPam.

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A., Astudillo, G. J., García, P. y Culla, M. E. (2010). Resolución de ecuaciones no lineales e interpolación numérica usando software educativo elaborado con herramientas gratuitas. *III REPEM* (pp. 476-483). Santa Rosa: EdUNLPam.

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A., Astudillo, G. J., García, P. y Culla, M. E. (2011). Software educativo desarrollado para temas de Cálculo Numérico: Últimos avances. *XVI EMCI Nacional y VIII EMCI Internacional* (pp. 1-8). Olavarría. Argentina.

Ausubel, D. P. y Novak, J. D. (1978). *Educational Psychology: "A Cognitive View"*. New York: Holt, Rinerhart and Winston.

Culebro Juárez, M., Gómez Herrera, W. y Torres Sánchez, S. (2006). *Software libre vs software propietario. Ventajas y desventajas*. México: Creative Commons. Recuperado el 16 de marzo de 2009 de http://www.softwarelibre.cl/drupal//files/32693.pdf.

Marqués, P. (1996). *El software educativo*. España: Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado el 8 de febrero de 2010 de http://www.lmi.ub.es/te/any96/marques_software

Pizarro, R. A. y Ascheri, M. E. (2009). Diseño e implementación de un software educativo en Cálculo Numérico. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología* (3), 39-46.

Suárez, L. y Cordero, F. (2005). Modelación en matemática educativa. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 639-644. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a student's understanding of the Group D4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (4), 435-457.

UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE SUCESIÓN CON USO DE TECNOLOGÍA POR MEDIO DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN EL NIVEL BACHILLERATO

Mónica del Rocío Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Judith A. Hernández Sánchez
Universidad Autónoma de Zacatecas México
mtorres@matematicas.reduaz.mx, eborjon@matematicas.reduaz.mx, jhernan@matematicas.reduaz.mx

Resumen. Se analiza la importancia de la inclusión del tema de sucesiones desde preescolar hasta el nivel medio superior en México. El marco teórico que da soporte a esta investigación es la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval (1998), en combinación con el uso de tecnología TI-Nspire. Centramos la atención en el nivel medio superior, con la finalidad de que los alumnos a través del manejo de las representaciones semióticas: verbal, gráfica, tabular y analítica, adquieran el concepto de sucesión aún sin definirlo formalmente. A través del uso de representaciones semióticas instrumentadas en la calculadora TI-NSpire con ejemplos acordes al entorno del alumno (deportes, medio ambiente) se forma el concepto de sucesión. Paralelamente se insiste en la detección tanto del dominio, imagen y grafo; lo anterior con la finalidad de que el alumno visualice y detecte que el dominio de las funciones en juego siempre es el conjunto de los números naturales y la imagen un subconjunto de los números reales, así como de la relación funcional.

Palabras clave: sucesión, dominio, representación semiótica, tecnología

Abstract. This research discusses the importance of the inclusion of the topic of succession from kindergarten up to high school in Mexico. The theoretical framework that gives support to this research is the theory of representations semiotics of Duval (1998) in combination with the use of TI-Nspire technology. We focus attention specifically on the upper secondary level, with the aim that students through the handling of semiotic representations: verbal, graphic, tabular and analytical, to acquire the concept of succession even without defining it formally. The concept of succession is formed through the use of semiotic representations instrumented in the calculator TI-NSpire with examples according to the environment of the student (sports, environment, etc). At the same time insists on detection both of the domain, image and graph; the above in order that students view and detects that the domain of the functions in game is always the set of natural numbers and the image a subset of the real numbers, as well as the functional relationship.

Key words: sequences, domain, semiotic representation, technology

Marco teórico

En base al uso de diferentes representaciones semióticas (verbal, gráfica, tabular y analítica), nuestros objetivos son, que el alumno de nivel medio superior adquiera el concepto de sucesión, sea capaz de identificar separadamente el dominio, imagen y grafo de una sucesión, y sobre todo que se dé cuenta que una sucesión, gráficamente es un subconjunto infinito de puntos discretos del plano; todo esto puesto en escena a través del medio tecnológico que facilita la calculadora TI-NSpire. Así mismo, acorde al objetivo planteado para este tema en el programa de estudios, proponemos que el alumno relacione dos variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento y que sea capaz de dar respuestas a preguntas particulares.

Es importante resaltar que pusimos en manos de los alumnos un instrumento que pese a que nunca habían manipulado, no vacilaron en manejarlo y dominarlo de manera natural, ya que ellos nacieron en la era tecnológica, reflejando un interés específico por las funciones que la calculadora realiza.

Ahora bien, teniendo en cuenta las definiciones*:*

- *Semiosis: Es la aprehensión o la reproducción de una representación semiótica, a través de promover la coordinación de varios registros de representación semiótica que puede manifestarse más simple en ciertos registros que en otros. Pero ésta es compleja por la diversidad de registros que puede movilizar.* Es decir, *semiosis, es la aprehensión o la reproducción de una representación semiótica.*
- *Noesis: es la aprehensión conceptual de un objeto,* por lo que *No hay noesis sin semiosis*.

Duval (1998, pp 174 y 186)

En consecuencia, para que el estudiante adquiera el concepto se requiere realizar una interacción entre las diferentes representaciones semióticas. Nos dimos a la tarea de diseñar y poner en práctica una secuencia didáctica en la calculadora TI-NSpire que permitió analizar el cumplimiento de los objetivos planteados.

En Ramos (2000) se identifica un trabajo similar, realizado como taller, en éste el diseño se realiza en base a la tecnología Voyage 200 y se pone en escena en un grupo de segundo año de Licencidos en Pedagogía de Chile, paralemente se realiza un comparativo sobre el mejoramiento del nivel de conocimiento del tema de sucesiones con respecto a un grupo de la carrera de Ingeniería Mecánica tambien de Chile y este atendido de manera tradicional. Cabe destacar que en este trabajo se buscaba mejorar el nivel de conocimiento del tema de sucesiones y nostros trabajamos con la formación del concepto de sucesión en un grupo de nivel medio superior y con tecnología TI-spire. En Hitt (1996) se concluye que uno de los obstáculos que se presenta con más frecuencia cuando se trabaja con representaciones es en el transito de la representación gráfica a la analítica, situación que se presenta en este trabajo y que se aborda a través de opciones múltiples. El tema de sucesiones se aborda en múltiples investigaciones que centran la atención principalmente en el tema de convergencia de una sucesión y se aborda a través de la ingeniería didáctica, la socioepistemología y se pone en escena en diferentes niveles de estudio.

Motivación de la investigación

El objeto de estudio de nuestra investigación es el tema de sucesiones reales, debido a que este tema tiene impacto en la modelación de problemas de la vida real, en procesos de razonamiento lógico-matemático y como es bien sabido tiene un gran impacto en las materias de cálculo y análisis de una variable real. Además de ello, la evaluación de este tema es determinante en el diseño de exámenes de admisión de diferentes niveles debido al nivel de razonamiento que implica.

El tema de sucesiones numéricas se aborda en los planes y programas de estudio de cada uno de los niveles de educación básica en México, en la tabla 1 se describen los objetivos y los temas que se promueven en cada uno de los niveles, cabe mencionar que el nivel preescolar se encuentra en el rango de tres a seis años, el nivel de primara de seis a doce años, el de secundaria de doce a quince años y el de bachillerato de quince a dieciocho años.

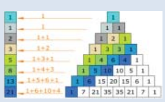
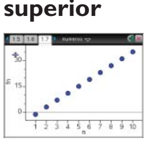
Nivel	Objetivo	Temas que promueve
Preescolar 	Establecer relaciones comparativas respecto a un sistema de referencia entre los elementos de un conjunto, y ordenarlos según su diferencia, ya sea en forma creciente o decreciente.	Noción de orden por medio de la adición, reconocimiento de antecesor y sucesor dentro de un grupo de objetos. (Martínez, 2012)
Primaria 	Descubrir la relación entre dos términos consecutivos, Operar números enteros, Completar una serie numérica, Perseverar en la búsqueda de soluciones.	Número, relaciones y funciones donde el alumno desarrolla la capacidad de Interpretar y formular sucesiones con números naturales. (Secretaría de Educación Pública, 2011)
Secundaria 	Llevar a cabo procedimientos descritos de forma clara, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciadas. Transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados.	Obtención de reglas de sucesiones numéricas y figurativas. Utilización de números con signo y deducción de expresión algebraica. (Secretaría de Educación Pública,2011)
Medio superior 	Analizar las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	Construcción e interpretación de modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. (Secretaría de Educación Pública, 2010)

Tabla1. Descripción del tema de sucesión en planes de estudio

Metodología

El uso de calculadoras graficadoras promueve conexiones entre las representaciones gráfica, numérica, verbal y analítica, motivando en los alumnos la experimentación, la investigación y la reflexión.

El ejercicio se aplicó en cinco sesiones de una hora a un grupo de 52 alumnos de primer semestre del Colegio de Bachilleres Plantel Loreto del estado de Zacatecas, formando 17 equipos de tres miembros cada uno, poniendo en juego con esto el aprendizaje mediado y trabajando con seis problemas en los que se aumenta progresivamente el nivel de dificultad, y dos problemas para evaluar el trabajo individual.

La estructuración de los problemas se hizo en términos de representaciones, con las que se promueve el tránsito de éstas, diseñadas y puestas en operación en la calculadora TI-NSpire para que el alumno logre:

1. Completar un espacio de tabulación
2. Manipular el dominio, la imagen y el grafo de la sucesión planteada
3. Visualizar gráficamente el comportamiento
4. Llegar a la generalización del problema
5. Comprobar la generalización
6. Emitir conclusiones

Puesta en escena

Como introducción se realizaron dos ejercicios planteados verbalmente en el salón de clases y con el uso del pizarrón en el salón, primero la sucesión correspondiente a los números pares para los valores desde $n=1$ y hasta $n=6$, para ver si ellos podían determinar los valores de $f(n)$ para $n=7$, y $n=8$…, permitiéndoles seguidamente determinar la fórmula con la que se pudiera obtener cualquier valor para n en esta sucesión, en este ejercicio las respuestas variaron hasta que a prueba y error se determinó la fórmula que representaba de manera general la sucesión correcta. Enseguida se planteo la sucesión de los números primos ofreciendo los primeros términos y luego los alumnos mencionaron los que le seguían, obviamente no era posible dar una fórmula que genere los términos de esta sucesión explicándoles por lo tanto que era un problema abierto de las matemáticas.

De la misma manera, se planteó trabajar con la calculadora, en la que mediante situaciones que iban desde una secuencia de números, pasando por planteamiento de problemas relacionados con fútbol compra de bicicletas, renta de computadoras en un cibercafé, crecimiento de plantas, en fin, situaciones relacionadas al entorno de los jóvenes, que previamente fueron cargados en la calculadora, les permitirían automatizar algunos de los procesos de cálculo y graficación referentes al cambio de representación.

Primer paso, representación verbal. Se formulan diferentes situaciones en las que el objetivo es determinar las variables que intervienen.

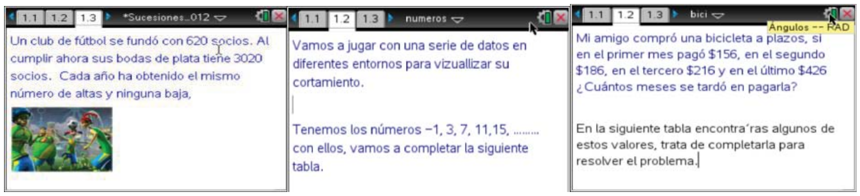


Figura1. Representación verbal

Segundo paso, representación tabular. Se plantea un primer cambio de representación, estructurando a partir de los datos presentados, los valores que corresponden a las variables *n* y *f(n)*. El objetivo es que presentándole al alumno *x* valores para la variable *n*, sea capaz de establecer sus correspondientes en *f(n)*.

Figura 2. Representación tabular

Tercer paso, determinación de la presencia de una función dentro de la sucesión presentada.

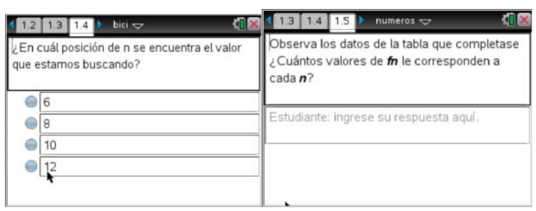


Figura 3. Funciones

Cuarto paso, representación gráfica. En este cambio de representación se plantearon varios objetivos:

- ❖ Primeramente, que los jóvenes fueran capaces de identificar separadamente el dominio, imagen y grafo de una sucesión, el cual se cumplió a cabalidad, pues su respuesta fue espontánea.

Figura 4. Determinación del domino

- En esta misma representación, ellos visualizaron que las sucesiones están representadas por un subconjunto infinito de puntos discretos del plano y no son continuas, error que comúnmente se comete al trabajar manualmente y en el que las herramientas de la calculadora son indispensables.

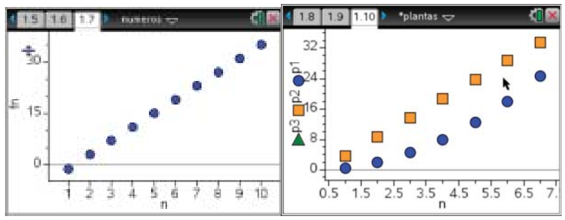


Figura 5. Puntos discretos en el plano

El quinto paso, la representación analítica, fue para nosotros un reto, pues el cambio de representación de gráfica a analítica no se aborda en los contenidos temáticos de bachillerato, sino que a la inversa.

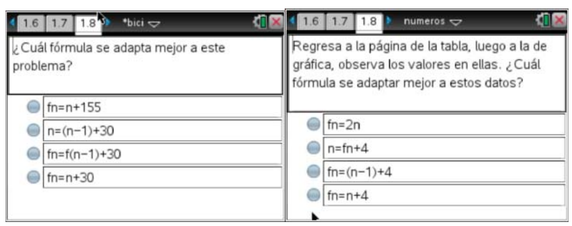
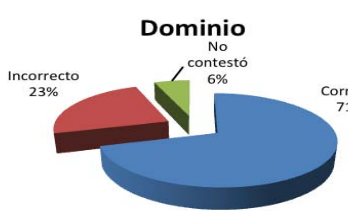


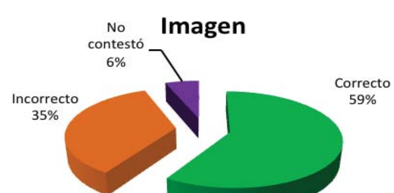
Figura 6. Representación analítica

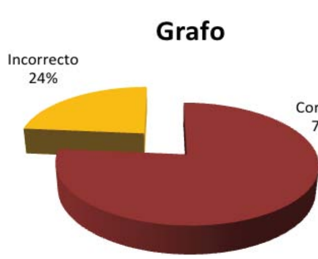
Conclusiones

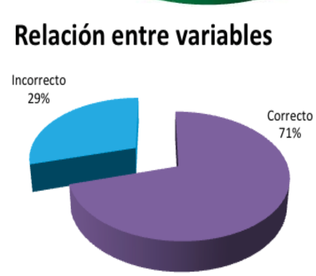
Los análisis realizados por los alumnos y la interpretación que matemáticamente dan a los problemas nos hacen concluir que los resultados del cambio de representación son favorables en la adquisición del concepto de sucesión.

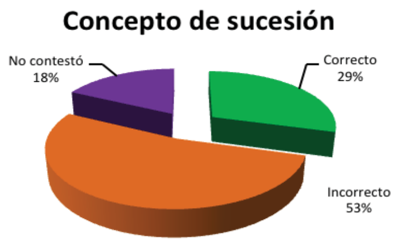
Esto se refleja en las siguientes gráficas:



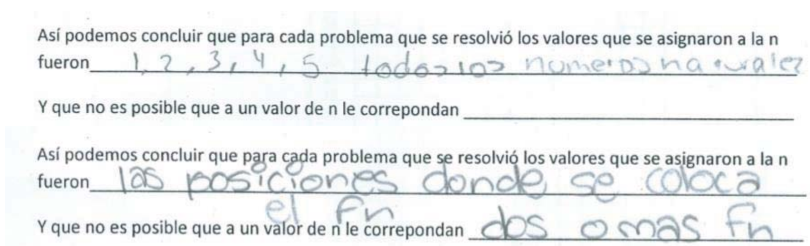








De los datos trabajados estadísticamente se concluye por ejemplo que el 71% de los alumnos fue capaz de identificar el dominio de las sucesiones así como identificar que se presentaba una relación entre variables. El 59% de los alumnos fue capaz de identificar la imagen de las sucesiones, sin embargo cabe aclarar que solo identificaron las imágenes particulares de las sucesiones que se pusieron en juego. El 76% identificó el grafo de las sucesiones que se presentaron. Sin embargo el 53% de los alumnos de bachillerato no fue capaz de estrucurar adecuadamente el concepto de sucesión lo que nos permite concluir que una gran mayoría se quedó en el proceso de las representaciones semióticas logrando con esto la semiosis pero no la noesis.


Así podemos concluir que para cada problema que se resolvió los valores que se asignaron a la n fueron 1, 2, 3, 4, 5 todos los numeros naturales

Y que no es posible que a un valor de n le correpondan

Así podemos concluir que para cada problema que se resolvió los valores que se asignaron a la n fueron las posiciones donde se coloca el Fn

Y que no es posible que a un valor de n le correpondan dos o mas Fn

Figura 7. Respuestas de dos alumnos

Referencias bibliográficas

Duval R. (1998), Semiosis ét noesis. *Conference A. P. M. E. P.,* I

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II.,* Université Louis Pasteur de Strasbourg, France. Ed. Hitt, F. pp 173-201.

Fuentes, E & Vargas, M (2011). Plan de Estudios 2011, Educación Básica. México, Secretaría de Educación Pública.

Hitt, F. (1996) Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. *Investigaciones en Matemática Educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica. pp 245-264

Martínez, R., Cervantes V. (2002). *El gran libro de la maestra de preescolar*. Ediciones Euroméxico S.A. de C.V.

Ramos R. (2000). Una actividad para la enseñanza de las series numéricas bajo un marco teórico didáctico, Instituto de Matemáticas. Pontifica Universidad Católica de Valaparaíso.

Osorio, J., Gallart, M. (2010). Plan de Estudios de los Centros de Bachillerato Tecnológico. Secretaría de Educación Pública. México.

CONSTRUINDO UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE EQUAÇÃO DE 1º GRAU COM USO DAS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Andrielly Viana Lemos, Carmen Teresa Kaiber
Universidade Luterana do Brasil - ULBRA Brasil
andriellylemos@gmail.com, kaiber@ulbra.br

Resumo. Este trabalho tem como objetivo apresentar a sequência didática desenvolvida com uso de Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) sobre equações de 1º grau para auxílio na recuperação paralela de conteúdos, sendo parte de uma pesquisa de mestrado em andamento. A sequência didática é constituída por materiais de estudos, buscando uma retomada de ideias, conceitos e procedimentos, assim como atividades criadas nos *software* JClic *e Scratch* , utilização de jogos, atividades *online,* objetos de aprendizagem e vídeos. Esta sequência foi avaliada por um grupo de seis professores e os resultados preliminares apontam que a sequência adota uma boa abordagem dos aspectos teóricos relativos ao tema, assim como a metodologia e os exemplos apresentados são satisfatórios. Entende-se que a construção de uma sequência didática com o auxílio dos recursos advindos das TIC, é uma tentativa de abordar novamente o conteúdo, buscando novos caminhos para o ensino e aprendizagem e para superação das dificuldades.

Palavras chave: sequência didática, equações de 1º grau, tecnologias da informação, comunicação

Abstract. This paper aims to present the didactic sequence developed with the use of Information and Communication Technology (ICT) about the equations of 1st degree to aid in the recovery of content, which is part of a master's degree research. The didactic sequence consists in study materials, seeking a resumption of ideas, concepts and procedures, as well as activities created in JClic and Scratch softwares, the use of games, online activities, learning objects and video. This sequence was evaluated by a group of six teachers and preliminary results indicate that the sequence takes a good approach of the theoretical aspects related to the topic, as well as the methodology and examples presented are satisfactory. It is understood that the construction of a didactic sequence with the aid of ICT means, is an attempt to address the content again, seeking new avenues for teaching and learning and to overcome difficulties.

Key words: sequence didactic, equations 1st degree, information, communication technology

Introdução

Este trabalho apresenta uma sequência didática sobre o tema equações de 1º grau, desenvolvida utilizando os recursos das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). Esta sequência é parte de uma pesquisa de mestrado em andamento, que tem como objetivo investigar em que medida uma sequência didática, com o tema equações de 1º grau, disponível no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizado (SIENA), favorece o processo de ensino e aprendizagem na recuperação de conteúdos, para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

Acredita-se que o desenvolvimento de uma sequência didática utilizando os recursos das TIC é uma possibilidade de realizar uma recuperação de conteúdos, conforme indica a Lei de Diretrizes e Base da Educação (LDB) de 1996, já que os conteúdos são apresentados de forma diferenciada e os materiais de estudos e atividades desenvolvidas objetivam a retomada de ideias, conceitos e procedimentos.

A LDB estabelece no artigo 12 do título IV que é de responsabilidade dos estabelecimentos de ensino “prover os meios para a recuperação dos alunos de menor rendimento” (parágrafo V). E ainda, no artigo 13, consta que “os docentes incumbir-se-ão de estabelecer estratégias de recuperação para os alunos de menor rendimento”.

A recuperação de conteúdos prevista na LDB, não é uma ideia nova, pois na Lei 5692/71 já constava que os alunos que tivessem aproveitamento insuficiente poderiam obter aprovação mediante estudos de recuperação proporcionados, obrigatoriamente, pelo estabelecimento de ensino. Neste período, os estudos de Bacha e Maluf (1974) indicavam que a recuperação de conteúdos deveria ser específica para as dificuldades individuais, e que é dever da escola oportunizar aos alunos esta recuperação. Ainda, ressaltavam que a recuperação deveria ser realizada buscando-se novas estratégias de ensino, ou seja, que o conteúdo fosse retomado de forma alternativa.

Ao encontro da ideia de promover uma recuperação individualizada, utilizando estratégias diferenciadas, buscou-se desenvolver uma sequência didática sobre equações de 1° grau, a ser disponibilizada no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), a qual passa a ser apresentada neste artigo.

Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA)

O Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA) é um sistema que serve de apoio ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de qualquer conteúdo, uma vez que este permite disponibilizar testes adaptativos a serem realizados pelos estudantes, a partir dos quais, o sistema gera um mapa individualizado que apresenta o desempenho dos mesmos. A partir deste desempenho, são disponibilizadas sequências didáticas específicas para a recuperação dos conceitos que os alunos apresentaram dificuldades. Essas sequências se constituem em materiais de estudos, atividades no *software* JClic, Scratch, atividades *online*, objetos de aprendizagem, vídeos, entre outros recursos.

O SIENA foi desenvolvido pelo Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), em convênio com o Grupo de Tecnologias Educativas, da Universidade de La Laguna (ULL), de Tenerife na Espanha.

Segundo Lemos, Monteiro e Groenwald (2011) este sistema pode se constituir em instrumento para auxílio ao professor na recuperação de conteúdos, já que possibilita que seja realizada uma retomada dos conceitos de forma diferenciada e individualizada, de acordo com as necessidades de cada estudante. A figura 1 apresenta um esquema do funcionamento do SIENA.

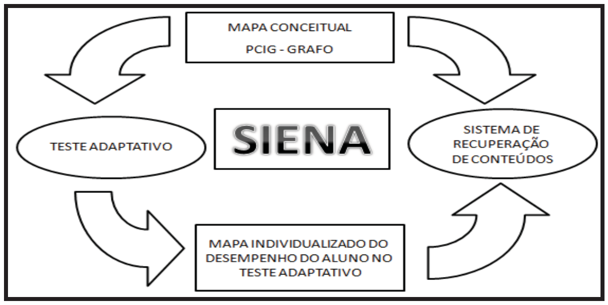


Figura 1 – Fluxograma do funcionamento do SIENA.

Inicialmente é construído um Grafo Instrucional Conceitual Pedagógico - PCIG (*Pedagogical Concept Instructional Graph*), que é a planificação de um tema específico, ou seja, os conceitos principais de determinado tema, os quais são denominados, no SIENA, como nodos. A partir deste grafo se tem duas opções de utilizar o sistema: em uma delas os alunos, primeiramente, estudam os conteúdos disponíveis em cada nodo do PCIG e depois realizam o teste para verificar seu desempenho; na outra opção, oportuniza-se aos alunos, primeiro, a realização do teste e, se houver necessidade, estudam os conteúdos dos nodos que venham a apresentar baixo desempenho. Nesta segunda opção, foco deste trabalho, é possível realizar uma recuperação individualizada para os estudantes que não conseguiram alcançar a média estipulada para avançar no PCIG, uma vez que cada estudante realizará a recuperação, no caso, o estudo através das sequências didáticas, somente nos conceitos que apresentarem dificuldades. Nos nodos em que o aluno apresentar um desempenho satisfatório não há necessidade de realizar o estudo da sequência de recuperação, podendo avançar para outro nodo do PCIG.

PCIG das Equações de 1º grau

Na figura 2 apresenta-se o PCIG construído para o tema equações de 1º grau. Este foi desenvolvido a partir de seis conceitos considerados como principais (nodos) para o estudo deste tema. Inicia-se o estudo através das expressões algébricas, com foco nas representações em linguagem natural e algébrica. A seguir são trabalhados os conceitos de igualdade, equivalência e de equação, sendo que, os dois nodos seguintes referem-se aos processos de resolução das equações de 1º grau e o último nodo refere-se a situações problemas. Cabe destacar, que a metodologia de resolução de problemas está presente em todos os nodos, porém o último foi dedicado a problemas que abordam situações intra e extramatemática.

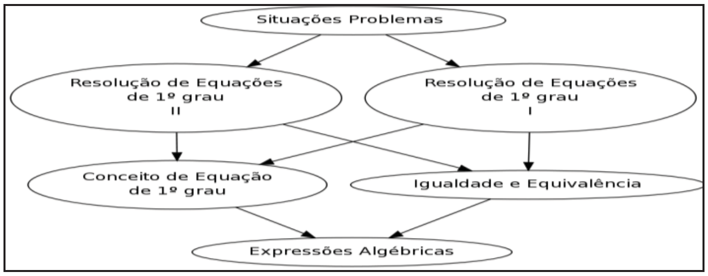


Figura 2 – Grafo do tema Equações de 1º grau.

Teste Adaptativo

Conforme já exposto, no SIENA, são utilizados testes adaptativos, os quais são administrados pelo computador. Segundo Costa (2009) esse tipo de teste procura encontrar um teste ideal para cada estudante. Para tal proficiência do indivíduo é estimada interativamente durante a administração do teste e, assim, são selecionados os itens que mensurem eficientemente a proficiência do examinado. Um dos diferencias dos testes adaptativos é que cada estudante recebe um teste com questões diferentes variando, também, o número de questões apresentadas, dependentes do desempenho do estudante. Por exemplo, se alternar entre errar e acertar as questões, o aluno terá que responder um número maior de questões. O SIENA dispõe de um mecanismo de parada, quando já não se pode obter uma maior estimativa sobre ao grau de conhecimento de um conceito. A progressão do aluno para o próximo nodo ocorre sempre que alcançar uma nota igual ou superior ao estipulado, pelo professor, no teste. No caso do trabalho aqui apresentado essa nota é 0,6. Quando o estudante não obtém a aprovação em um nodo, o sistema não prossegue, abrindo a possibilidade da realização de uma recuperação. Esta é realizada através de sequências didáticas específicas, desenvolvidas com o objetivo de proporcionar a retomada desses conceitos. Após o estudo dessa sequência, o estudante refaz o teste e obtendo aprovação passa para o nodo seguinte. A seguir, apresentam-se nas figuras 3 e 4, exemplos de questões utilizadas nos testes adaptativos sobre equações de 1° grau.

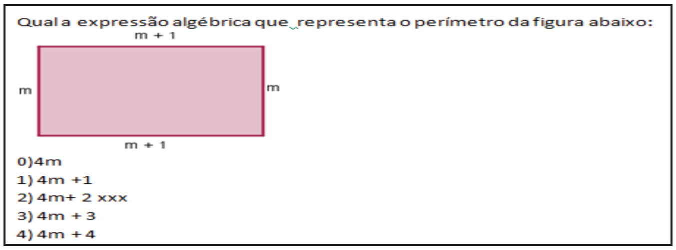


Figura 3 – Questão do teste do nodo Expressões Algébricas.

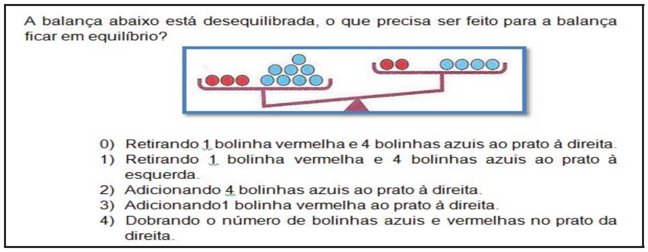


Figura 4 – Questão do texto do nodo Igualdade e Equivalência.

Mapa Individualizado de desempenho

A figura 5 apresenta um exemplo de um banco de dados de um teste sobre expressões algébricas. Nele identifica-se as questões respondidas pelo aluno, suas respectivas respostas (representadas pelos números 0, 1, 2, 3 e 4), se o aluno acertou (*true*) ou errou (*false*), o tempo que ainda restava para responder e a pontuação obtida em cada questão.

Acabado: true

Nota: 0.980

Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Puntos antes
0	false	573	A expressão algébrica que representa o perímetro do polígono abaixo é:	0.100
4	true	280	Qual a expressão algébrica que representa o perímetro da figura abaixo:	0.100
4	false	548	Na figura abaixo a letra x representa uma medida em certa unidade. Qual a expressão algébrica que representa o perímetro da figura?	0.217
2	true	438	Qual a expressão algébrica que representa o perímetro da figura abaixo:	0.217
2	true	557	Imagine uma situação: o preço de um caderno, em reais é representado por x e o preço de outros materiais escolares representado a partir de x. O compasso custa o dobro do caderno, o lápis custa R$3,00 a menos que o caderno e a régua custa a metade do lápis, qual a expressão algébrica que representa o custo da régua?	0.410

Figura 5- Exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um nodo.

Sistema de Recuperação de Conteúdos

Esta parte do sistema é dedicada à realização das recuperações específicas dos nodos que os alunos apresentarem dificuldades. Como já exposto, as recuperações foram organizadas por meio de sequências didáticas, constituídas por materiais de estudo salvos em HTML, atividades criadas nos *software* Scratch e JClic, utilização de jogos, atividades *online,* objetos de aprendizagem e vídeos os quais passam a ser descritos.

Material de estudo

Os materiais de estudos presentes nas sequências didáticas específicas foram construídos com o objetivo de retomar as ideias e conceitos de cada nodo, organizados a partir de situações problemas, buscando a compreensão dos conceitos e procedimentos. Na figura 6 é apresentado um exemplo de material de estudo do nodo de igualdade e Equivalência, no qual é trabalhada a ideia de igualdade, a partir da analogia com a balança de dois pratos.

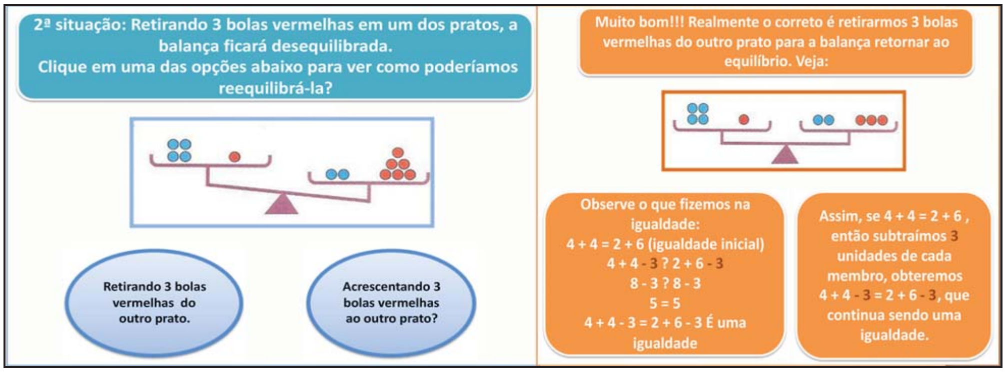


Figura 6- Situação problema nodo conceito de equação de 1º grau.

Atividades no JClic

Com o objetivo de retomar e aprofundar aspectos do que foi trabalhado no material de estudo, em uma perspectiva lúdica, foram utilizadas atividades criadas no *software* JClic. O JClic é um programa para a criação, realização e avaliação de atividades educativas multimídia, desenvolvido na plataforma Java. É uma aplicação em *software* livre é formado por um conjunto de aplicações informáticas que servem para realizar diversos tipos de atividades educativas. Na figura 7 é apresentada um exemplo de atividade desenvolvida no JClic.

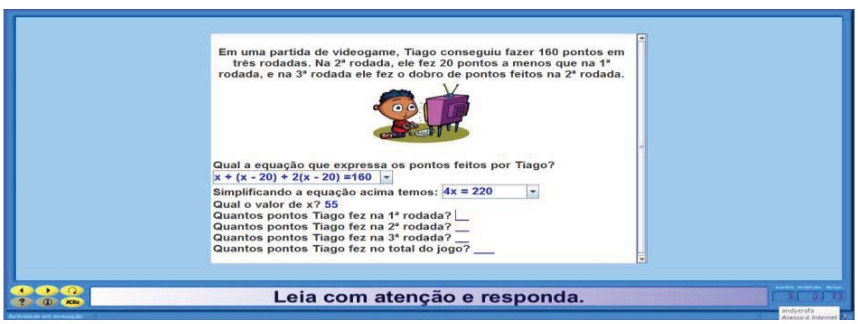
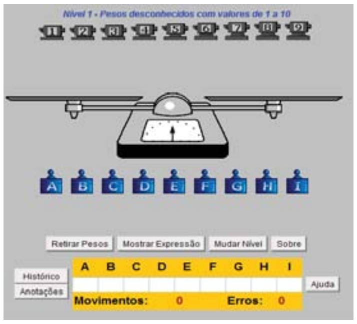


Figura 7 – Exemplo de atividade de preencher lacunas e resposta escrita do JClic.

Objetos de Aprendizagem (OA) e Jogos online

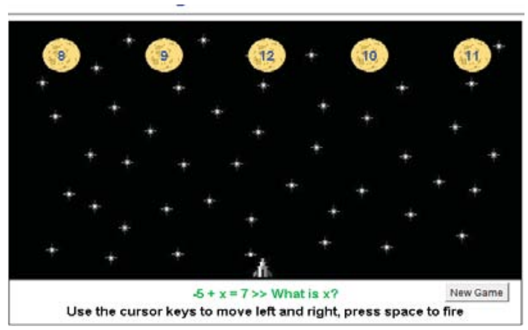
A sequência didática contou, também, com atividades desenvolvidas a partir da utilização de jogos *online* com a intenção de proporcionar, aos estudantes, contato com o conteúdo de forma interativa e lúdica. Quanto à utilização de objetos de aprendizagem, optou-se pelo uso da balança interativa desenvolvida pela Rede Interativa Virtual de Educação (RIVED).

Segundo Filho et al (2008) a utilização da balança interativa possibilita boas perspectivas ao aprendizado do tema. As situações propostas na balança interativa, como descobrir valores desconhecidos, permitem que os alunos desenvolvam o raciocínio lógico, pois os mesmos estabelecem estratégias para descobrir os valores. Nas figuras 8 e 9 apresentam-se imagens da Balança Interativa e de um jogo *online* utilizado na sequência didática.



Fonte: http://rived.mec.gov.br/atividades.html

Figura 8 – Balança interativa.



Fonte:http://www.aplusmath.com/Games.html

Figura 9 – Jogo online Álgebra Planet.

O desenvolvimento da Sequência Didática

Para a construção da sequência didática sobre equações de 1º grau, foram utilizados recursos das TIC, conforme detalhado neste trabalho. Quanto à estrutura e metodologia utilizada, buscou-se apoio no design instrucional fixo, o qual se constitui em uma ação intencional e sistemática de ensino que envolve o planejamento, o desenvolvimento e a aplicação de métodos, técnicas, atividades, materiais, eventos e produtos educacionais em situações didáticas com a finalidade de promover a aprendizagem. Seguindo as fases do design instrucional propostas por Filatro (2009), no presente trabalho, a fase de análise foi realizada através de levantamento bibliográfico, análise sobre o tema e suas dificuldades. Na fase de *design*, foi realizado o planejamento das ações, ferramentas e materiais a serem utilizados para a construção da sequência didática. Já a fase de desenvolvimento foi realizada através da construção da sequência didática. A fase de implementação ocorreu no período de setembro a outubro de 2012 com um grupo de 21 alunos do 7º ano do ensino fundamental de uma escola municipal de Canoas/RS, a partir de encontros semanais nos quais os alunos realizam os testes adaptativos e estudaram por meio da sequência didática, a medida que apresentaram dificuldades. Os dados advindo da fase de implementação estão em processo de análise.

Como parte do processo de investigação a sequência didática, antes de ser implementada junto aos alunos, foi avaliada por um grupo de seis professores de Matemática. Foram analisados aspectos teóricos e metodológicos apresentados no trabalho no que se refere à apresentação do conteúdo, metodologia, exemplos e atividades que compõem a sequência apresentando um parecer por escrito. Segundo a avaliação desses professores a sequência adota uma boa abordagem dos aspectos teóricos relativos ao tema, assim como a metodologia e os exemplos apresentados são satisfatórios. Porém, apontaram a necessidade de ampliar o número de atividades construídas no *software* JClic, o que foi incorporado à sequência didática.

Considerações Finais

Considera-se que o uso das TIC, como uma ferramenta para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem e na recuperação de conteúdos, se constitui em uma tentativa de abordar novamente um conteúdo, buscando novos caminhos para a aprendizagem e superação das dificuldades. Segundo Ponte (2001), as ferramentas das TIC possibilitam uma abordagem inovadora, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica. Aponta-se a construção de uma sequência didática, com o uso de recursos e metodologias variadas e com a possibilidade da realização de testes adaptativos individualizados, como uma proposta de um ambiente facilitador para a recuperação de conteúdos e a superação das dificuldades dos alunos. Ressalta-se que a sequência didática foi desenvolvida sobre o tema equações de 1º grau, pois este é um conteúdo no qual os alunos apresentam dificuldades de aprendizagem (Lins e Gimenez, 1997; Silva e Costa, 2010). Por outro lado as equações é um conteúdo bastante abrangente, utilizado para resolução de problemas em diversos contextos, o que o torna presente em várias etapas da educação básica, não só na Matemática, mas também em outras áreas (Freitas, 2002, p.10). Assim, considera-se relevante, buscar alternativas que possibilitem os estudantes enfrentar e superar as dificuldades apresentadas neste tema.

Referências bibliográficas

Bacha, M. L., & Maluf, M. C. C (1974). *Promoção e Recuperação.* Departamento de Documentação e Divulgação

Filatro, A. (2009). *Design Instrucional na prática.* São Paulo: Pearson Education do Brasil.

Filho, J. A. C., Freire, R. S., Fernandes, A. C., & Leite, M. A. (2008). *Quando objetos digitais são efetivamente para aprendizagem: o caso da matemática*. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE), Fortaleza - CE. Anais do XIX SBIE.

Freitas, M. A. (2002). *Equação do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, Brasil.

Lemos, A. V., Monteiro, A, B., & Groenwald, C. L. O. (2011). Multiplicação nos Numeros Naturais: uma experiência no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA). *Anais do Seminário Estadual de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática*, Canoas.

Ministério da Educação do Brasil (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional No. 9394*. Brasília: MEC

Lins, R. C., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em Artimética e Álgebra para o Século XXI*. Campinas: Papirus.

Ponte, J. P. (2001). Tecnologias de informação e comunicação na educação e na formação de professores: Que desafios para a comunidade educativa? Tecnologias em educação: Estudos e investigações. *Actas do X Colóquio da AFIRSE*, 89-108.

Silva, T. M. M., & Costa, B. M. G. (2010). Dificuldades de aprendizagem no ensino da matemática do 6° ano em relação à equação do primeiro grau**.** *Anais 62ª Reunião Anual da SBPC.* Natal: UFRN.

LA ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL –UNA SECUENCIA POSIBLE–

Ethel Barrio
Instituto de Formación Docente IFD No. 12 Argentina
ethel.barrio@gmail.com

Resumen. La incorporación de tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el aula genera nuevas oportunidades de estudio, de trabajo, y por supuesto, de nuevas formas de enseñar y aprender. Presentamos en este escrito una propuesta que se implementó en el aula con estudiantes del tercer año de la carrera del Profesorado de Enseñanza Primaria. Se ha seleccionado para esta secuencia un conjunto de problemas que pueden ser modelizados por una ecuación diofántica lineal del tipo ax + by = c con a, b y c pertenecientes a Z para que los estudiantes puedan experimentar el "hacer matemática" con TIC. Iniciar el trabajo matemático de esta manera implica proponer un modo particular de hacer y producir conocimiento. De este modo, las tecnologías permitirán que en las clases se logre experimentar sobre búsqueda de regularidades, patrones, y comportamientos de los objetos matemáticos, conjeturando sobre ellos e iniciándose en un camino de argumentaciones tendientes a la demostración.

Palabras clave: variable, generalización, TIC, ecuación diofántica lineal

Abstract. The incorporation of information technology and communication (ICT) in the classroom creates new opportunities to study, work, and of course, new forms of teaching and learning. We present in this paper a proposal that was implemented in the classroom with students of the third year of the course of primary school teachers. It has been selected for this sequence a set of problems that can be modeled by a linear Diophantine equation of the type ax + by = c with a, b and c belonging to Z so that students can experience the "doing math" with ICT. Sign mathematical work in this way, involves a particular way of making and producing knowledge. Thus, the technologies allow in classes experimenting on finding regularities, patterns, and behaviors of mathematical objects, speculating about them and starting on a journey of arguments aimed at the demostration.

Key words: variable- generalization – ICT - linear diophantine equation

Introducción

Actualmente, el rol docente tiene otro gran desafío con la implementación en las aulas de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC). La mayoría de los docentes en ejercicio hemos realizado nuestros estudios de grado cuando todavía no estaban incorporadas las TIC en las universidades, o en los planes de estudio. Consideramos que, para que la educación pueda explotar al máximo los beneficios de las TIC en el proceso de aprendizaje, es esencial que tanto los futuros docentes como los docentes en actividad podamos hacer uso de estas herramientas.

Son muchos los trabajos referentes a la introducción de las tecnologías en la educación. Compartimos las ideas de Artigue (2004), referidas al tema de la inclusión de las TIC:

> Ciertamente estas tecnologías son socialmente y científicamente legítimas, pero a nivel de la escuela, esas legitimidades no son suficientes para asegurar la integración. Pues no se busca que la enseñanza forme alumnos aptos para

> funcionar matemáticamente con esas herramientas –lo que sería el caso por ejemplo de una formación de carácter profesional–: se busca mucho más. Efectivamente, lo que se espera de esas herramientas esencialmente es que permitan aprender más rápidamente, mejor, de manera más motivante, una matemática cuyos valores son pensados independientemente de esas herramientas. Lo que se necesita entonces es asegurar la legitimidad pedagógica de estas herramientas, y eso es bien distante de asegurar su legitimidad científica o social. Esto, como hemos mostrado, genera un círculo vicioso que enferma la formación en un esquema de militancia y proselitismo, poco adecuado para otorgar herramientas a los docentes que les permitan hacer frente a las dificultades que inevitablemente van a encontrar, que les permitan identificar las necesidades matemáticas y técnicas de las génesis instrumentales y de responderlas eficazmente; poco adecuado también para permitirles la necesaria superación de una visión ingenua de la tecnología como remedio a las dificultades de la enseñanza.

Esto nos lleva a pensar el tema de la inclusión de las TIC con suma atención y cuidado, sin creer que son la panacea o la solución a la complejidad e infinidad de problemáticas que conlleva el aprendizaje de la matemática.

Las instituciones de formación docente, hoy se enfrentan al desafío de capacitar a la nueva generación para incorporar en sus clases las nuevas herramientas de aprendizaje; es decir, proveer a sus estudiantes las herramientas y conocimientos necesarios para el siglo XXI. Esta tarea supone por un lado, la adquisición de nuevos recursos y habilidades y, por otro lado, una cuidadosa planificación.

Pensando en esta planificación, es propósito de esta secuencia que los futuros docentes construyan criterios y adquieran herramientas que les permitan gestionar una clase de matemática. Lo que cambia con la tecnología es el conjunto de problemas entre los que se puede escoger y la forma en que se pueden presentar. El uso de la tecnología tiene que ver con la representación dinámica que muestra la pantalla, sobre la cual se pueden hacer visualizaciones concretas acerca de la exploración de posibles resultados y que con el solo uso de lápiz y papel esto era casi imposible de realizar. Así, la tecnología es una estructura representacional que amplía las posibilidades del pensamiento humano (Kaput, 1994). En este sentido, el propósito de las herramientas tecnológicas es desarrollar habilidades y destrezas en los estudiantes al manipular objetos matemáticos en los procesos de resolución de problemas (Moreno, 2005).

Además, si las clases de matemática son planificadas con la concepción que los conocimientos matemáticos han sido elaborados por la cultura, un desafío consiste entonces en desplegar diversas propuestas que permitan a los futuros docentes aprender matemática *haciendo matemática*. Por ello, se ha seleccionado para esta secuencia un conjunto de problemas que pueden ser modelizados por una ecuación diofántica lineal (EDL) del tipo $ax + by = c$ con a, b y c pertenecientes a Z para que los estudiantes puedan experimentar el "hacer matemática" con TIC. Iniciar el trabajo matemático con los estudiantes de esta manera implica proponer un modo particular de hacer y producir conocimiento. De este modo, las tecnologías permitirán que en las clases se logre experimentar sobre búsqueda de regularidades, patrones, y comportamientos de los objetos matemáticos, conjeturando sobre ellos e iniciándose en un camino de argumentaciones tendientes a la demostración.

Partimos de la idea de que los objetos matemáticos son por naturaleza abstractos y que debemos atender a su complejidad. Para llevar a cabo esta tarea proponemos una secuencia didáctica donde presentamos a nuestros estudiantes un conjunto de problemas modelizables mediante EDL. Estas situaciones favorecen, entre otras cosas, la construcción de las nociones de variable y generalización y ponen a los estudiantes en mejores condiciones para abordar lo algebraico.

El uso del software de aplicación, planilla de cálculo electrónica, como recurso para esta secuencia, exige que el estudiante entienda la estructura del problema que se le propone, y en función de eso hacer las manipulaciones con el programa para responder a las cuestiones que se le plantean. A través del uso de una tabla se pueden visualizar las relaciones entre las variables de los problemas presentados en la secuencia.

Marcos teóricos

A partir de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1993), se analizan las representaciones puestas en juego al resolver problemas de EDL, las funciones que cumplen estas representaciones y las posibles conversiones de registro que surjan.

Considerando la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990), se analizan los conocimientos puestos en acto y los esquemas movilizados al resolver problemas de EDL.

Atendiendo a la Epistemografía de Drouhard -en Barrio, Lalanne y Petich (2010)- se identifican los conocimientos de naturaleza diferente que se ponen en juego en la actividad matemática con los problemas modelizables mediante EDL.

Implementación

La siguiente propuesta didáctica se pensó para ser implementada en el aula con estudiantes del tercer año de la carrera del Profesorado de Enseñanza Primaria del Instituto de Formación Docente N°12 de la ciudad de Neuquén –Argentina-. El espacio de problemas involucra simultáneamente estructuras aditivas y multiplicativas en forma conjunta, que pueden modelizarse mediante ecuaciones de solución entera, del tipo $ax + by = c$ con $a, b, c \in$ Z. En esta secuencia sólo consideraremos la EDL en dos variables.

La elaboración de esta secuencia de problemas se orienta hacia la posibilidad de generar las condiciones para que los estudiantes participen en la resolución de problemas, valorando el intercambio, la discusión, el análisis de los aciertos y los errores como parte del proceso de resolución y utilicen como herramienta la planilla de cálculo electrónica para resolverlos.

Los contenidos matemáticos que se trabajan son los siguientes: estructuras aditivas y multiplicativas en forma simultánea, ecuación diofántica lineal, noción de variable y de generalización. Asimismo, la elaboración y validación de conjeturas constituyen un tópico central de la propuesta.

Los saberes previos requeridos son el manejo básico de la planilla de cálculo electrónica, los números naturales, las operaciones básicas, conceptos básicos de divisibilidad y la combinación aditiva y multiplicativa en N.

Secuencia de actividades

A continuación se detallan las actividades trabajadas y el análisis de las producciones de los estudiantes.

Actividad 1

La docente entrega a los estudiantes el enunciado del siguiente problema con el propósito de iniciarlos en la resolución de situaciones problemáticas que puedan ser modelizadas mediante una EDL e integrar la planilla de cálculo en la resolución: *Pedro construye una pared rectangular con 6 ladrillos en la base. Juan construye otra pared rectangular con 8 ladrillos en la base. ¿Cuántas filas de ladrillos puede tener cada pared si entre las dos paredes se utilizan 60 ladrillos?*

Tal como se anticipó en el análisis a priori, los estudiantes encontraron sin dificultad, con lápiz y papel, los pares solución (2; 6) y (6; 3), relacionando los múltiplos de 6 y los múltiplos de 8 y analizando cuáles de estas sumas daban 60. En este caso utilizaron procedimientos aritméticos basados en el concepto de covarianza. El par solución (10; 0) no lo consideraron porque, en el contexto del problema, dice que entre las dos paredes deben tener 60 ladrillos. La Tabla 1 hace referencia a lo descripto anteriormente.

Portapapeles | Fuente | Alineación

E10 | f_x =B10+D10

	A	B	C	D	E	F
1	1	6	1	8	14	
2	2	12	2	16	28	
3	3	18	3	24	42	
4	4	24	4	32	56	
5	5	30	5	40	70	
6	5	30	4	32	62	
7	4	24	6	48	72	
8	4	24	5	40	64	
9	6	36	4	32	68	
10	6	36	3	24	60	
11	2	12	5	40	52	
12	2	12	6	48	60	
13						
14						

Tabla 1: Procedimiento aritmético basado en el concepto de covarianza.

Al trabajar con el programa la dificultad que se les presenta es, por un lado el armado de la fórmula, y por otro lado ver qué es fijo y qué es variable; es decir, realizan una inversión entre coeficientes y variables. Si bien 2x6 = 6x2, en un miembro de la igualdad interpretamos 2 filas de 6 ladrillos cada una y en la otra se interpreta 6 filas de 2 ladrillos cada una. Otras dificultades que se presentan es expresar la respuesta del problema como par ordenado, o dar la respuesta como cantidad de ladrillos de la pared y no como cantidad de filas.

Considerando como variable didáctica los números que intervienen en el enunciado del problema de Pedro y Juan y con la intención de "pasar de nuevo" por la actividad se les presentó luego el siguiente problema: *Pedro construye una pared rectangular con 4 ladrillos en la base. Juan construye otra pared rectangular con 6 ladrillos en la base. ¿Cuántas filas de ladrillos puede tener cada pared si entre las dos paredes se utilizan 82 ladrillos?*

Al modificar los valores del enunciado, ninguna variable toma el valor cero como solución y la cantidad de soluciones es mucho mayor (tiene siete pares solución). La idea fue hacer evolucionar los comportamientos de los estudiantes luego de un análisis de lo sucedido en la primera instancia. Esto permitió ajustar los procedimientos o encontrar estrategias de resolución que anteriormente no estaban disponibles. Por ejemplo, construyeron una tabla que restaba a 82 los múltiplos de 6 y analizaron cuáles de estos resultados eran múltiplos de 4. En este caso utilizaron procedimientos aritméticos basados en el concepto de dependencia.

Siguiendo este procedimiento de dependencia la planilla de cálculo, una vez introducidas las fórmulas, juega un papel importante. Con mucha rapidez se puede saber qué pares son solución del problema, y no solo esto. Si analizamos la Tabla 2, se observa una regularidad en los pares solución: a medida que las filas de la pared de Pedro aumenta de tres en tres, las filas de la pared de Juan disminuyen de dos en dos.

Portapapeles | Fuente | Alineación

D1 f_x =C1/6

+ 3

	A	B	C	D	E
1	1	4	78	13	
2	2	8	74	12,3333333	
3	3	12	70	11,6666667	
4	4	16	66	11	
5	5	20	62	10,3333333	
6	6	24	58	9,66666667	
7	7	28	54	9	
8					
9					

-2

Tabla 2: Procedimiento de dependencia.

Además, la planilla de cálculo juega un rol importante en la resolución de este problema y en la interpretación de los datos numéricos que se van obteniendo. Los estudiantes valoraron a la planilla de cálculo como una herramienta que permite resolver problemas matemáticos complejos de manera sencilla. Para problemas con varias soluciones poder pensar en una tabla organizada permite encontrar la regularidad y de esta manera se aseguran, de algún modo, que están dando todos los pares solución dentro del contexto del problema.

Actividad 2

En esta clase los alumnos ya estaban familiarizados tanto con los problemas para los cuales las EDL es un recurso adecuado como con el uso de la planilla de cálculo.

En el análisis a priori resultó interesante mantener el contexto del problema de inicio; es decir, no introducir variaciones numéricas con respecto a los coeficientes pero sí realizar una variación estructural ya que el problema que se les presentó responde a la ecuación del tipo $ax - by = c$ .Se les presentó el siguiente problema: *Pedro construye una pared rectangular con 6 ladrillos en la base. Juan construye otra pared rectangular con 8 ladrillos en la base. ¿Cuántas filas de ladrillos puede tener cada pared si la de Pedro tiene 40 ladrillos más que la de Juan?*

En este caso nuevamente están utilizando procedimientos aritméticos basados en el concepto de covarianza. A partir de la Tabla 3 y considerando valores organizados pudieron conjeturar que el número de filas de la pared de Pedro aumenta de 4 en 4 y la de Juan de 3 en 3. A diferencia del problema anterior en este caso las dos variables aumentan y de este modo se pueden obtener infinitas soluciones al encontrar la regularidad.

E5 =B5-D5

secuencia de problemas EDL [Modo de compatibilidad]

	A	B	C	D	E
1	Fila de Pedro	Pared de Pedro	Filas de Juan	Pared de Juan	Diferencia de 40
2	1	6	2	16	-10
3	5	30	1	8	22
4	6	36	1	8	28
5	8	48	1	8	40
6	9	54	1	8	46
7	10	60	2	16	44
8	11	66	3	24	42
9	12	72	4	32	40
10	13	78	5	40	38
11	14	84	5	40	44
12	15	90	6	48	42
13	16	96	7	56	40
14	17	102	8	64	38
15	18	108	9	72	36
16	19	114	10	80	34
17	20	120	10	80	40
18	21	126	11	88	38
19	22	132	12	96	36

+4 +3

Tabla 3: Procedimiento de covarianza que permite hallar la regularidad

Otro grupo de estudiantes, valiéndose de procedimientos aritméticos basados en el concepto de dependencia construyeron la Tabla 4 que restaba a 40 los múltiplos de 6 para verificar en qué casos la diferencia era múltiplo de 8. Un alumno sugirió empezar la tabla desde el 42 ya que la pared de Pedro debe tener más de 40 ladrillos.

B7 =A7*6

secuencia de problemas EDL [Modo de compatibilidad]

	A	B	C	D	E
1	Fila de Pedro	Pared de Pedro	Pared de Pedro - 40	Fila de Juan	
2	7	42	2	0,25	NO
3	8	48	8	1	SI
4	9	54	14	1,75	NO
5	10	60	20	2,5	NO
6	11	66	26	3,25	NO
7	12	72	32	4	SI
8	13	78	38	4,75	NO
9	14	84	44	5,5	NO
10	15	90	50	6,25	NO
11	16	96	56	7	SI
12	17	102	62	7,75	NO
13	18	108	68	8,5	NO
14	19	114	74	9,25	NO
15	20	120	80	10	SI
16	21	126	86	10,75	NO
17	.....			....	

+4 +3

Tabla 4: Procedimiento de dependencia que permite hallar la regularidad.

La dificultad que se presentó en esta clase fue expresar la regularidad del problema ya que tiene infinitas soluciones.

Luego se preguntó qué analogías y qué diferencias se ven entre los problemas trabajados y con la idea de llegar al modelo matemático. Se institucionalizó lo siguiente:

El mismo tipo de expresión modeliza ambos problemas: $ax \pm by=c$. A este objeto algebraico definido en N se lo llama ecuación diofántica lineal. En ambos problemas hay variables y éstas varían de acuerdo a una determinada relación. En el primer problema, que responde al modelo $ax + by=c$, a *medida que una variable aumenta, la otra disminuye y la cantidad de pares solución es finita dentro del contexto del problema. En el segundo problema, que responde al modelo ax – by =c, ambas variables aumentan o disminuyen simultáneamente. Si se encuentra una solución y se descubre la regularidad se pueden generar otros pares solución. Para resolver ambos problemas se debe encontrar una manera de expresar todos los pares solución:*

- *en los problemas de suma, pueden mencionarse todos los pares solución (cabe aclarar que si los pares son muchos, es conveniente plantear la regularidad),*
- *en los problemas de resta, es necesario plantear la regularidad correspondiente.*

A modo de cierre

Las hojas de cálculo constituyen un puente ideal entre la aritmética y el álgebra y, al implementar la secuencia se desprende que los estudiantes se mueven libremente entre dos mundos. Los estudiantes buscan esquemas, construyen expresiones algebraicas, generalizan, justifican conjeturas y establecen regularidades.

Además, la cantidad de preguntas que el profesor pueden generar a partir de cada problema, precisa que el estudiante construya y analice una larga lista de números, interprete las respuestas correspondientes entre los datos resultantes, generalice y explique esquemas.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2004), *Problemas y desafíos en educación matemática: qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática*, Université Paris 7 Denis Diderot, presentado para publicación a Educación Matemática, Editorial Santillana.

Barrio, E., Lalanne y L. Petich, A. (2010). *Entre aritmética y álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario.* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5* (pp. 37-65). IREM, de Strasbourg.

Kaput, J. (1994). *Democratizing access to calculus: New routes to old roots. Mathematics and cognitive science.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Moreno, M (2005). *El papel de la didáctica de la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros*. España: Departamento de Matemáticas (UdL).

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques 10*, 2-3.

EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL MEDIANTE LA WEBQUEST

Daniel Giovanni Proleón Patricio, Daysi Julissa García Cuéllar
Universidad San Ignacio de Loyola - USIL Perú
dproleon@gmail.com, daysigarcu@gmail.com

Resumen. La presente investigación presenta una actividad realizada con estudiantes de matemática del primer ciclo de ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola en Lima, Perú. Para ello utilizamos la herramienta Google Apps que nos sirvió de soporte para implementar las webquests. El objetivo de la actividad es motivar a los estudiantes a la investigación, reforzar sus conocimientos matemáticos, aplicar la matemática en situaciones reales, desarrollar el trabajo colaborativo y la competencia digital de los estudiantes e introducir las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. Presentamos la webquest "latas de aluminio: un problema ambiental", ésta muestra de manera didáctica, a través de videos, el proceso de producción y reciclaje de latas de aluminio. La tarea que se plantea en la webquest busca determinar las dimensiones óptimas de las hojalatas de aluminio a fin de contribuir con una menor contaminación ambiental.

Palabras clave: matemática, webquest, trabajo colaborativo, competencia digital

Abstract. This paper presents an activity with students from first cycle of mathematical engineering at University of San Ignacio de Loyola. We use the tool of Google Apps that served as support for implementing webquests. The objectives of the activity are to encourage students to research, strengthen their math skills, applying mathematics in real situations, develop collaborative work and digital competence of students and introduce information technology and communication (ICT) in the process of teaching and learning of calculus. Introducing the webquest "aluminum cans: an environmental problem", it shows a didactic way, through videos, the production process and aluminum can recycling. The task that arises in the webquest seeks to determine the optimal size of aluminum cans to help with lower environmental pollution.

Key words: mathematics, webquest, collaborative work, digital competence

Introducción

Las *webquests* surgieron en el campo educativo a partir de las ideas de aprendizaje colaborativo y de procesos de investigación para la construcción del saber. Fueron creadas en 1995, por Bernie Dodge, en la universidad de San Diego, tomando como principio básico llevar a los estudiantes a iniciarse en la investigación utilizando recursos de internet para resolver un problema que produzca un aprendizaje significativo o para la reflexión y debate sobre un tema o situación social de interés de los estudiantes.

Dodge (1999), definió *wequest* como un modelo para el aprendizaje basado en proyectos, la propuesta es que los estudiantes realicen una investigación orientada a tareas atrayentes, que sean ejecutables y para las cuales son predefinidos recursos de la web, de forma que la enseñanza ocurra, según el autor, por la construcción de conocimientos en un proceso crítico de pensamiento.

> Una webquest es un tipo de actividad didáctica basada en presupuestos constructivistas del aprendizaje que utiliza técnicas de aprendizaje por medio de

> proyectos en grupo. Se trata de pequeños esquemas de investigación que realizan grupos de estudiantes siguiendo un camino que, en sus aspectos esenciales, ha sido trazado previamente por el profesor, pero que puede llevarles a resultados originales y creativos. (Adell, 2007, p.211).

La palabra *webquest* fue acuñada a partir de la fusión de Web, de la red World Wide Web, que normalmente constituye la base principal de datos para los aprendizajes; Quest, que significa búsqueda porque en el caso de la *webquest* esa es la principal actividad de los estudiantes.

La estructura básica de la w*ebquest* contempla las siguientes secciones:

1) *Introducción*, que presenta el tema y propone una pregunta central a partir de él.
2) *Tarea*, con la propuesta de trabajo y el producto esperado.
3) *Proceso*, que contiene la descripción de las etapas para la elaboración del producto a ser presentado y compartido por los estudiantes.
4) *Recursos*, en donde se encuentran disponibles los diversos documentos, en formato digital, como textos, páginas web, videos, software para que los estudiantes puedan consultar y realizar la tarea que se les propone en la webquest.
5) *Evaluación*, que establece los criterios de los productos y de la actuación de los estudiantes.
6) *Conclusión*, resume el propósito de la investigación realizada sobre el punto de vista de sus creadores.

Objetivos

- Motivar a los estudiantes a la investigación en el área de matemática
- Reforzar sus conocimientos matemáticos
- Aplicar la matemática en situaciones reales
- Desarrollar el trabajo colaborativo y la competencia digital de los estudiantes
- Introducir las tecnologías de la información y comunicación (TIC) en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
- Desarrollar el aprendizaje autónomo de los estudiantes

Metodología

Las *WebQuets* se realizaron durante todo el ciclo en el curso de análisis matemático para los alumnos del primer ciclo de ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola. Para su realización se tuvieron en cuenta las secciones que debe contar toda *webquest.*

A continuación describiremos la webquest titulada "Latas de aluminio, un problema ambiental" como ejemplo del trabajo realizado:

Página de inicio

Muestra una imagen motivadora para la realización del trabajo y la importancia de la responsabilidad social.

Figura N° 1

Introducción

En esta sección se presenta al estudiante la importancia de la preservación del medio ambiente y como la matemática ayuda a tal fin.

Figura N° 2

Tarea:

En esta página se muestra las actividades a realizar por los estudiantes. La tarea se subdivide en tres actividades; en la primera actividad los estudiantes deben utilizar sus conocimientos de máximos y mínimos para optimizar la cantidad de aluminio usado para la construcción de la lata de gaseosa y verificar su resultado obtenido por medio de software matemático; la segunda actividad, está destinada a la elaboración de diagramas que expliquen el proceso de la elaboración de la lata de gaseosa y la tercera actividad, está orientada hacia el juicio crítico de los estudiantes sobre la producción responsable y la responsabilidad social.

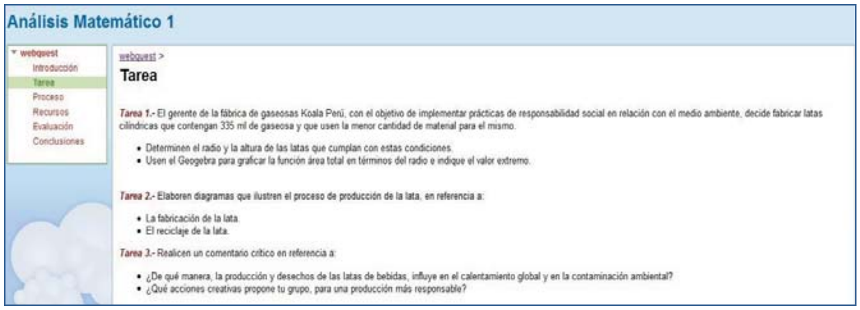


Figura N° 3

Proceso

En esta sección se dan las pautas para la realización de las tareas encomendadas a los estudiantes.

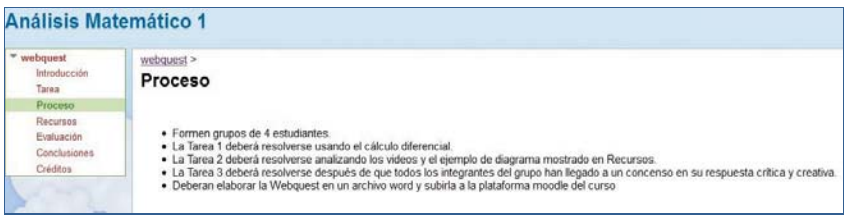


Figura N° 4

Recursos

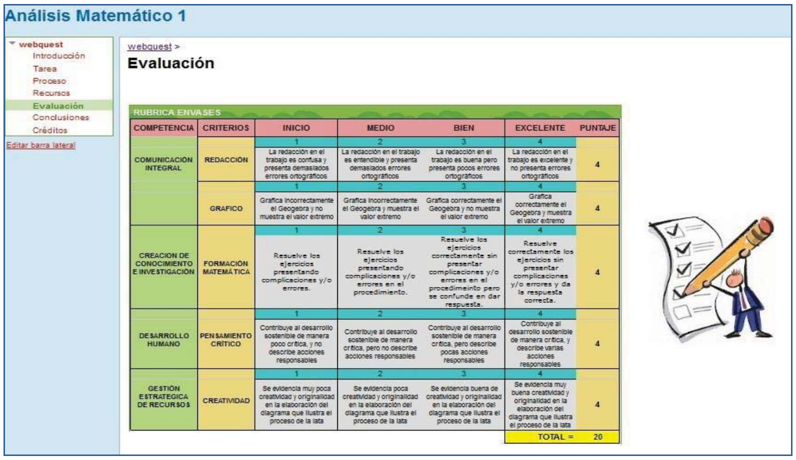
Los recursos son una lista de sitios web que el profesor ha seleccionado como los más adecuados para el desarrollo de la webquest y que contiene información válida y pertinente para realizar la tarea.

Esto permite a los estudiantes acceder a la información fácilmente y que conozcan cómo, cuándo y para qué deben de utilizarla.

Figura N° 5

Evaluación

Se dan a conocer los criterios a ser evaluados por el docente.



COMPETENCIA	CRITERIOS	INICIO	MEDIO	BIEN	EXCELENTE	PUNTAJE
		1	2	3	4	
COMUNICACIÓN INTEGRAL	REDACCIÓN	La redacción en el trabajo es confusa y presenta demasiados errores ortográficos	La redacción en el trabajo es entendible y presenta demasiados errores ortográficos	La redacción en el trabajo es buena pero presenta pocos errores ortográficos	La redacción en el trabajo es excelente y no presenta errores ortográficos	4
		1	2	3	4	
	GRAFICO	Grafica incorrectamente el Geogebra y no muestra el valor extremo	Grafica incorrectamente el Geogebra y muestra el valor extremo	Grafica correctamente el Geogebra y no muestra el valor extremo	Grafica correctamente el Geogebra y muestra el valor extremo	4
		1	2	3	4	
CREACION DE CONOCIMIENTO E INVESTIGACIÓN	FORMACIÓN MATEMÁTICA	Resuelve los ejercicios presentando complicaciones y/o errores.	Resuelve los ejercicios presentando complicaciones y/o errores en el procedimiento.	Resuelve los ejercicios correctamente sin presentar complicaciones y/o errores en el procedimeinto pero se confunde en dar respuesta.	Resuelve correctamente los ejercicios sin presentar complicaciones y/o errores y da la respuesta correcta.	4
		1	2	3	4	
DESARROLLO HUMANO	PENSAMIENTO CRÍTICO	Contribuye al desarrollo sostenible de manera poco crítica, y no describe acciones responsables	Contribuye al desarrollo sostenible de manera crítica, pero no describe acciones responsables	Contribuye al desarrollo sostenible de manera crítica, pero describe pocas acciones responsables	Contribuye al desarrollo sostenible de manera crítica, y describe varias acciones responsables	4
		1	2	3	4	
GESTIÓN ESTRATEGICA DE RECURSOS	CREATIVIDAD	Se evidencia muy poca creatividad y originalidad en la elaboración del diagrama que ilustra el proceso de la lata	Se evidencia poca creatividad y originalidad en la elaboración del diagrama que ilustra el proceso de la lata	Se evidencia buena de creatividad y originalidad en la elaboración del diagrama que ilustra el proceso de la lata	Se evidencia muy buena creatividad y originalidad en la elaboración del diagrama que ilustra el proceso de la lata	4
					TOTAL =	20

Figura N° 6

Conclusión

Muestra la justificación para la creación de la *webquest*

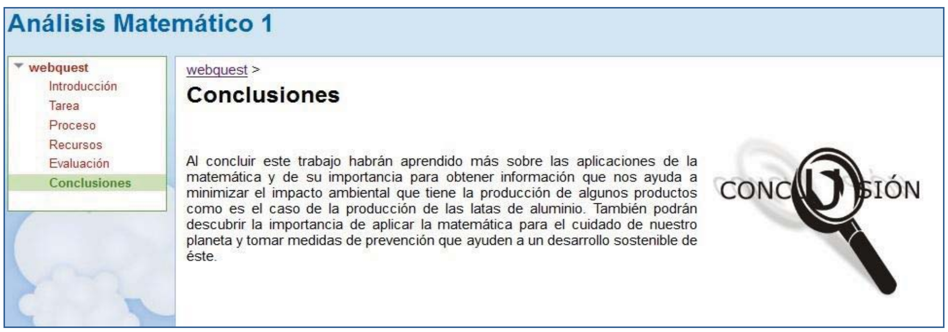


Figura N° 7

Conclusiones de la experiencia

La realización de las webquests permitió que los estudiantes aplicarán sus conocimientos matemáticos en problemas de contexto real.

Se pudo observar que los estudiantes, se mostraban interesados en la realización de la webquest y cómo la matemática puede ser utilizada para dar solución a diversos problemas.

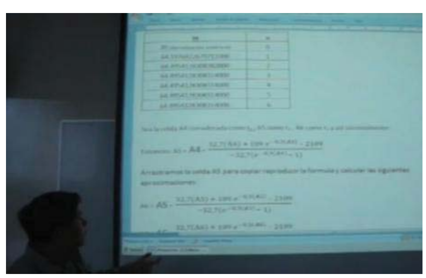


Figura N° 8 Alumno exponiendo su trabajo de webquest

En las diversas webquests se incorporaron herrmamientas TICs tales como: GeoGebra, Wiris, WinPlot, Excel que aportaron al desarrollo de la competencia digital de los estudiantes.

Los estudiantes desarrollaron sus habilidades interpersonales lo cual ayudo a la realización de las webquets de una manera colaborativa fomentando la investigación y el trabajo en equipo.

Las webquests contribuyeron al desarrollo de destrezas en el manejo de la información y de reconocer la importancia de información confiable que se encuentra en la red. Esto se evidenció cuando los estudiantes expresaron en el aula que buscando mayor información sobre el tema en otras páginas web, donde encontraron diversa información y en algunos casos la teoría estaba errada y no tenían autores lo cual hacía dificil comprobar la veracidad de la información obtenida.

Referencias bibliográficas

Adell, J. (2007). Internet en el aula: las webquest. En J. Cabero y J. Barroso (Eds.). *Posibilidades de la teleformación en el Espacio Europeo de Educación Superior* (pp. 211-225), Granada: Editorial Octaedro Andalucía.

Dodge, B. (1999). *Cinco reglas para escribir una fabulosa webquest*. Recuperado el 7 de enero de 2011, de: http://www.eduteka.org/Profesor10.php

Dodge, B. (1999). *Tareonomía del webquest: Una taxonomía de tareas*. Recuperado el 7 de enero de 2011, de: http://www.eduteka.org/Tema11.php

Costa, N. (2010). Ser e não ser: eis a questão - Discutindo paradoxos de uma webquest para o Ensino Médio.En Jahn, A. & Gomes (Eds.), N.*Tecnologias e Educação Matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores*. (pp. 63-81). Recife: SBEM.

Temprano, A. (2010). *Webquest - Aproximación práctica al uso de Internet en el aula*. Bogotá: Ediciones de la U.

RECURSOS DE AMBIENTES VIRTUAIS NUM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NA MODALIDADE PRESENCIAL

Ettiène Guérios, Sandra Sausen
Universidade Federal do Paraná, NRE de União da Vitória Brasil
ettiene@ufpr.br, sansausen@gmail.com

Resumo. Esta pesquisa investigou possibilidades de interação e mobilização de conhecimentos matemáticos identificadas em alunos de um curso presencial de Licenciatura em Matemática, usando recursos de ambientes virtuais de aprendizagem nas aulas de Metodologia do Ensino. Temáticas específicas nortearam o processo investigativo, entre elas: de que forma o uso de ambientes virtuais podem potencializar processos de interação, auxiliando no ensino e na aprendizagem em cursos presenciais de Licenciatura em Matemática; que interações esses alunos estabelecem com os colegas e com o conhecimento matemático ao fazer uso do *Chat*; como o uso do *Chat* e do Diário podem contribuir para o estabelecimento de conexões entre o conhecimento teórico e a prática. Durante a coleta dos dados empíricos foram identificadas e analisadas atitudes e ações dos alunos que favorecem a aprendizagem e a comunicação [interação] com a utilização de ferramentas disponíveis em ambientes virtuais no Ensino Presencial.

Palavras chave: educação matemática licenciatura, ambientes virtuais

Abstract. This research examined the possibilities of interaction and mobilization of mathematical knowledge of students, identified in a classroom course in Mathematics, using resources of virtual learning environments in the Teaching Methodology classes. Specific themes guided the investigative research process, including: how the use of virtual environments may enhance interaction processes, assisting in teaching and learning in presential courses in Mathematics; the interactions that students have established with their colleagues and with the mathematics knowledge making use of the *Chat*; the way the *Chat* and the Journal may contribute to the establishment of connections between theoretical knowledge and practice. During the collection of empirical data, students' attitudes and actions were identified and analyzed, which favors learning and the communication [interaction] with the use of tools available in virtual environments in Teaching.

Key words: mathematics education, graduation, virtual environments

Introdução

Este texto refere-se à pesquisa cuja questão foi investigar possibilidades de interação e mobilização de conhecimentos matemáticos que podem ser identificadas em alunos de um curso presencial de Licenciatura em Matemática, a partir do conteúdo programático curricular Resolução de Problemas, usando recursos de ambientes virtuais de aprendizagem nas aulas de Metodologia do Ensino da Matemática.

Entendemos por ambientes virtuais os espaços desenvolvidos através de recursos computacionais por meio do uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) via Web. Schlemmer (2002) e outros autores afirmam que, se tais espaços propiciam processos de ensino e de aprendizagem, então se constituem em um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA). O fato de um AVA permitir "integrar múltiplas mídias, linguagem e recursos, apresentar informações de maneira organizada, desenvolver interações entre pessoas e objetos de conhecimento, elaborar e socializar produções tendo em vista atingir determinados objetivos" (Almeida, 2003, p. 331), nos instigou a observar pedagogicamente decorrências didáticas da utilização de recursos de ambientes virtuais num Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade Presencial. O ambiente virtual de aprendizagem pode ser caracterizado como um espaço relacional com marcas sociais, veicular um discurso pedagógico e científico, ter como função favorecer a tarefa de ensinar e de aprender ao possibilitar que os alunos sigam seu modo e ritmo de aprendizagem e estabeleçam suas próprias reflexões durante o desenvolvimento de atividades.

No AVA utilizado para esta pesquisa, utilizamo-nos dos recursos *Chat* e Diário. O *Chat* é conhecido como sala de bate-papo em que a comunicação é escrita, acontece em tempo real e todos os participantes podem ler e responder mensagens enviadas. No *Chat* há interação entre todos os participantes. O *Chat* "potencializa a socialização *online* quando promove sentimento de pertencimento, vínculos afetivos e interatividade. Mediado ou não, permite discussões temáticas e elaborações colaborativas que estreitam laços e impulsionam a aprendizagem" (Silva, 2005, p. 04). O Diário é um espaço virtual restrito, neste caso aos alunos, professores e pesquisadoras. Nele foram postadas anotações pelos alunos sobre as temáticas discutidas em sala de aula e no *Chat*. O Diário possibilita aos professores e aos alunos estarem em constante processo de análise e reflexão acerca das situações didáticas vivenciadas como também aprofundamento teórico pela reflexão sobre temáticas curriculares. O Diário pode ser um espaço reservado para alunos e professores interagirem, para armazenarem escritos circunstanciados a determinados momentos de aprendizagem, para depositarem dúvidas e esclarecimentos, como também, para a manifestação de evidências do processo de construção conceitual próprio de cada aluno.

Fundamentação teórica

Os dados foram interpretados e analisados à luz de referenciais teóricos na confluência de parâmetros do campo da Metodologia de Ensino com foco na Resolução de Problemas e na utilização de recursos disponíveis em ambientes virtuais no Ensino Presencial. A análise que se deu na interseção destas relações (recursos digitais do AVA Moodle, Educação Presencial e Metodologia de Ensino) com as categorias criadas permitiram responder à questão da investigação. Para a análise das possibilidades de interação ocorridas durante o desenvolvimento das atividades, teve-se embasamento teórico, entre outros, em Thompson (2004) por abordar a questão comunicacional da interação e de argumentar sobre o potencial dialógico nos meios tradicionais, em que parte da interação face a face e contrasta-a com a interação mediada.

O autor elenca três tipos ou formas de interação para explorar os tipos de situação interativa nos meios de comunicação: interação face a face, interação mediada e quase interação mediada. Segundo Thompson (2004, p. 78), "a interação face a face acontece num contexto de co-presença; os participantes estão imediatamente presentes e partilham um mesmo sistema referencial de espaço e de tempo". Observou ele que com o desenvolvimento dos meios de comunicação, a interação se dissociou do ambiente físico e possibilitou aos indivíduos interagir uns com os outros, mesmo não compartilhando do mesmo ambiente espaço-temporal.

O uso dos meios de comunicação propicia novas formas de interação que se estendem no espaço e possivelmente no tempo, oferecendo uma gama de características que as diferenciam das interações face a face. Interessou-nos a análise realizada pelo autor referente à presença ou não da característica interativa dialógica, característica que se faz presente nas interações face a face e que percebemos poder ser estendida às interações mediadas pelo fato de que essas "geralmente implicam ida e volta no fluxo de informação e comunicação; os receptores podem responder (pelo menos em princípio) aos produtores, e estes são também receptores de mensagens que lhe são endereçadas pelos receptores de seus comentários". (Thompson, 2004, p. 78).

Fez-se uso dos estudos de Silva (2010) que sistematizou o mapeamento de especificidades e singularidades de interatividade destacando três binômios de aspectos distintos que combinam e dialogam e que não são independentes: participação-intervenção, bidirecionalidade-hibridação e permutabilidade-potencialidade. O autor enfatiza não tratar-se de estandardização e sim de sistematização do conceito de interatividade por considerar que as características definidoras da interatividade são distintas, complementares e dialógicas. O binômio participação-intervenção agrega a perspectiva tecnológica, sensorial, política e comunicacional. Nela, a participação e a intervenção do receptor são consideradas, o que qualifica a participação do aluno por extrapolar respostas do tipo "sim" ou "não" que, como diz o autor, é muito mais do que escolher opções para respostas. Entendemos que participação com essa natureza está vinculada a um intuito de terminalização de diálogo sem preocupação com construção de conhecimento. Podemos dizer que nesse binômio o aluno não se prevalece do imediatismo da fala circunstancial e pontual característica presente em tantas salas de aula. Diz o autor que participar é interferir, é construir coletivamente a comunicação e, por conseguinte, a aprendizagem. No binômio bidirecionalidade-hibridação a produção é conjunta. Ocorre a fusão dos envolvidos no processo de comunicação, ou seja, a comunicação é produção conjunta dos alunos e do professor. Sem ser o centro do processo comunicacional, promove a circunstância da aprendizagem em que ambos codificam, decodificam, colaboram e cocriam. O binômio permutabilidade-potencialidade se dá pela possibilidade da constituição de redes articulatórias de conhecimento para a construção da comunicação. No processo de aprendizagem, o professor não propõem conteúdos fechados que encerram respostas em si, mas, oferece informações em redes de conexões que permitem ao aluno, como diz o autor, permutar, virtualizar, simular, associar e significar.

Prado e Rosa (2008) mencionam que:

> Na interatividade, a "ação" ganha destaque em sua própria essência conceitual: inter-ação. No hipertexto e nas novas modalidades comunicacionais (*chats*, MSN, Orkut etc.), há uma fusão de papéis e de funções que vão além do ato de troca, possibilitando novas formas de comunicação e, portanto, de participação. (Prado e Rosa, 2008, p. 174).

Utilizando-se de recursos disponíveis em ambientes virtuais observamos que "o presencial se virtualiza e a distância se presencializa" (Moran, 2002). Como corolário, pode-se dizer que o espaço de trocas se estende além da sala de aula – da sala de aula para o virtual.

Moran (2007) destaca que as tecnologias e, acrescentamos os ambientes virtuais de aprendizagem, permitem: captar e exibir determinado objeto de várias formas representando-o através de diversos modos (imagem, áudio, vídeo, etc.) e ângulos; transmitir informações e tarefas; auxiliar no desenvolvimento de habilidades espaço-temporais, sinestésicas, criadoras; mediar o nosso conhecimento do mundo; enfim, são variadas maneiras de representação da realidade, "de forma mais abstrata ou concreta, mais estática ou dinâmica, mais linear ou paralela, mas todas elas, combinadas, integradas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e o desenvolvimento de todas as potencialidades do educando" (Moran, 2007, p.164). Associando tal destaque aos resultados que obtivemos em nossa investigação defendemos que o uso das TIC e de ambientes virtuais de aprendizagem estejam presentes nas instituições de Educação Básica e Superior, contribuindo para que a escola "deixe de ser mera consumidora de informações produzidas alhures e passe a se transformar – cada escola, cada professor e cada criança – em produtores de culturas e conhecimentos" e que cada escola "começa a ser um espaço de produção, ampliação e multiplicação de culturas, apropriando-se das tecnologias". (Pretto e Assis, 2008, p. 81).

Metodologia

Esta foi uma pesquisa qualitativa de natureza exploratório-interpretativa. As questões que conduziram o processo investigativo foram: de que modo os ambientes virtuais podem se constituir em potencializadores de interação auxiliando no processo de ensino e de aprendizagem em cursos presenciais de Licenciatura em Matemática; que interações os alunos de um curso presencial de Licenciatura em Matemática estabelecem com os colegas e com o conhecimento matemático ao fazer uso do *Chat*; em que o uso do Diário pode contribuir para o processo de aprendizagem dos alunos da Licenciatura em Matemática; como o uso do *Chat* e do Diário podem contribuir para o estabelecimento de conexões entre a teoria e a prática sobre a Resolução de Problemas na Licenciatura em Matemática.

Durante a atividade de intervenção no campo de pesquisa para a obtenção dos dados empíricos, tivemos o intuito de possibilitar, em situação de prática, conhecimento sobre a cultura digital com intenção de estar propiciando o desenvolvimento de novas metodologias para o ensino da Matemática com a utilização desses recursos e oportunizar aos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática situações para aprofundamento do conhecimento sobre Resolução de Problemas como possibilidade metodológica, simultaneamente à aprendizagem da utilização de recursos disponíveis em ambientes virtuais no Ensino Presencial.

Atividades de intervenção foram realizadas no espaço presencial e no virtual. No presencial, alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática resolveram problemas com enunciados elaborados pelas pesquisadoras. No virtual mobilizaram conhecimentos específicos da disciplina Metodologia do Ensino de Matemática, relativos ao conteúdo curricular Resolução de Problemas, numa perspectiva de prática pedagógica.

O referencial teórico possibilitou elencar duas categorias de análise. A primeira categoria de análise foi "Interação", que subdivide-se em duas subcategorias – Interação Face a Face (Thompson, 2004) e Interação Mediada (Thompson, 2004; Primo, 2008); a Interação Mediada, subdivide-se em Interação Mútua e Interação Reativa (Primo, 2008). A segunda categoria de análise foi "Mobilização de Conhecimentos" do conteúdo Resolução de Problemas, da disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática.

Os dados empíricos foram obtidos com as seguintes ações: observação in loco dos alunos durante o desenvolvimento de atividades no espaço presencial, gravação em áudio desses momentos, transcrições dos diálogos estabelecidos entre os alunos durante as atividades, análise dos registros escritos durante a atividade desenvolvida no espaço presencial; análise dos registros das atividades desenvolvidas no espaço virtual com a utilização das ferramentas digitais *Chat* e Diário, disponíveis no AVA "O uso de recursos de Ambientes Virtuais de Aprendizagem e a metodologia Resolução de Problemas", hospedado na plataforma Moodle; observação dos alunos nas atividades em grupo, gravação em áudio e transcrições dos diálogos estabelecidos entre os alunos. A estruturação dos dados empíricos obtidos fomentou a criação de categorias de análise, resultantes de circunstâncias que deles emergiram. Os alunos inicialmente resolveram problemas matemáticos em sala de aula; após no espaço virtual com a utilização do recurso *Chat*, discutiram à luz dos referenciais teóricos da disciplina, o processo metodológico de Resolução de Problemas identificando-os em seu processo individual de resolução e refletindo sobre eles; em sala de aula novamente, discutiram as resoluções e aprofundaram as discussões teóricas.

Resultados

Pela análise dos dados foi possível observar indícios de mobilização de conhecimentos através de interações mútuas e a existência de um movimento reflexivo de aprendizagem, tendo em vista que este movimento implicou em tomada de consciência conceitual e trocas de informações entre os pares. Houve a mobilização de conhecimento do conteúdo programático curricular de Resolução de Problemas, todos se envolveram nas atividades, interagiram, mobilizaram conhecimentos e estabeleceram relações entre os diversos autores estudados na disciplina de Metodologia do Ensino, extrapolando a discussão pontual do que estava diretamente relacionado à temática e a um autor determinado.

Durante o proceso interativo nas atividades no C*hat*, observamos que, nas conversas espontâneas sobre o modo como haviam resolvido problemas em sala de aula, os alunos mobilizaram os conteúdos teóricos curriculares da disciplina que já lhes haviam sido ministrados nessa e em outras disciplinas curriculares já cursadas. Com linguagem coloquial nesse proceso interativo, mostraram caminhos próprios de aprendizagem delineados pela mobilização de tais conteúdos, que foram adquirindo significado à medida que os diálogos foram ocorrendo. Observamos que a atividade no *Chat* possibilitou a ocorrência da desejada relação didática teoria e prática, quando relacionaram conteúdos teóricos curriculares da disciplina com a própria atividade de resolução de problemas em sala de aula.

Observamos que as formas de utilização das TIC podem ser reveladoras de práticas pedagógicas e incentivo para a colaboração entre pares. A integração dos recursos disponíveis em ambientes virtuais no ensino presencial potencializou a comunicação e a interação entre aluno-aluno e professor-aluno e prolongou os processos de aprendizagem além do espaço e do tempo das aulas, dando a ideia de uma "sala de aula expandida", ou seja, a sala de aula tomou uma nova conformação em que transcende o pré determinado pelas amarras das instituições educativas.

Conclusões

A análise dos dados empíricos mostrou que os recursos disponíveis no AVA Moodle, *Chat* e Diário, são potencializadores de práticas pedagógicas que auxiliam no processo de ensino e de aprendizagem em cursos presenciais de Licenciatura em Matemática. Devido às ocorrências da característica interativa dialógica (Thompson, 2004) e de interações mútuas (Primo, 2008), os sujeitos da pesquisa conseguiram chegar a uma solução, independente de estar correta ou não, para os problemas propostos na atividade desenvolvida no espaço presencial. Essa mesma afirmação pode ser feita em relação às atividades desenvolvidas no espaço virtual utilizando-se do *Chat* e do Diário. O espaço virtual permitiu "ouvir" detalhadamente cada um dos alunos, observar e analisar de forma contínua e minuciosa suas aprendizagens, seus progressos na aquisição e sistematização dos conhecimentos, situação que no espaço presencial torna-se difícil de conseguir devido a sua dinâmica pré determinada e engessada.

Moran (2007) destaca, em função de seus estudos, que as tecnologias permitem muito mais do que a simples e imediata transmissão de informações e os resultados advindos da análise e interpretação dos dados empíricos da nossa pesquisa, nos permite acrescentar nesse contexto os ambientes virtuais de aprendizagem. Observamos que permitem a mediação do conhecimento com o mundo e a representação da realidade de diferentes modos e ângulos, fato este componente de uma perspectiva pedagógica que segundo Guérios (2002) tem no sujeito que aprende a âncora do próprio processo de aprendizagem.

Os resultados obtidos nos estimulam a defender a integração de recursos de ambientes virtuais de aprendizagem em Cursos de Licenciatura na modalidade presencial como instrumento metodológico com possibilidade formativa. Como instrumento metodológico por permitir o desenvolvimento de práticas didáticas ancoradas no processo investigativo para o aprender, como também, pela ocorrência de autônoma e singular mobilização de conhecimentos curriculares nitidamente construtiva motivada pelo processo interativo interpares e entre alunos e professores. Com possibilidade formativa pelo poder educacional transformador inerente ao professor que esteja disposto, como afirma Kenski (2003), a "assumir novas perspectivas filosóficas, que contemplem visões inovadoras de ensino e de escola, aproveitando-se das amplas possibilidades comunicativas e informativas das novas tecnologias, para a concretização de um ensino crítico e transformador de qualidade". (Kenski, 2003, p.73).

Em função da vivência das pesquisadoras no contexto da pesquisa, obsevamos, e concordamos com Penteado (2001), que professores e alunos tenderão a sair de uma zona de conforto, caracterizada pela previsibilidade e o controle da situação, e ir para a zona de risco em alguns momentos, na qual uma avaliação constante das ações propostas no processo de ensino e de aprendizagem se faz necessária. E nesse sentido, conforme Guérios (2002), professores considerarão como parte constitutiva do processo pedagógico as situações não previstas e controladas "que surgem nos meandros entre o conhecido e o desconhecido e entre o previsível e o imponderável" (Guérios, 2002, p.xvii).

Em face do exposto, postulamos que espaço presencial mais espaço virtual pode ser igual à potencialização do processo de ensino e de aprendizagem. Essa integração visando a dinamização da aprendizagem, a interação e a comunicação entre alunos e entre professor e alunos numa perspectiva dialógica, colaborativa e cooperativa pode ser incorporada como ferramenta didático-metodológica pelos cursos de Licenciatura na modalidade presencial.

Referências bibliográficas

Almeida, M. E. B. de. (2003). Educação a Distância na Internet: abordagens e contribuições dos ambientes digitais de aprendizagem. *Revista Educação e Pesquisa*. 29(2), 327-340.

Guérios, E. (2002). *"Espaços oficiais e intersticiais da formação docente: história de um grupo de professores na área de ciências e Matemática"*. Campinas: Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Campinas.

Kenski, V. M. (2003). *Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância.* Campinas, SP: Papirus. (Série Prática Pedagógica).

Moran, J. M. (2002). *Pedagogia integradora do presencial-virtual.* Recuperado em 30 de setembro de 2012 de http://www.abed.org.br/congresso2002/trabalhos/texto50.htm.

Moran, J. M. (2007). *As mídias na educação.* Texto extraído do livro Desafios na Comunicação Pessoal, (pp. 162-166). 3 ed. São Paulo: Paulinas. Recuperado em 30 de setembro de 2012 de http://www.eca.usp.br/moran/midias_educ.htm.

Penteado, M. G. (2001). Possibilidades para a formação de professores de matemática. In: Penteado, M.G. *Computer-based learning environments: risks and uncertainties for teacher. Ways of knowing Journal, 1 (2)*. p.23–35.

Prado, E. C. do, Rosa, A. C. S. da. (2008). A interatividade na educação a distância: avanços e desafios. *Eccos: revista científica.* 10(1), 169-187.

Pretto, N. de L., Assis, A. (2008). Cultura digital e educação: redes já! In: Pretto, N. de L., Silveira, S. A. da. (Orgs.) *Além das redes de colaboração: internet, diversidade cultural e tecnologias do poder.* (p. 75-83). Salvador: EDUFBA.

Primo, A. (2008) *Interação mediada por computador: comunicação, cibercultura, cognição.* 2 ed. Porto Alegre: Sulina.

Schlemmer, E. (2002). *"AVA: Um Ambiente de Convivência Interacionista Sistêmico para Comunidades Virtuais na Cultura da Aprendizagem*". Porto Alegre: Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Silva, M. (2005). *Internet na escola e inclusão.* In: Integração das Tecnologias na Educação/Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, Seed.

Silva, M. (2010). *Sala de aula interativa: educação, comunicação, mídia clássica.* 5.ed. São Paulo: Edições Loyola.

Thompson, J.B. (2004). *A mídia e a modernidade: uma teoria social da mídia.* Tradução de Wagner de Oliveira Brandão. 6 ed. Petrópolis: Vozes.

A LOUSA DIGITAL E O USO DO MAPLE NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: POTENCIALIDADES MEDIATIVAS

Carmen Teresa Kaiber, Rodrigo Dalla Vecchia
Universidade Luterana do Brasil- ULBRA Brasil
kaiber@ulbra.br, rodrigovecchia@gmail.com

Resumo. As potencialidades das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) para com o processo de ensino e a aprendizagem da Matemática é uma linha de investigação que vem se consolidando dentro do campo da Educação Matemática. Nesse universo é de nosso interesse investigar a relação entre a lousa digital e o uso do *software* Maple no estudo do Cálculo Diferencial e Integral. O trabalho apresentado visa investigar como o ambiente informático constituído pela presença da lousa digital pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e da Matemática Aplicada no Ensino Superior. No contexto do referido projeto lançamos nosso olhar investigativo tanto ao desenvolvimento de atividades quanto à aplicação das mesmas.

Palavras chave: lousa digital, maple, cálculo integral

Abstract. Potentialities of the Information and Communication Technologies (ICT) in the Mathematics teaching and learning process are today a consolidated line of research in the field of Mathematics education. In this universe we are interested in investigating the relationship between the digital blackboard and the Maple software in the study of Differential and Integral Calculus. This study designed to investigate how the digital environment, as the digital blackboard, may contribute to the teaching and learning process of Differential and Integral Calculus and of Applied Mathematics in universities. Both the development of activities and the way these are put in practice were investigated.

Key words: digital blackboard, maple, integral calculus

Introdução

A investigação acerca das potencialidades das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) para com o processo de ensino e a aprendizagem da Matemática é uma linha de pesquisa que vem se consolidando no campo da Educação Matemática. É de nosso interesse, nesse universo, focar o uso da relação entre a Lousa Digital e o uso do *software* Maple no estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

No que diz respeito ao uso da lousa digital, autores como Kennewell (2001), Marquès-Graells (2005) e Goodison (2002), revelam, por meio de suas pesquisas, que a lousa digital pode proporcionar um ambiente que reúne vídeos, *softwares*, recursos computacionais específicos, além de todas as funcionalidades de uma lousa convencional, contribuindo para aspectos referentes ao processo de ensino e aprendizagem.

No que se refere ao uso do *software* Maple pesquisas como as de Kaiber e Renz (2005, 2006), Taneja (1997) apontam a utilização da tecnologia como ferramenta para desenvolver aspectos teóricos e práticos do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, em uma perspectiva que considere a tecnologia como "[...] uma informatização construcionista que permita reflexão e construção de ideias a partir da relação professor, aluno, computador" (Taneja, 1997, p.14).

Apesar de ambos os assuntos (lousa digital e Maple) já serem investigados, entendemos que o entrelaçamento entre os mesmo pode gerar situações potencialmente distintas. É nesse sentido que iniciamos em 2010 a pesquisa que visava compreender como o ambiente informático constituído pela presença da lousa digital pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e da Matemática Aplicada no Ensino Superior. Com base nesse questionamento procuramos lançar nosso olhar investigativo tanto ao desenvolvimento de atividades quanto à aplicação das mesmas. Este artigo, portanto, é um recorte consequente dessa investigação e apresenta algumas particularidades encontradas ao longo das aplicações que envolveram o uso da lousa digital como mediadora na utilização do software Maple.

As atividades que serão apresentadas foram aplicadas em alunos do curso de Licenciatura em Matemática e engenharias da Universidade Luterana do Brasil no ano de 2011 e início de 2012.

Referencial teórico

Nessa seção serão apresentados, de forma sucinta, os aspectos teórico-filosóficos que nortearão a investigação na busca por respostas às indagações e objetivos propostos. Em um primeiro momento, serão abordadas as argumentações acerca do virtual, do atual e da virtualização sob um ponto de vista filosófico baseados em Lévy (1996) e Deleuze (1988). Esses elementos abrem caminho para uma compreensão da dinâmica da realidade bem como da transformação da percepção do problema. Ainda sob o ponto de vista filosófico, será assumida a concepção de realidade no mundo cibernético e discutidas as características específicas dessa realidade, na ótica de Bicudo e Rosa (2010).

Para encaminhar discussões acerca do processo de construção das atividades e situações problemáticas – abrangendo assim objetivos específicos – serão consideradas as concepções de Design Instrucional, dadas por Filatro (2008) e de Construcionismo defendidas por Papert (1994) e Maltempi (2005). Para dar uma direção ao processo de construção, tendo em vista gerar atividades que possam ser caracterizadas como *cenários de investigação*, serão ainda usadas as concepções dadas por Skovsmose (2000, 2006).

Inicia-se apresentando a concepção de virtual assumida. Para o propósito dessa pesquisa, o virtual será entendido dentro da filosofia escolástica, como algo que existe em potência e não em ato. De forma mais precisa, o virtual é tido como "[...] um complexo problemático, o nó de tendências ou de forças que acompanha uma situação, um acontecimento, um objeto ou uma entidade qualquer" (Lévy,1996, p. 16).

Como consequência direta dessa posição, tem-se que o virtual está sempre contido na entidade, fazendo parte dela, ao mesmo tempo em que a constitui. Este caráter dialético de conformidade entre a natureza dos elementos que compõe a entidade é evidenciado por Lévy, o qual assume uma relação íntima entre a constituição da entidade e a produção de suas virtualidades:

> Por um lado, a entidade carrega e produz suas virtualidades: um acontecimento, por exemplo, reorganiza uma problemática anterior e é suscetível de receber interpretações variadas. Por outro lado, o virtual constitui a entidade: as virtualidades inerentes a um ser, sua problemática, o nó de tensões, de coerções e de projetos que o animam, as questões que o movem, são uma parte essencial de sua determinação (Lévy,1996, p. 16).

Outro elemento considerado importante é a virtualização. Entretanto, para que sua natureza seja compreendida de forma adequada, é necessário que se aborde, primeiramente, as idéias de atual e atualização.

Como apontado anteriormente, o virtual está associado a um complexo problemático. O processo de resolução desse complexo desse complexo é denotado pela filosofia como sendo a *atualização* (Deleuze, 1988). Nesse sentido, Lévy (1996, p. 16) revela que a atualização "[...] aparece então como a solução de um problema, uma solução que não estava previamente contida no enunciado. A atualização é criação, invenção de uma forma a partir da configuração dinâmicas de forças e finalidades".

Tendo em mente a idéia de virtual e de atual, pode-se falar de virtualização. A virtualização pode ser entendida como movimento inverso da atualização, isto é, uma passagem do atual ao virtual, ou uma "elevação à potência da entidade considerada" (Lévy, 1996, p. 17). Para esse autor, a virtualização é o

> [...] deslocamento do centro de gravidade ontológico do objeto considerado: em vez de se definir principalmente por sua atualidade (uma "solução"), a entidade passa a encontrar sua consistência essencial num campo problemático. Virtualizar uma entidade qualquer consiste em descobrir uma questão geral à qual ela se relaciona, em fazer mutar a entidade em direção a essa interrogação e em redefinir a atualidade de partida como resposta a uma questão particular. (Lévy, 1996, p. 17-18)

Ao enfatizar estes elementos, pretende-se sair do contexto coloquial que o virtual é posto, confundindo-o, muitas vezes, com o espaço criado pelas tecnologias. Apesar da relação entre eles ser íntima, há a necessidade de uma distinção. Entende-se o virtual, portanto, não como o espaço criado por um *software*, ou especificamente, pela lousa digital, mas sim o ambiente problemático criado em torno de uma situação problemática ou atividade proposta. Salienta-se dessa colocação e das citações anteriormente explicitadas o elemento "problemático". Está nele a essência daquilo que se assume na presente pesquisa por virtual e virtualização. Não se deve confundir aqui a simples presença de um software, de um computador, de uma calculadora, da lousa digital ou passagem de uma tecnologia à outra com a virtualização. Há a necessidade de se criar um campo problemático, elevando a entidade ou situação analisada a este campo.

Fica evidente, com essas colocações, que o que se entende por virtualização não está necessariamente relacionado com a presença de tecnologias digitais. Entretanto, como já evidenciado, a relação entre estes elementos é estreita. Dentre os aspectos que associam o virtual ao espaço dado pelas tecnologias destaca-se, neste artigo, a mudança de perspectiva que a realidade virtual pode proporcionar que se associa diretamente às percepções de tempo e espaço, como visto na visão de Bicudo e Rosa (2010, p.5). Para os autores a realidade do mundo cibernético

> [...] pode, então, ser compreendida como um modo de viver a vida na dimensão do humano, como ela é, mesmo que as relações presentificadas nessa dimensão da realidade se dêem em um espaço mundano que deve ser caracterizado em termos do espaço/tempo possibilitado pelas tecnologias.

Defende-se aqui que na transformação da percepção de tempo e espaço que as tecnologias podem oferecer que está uma das principais potencialidades das tecnologias como vetores de virtualização, isto é, como elementos que podem elevar a entidade a um estado problemático, possibilitando que novas perspectivas possam surgir. Com base nessas idéias, serão focados nesta investigação os momentos em que a entidade foi posta em um estado problemático e modificou-se, permitindo a construção de conjecturas e a construção do conhecimento matemático, mostrando assim possíveis contribuições do ambiente informático constituído pela presença da lousa digital para o estudo Cálculo Diferencial e Integral e da Matemática Aplicada.

Metodologia

A metodologia utilizada na realização da investigação assume um caráter qualitativo. Na abordagem qualitativa, conforme Santos Filho e Gamboa (2000), Goldemberg (2005) e Lincoln e Guba (1985) o propósito fundamental é a compreensão, a explanação e a interpretação do fenômeno estudado, visando uma interlocução coerente entre pesquisadores, pesquisa e pesquisado.

Os sujeitos da pesquisa foram os alunos do curso de Licenciatura em Matemática e engenharias da Universidade Luterana do Brasil e as atividades foram aplicadas ao longo do primeiro e segundo semestres do ano de 2011 e no início de 2012. A coleta de dados deu-se por meio de filmagens e entrevistas. Além disso, as observações serão complementadas com um diário de campo, entrevistas e análise de documentos que, no caso específico, referem-se à produção dos estudantes. Os dados oriundos das diversas fontes serão articulados e analisados mediante o processo conhecido como triangulação de dados, bastante conhecido na literatura (Goldemberg, 2005; Alves-Mazzotti & Gewandsznajder, 1998; Lincoln & Guba, 1985).

As Atividades

As atividades trabalhadas envolveram, principalmente, os recursos visuais do Maple, aliados à interação que a Lousa permite para com os gráficos gerados. A Figura 1 mostra um exemplo do trabalho feito com integrais duplas. Tendo, nesse caso, um objetivo pedagógico relacionado à compreensão dos aspectos geométricos que envolvem a integral $\int_0^1\int_{x^2}^{x}(x^2+2xy)\,dydx$, foi construído com o auxílio do Maple o gráfico da função $f(x,y)=x^2+2xy$, quando $0\le x\le 1$ e $x^2\le y\le x$.

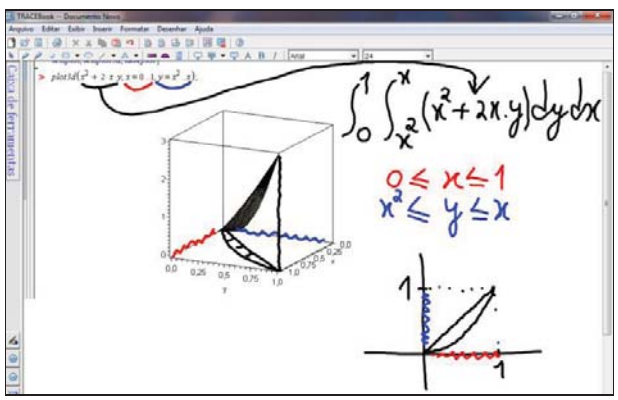


Figura 1: Interação entre o Maple e a Lousa Digital em Integrais Duplas.

Destaca-se, no caso apresentado, dois aspectos diferenciais. O primeiro diz respeito à visualização da função $f(x,y)=x^2+2xy$, que em termos de utilização somente do quadro negro, seria de difícil construção. Desse modo, há um ganho qualitativo na utilização do software Maple. O segundo diferencial é que o uso da lousa digital permite ações distintas com o software, possibilitando ao professor uma interação com os aspectos gráficos construídos do mesmo modo que normalmente utiliza quadro e giz (ou quadro e caneta). De modo similar, foram trabalhados os conteúdos relacionados à Campos Vetoriais (Figura 2) e Integrais de Linha.

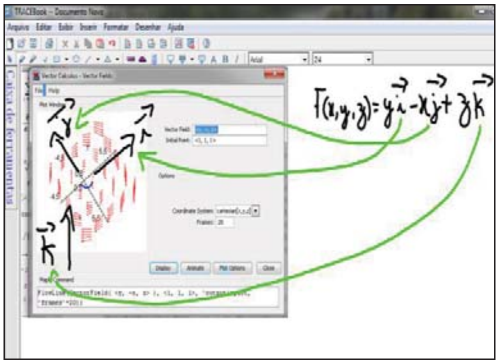


Figura 2: Interação entre o Maple e a Lousa Digital em Campos Vetoriais.

Ao analisar a Figura 2, é possível observar que no estudo de Campos Vetoriais em três dimensões, houve uma interação entre o software e a lousa de modo a se complementarem. De um lado tem-se a imagem dinâmica dada pelo Maple, que permite uma visualização em vários ângulos e, de outro, há o acréscimo da escrita feita pelo professor que complementa as informações que não foram disponibilizadas pelo software.

Resultados parciais

Como resultados parciais da pesquisa, tem-se que a lousa digital, além de mediar o uso do software Maple, possibilitando o uso de seus recursos visuais, permite uma interação distinta daquela entre aluno/professor e computador. Há, de fato, uma espécie de simbiose entre quadro e recurso, que possibilita ao professor trabalhar simultaneamente com todos os recursos que o software possui, fazendo as interações que o quadro virtual permite, tais como escrita, desenho e zoom. Há desse modo, a construção de um ambiente que não é o quadro negro normal nem o software, criando um ambiente virtual, onde a problemática que envolve a situação investigada adquire nova configuração, atualizando-se na medida do próprio fazer de modo a contemplar as potencialidades integradas de software e quadro.

Referências bibliográficas

Alves-Mazzoti, A. J. (1999). O Método nas Ciências Sociais. En A. J. Alves-Mazzoti; F. Gewandsznajder. *O Método nas Ciências Naturais* e *Sociais*: *Pesquisa Quantitativa* e *Qualitativa* (pp.99-197) 2. São Paulo: Pioneira.

Bicudo, M. A.V. e Rosa, M. (2010). Educação Matemática na Realidade do Ciberespaço- Que Aspectos Ontológicos e Científicos se Apresentam. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matematica Educativa*, *13* (1), 1- 30.

Deleuze, G. (1988). *Diferença e Repetição*. Rio de janeiro: Graal.

Filatro, A. (2008). *Design Instrucional na prática*. São Paulo: Pearson Education do Brasil.

Goodison, T. A. M. (2002). Learning with ICT at primary level: pupils' perceptions. *Journal of Computer Assisted Learning 18*, 282–295.

Kaiber, C. T., Renz, S. P. (2006). O uso do software Maple no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 906-911. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Kennewell, S. (2001). Interactive whiteboards - yet another solution looking for a problem to solve? *Information Technology in Teacher Education*, 39, 3–6.

Lévy, P. (1996). *O que é o virtual*. São Paulo: Editora 34.

Lincoln, Y. e Guba, E. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Califórnia: Sage Publications.

Maltempi, M. V. (2005). Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à educação matemática. En Bicudo, M. A. V. e Borba, M. C. (Org.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez editora.

Marquès-Graells, P. (2005). *Catálogo de modelos de uso didáctico de las TIC: propuestas de uso*. Página web de Tecnología Educativa. Acessado em 11 de maio de 2012 de http://dewey.uab.es/pmarques/siyedu.htm#modelos

Papert, S. (1994). *A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era da Informática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Santos Filho, J. C. O. e Gamboa, S. (2000). *Pesquisa Educacional: quantidade-qualidade*. São Paulo: Cortez.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para Investigação. *Boletim de Educação Matemática*, 13 (14), 66-91.

Skovsmose, O. (2006). *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia*. 3. Campinas, SP: Papirus.

Taneja, I. (1997). *MAPLE V Uma Abordagem Computacional no Ensino de Cálculo*. Florianópolis: Editora da UFSC.

ASPECTOS SEMIÓTICOS DAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS. MEDIADAS PELO WINPLOT

Mª Margarete do R. Farias, Rosana Giaretta S. Miskulin
DCET/UESC. Brasil
IGCE/UNESP
margarete333@hotmail.com, misk@rc.unesp.br

Resumo. O presente artigo parte de uma pesquisa de Mestrado, apresenta uma atividade investigativa intitulada: "O Ponto ótimo da Latinha de Refrigerante", a qual destaca a mobilização entre as várias representações matemáticas quando fazemos uso de recursos computacionais. Essa atividade foi aplicada em uma turma do primeiro ano de CDI - Cálculo Diferencial e Integral do curso de Matemática da UNESP de Rio Claro/Brasil. A metodologia adotada prima o aspecto qualitativo com ênfase na observação participante e, tem como objetivo perceber as estratégias utilizadas pelos alunos de Matemática, na resolução do problema envolvendo limites e derivadas de funções. A análise tendo como base os dados coletados aponta que por meio de um processo semiótico tornou-se possível gerar novas formas de representação e que a cognição e o efeito transformador dos signos sobre o ensino podem conduzir os alunos a um processo de pensamento mais generalizado sobre a atividade matemática.

Palavras chave: semiótica, softwares matemáticos, representações matemáticas

Abstract. The present article, part of a Master's research project, describes an inquiry activity titled "The Optimal Point of Soda Can", which emphasizes the connections among multiple mathematical representations emerging From the use of computer resources. This activity was applied with a class of first year university students in a Differential and Integral Calculus course at UNESP, Rio Claro / Brazil. The methodology used was qualitative with emphasis an participant observation and sought to uncover and understand the strategies used by mathematics in solving problems involving limits and derivatives of functions. The analysis of the data shows that through a semiotic process it was possible to generate new representations and that cognition and the transformative effects of the teaching of signs can guide students to a more general thought process for mathematical activities.

Key words: semiotics, mathematical software, mathematical representations

Introdução

O caminhar da pesquisa

Nesse artigo apresentamos o excerto de uma pesquisa de mestrado no qual é ressaltada a relevância de transitar entre várias representações matemática em uma perspectiva semiótica, tendo como base o referencial teórico da Semiótica de Charles Sanders Peirce. Nesse contexto, é destacada a análise de uma atividade proposta aos sujeitos da pesquisa, intitulada: "O ponto ótimo da latinha de refrigerante", evidenciando a forma de construção dos gráficos mediante a linguagem do ambiente computacional Winplot.

No que se seguem em relação ao uso da tecnologia no trato das representações matemáticas, autores assinalam que com a possibilidade do uso de calculadoras gráficas e dos computadores, o uso de múltiplas representações, tem sido intensivamente discutido, especialmente para o ensino de funções. Borba e Villarreal (2005), Borba e Confrey (1996) têm também destacado a importância dessa abordagem que privilegia a mudança de uma representação matemática à outra, ou seja, visa contemplar em uma atividade ou em um dado problema a coordenação entre essas várias representações que podem ser esquematizadas em forma de tabelas, gráficos, representações geométricas, expressões algébricas entre outras. Além do que qualquer atividade mediada pelo computador é uma atividade sígnica, que pode expressar um signo. Nesse sentido, Miskulin (1999), assinala que, "a representação desempenha uma função extremamente importante" (p. 289), enfatizando que, toda representação possui um caráter semiótico e um caráter instrumental, onde a semioticidade pode ser percebida, por exemplo, nos desenhos, gráficos, gestos, discursos e palavras. E, a dimensão instrumental da representação está relacionada aos objetivos, formas do sujeito expressar o conceito matemático por meio dos signos que carrega nele próprio o significado conceitual matemático.

Uma breve apresentação sobre semiótica

Peirce (1975), a partir de uma complexa relação entre a noção de experiência e a doutrina que compõe toda a estrutura do pensamento concluiu que tudo que aparece à consciência assim o faz em uma gradação de três propriedades: Primeiridade, Secundidade e Terceiridade onde o terceiro pressupõe o segundo e o primeiro. O segundo pressupõe o primeiro e o primeiro é livre e qualquer relação superior a três passa a corresponder a uma complexidade dessa tríade.

Por primeiridade, Peirce (1975), classificou por impressão total, não analisada, provocada por qualquer multiplicidade, não vista como fato concreto, mas simplesmente como uma qualidade, mera possibilidade positiva de surgimento, ou seja, aquilo que é sem referência a mais nada, como vaga impressão de algo.

A secundidade é entendida como a experiência, a energia dispensada sobre um objetivo ou uma ideia em particular. A terceiridade implica em generalidade, continuidade, mas, a mais elementar ideia de terceiridade é aquela de um signo ou representação. Em outras palavras, a terceiridade é uma relação tríadíca, existente entre o signo (representamen), o objeto e o pensamento interpretante, ou seja, um signo coloca um segundo - seu objeto em relação cognitiva para com um terceiro - o interpretante. Veja abaixo de maneira figurativa como se estabelece essa relação. (Figura 1).

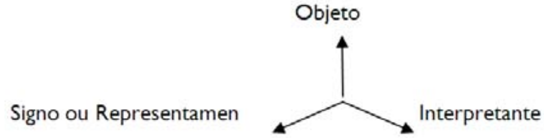


Figura 1: a relação triádica do signo

Peirce (1975) configura a palavra signo em uma acepção ampla. Pode ser um individuo, uma palavra, uma ação, um pensamento ou qualquer coisa que admita um interpretante. A partir de um interpretante, e por causa dele, torna-se possível um signo.

Vale, portanto esclarecer que um signo só pode fazer sentido como tal se traz o poder de representar alguma coisa diferente dele. Um signo não é um objeto, ele apenas está no lugar do objeto, fazendo referência ao objeto, de maneira que ele só pode representar esse objeto de um certo modo e em uma certa capacidade. Por exemplo, no contexto matemático, a aparência gráfica da palavra função, a representação algébrica da função, são todos signos do objeto matemático função.

De forma mais sistemática existem 10 divisões triádicas (não nos adentraremos em maiores detalhes nessas classificações). E dentre essas tricotomias há três mais gerais, a saber: a relação do signo consigo mesmo, a relação do signo com seu objeto e a relação do signo com seu interpretante. Desta maneira, é importante que mantenhamos na mente a leitura dos elementos da Figura 1, associados às categorias fenomenológicas de primeiridade, secundidade e terceiridade. As três subcategorias básicas, a partir dessa nova proposição triádica, Peirce (1975) concebe que todo signo em si próprio pode ser: 1) Mera qualidade; 2) Existência Concreta e 3) Lei geral.

Na relação do signo consigo mesmo temos: Quali-Signo é todo signo que é uma qualidade. Semanticamente, um determinante. Por exemplo, a imagem de um gráfico como determinante da informação de dados ou valores numéricos. Sin-Signo é todo o signo que é uma coisa existente, concreta. Em princípio, envolve vários determinantes. Legi-Signo é uma lei, uma convenção. O gráfico por sua vez pode ser representado por uma lei geral, por exemplo, o gráfico da função afim representado pela lei: $y = f(x) = ax + b$, onde $a, b \in R$ e $a \neq 0$.

Na relação do signo com o objeto, essa pode ser concebida como objeto imediato e objeto dinâmico. Para a compreensão desses conceitos abstratos, consideremos a apresentação do traçado de uma reta na tela do computador. Essa figura configura-se no objeto imediato, a aparência com a qual o signo faz referência ao seu objeto, de modo que o objeto imediato é a imagem da reta. O objeto dinâmico é o que essa imagem pode sugerir, por exemplo, uma função do primeiro grau. Nesse sentido, três são as palavras imprescindíveis na relação entre o objeto imediato e o objeto dinâmico: representa, indica e sugere, pois, segundo Santaella (2002), vai depender novamente da natureza do fundamento do signo. Se for uma qualidade, o objeto imediato só poderá evocar (ícone), sugerir seu objeto dinâmico. Se for um existente (indicial), indica seu objeto dinâmico e se for uma lei (simbólico), o objeto imediato de um símbolo representa seu objeto dinâmico.

> O objeto imediato do ícone é o modo como sua qualidade pode sugerir ou evocar outras qualidades. O objeto imediato do índice é o modo particular pelo qual o signo indica o seu objeto. O objeto imediato do símbolo é o modo como o símbolo representa o objeto dinâmico. Enquanto o ícone sugere através de associações por semelhança e o índice através de conexão de fato, existencial,o símbolo representa através de uma lei [...] Enfim, o objeto dinâmico de um símbolo, especialmente quando o símbolo é um conceito, se perde de vista. (Santaella, 2002, p.20).

A relação do signo com o interpretante se constitui no "efeito interpretativo que o signo produz em uma mente real ou meramente potencial" (Santaella, 2002, p.23). É importante enfatizar que o interpretante nem sempre é uma pessoa, constitui-se, portanto, em algo mais geral. Sendo assim, o interpretante pode ser imediato, revelando o potencial interpretativo do signo, mesmo sem mediação de um intérprete. "É algo que pertence ao signo na sua objetividade" (Santaella, 2004, p.24). Uma representação matemática seja ela em que forma se apresente, gráfica, algébrica, geométrica, etc., tem um potencial a ser interpretado, uma ideia. O interpretante também pode ser caracterizado por sua dinamicidade, O interpretante dinâmico é o efeito realmente produzido pela ação do signo, ou seja, a atualização de uma das possibilidades latentes do interpretante imediato. Quando o interpretante imediato é uma possibilidade, o interpretante dinâmico também o será necessariamente. Se o interpretante imediato for um existente, o interpretante dinâmico poderá ter a natureza de uma qualidade ou reação, como uma resposta espontânea a um estímulo. Somente quando o interpretante imediato for uma terceiridade, ou seja, quando ele se apresentar como interpretabilidade fundamentada, o interpretante dinâmico poderá ser, além das duas possibilidades anteriores, também uma forma comportamental, ou maneira de interpretar efetivamente um signo para atingir um propósito desejado, que será o interpretante final do signo. A terceiridade no interpretante dinâmico é a primeira manifestação de um comportamento inteligente, pois indica a presença de um propósito ou intencionalidade, guiando as ações do Intérprete do signo.

Nesse contexto entendemos que as palavras para significarem algo têm que necessariamente estarem conectadas com outras palavras, isto é, para compreendermos um dado pensamento precisamos interpretá-lo com outro pensamento, uma representação em outra representação, onde o signo faz o papel de mediador, pois de um lado representa o que é externo a ele, o seu objeto, e do outro lado dirige-se a alguém, o interpretante que, por sua vez processará a mensagem advinda do signo. O que significa que, elementos da terceiridade implicam em um processo de conhecimento, pois estabelecem um pensamento, compõem uma intercessão entre o estado de primeiridade e secundidade. De acordo Peirce (1975), não é possível a terceiridade sem que a primeira e a segunda estejam presentes, de maneira que esse entrelaçamento de experiências é uma relação fundamental para a compreensão do pensamento. A partir dessas considerações o signo só pode fazer sentido se traz o poder de representar alguma coisa diferente dele, o que nos faz acreditar que se torna bastante proveitoso, para o ensino da matemática, compreender seus conceitos utilizando múltiplas representações matemáticas.

Metodologia: apresentação dos dados coletados

A metodologia de pesquisa primou a abordagem qualitativa, com ênfase na observação participante. Os procedimentos metodológicos da coleta de dados podem ser descritos em três momentos distintos, porém inter-relacionados: observação em sala de aula, interação com os sujeitos da pesquisa (professores e alunos de CDI) por meio de entrevistas registradas em áudio e aplicações das atividades exploratório-investigativas mediadas por softwares matemáticos. Como já dito anteriormente, nesse artigo vamos destacar a análise de uma atividade intitulada "O ponto ótimo de uma latinha de refrigerantes".

Essa atividade foi aplicada no laboratório de informática da UNESP de Rio Claro, compreendendo conteúdos da disciplina Cálculo I: Limites e Derivadas de funções, a qual propunha determinar as dimensões de uma lata de refrigerantes de 111,5p cm^3 construída com a menor quantidade possível de metal, tendo como objetivos investigar a capacidade de justificação do aluno; Analisar as representações matemáticas utilizadas pelos estudantes, quais caminhos abordados e quais as estratégias para resolver os problemas; Analisar o conhecimento matemático do aluno; Analisar a capacidade de generalização do aluno frente o desenvolvimento e investigação dos problemas.

Tal problema de otimização mostrou envolver assuntos de geometria espacial, limite e derivada de funções. Os encaminhamentos para a abordagem das representações algébrica, gráfica e geométrica por meio do software Winplot obedeceram aos seguintes passos: Interação da pesquisadora com os estudantes de modo a propiciar um ambiente investigativo e concepção de um modelo matemático que pudesse motivar os estudantes a encontrar possível ou possíveis soluções para o problema.

Discussão e análise dos dados

Mediante a atividade desenvolvida e tendo como base as categorias de primeiridade, secundidade e terceiridade, podemos inferir, que a qualidade visual do cilindro, vide Figura 2, corresponde em um primeiro momento - forma sígnica icônica, uma primeiridade e, em um segundo momento, um indicativo para a definição do modelo matemático - a função custo.

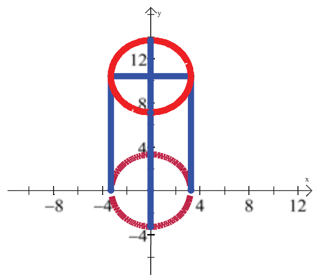


Figura 2: o cilindro

A partir dessa primeira apreensão, por meio da interação e discussões geradas pelos participantes e a pesquisadora, no contexto do desenvolvimento da atividade e pelas inferências e hipóteses levantadas pelos estudantes, estratégias foram discutidas para solucionar o problema apresentado, novas informações ocorreram, permitindo aos estudantes avançarem e elaborar os seus raciocínios de maneira mais significativa, percebendo, por conseguinte, como a qualidade dos signos era manifestada nas diferentes representações das figuras, isto é, como a figura do cilindro, os traços dos gráficos das funções apresentadas se relacionavam com os dados da atividade proposta – existia "uma certa tradução" dos dados da atividade para a sua representação. Nesse ponto, temos então a secundidade.

Em um terceiro momento, quando os alunos começaram a relacionar os conceitos de derivada da função custo com o fato de igualar sua representação algébrica a zero para determinar os pontos críticos, compreenderam que deveriam encontrar também a segunda derivada da função área para investigar se o ponto era de máximo ou de mínimo. Esse foi um movimento importante, pois permitiu aos estudantes relacionar os diversos conceitos matemáticos trabalhados através da visualização e da dinamicidade do software Winplot. Além disso, ao confirmarem as suas conjecturas iniciais perceberam as diversas relações matemáticas que puderam ser extraídas e estabelecidas à partir das diferentes representações algébrica, gráficas e geométricas (estática e dinâmica). Vide Figura 3.

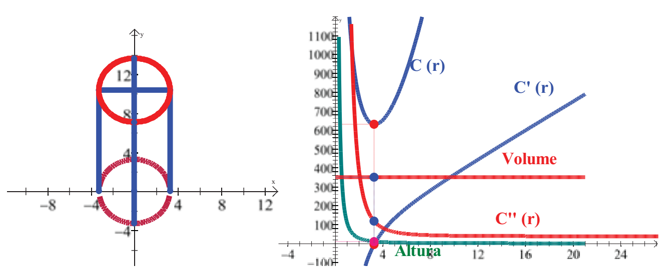


Figura 3: cilindro × representação algébrica das funções custo, 1ª e 2ª derivadas

Essa abordagem foi importante, pois os estudantes tiveram a oportunidade de perceber que quando a função Custo atingia seu menor valor, simultaneamente, o cilindro configurava-se na forma ideal, ou seja, expressando as dimensões de menor quantidade para o metal necessário na construção da latinha de cerveja, considerando obviamente os dados apresentados no problema. Nesse momento podemos considerar que os alunos atingiram um nível mais elevado de raciocínio matemático possibilitando aos mesmos a capacidade de abstrair e generalizar os conceitos estudados para outros contextos. Nesse ponto, temos então, na análise Semiótica, a terceridade.

Considerações finais

A matemática é de fato fundamentalmente representativa e o conceito de representação constitui-se em peça chave da semiótica. De acordo Santaella (2002), na semiótica geral o conceito de representação possui definições variadas tais como; signo, apresentação, imaginação, entre outros. No modelo signíco de Peirce (1975) o signo está diretamente associado à representação compondo uma relação entre o objeto e um intérprete de um signo ou ainda uma apresentação entre o signo e o objeto, ou seja, o signo veicula uma relação entre o objeto e o representante. Nesse contexto, Peirce define o conceito representar como "estar numa relação tal com um outro que, para certos propósitos, ele é tratado por uma mente como se fosse aquele outro" (Peirce, 1976)

Em essência, a forma de representar conceitos e objetos matemáticos na perspectiva da Semiótica, nos conduz a pensar em abordagens que envolvam uma diversidade de linguagens próprias. Linguagens verbais e não verbais que se fundamentam em signos sendo configuradas em códigos, imagens, símbolos, leis, sons entre outras. Sobre essa perspectiva, Peirce (1976) assinala que as representações matemáticas possuem aspectos formais, sintáticos e mentais, "cujo enfoque está nas relações internas entre os diversos elementos que estruturam esse tipo de signo, isto é, na composição, na forma, na medida, na estrutura e na inter-relação entre os aspectos visuais e mentais sobre os quais o discurso matemático opera (p.101).

As representações, portanto, têm um papel especial e importante na apreensão e visualização dos objetos matemáticos, onde a semioticidade pode ser percebida pelos desenhos, gráficos discursos, palavras, etc., o que nos coloca a refletir sobre a relevância da teoria da Semiótica de Peirce para o ensino da Matemática, particularmente na formação de futuros professores de Matemática, entendendo que esses possam experenciar formas distintas de representar os conceitos matemáticos rompendo com os modelos padronizados, permitindo aos mesmos explorar e ampliar a sua capacidade de compreensão e de reflexão sobre a matemática enquanto objeto de ensino e aprendizagem não se limitando apenas ao processo, mas a análise do que está a apreender e, nesse contexto possa fazer uso da tecnologia disponível que venha ser relevante ao ensino e aprendizagem da Matemática.

Referências bibliográficas

Borba,M.C & Confrey, J. (1996). A Student's Construction Of Transformations Of Functions In A Multiple Representational Environment. *Educational Studies in Mathematics, 31,* 319-337.

Borba, M.C & Villarreal, M.C. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. Austrália: Springer Press.

Miskulin,R.G.S. (1999).*Concepções Teórico - Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo de Ensino e Aprendizagem da Geometria.* Tese de doutoramento não-publicada, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. Brasil.

Peirce, C. S. (1975). *Semiótica e Filosofia: introdução*. (O. Mota & L. Hegenberg, Trad.). São Paulo: Cultrix; Editora da Universidade de São Paulo.

Peirce, C. S. (1976). *The new elements of mathematics*.Bloomington: Indiana University Press.

Santaella, L.(2002). *Semiótica Aplicada*. São Paulo: Thomson Press.

COMPREENSÕES DE PROFESSORES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO CONTEXTO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS: PERSPECTIVAS DA UTILIZAÇÃO DE AMBIENTES COMPUTACIONAIS

Andriceli Richit, Rosana Giaretta Sguerra Miskulin
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP, Rio Claro, SP Brasil
andricelirichit@gmail.com, misk@rc.unesp.br

Resumo. Buscamos neste trabalho trazer compreensões de professores de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) quanto às perspectivas da utilização de ambientes computacionais no âmbito da sala de aula. Tais compreensões são oriundas de uma pesquisa de mestrado que objetivou identificar e compreender os aspectos conceituais e instrumentais do *conhecimento da prática* docente em um curso à distância de formação de professores de CDI (Richit, 2010). Em nossas análises, avaliamos que o contexto do curso *online* (contexto da pesquisa) trouxe algumas contribuições no sentido de que alguns conceitos de CDI I foram ressignificados com as atividades realizadas no software GeoGebra.

Palavras chave: compreensões de professores, cálculo diferencial e integral, ambientes computacionais

Abstract. In this study we report on Differential and Integral Calculus (DIC) instructors' understanding as related to various perspectives on the use of computer environments for the classroom. These understandings were raised in research conducted as part of a master's program with the goal of identifying and understanding concepts and instruments characterizing the *practical knowledge* of teacher participants in a distance education professional development experience for DIC instructors (Richit, 2010). In our analyses we found that the activities developed for the online course (context of the research study) using GeoGebra, contributed to enhancing teachers' comprehension of DIC concepts.

Key words: teacher knowledge, differential and integral calculus, computer-based environments

Introdução

Trazemos neste texto, algumas compreensões de professores de Cálculo Diferencial e Integral (CDI I) quanto às suas perspectivas de utilização de ambientes computacionais no âmbito da sala de aula. As compreensões aqui apresentadas são oriundas de uma pesquisa, em nível de mestrado que tem como foco o *conhecimento da prática* do professor de Cálculo Diferencial e Integral no contexto de um curso à distância. Deste modo, o texto que ora apresentamos está dividido em três partes. Apresentamos incialmente o problema que originou a pesquisa incluindo objetivo, questão diretriz e relevância. No que segue, apontamos nossa perspectiva de formação de professores assumida na pesquisa e procedimentos metodológicos adotados. Encerrando o texto, explicitamos e discutimos a luz da perspectiva teórica *conhecimento da prática* os resultados e apontamos algumas perspectivas e conclusões do estudo.

Gênese da pesquisa

A ideia desta pesquisa surgiu das possibilidades advindas da utilização das tecnologias digitais articulada a formação do professor de Cálculo Diferencial e Integral para a apropriação e utilização destes recursos em sala de aula. Deste modo, trazemos um recorte da pesquisa que ora desenvolvemos que buscou *identificar* e *compreender os aspectos conceituais* e *instrumentais do conhecimento da prática docente em um curso à distância de formação de professores de Cálculo Diferencial* e *Integral no contexto das tecnologias digitais,* ou seja, buscou compreender quais aspectos do *conhecimento da prática* inter-relacionam a utilização dos recursos das tecnologias digitais pelo professor de Cálculo Diferencial e Integral em sua prática pedagógica. A busca desta compreensão foi orientada pela seguinte questão diretriz: *Quais são os aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática docente do professor de Cálculo Diferencial* e *Integral no contexto das tecnologias digitais?*

De acordo com Miskulin, et al (2006), investigação sobre as possibilidades advindas das tecnologias digitais na/para formação de professores pauta-se na premissa de que a relação com a tecnologia pode potencializar a capacidade de reflexão do professor sobre seus processos de pensamentos. Além disso, possibilita a construção de novos processos de aprendizagem relacionados a uma nova cultura profissional, assente na integração das diferentes tecnologias ao ensino, "pois oferecem a oportunidade de uma prática que potencialmente pode ser melhor que a praticada, considerando a sociedade em que vivemos" (Maltempi, 2008, p.60).

Nessa direção, recursos da Internet contribuem com a formação continuada de professores por meio de cursos *online* propiciados pela Educação à Distância, visto a dificuldade de muitos docentes migrarem de suas instituições e residência para investirem em sua formação (Mariano, 2008). A esse respeito, Maltempi (2008) assinala que:

> Diversas experiências com formação continuada vêm sendo realizadas, com o intuito de promover a formação tecnológica de docentes do ensino fundamental e médio. [...]. No entanto, geralmente essas experiências focam a formação pedagógico-tecnológica dissociada dos conteúdos específicos o que implica em um passo posterior do professor, que é relacionar a formação recebida com os conteúdos que ministra. Sendo assim, apostamos numa formação continuada que trabalhe as tecnologias de modo a auxiliar o professor a incorporá-las em sua prática segundo seu contexto e conteúdos específicos (p. 64).

Pensando nos docentes referidos por Mariano (2008) e Maltempi (2008), e considerando o ambiente de cursos *online,* entendemos que a aprendizagem dos professores pode ocorrer e o *conhecimento da prática* de professores para o uso das tecnologias digitais pode ser construído. Igualmente, em cursos *online*, estes trabalham conjuntamente e discutem situações que podem acontecer em sala de aula em função da apropriação e utilização das tecnologias digitais. Na sequência, trazemos a postura de formação de professores adotada em nossa investigação.

Postura de formação de professores assumida na investigação

O crescente interesse pela formação de professores quer seja no âmbito inicial ou continuado, tem se constituído em foco de pesquisa em diversos campos científicos, incluindo-se a Educação Matemática (Richit, 2010). Nesse sentido, o considerável interesse por esse campo de investigação, mais especificamente a formação continuada, está relacionado à relevância que esse processo assume no desenvolvimento da profissionalização do professor e a forma como essa formação influencia a prática pedagógica (Tanuri, 2008). Nesse viés, entendemos que a formação continuada de professores, bem como a utilização das tecnologias digitais são temáticas do campo da Educação Matemática que precisam ser investigadas de forma articulada, pois podem apontar caminhos/mudanças para processos de formação continuada docente.

Tanuri (2008) diz ainda que no bojo dessas mudanças, a prática passou a ser insistentemente defendida como fundamento de toda a teoria, ou seja, o tipo de conhecimento "que passa a ser valorizado é o saber prático, o saber que leva ao bom desempenho e à solução dos problemas do cotidiano da profissão (p.81)". Nesse sentido, para que mudanças na prática de professores aconteçam, devem ser promovidas, quer seja na formação inicial ou continuada, condições para utilização das tecnologias digitais:

> A formação do professor deve prover condições para que ele construa conhecimento sobre as técnicas computacionais, entenda por que e como integrar o computador na sua prática pedagógica e seja capaz de superar barreiras de ordem administrativa e pedagógica. Essa prática possibilita a transição de um sistema fragmentado de ensino para uma abordagem integradora de conteúdo voltada para a resolução de problemas específicos do interesse de cada aluno. Finalmente, deve-se criar condições para que o professor saiba recontextualizar o aprendizado e a experiência vividas durante a sua formação, para a sua realidade de sala de aula compatibilizando as necessidades de seus alunos e os objetivos pedagógicos que se dispõe a atingir (Valente, 1999, p. 12).

Ao lançarmos nosso olhar para as potencialidades e desafios decorrentes da utilização das tecnologias digitais, observamos que a prática docente está relacionada às ações dos alunos e dos professores, sendo estas redimensionadas pelo uso desse novo recurso, a qual não se identifica com as condições tradicionais em que o docente teve sua formação. Diante disso, consideramos que a busca pela qualificação profissional docente muitas vezes, está atrelada à prática, pois nasce da própria prática. Para Guimarães (2006)

> [...] é através da experiência e da reflexão sobre a prática pedagógica que o saber profissional dos docentes (práticos reflexivos) continuamente se desenvolve [...]. É a esse conhecimento que é preciso dar um lugar central na formação, estimulando o desenvolvimento do professor, perspectivando-se, então, este conceito como próximo da formação contínua [...] (p. 171).

Entendemos assim, que o conhecimento do professor é emergente da prática, pois é a partir dela que ele a re-significa ao repensar suas posturas em sala de aula e levando em conta a natureza de sua prática e aspectos experienciais intrínsecos a ela. Assim, a questão que nos move aqui situa-se nas relações entre a aprendizagem e o conhecimento construído pelo professor de CDI, no contexto das tecnologias digitais e os aspectos intrínsecos à construção desse conhecimento (Richit, 2010).

Cochran-Smith e Lytle (1999) desenvolvem uma discussão acerca do conhecimento do professor evidenciando a existência de concepções bastante diferenciadas sobre a aprendizagem destes, compreendendo imagens variadas de conhecimento; da prática profissional; das relações entre teoria e prática; dos contextos sociais, intelectuais e organizacionais que sustentam o aprendizado do professor; e nos modos que este aprendizado relaciona-se com mudanças educacionais e com os propósitos da escola/universidade. Nesse sentido, essas autoras destacam três concepções sobre a aprendizagem dos professores: aprendizagem como *conhecimento para a prática*, aprendizagem como *conhecimento na prática,* e aprendizagem como *conhecimento da prática.* Apresentaremos brevemente alguns aspectos relacionados às duas primeiras concepções e nos aprofundaremos na terceira concepção, sendo esta última a nossa postura de formação de professores assumida na investigação.

A primeira concepção - *conhecimento para a prática* parte do pressuposto de que os pesquisadores nas universidades geram conhecimentos e teorias, que são legitimados pela comunidade acadêmica, como por exemplo, teorias e conhecimentos formais que são utilizados pelos professores nas escolas, objetivando desenvolver e aprimorar a prática profissional desses professores (Cochran-Smith e Lytle, 1999).

Já o *conhecimento na prática* é gerado quando o professor se apropria de conhecimentos imbuídos no trabalho de especialistas e aprofunda seus próprios conhecimentos. As autoras supracitadas depreendem, também, que não se supõe que o *conhecimento na prática* seja gerado exclusivamente ou sequer primariamente pelos pesquisadores que estudaram sobre ensino e escolaridade fora da esfera da escola, mas que os professores são geradores do próprio conhecimento. Para Cochran-Smith e Lytle (1999) a concepção de aprendizagem *conhecimento da prática* não pode ser entendida em termos de um universo de conhecimento que divide conhecimento formal de um lado e conhecimento prático de outro.

Nessa mesma perspectiva, Roldão (2007) pontua que a relação teoria/prática tem sido problemática e conflituosa e a progressiva teorização da ação, foi gerando por sua vez, novos corpos de conhecimento, que passam a transformar a forma de agir dos docentes. Igualmente, Roldão (2007, p. 98) aponta que a relação teórico-prática é responsável pela

> [...] grande parte da dificuldade de estabelecer a natureza do conhecimento profissional docente e de configurar os modos e identificar os actores da sua produção e uso. É justamente nesta interface teoria-prática que se jogam, julgamos, as grandes questões relativas ao *conhecimento profissional docente*.

A perspectiva de conhecimento profissional defendida por Roldão (2007) é próxima da perspectiva *conhecimento da prática* de Cochran-Smith e Lytle (1999), no sentido de que estas perspectivas teóricas apontam que a teoria e a prática não podem ser dissociadas e que o professor constrói conhecimento a partir de sua prática e da reflexão que faz dela.

> [...] professores, ao longo de sua vida, tem papel central e crítico na geração de conhecimento sobre a prática, uma vez que suas salas de aula são locais de investigação, e ao conectar seu trabalho nas escolas a questões mais amplas, assumem um ponto de vista crítico na teoria e pesquisa de outros. Redes de professores, comunidades de investigação, e outros coletivos escolares nos quais os professores e outros somam esforços para construir conhecimento são o contexto privilegiado para o aprendizado do professor (p. 273).

Evidencia-se nesta perspectiva que a relação do professor com o conhecimento é bem diferente do que é presumido em outras concepções sobre seu aprendizado e constituem-se em oportunidades para que os professores explorem e questionem suas (e dos outros) ideologias, interpretações e práticas. Além disso, os professores aprendem ao desafiar suas próprias suposições identificando questões importantes da prática (Cochran-Smith e Lytle, 1999). Uma idéia fundamental que subjaz o *conhecimento da prática,* é a de que os professores aprendem colaborativamente e esta aprendizagem ocorre em comunidades de investigação ou em redes. Cochran-Smith e Lytle (1999) reiteram ainda que quando os professores trabalham em comunidades de investigação (redes ou cursos de formação continuada), entram em uma "busca comum" de significados em suas vidas profissionais por meio de maneiras distintas de descrever, discutir e debater os processos de ensino e aprendizagem inerentes a sua prática pedagógica.

Considerando a natureza da investigação realizada, utilizamos a metodologia de pesquisa qualitativa com análise interpretativa, em função da necessidade de descrever o fenômeno a partir dos dados obtidos, visando favorecer a interpretação dos mesmos (Alves-Mazzotti, 1998). Os dados da pesquisa foram constituídos por meio de um curso de Extensão, à distância, intitulado *"Tecnologias da Informação e Comunicação na formação continuada de professores que ensinam Cálculo Diferencial e Integral I"*. O Curso de Extensão contou professores de CDI perfazendo 13 encontros *online*, viabilizado pela plataforma de ensino a distância TelEduc, onde os participantes discutiram a utilização das tecnologias digitais no âmbito da sala de aula de Cálculo bem como desenvolveram atividades envolvendo os principais conceitos de CDI: Funções, Limites, Derivadas e Integral no software GeoGebra. Assim, os dados são oriundos das diversas formas de interações como bate-papo, fórum e e-mail, ficha de inscrição, questionários e planos de aula desenvolvidos pelos professores, notas de campo dos pesquisadores, dentre outras.

Alguns resultados e considerações finais

Na busca por interpretações acerca dos dados constituídos no Curso de Extensão, alguns aspectos foram observados, sendo estes divididos em dois eixos inter-relacionados: o primeiro eixo, o qual denominamos *Conceitual*, referia-se aos aspectos do conhecimento do conteúdo e da prática pedagógica do professor no que tange a apropriação e utilização das tecnologias digitais. O segundo eixo, dizia respeito ao aspecto *Instrumental,* ou seja, relacionavam-se as condições da utilização de ambientes computacionais (tempo, estrutura). Contudo, neste artigo, trazemos um recorte referente a uma das categorias referente ao Aspecto *Instrumental* a qual intitulamos "*Ambientes Computacionais*".

Durante o Curso, a questão da utilização de ambientes computacionais, calculadoras entre outros recursos foram apontados pelos participantes como importantes aliados dos professores no fazer docente, devido às potencialidades e possibilidades advindas de sua utilização na criação de ambientes de aprendizagem na aula de CDI. As percepções e reflexões dos professores a respeito dos ambientes computacionais sinalizam que estes reconhecem a importância de uma prática pedagógica, que leve em conta a utilização dos mesmos. Anderson, aponta que por meio de ambientes computacionais, as possibilidades de representação de conceitos oferecidos pelas tecnologias são bem maiores:

[...] Com uso das TIC novas possibilidades se abrem sobre como o deve ser analisado o conteúdo na sala. Para os que tem Cálculo como ferramenta de aplicações, então tais aplicações são simuladas e aperfeiçoadas. Para os que se especializam em Matemática, tem a chance de aprofundar cada vez

mais sobre o que realmente as coisas são com as diferentes possibilidades de representação que as TIC oferecem.

Ainda nessa direção, Anderson, aponta que a utilização de ambientes computacionais pode atenuar um pouco o caos na abordagem de alguns conceitos de Cálculo, pois, por meio das tecnologias, é possível realizar algumas simulações e estas podem contribuir com a compreensão e construção dos conceitos por parte dos alunos.

O conceito de limite é caótico. A definição epsilon-delta é a origem do caos. Formalmente não se entende: dizer "para qualquer epsilon > 0 deve existir um delta > 0, tal que $\left| f(x) - L \right|$ *< epsilon sempre que 0 <* $\left| x - a \right|$ *< delta." A primeira parte da frase diz que a existência do epsilon vai implicar a existência de um delta, enquanto que na última parte da frase diz que sempre que tivermos um delta satisfazendo determinadas condições, a existência de épsilon está garantida". Uma ambigüidade e contradição enormes. Este facto é motivo do caos. Acho que as TIC podem atenuar esse caos com as diferentes possibilidades de simulação: os alunos podem ensaiar, como se fosse um jogo: será que para cada delta, tão pequeno que seja, vou encontrar um épsilon correspondente? Portanto, quem ganha o jogo, já percebe o conceito formal de limite*

Anderson, ao refletir sobre o conceito de limite assumiu uma postura de teórico ao dizer que *"as TIC podem atenuar esse caos"*, o que reflete suas perspectivas interpretativas oriundas de suas próprias experiências (Cochran-Smith e Lytle,1999). Letícia, por sua vez, percebe a utilização de softwares e/ou ambientes computacionais como importantes aliados do professor e importantes instrumentos de aprendizagem para seus alunos, na medida em que a abordagem de conceitos forem reelaboradas com a utilização de recursos das tecnologias digitais.

Vejo as Tecnologias, em especial os softwares, como ferramentas que podem se tornar instrumentos de aprendizagem. Dessa forma, se tornam mais uma estratégia que pode ser utilizada pelo professor em seu trabalho diário. E sendo esse trabalho bem planejado com o uso das tecnologias poderá auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem e no interesse do estudante.

Em um dos encontros do Curso, discutíamos as potencialidades advindas de ambientes computacionais na abordagem de conceitos, levando em conta aspectos como a visualização, representação e a articulação das representações matemáticas (algébrica, gráfica e tabular), entre outros. A este respeito, a participante Priscila evidencia que "*o ambiente informático potencializa também a investigação pelos seus recursos diversos, pois permite mobilizar diversas representações"*. Ela ainda complementa dizendo que "*esta metodologia inverte o papel do professor e permite que o aluno participe da construção do conhecimento"*. Nessa mesma linha de raciocínio, Beatriz pontua que "*Acredito que a aplicação das TIC podem e muito ajudar os alunos na compreensão e fixação do conteúdo do cálculo*". Já Leonardo acredita que *"O computador pode ser utilizado como um recurso estratégico alternativo para os cursos de CDI"*.

Neste trecho, percebemos que os professores reconhecem ao longo do debate a importância das representações matemáticas na compreensão de conceitos. Além disso, constatamos que Priscila e Leonardo são favoráveis a utilização de ambientes computacionais, pois, para eles, os ambientes computacionais potencializam as aulas, possibilitando o trabalho com atividades investigativas, e colocando os estudantes como construtores de seu próprio conhecimento. Ainda, no que diz respeito às representações matemáticas, alguns professores discutem o papel do professor com relação às representações e a relação das tecnologias com as representações.

Beatriz fala para Todos: Acredito que as TICs podem sim ajudar de forma significativa a interpretação de algumas das representações.

Anderson fala para Todos: é complicado e pouco significativo abordar cálculo, digamos derivada ou integral, sem mobilizar uma diversidade de representações. Como fazer? Na actividade 1 da Margareth vemos que os pesquisados, por confiarem no "senso comum", talvez por verem que o domínio da função é todo R as pessoas acharam que a função fosse contínua. Portanto a diversidade das representações ajuda a eliminar esses equívocos

Bianca fala para Todos: As diversas representações matemáticas levam o aluno a ampliar seu conhecimento.

Neste outro trecho, Beatriz percebe a relação entre representação e tecnologia como eventos complementares, no sentido de que a tecnologia abre possibilidades para a compreensão das representações. Já Anderson, entende que a mobilização de diversas representações é muito eficaz na compreensão de conceitos de Cálculo, ao referir-se ao estudo de Derivadas e Integrais. Além disso, sugere que a utilização de diversas representações possibilitadas por ambientes computacionais ajuda a evitar alguns "enganos", que os estudantes cometem no estudo de continuidade, por exemplo.

Finalizando, entendemos que a utilização de ambientes computacionais constituem-se em um dos aspectos do *conhecimento da prática* docente destes professores de Cálculo, pois, estes discutiram a utilização dos recursos das tecnologias digitais quer seja por meio de pesquisas, artigos e as mais variadas literaturas, além de refletirem os efeitos da utilização das tecnologias no contexto de suas aulas de Cálculo com pesquisadores da área. Percebemos também que estes professores ao final do Curso se colocaram em uma relação diferente com relação à abordagem dos conceitos de Cálculo levando em conta a utilização de ambientes computacionais. Além disso, de acordo com Cochran-Smith e Lytle (1999), estes professores responsáveis e comprometidos com uma educação progressiva e com a construção de maneiras alternativas para os processos de ensino aprendizagem de Cálculo, discutiram juntos os pressupostos implícitos, que tem a respeito do ensino e aprendizagem de Cálculo e da Universidade com o apoio de ambientes computacionais.

Referências bibliográficas

Alves- Mazzotti, A. J. (1998). O método nas Ciências Naturais e Sociais. In A. J., Alves-Mazzotti e F. Gewandsznajder (Orgs.), *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa.* São Paulo, SP: Pioneira

Cochran- Smith, M., e Lytle, S. (1999). Relationship of Knowledge and Practice: Teacher Learning in Communities. In A. Iran-Nejad e C. D. Pearson (Eds.), *Review of Research in Education (24),* (pp. 249-306). Washington, DC: American Educational Research Association.

Guimarães, F. (2006). Como se pensa hoje o desenvolvimento profissional do professor? *Revista Quadrante*, 1 e 2 (1), 169-192.

Maltempi, M. V. (2008). Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. *Acta Scientiae*, *10 (1),* 59-67.

Mariano, C.R. (2008). *Indícios da cultura docente revelados em um contexto online no processo da formação de professores de matemática*. Dissertação de Mestrado, Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Miskulin, R. G. S.; Perez, G; Silva, M.R.C.; Montrezor, C.L.; Santos, C.R.; Toon, E.; Liboni Filho, P.A. e Santana, P.H.O. (2006). Identificação e Análise das Dimensões que permeiam a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação nas Aulas de Matemática no Contexto da Formação de Professores. *Bolema:* de Educação Matemática, *26 (1)*, 103-123.

Richit, A. (2010). *Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil.

Roldão, M.C. (2007). Função docente: natureza e construção do conhecimento profissional. *Revista Brasileira de Educação*, *34 (1)*, 94-103.

Tanuri, L.M. (2008). Formação de Professores: história, política e processos de formação. *Revista Pesquisa Qualitativa, 3 (1)*, 73-92.

Valente, J.A (1999). *O Computador na Sociedade do Conhecimento*. (1ª ed.) Campinas: Unicamp/Nied.

PRODUÇÃO COLETIVA DE CONHECIMENTO EM INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS EM GRUPOS ONLINE

Felipe Pereira Heitmann, Sueli Liberatti Javaron
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" Brasil
felipeph@gmail.com, suelilj@fc.unesp.br

Resumo. Práticas pedagógicas restritas à entrega de material ao aluno são percebidas em diversos relatos sobre Educação a Distância no Brasil. Com o objetivo de proporcionar cenários para investigações matemáticas em grupos online, desenvolvemos e aplicamos um ambiente de aprendizagem com recursos tecnológicos específicos com alunos de graduação. Os dados coletados foram analisados sobre o referencial sintetizado pelo construto seres-humanos-com-mídia, buscando episódios nos quais fossem percebidas evidências da influência de tecnologias na produção de conhecimento matemático. Concluímos que em um ambiente de aprendizagem rico em interação e mediado por um professor foi possível desenvolver uma atividade investigativa em geometria. Concluímos também que a produção de conhecimento nesse ambiente apresenta características de colaboração.

Palavras chave: seres-humanos-com-mídias, educação a distância

Abstract. Pedagogical practices restricted to supplying material to the student are perceived in various reports on distance education in Brazil. Aiming to investigate possible scenarios for mathematical investigation in online groups, we developed and applied a learning environment with technological resources on groups of graduate students. The collected data were analyzed with the theoretical construct humans-with-media, seeking for episodes where the evidence of the influence of technology in the construction of mathematical knowledge is perceived. We conclude that in a learning environment rich in interaction and mediated by a teacher it is possible to develop an activity of investigation in geometry. We also conclude that the production of knowledge in this environment presents collaboration features.

Key words: humans-with-media, distance education

Introdução

Nos últimos anos, programas governamentais baseados em Educação a Distância (EaD) como a Universidade Aberta do Brasil (UAB) e Universidade Virtual do Estado de São Paulo (Univesp), têm sido responsáveis pela expansão e interiorização da formação superior no Brasil, em especial das licenciaturas (Brasil, 2011). Entretanto, muitos são os relatos de uso dessas tecnologias apenas para entrega de material aos alunos (Sommer, 2010), deixando de lado potencialidades de interação e produção colaborativa de conhecimento que elas essas tecnologias trazem consigo. Essa pesquisa busca apontar possibilidades para a EaD além do estudo individualizado de materiais entregues aos alunos.

Novas possibilidades de ensino e aprendizagem tendem a surgir quando se busca utilizar os recursos tecnológicos a fim de aprimorar essa interação e colaboração. A constituição de cenários para investigação é uma delas. Ole Skovsmose apresenta esse conceito como um contraponto ao paradigma do exercício, termo cunhado a partir da observação de que tradicionalmente, o ensino de matemática se baseia na apresentação, feita pelo professor, de ideias e técnicas matemáticas, seguidas da realização de exercícios, feitos pelos alunos e selecionados pelo professor (Skovsmose, 2000). Para Skovsmose, “Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. [...] Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração.” (Skovsmose, 2000, p. 72). Com esse envolvimento, formulação de conjecturas e argumentação, acreditamos que um novo ambiente de aprendizagem, qualitativamente distinto daquele apresentado pelo paradigma do exercício, se apresenta. Nesse artigo buscamos tratar da constituição desse ambiente de aprendizagem em um cenário de educação a distância.

Tendo em vista questões relativas à produção de conhecimento matemático nesse cenário, desenvolvemos a pesquisa aqui apresentada com o objetivo buscar respostas para a questão: *Como as tecnologias digitais podem possibilitar a realização de investigações matemáticas em grupos online?* Essa é uma questão norteadora para a pesquisa de cunho qualitativo aqui apresentada.

Na busca de apoio para responder a essa questão recorremos à autores que tratam da relação entre as tecnologias e o conhecimento matemático (Kenski, 2007) e (Borba e Villarreal, 2005). Esses autores concordam que as tecnologias que utilizamos têm uma grande influência no conteúdo e na forma do conhecimento que produzimos. Utilizar essas tecnologias para aproximar aqueles que estão fisicamente distantes, para que possam trabalhar juntos em tarefas engajadoras de investigação matemática é algo que buscamos explorar nesse trabalho.

Um ambiente de aprendizagem para investigações geométricas online

Para constituir um ambiente de aprendizagem com cenários para investigação online, foi concebido um roteiro investigativo baseado na atividade “Explorando as Bissetrizes de um Paralelogramo” (Amaral, 2011). A procura por tecnologias que possibilitassem a constituição desse ambiente de aprendizagem partiu das pesquisas realizadas na área no Brasil (Borba, Malheiros e Amaral, 2011) e de experiências anteriores dos pesquisadores. Essa busca culminou na integração de ferramentas como editor de texto colaborativo, sala de bate- papo, software de geometria dinâmica e compartilhamento de tela em um mesmo ambiente virtual de aprendizagem. Para essas funcionalidades foram utilizados, respectivamente, o aplicativo web Google Docs, o software de geometria dinâmica Geogebra e o software de compartilhamento de tela Mikogo (ver figura 1).

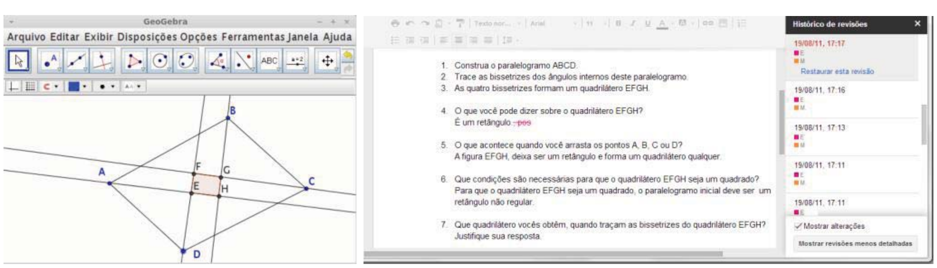


Figura 1. Construção no Geogebra e Histórico de Revisões no Google Docs

Os registros das interações dos alunos com essas ferramentas constituem os dados utilizados para nos auxiliar na busca por respostas para a questão de pesquisa. Para tal realizamos uma atividade com o uso de ambiente de aprendizagem desenvolvido. Possibilitar o surgimento de cenários para investigação matemática online, nestes casos específicos, em geometria, era o objetivo dessa atividade, apresentada aos alunos no roteiro abaixo.

Roteiro de Atividade - Explorando as Bissetrizes de um Paralelogramo

Descrição: Nessa proposta de atividade investigativa, vocês devem utilizar o software de geometria dinâmica GeoGebra para realizar as construções e explorações. Leia atentamente cada passo do roteiro e tente desenvolver a atividade discutindo com o colega sobre as respostas a serem dadas para cada item.

1) Construa o paralelogramo ABCD.
2) Trace as bissetrizes dos ângulos internos deste paralelogramo. As quatro bissetrizes formam um quadrilátero EFGH.
3) O que você pode dizer sobre o quadrilátero EFGH? O que acontece quando você arrasta os pontos A, B, C ou D?
4) Que condições são necessárias para que o quadrilátero EFGH seja um quadrado?
5) Que quadrilátero vocês obtêm, quando traçam as bissetrizes do quadrilátero EFGH? Justifique sua resposta.
6) O que acontece no caso de ABCD ser um quadrado? Por quê?

Participaram dessa atividade seis alunos de graduação em ciências exatas, organizados em três duplas. Os alunos se localizavam em laboratórios de informática da universidade na qual estudam, em duas cidades do Estado de São Paulo. Foi utilizado o roteiro de atividade investigativa "Explorando as Bissetrizes de um Paralelogramo", com o auxílio das tecnologias de escrita colaborativa, chat interno para cada dupla, software de geometria dinâmica e compartilhamento de tela e chat entre todos os seis participantes e o primeiro autor desse artigo.

Seres-humanos-com-mídias como lentes para leitura dos episódios

A busca por um referencial teórico que possibilitasse analisar o episódio selecionado no conjunto de dados culminou na utilização do construto *seres-humanos-com-mídias*, apresentado em (Borba e Villarreal, 2005). O processo de estabelecimento desse construto teórico é explicitado como

> Influenciado pela forma como Lévy e Tikhomirov discutem a relação entre tecnologias e seres humanos, essas ideias foram ampliadas e sintetizadas em Borba e Villarreal (2005), que, apoiados em um vasto conjunto de pesquisas, afirmam que o conhecimento é produzido por coletivos de *seres-humanos-com-mídias*. Seres humanos são fundamentais para a produção de conhecimento, assim como a mídia também o é. (Borba, Malheiros e Amaral, 2011, p. 87).

Concebendo que o conhecimento não é produzido somente pelo humano, mas por um coletivo de *seres-humanos-com-mídias*, salientamos que os diferentes coletivos de diferentes seres humanos com as mais distintas mídias, produzem conhecimentos distintos de formas diferentes. Nessa perspectiva, não somente o conhecimento produzido é moldado pelas mídias, mas o próprio humano também o é, e da mesma forma, este molda e desenvolve as mídias que o modificam num processo de moldagem recíproca. Por exemplo, a escrita está sendo moldada pelas tecnologias que exigem que digitemos cada vez mais rápido, usando novos símbolos e códigos, para que possamos nos comunicar e socializar em ambiente com *chat*. Esse processo modifica o que para nós é a escrita.

A internet passa a ter um papel importante enquanto mídia com sua incorporação em nossa cultura cognitiva, tornando-nos *seres-humanos-com-internet*. Ela condiciona como conhecemos, de acordo com as pesquisas realizadas no Brasil.

> É com base nessa perspectiva que afirmamos que seres- humanos-com-internet produziram conhecimento no chat. E mesmo esse coletivo pode ser distinguido entre os "com-chat" ou "com-videoconferência". [...] da mesma forma como o ato de "passar a caneta" (manipulando o mouse no computador do professor) representa uma possibilidade qualitativamente diferente de colaboração, nem sempre possibilitada de forma natural em ambientes presenciais (Borba, Malheiros e Amaral, 2011, p. 90-91).

A partir desse referencial teórico, e buscando indicativos de coletivos de seres-humanos-com-(chat, geogebra, mikogo, google docs, papel, etc.) que procedemos a análise de um episódio selecionado dentre o conjunto de dados.

Episódio analisado

Tendo em mãos os dados coletados nessa atividade, procedemos com a análise buscando explicitar as evidências de coletivos de *seres-humanos-com-mídias* emergindo dos dados e as influências das mídias em cada um dos processos. Devida à impossibilidade de apresentar todo o conjunto de análises realizadas, nos limitamos à apresentação nesse artigo de um episódio que emergiu na análise das investigações da dupla Elias e Maria durante essa atividade. Os nomes são fictícios para manter a privacidade dos alunos.

A análise do histórico de revisões do roteiro-relatório mostra que às 17h01min os alunos começam a responder as atividades. Todas as respostas são escritas por Elias, nesse momento, como na questão 4 do roteiro.

> 4. O que você pode dizer sobre o quadrilátero EFGH?
>
> Formam um retângulo.
>
> (Resposta ao roteiro de atividade às 17h01min)

São respostas, de início, fechadas, sem muitas discussões. Os movimentos de escrita começam a aparecer às 17h08min, quando Elias modifica a resposta de "Formam um retângulo." para "É um retângulo". Ás 17h18min, Elias esboça justificativas maiores sobre as respostas dadas às questões 3 e 4. Na questão 4, o aluno insere ao final da resposta o texto ", pos", que interpretamos como um ", pois", dando início à escrita de uma justificativa mais detalhada. Esse processo se dá no mesmo instante em que ocorre a seguinte discussão no chat do Mikogo, com todos os participantes:

> Elias: com que precisão temos que justificar as respostas?
>
> Felipe: justifiquem de forma que os dois concordem com o que foi escrito, usem o que vocês já sabem.

Após a resposta dada pelo pesquisador, Elias volta atrás e mantém com as respostas fechadas, excluindo o ", pos". Com esse movimento percebemos a legitimação de uma resposta, dados os critérios de justificativa solicitados. Nesse caso, o que o aluno estabelece enquanto conhecimento válido e justificado é diretamente influenciado pelo professor da atividade. Devido à presença do chat como mídia nessa atividade e possibilidade de comunicação em tempo real com o professor, que o aluno aceita sua resposta inicial como legítima. Podemos dizer que nesse episódio o conhecimento sobre o quadrilátero em questão é produzido pelo coletivo de seres-humanos-com-chat, já que esse teve um papel fundamental ao estabelecer o que é uma resposta adequada a uma questão matemática.

Em outro momento, ocorre uma discussão no chat da dupla, promovida pelo professor.

> Felipe: como está a questão 7, conseguiram pensar nela?
>
> Elias: Sim. Usando a resposta anterior formará um quadrado, sempre que o quadrilátero inicial for mesmo um paralelogramo, não retângulo.

> Maria: caso contrário, se for um retângulo, formará um ponto. Ainda estamos testando, talvez a resposta sofra alterações. (Chat da dupla Elias e Maria)

A partir desse excerto observamos um momento no qual a dupla utiliza o chat da ferramenta de escrita colaborativa para se comunicar. Percebemos que Elias apresenta uma resposta para a questão, excluindo a possibilidade de o quadrilátero ser um retângulo. Logo em seguida Maria observa o que pode acontecer se o quadrilátero for um retângulo. Não apresenta uma resposta direta como a de Elias, mas levanta uma conjectura e afirma que está realizando experimentações para certificar-se do fato. Após alguns minutos manipulando a construção para certificar-se da resposta, Maria redige uma afirmativa para a questão 7.

> 7. Que quadrilátero vocês obtêm, quando traçam as bissetrizes do quadrilátero EFGH? Justifique sua resposta.
>
> "Usando a resposta anterior como base, formará um quadrado sempre que o quadrilátero inicial for mesmo um paralelogramo, não retângulo. Caso contrário, se for um retângulo, formará um ponto." (Relatório de investigação da dupla Elias e Maria).

Percebemos nesse episódio a comunicação entre os estudantes provocando conjecturas que levam à experimentações e argumentações matemáticas. Esse é o objetivo geral da atividade, a constituição de cenários para investigação, que possibilite aos alunos conjecturar, discutir, experimentar e elaborar argumentos matemáticos para suas afirmações.

Os alunos estão se comunicando pelo chat e realizando experimentações utilizando o software de geometria dinâmica. Nesse caso, podemos afirmar que o coletivo que produziu o conhecimento para resposta da questão 7 é composto por seres-humanos-com-chat-e-geometria-dinâmica, já que os processos de experimentação para verificação da conjectura de Maria seriam demorados e desestimulantes sem a presença do Geogebra, como mídia nesse ambiente.

Aqui a comunicação por chat também desempenhou um papel relevante na produção do conhecimento por manter o registro por escrito do que está sendo discutido. A identidade entre o texto presente no chat e no relatório, inclusive quanto à pontuação e espaçamento, sugere que o texto foi copiado e colado entre os processos de discussão e estabelecimento de respostas para a questão. Esse é um tipo de conduta que dificilmente vigora quando se utiliza somente a oralidade para a discussão de um tópico, já que essa carrega características qualitativamente distintas da linguagem escrita, o que acaba produzindo uma modificação na terminologia quando se produz a resposta por escrito.

Considerações finais

Considerando a análise realizada no episódio aqui apresentado, podemos esboçar respostas à questão colocada inicialmente "Como as tecnologias digitais podem possibilitar a realização de investigações matemáticas em grupos online, num determinado contexto de EaD?"

Percebemos que as tecnologias, ou mídias utilizadas moldam a atividade de produção de conhecimento matemático, assim como apontado por Borba e Villarreal (2005). Nesse caso específico, a utilização do chat para conversas entre os alunos e com o pesquisador na atividade, as possiblidades de escrita colaborativa com a facilidade de alteração do texto de uma resposta, em tempo real, assim como o potencial de construção e manipulação de construções geométricas dinâmicas, moldaram o conhecimento produzido nessa atividade.

Podemos afirmar que as respostas às questões investigativas foram elaboradas por seres-humanos-com-chat-escrita-colaborativa-e-geometria-dinâmica. Evidências dos processos de conjectura, experimentação e busca por argumentos matemáticos estão presentes nos dados coletados nesse ambiente de aprendizagem especialmente desenvolvido para investigação em grupos online.

Acreditamos, portanto, que as tecnologias presentes no ambiente de aprendizagem apresentado aqui, podem possibilitar a constituição de cenários para investigações matemáticas, num contexto de EaD online. Ressaltamos, porém a efemeridade destes cenários para investigação, que ocorrem em momentos que se intercalam com a imposição de afirmativas individuais não debatidas pelo grupo, e que muito se assemelham às respostas prontas que dominam os cenários no qual o paradigma do exercício vigora.

Referências bibliográficas

Amaral, R. B. (2011). Argumentação matemática colaborativa em um ambiente online. *Acta Scientiae, 13* (1), 55-70.

Borba, M. C., Malheiros, A. P. S. e Amaral, R. B. (2011). *Educação a Distância online*. Belo Horizonte: Autêntica

Borba, M. C. e Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation. Nova York: Springer.

Brasil. (2011). *Censo da Educação Superior*, INEP/MEC.

Kenski, V. M. (2007). *Educação e Tecnologias*: o novo ritmo da informação. Campinas: Papirus.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática 14*, 66-91.

Sommer, L. H. (2010). Formação inicial de professores a distância: questões para debate. *Em Aberto 23*(84), 17-30.

O USO DE VÍDEOS EM UM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM MULTIMODAL

Nilton Silveira Domingues
Univ. Estadual Paulista Brasil
niltonsdomingues@gmail.com

Resumo. Tenho investigado o uso de vídeos em aulas de matemática em nível de Iniciação Científica e atualmente em meu mestrado. O objetivo desse artigo é discutir minha proposta de trabalho na disciplina de Matemática Aplicada, que consiste em um ambiente de aprendizagem multimodal, nas quais houve apresentação de vídeos pelo professor em sala de aula e produção e/ou edição de vídeos pelos alunos para o trabalho final da disciplina. A pesquisa supracitada está imersa em um viés qualitativo, pois analiso as particularidades do uso de vídeo em uma turma de alunos, por meio de observação das aulas, diário de campo, questionário avaliativo e entrevistas. Este estudo contribui com discussões no que diz respeito ao uso de vídeos em Educação Matemática, especificamente nas aulas de cálculo I de matemática.

Palavras chave: educação matemática, vídeos, multimodalidade, cálculo I

Abstract. I have investigated the use of videos in math classes since my undergraduate research and most recently, in my masters. The aim of this paper is to discuss my proposal in the context of Applied Mathematics course, which has been seen as a multimodal learning environment, where the instructor presents videos in his classes and the students produce and edit videos as their final assignments. The research above is conducted through the lenses of qualitative research, because I analyze particularities in the use of videos made by a group of students through observation of the classes, field notes, surveys and interviews. This study contributes to discussions on the use of videos in mathematics education, in particular to teaching and learning Calculus.

Key words: mathematics education, videos, multimodality, calculus I

Introdução

Nesse artigo, discuto a utilização de vídeos em aulas de matemática, para isso apresento a análise inicial de meus dados do mestrado que foram apresentamos como comunicação científica no RELME 26.

Investigo sobre o uso de vídeos em aulas de matemática desde 2008, quando me tornei membro do GPIMEM - Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática, que "[...] estuda questões ligadas às tecnologias na Educação Matemática refletindo sobre as mudanças que trazem a inserção das Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação" (Gpimem, 2012).

Iniciei meus estudos relacionados ao uso de vídeos em nível de Iniciação Científica, por meio de dois projetos, financiados pelo CNPq (2008/2009 processo: 110970/2008-0) e PIBIC (2009/2010 processo: 121662/2009-8), respectivamente, com os seguintes temas: "Modelagem Matemática no CVM e a exploração de novos recursos nesse ambiente virtual" e "Modelagem Matemática e Vídeos em um Curso de Ciências Biológicas".

Estes projetos me impulsionaram a continuar investigando sobre o uso de vídeos em sala de aula, pois pude perceber a falta de discussão sobre esta temática na área de Educação Matemática.

Algumas leituras indicam que a discussão sobre as possibilidades do vídeo para a educação não é nova.

> Não somente a comunicação se fez assim universal no espaço. Como também, com novos recursos técnicos, se estendeu através do tempo, podendo o homem em uma simples sessão de cinema visualizar as civilizações ao longo da história, como sucedem nos grandes espetáculos modernos em que a cultura antiga é apresentada de forma nem sequer sonhada pelos mais ambiciosos historiadores do passado. (Teixeira, 1963, p. 144)

(Moran, 1995), também discute possibilidades de utilização de vídeos, porém relata de maneira geral, não apresentando situações ocorridas em sala de aula.

> O vídeo está umbilicalmente ligado à televisão e a um contexto de lazer, de entretenimento, que passa imperceptivelmente para a sala de aula. Vídeo, na concepção dos alunos significa descanso e não "aula", o que modifica a postura e expectativas em relação ao seu uso. Precisamos aproveitar esta expectativa positiva para atrair o aluno para os assuntos do nosso planejamento pedagógico. (Moran, 1995, p. 27)

Autores como (Santagata e Guarino, 2011) relatam sobre o uso de vídeos para cursos de formação de professores e (Borba e Scucuglia, 2009) trazem discussões sobre vídeos performáticos em educação.

Com essas leituras, pude notar que ainda há poucas pesquisas empíricas que relatam sobre aplicações diretas de vídeos em aulas de matemática e analisem a interação dos alunos com os vídeos. A partir disso, elaborei juntamente com o Professor Dr. Marcelo de Carvalho Borba, uma proposta de utilização de vídeos em aulas de Cálculo I.

Acompanhei aulas de Matemática Aplicada em um curso de Ciências Biológicas, na UNESP, campus de Rio Claro-SP. Nestas aulas, desde 1993, o professor Marcelo Borba ministra a disciplina com diferente mídias tornando a sala de aula um ambiente de aprendizagem multimodal. Nestas aulas o professor está sempre inovando suas práticas pedagógicas, fazendo pesquisa, que originaram dissertações e teses do GPIMEM, e utilizando diferentes mídias como lápis e papel, calculadoras gráficas, Winplot, Geogebra, PowerPoint, dentre outras.

Estas aulas estão localizadas no chamado ambiente de aprendizagem multimodal, que consiste em ambientes de sala de aula nos quais professores e estudantes utilizam e interagem com diferentes tipos de textos multimodais e por meio de atividades pedagógicas diversificadas que envolvem diversos conteúdos do currículo (Walsh, 2011).

Nossa pesquisa consistiu na exibição de alguns vídeos em sala de aula e na proposta de edição ou produção de um vídeo nos trabalhos de modelagem matemática. Com relação à proposta de modelagem matemática, o professor trabalha na perspectiva que é entendida como uma estratégia pedagógica que privilegia a escolha de temas pelos alunos para serem investigados e que possibilita aos estudantes a compreensão de como conteúdos abordados em sala de aula se relacionam às questões cotidianas (Borba, Malheiros e Amaral, 2011).

Ressalto que minha contribuição nesse processo se deu em pesquisar e selecionar os vídeos assistidos em aula e auxiliar os alunos na produção dos vídeos dos trabalhos. Para isso ministrei, juntamente com meu orientador, um minicurso sobre edição de vídeos no editor presente no YouTube.

Fundamentação teórica

Com relação ao referencial teórico para utilizar e selecionar os vídeos me apoiei em Moran, (1995) que recomenda iniciar a aula com vídeos mais simples e depois ir aumentando o grau de dificuldade, para que os alunos não se sintam frustrados, selecionar vídeos para introduzir tópicos e mostrar experimentos que não se tem possibilidade de realizar em sala devido à falta de materiais, dentre outras dicas de uso.

Moran (2005) comenta sobre as múltiplas formas do aprender. Percebe-se aproximação das ideias do autor com a proposta dos vídeos.

> A sala de aula pode ser o espaço de múltiplas formas de aprender. Espaço para informar, pesquisar e divulgar atividades de aprendizagem. Para isso, além do quadro e do giz, precisa ser confortável, com boa acústica e tecnologias, das simples até as sofisticadas. (Moran, 2005, p.11-12)

No que diz respeito à discussão da produção do conhecimento dos alunos por meio dos vídeos assistidos e/ou produzidos me apoio no constructo teórico seres-humanos-com-mídias, proposto por (Borba e Villareal, 2005). Este constructo enfatiza seres humanos são impregnados de diferentes tecnologias, da mesma forma como as tecnologias são impregnadas de humanidade, assim, ambos formam uma unidade que pensa em conjunto. Em outras palavras a produção de conhecimento é um processo realizado por coletivos formados por atores humanos e não humanos.

Já com relação à noção de ambiente de aprendizagem multimodal me baseio em (Walsh, 2011), que define este ambiente de forma semelhante às aulas que relato nesse artigo.

Procedimentos metodológicos

O contexto dessa pesquisa é de cunho qualitativo, pois "pesquisas que utilizam abordagens qualitativas nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações" (Araújo e Borba, 2004, p. 24) e "os métodos qualitativos enfatizam as particularidades de um fenômeno em termos de seu significado para o grupo pesquisado" (Goldenberg, 2007, p. 49).

Conforme mencionado, acompanhei uma turma de alunos matriculados na disciplina de matemática aplicada, que tem ementa semelhante à de cálculo I. Nessas aulas foram assistidos alguns vídeos. Também foi proposto, como trabalho final da disciplina, a produção e/ou edição de um vídeo.

Os dados gerados nessas aulas consistiram em versões parciais e finais dos grupos, notas de campo, materiais utilizados nas apresentações, gravações das apresentações, questionário avaliativo e entrevistas realizadas com os grupos.

Foram gravadas as apresentações e as entrevistas, para que possa ser revisto as cenas com mais detalhes, voltando várias vezes uma mesma gravação (Powell, Francisco e Maher, 2004). As notas de campo consistem em anotações realizadas durante a observação das turmas. O questionário avaliativo continha questões relacionadas às aulas, aos vídeos e ao trabalho com vídeos. As entrevistas consistiam em entrevistas semiestruturadas.

> Entrevistas semiestruturadas [...] combinam perguntas abertas e fechadas, onde o informante tem a possibilidade de discorrer sobre o tema proposto. O pesquisador deve seguir um conjunto de questões previamente definidas, mas ele o faz em um contexto muito semelhante ao de uma conversa informal. (Boni e Quaresma, 2005, p. 75)

O processo de análise dos dados está em andamento e como tenho bastante dados e de diferentes naturezas, realizarei a triangulação de dados (Araújo e Borba, 2004).

Apresentação dos dados e das análises

Proposta

A proposta com vídeos nas aulas acompanhadas ocorreu em dois momentos:

1. Vídeos apresentados pelo professor em sala de aula;
2. Vídeos produzidos e/ou editados pelos alunos para o trabalho final da disciplina.

Nessas aulas, diversos recursos, formas de linguagens e expressões foram utilizadas. São eles: o vídeo, o PowerPoint, aulas expositivas, Prezi, o software GeoGebra, discussões em grupo, a prática do aluno ir na lousa e explicar para a turma, dentre outros.

Vídeos apresentados em aula

Os vídeos apresentados em aula consistiam em vídeos selecionados na internet, em sites como o (Gapminder, 2012), (YouTube, 2012) e (Coleção M3, 2012). Esses vídeos continham palestras, situações problemas e produções de alunos postadas na internet (ver figura 1).

Figura 1. Vídeos assistidos em aula

Com relação aos vídeos assistidos, trabalhamos de duas maneiras. A primeira foi passar primeiramente o vídeo, para depois, por meio de discussões, utilizar o vídeo para introduzir conteúdos ou mesmo fazer relações com o assunto que seria abordado em aula. A segunda maneira consistiu em trabalhar um determinado tópico ou exercício para posteriormente visualizar o vídeo e discutir o assunto.

Vídeos produzidos e/ou editados pelos alunos

Os trabalhos finais da disciplina eram realizados em grupos de duas a cinco pessoas. Os vídeos produzidos e/ou editados pelos alunos foram de diferentes naturezas como, narrativas feitas pelos alunos com imagens, edições avançadas como o grupo que utilizou a técnica stop moction para apresentar sobre o tema fotografia e produção de um vídeo onde há um diálogo que permeia um roteiro com falas sobre o tema "Fractais" (ver figura 2).

Devido ao fato de deixarmos a proposta aberta para produção ou edição dos vídeos, cada grupo realizou um vídeo diferente. Os temas dos trabalhos apresentados foram: (a) Fractais (b) Número de ouro (c) fotografia (d) Matemática e música (e) Matemática e a Guerra (f) A importância da matemática nos estudos fitossociológicos (g) Neurociências (h) Tempo. Todos os vídeos podem ser acessados no (Canal GPIMEM, 2012).

Figura 2: Vídeos produzidos pelos alunos

Análises Iniciais

Pela análise inicial dos dados, percebe-se que os alunos se empenharam e divertiram com a elaboração dos trabalhos. Mas houve reclamações no sentido de tomar muito tempo e o minicurso ser específico do YouTube. Não surgiram limitações como falta de materiais para a produção dos vídeos. Acredito que esta proposta pode contribuir para a contextualização da parte matemática dos temas com os vídeos, visto que cada aluno tem uma percepção aguçada, alguns têm uma percepção mais visual, outros mais auditiva e outros mais táteis e o vídeo de certa forma, pode propiciar essas três formas.

Neste momento, as análises me levam a perceber que o vídeo está presente como uma forma auxiliadora do trabalho escrito tanto como material de pesquisa, que em alguns casos substituiu a busca usualmente realizada em textos, como complementação do trabalho expandindo, ilustrando e realçando fatos que passariam "despercebidos/desfavorecidos" na fala oral. E dentro dessa "complementação" surgiram categorias como divulgação do tema trabalhado, "descontração" em que o grupo utilizou uma técnica de filmagem, verbalização do conteúdo estudado, vídeo como produto para a apresentação do seminário, recortes de documentários para gerar aprendizado sobre o tema, dentre outros.

Considerações finais

Esse estudo, ainda em andamento, pode contribuir para discussões sobre:

- O uso de vídeo em aulas de matemática;
- A produção de vídeos por alunos em aulas de matemática por meio da modelagem matemática.
- Como ocorre a reorganização do pensamento dos seres humanos em contato com diferentes mídias, em epecial, o contato com os vídeos.

Com relação ao primeiro item, vídeos assistidos, os alunos julgaram esses vídeos como: facilitadores, dinâmicos, realçar aplicação da matemática no cotidiano, ampliar e ilustrar conceitos/processos biológicos e matemáticos, ser mais atrativo por ter forma/linguagem diferente, consistir em uma ferramenta complementar. Nesta primeira análise, algumas falas dão indícios de que o vídeo, assistido em aula, tem que ser usado de maneira sucinta, passando informações referentes ao tema trabalhado como em um documentário, para servir de fonte de estudo, onde quem não entendeu tem a possibilidade de assistir em outro momento.

Com relação ao segundo item, os trabalhos de modelagem, nota-se que os alunos enfatizaram a importância de poder escolher o tema, porém relataram que deveria ser obrigatório ter relação com a matemática, para dar mais sentido o trabalho com a disciplina.

Ainda com relação a estes trabalhos, os alunos relataram que esta prática é importante para a formação acadêmica, pois eles aprenderam a criar/editar vídeos, uma vez que isso é novo para alguns, mas que pode vir a ser uma tendência futura. Gostaram da proposta por ser viável, uma vez que a câmera digital não é algo difícil de obter no meio universitário, além de trabalhar a noção de síntese/tempo para a produção do vídeo. Os alunos relataram já ter tido experiência em outras disciplinas e que o vídeo ajuda a transmitir o conteúdo de uma forma não usual (não menos interessante), além de permitir conhecimento e aplicações do assunto na vida de várias pessoas.

Com relação ao terceiro item, tenho uma concepção que diferentes mídias proporcionam diferentes aprendizagens e significados dentro de um mesmo tema. Essa discussão requer uma rigorosa análise que poderá ser parte da minha dissertação de mestrado, portanto não entrarei em detalhes nesse artigo, embora tenha discutido algumas coisas durante minha apresentação no RELME 26. Começo a pensar que o vídeo teve um destaque com relação às outras mídias presentes na sala de aula, visto que os alunos relataram que ele contextualiza e serve como material de estudo. O fato do vídeo ser bem aceito nos trabalhos de modelagem mostra que os alunos deram destaque a essa experiência, manifestando interesse em trabalhar com essa tecnologia para sua formação acadêmica e pela liberdade de expressão presente neste meio.

Os próximos passos nesta pesquisa, que poderão originar futuros artigos, consistem na escolha de alguns destes trabalhos para investigar, cuidadosamente, a produção desses alunos em forma de episódios. Ao utilizar o termo "cuidadosamente", me refiro a transcrever as apresentações e entrevistas dos grupos escolhidos e juntamente com os questionários e trabalhos finais entregues, tentar trazer contribuições com relação ao uso de vídeos na aprendizagem dos alunos.

Referências bibliográficas

Araújo, J. L. e Borba, M. C. (2004). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Brasil: Autêntica.

Boni, V. e Quaresma, S. J. (2005). Aprendendo a entrevistar: como fazer entrevistas em Ciências Sociais. *Revista Eletrônica dos Pós-Graduandos em Sociologia Política*, 2(1), (pp. 68-80) Brasil: UFSC.

Borba, M. C., Malheiros, A. P. S. e Amaral, R. B. (2011). *Educação a Distância online.* Brasil: Autêntica.

Borba, M. e Scucuglia, R. (2009). Modelagem e performance digital em educação on-line. In Gonçalves (Ed.), *A educação na sociedade dos meios virtuais* (pp. 153-171). Brasil: Santa Maria.

Borba, M. C. e Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. Nova York: Springer.

Canal Gpimem. (sf). Acessado em 04 de setembro de 2012 de http://youtube.com/user/gpimem?feature=CAQQwRs%3D.

Coleção M3. (sf). Acessado em 04 de setembro de 2012 de http://m3.ime.unicamp.br.

Gapminder. (sf). Acessado em 04 de setembro de 2012 de http://www.gapminder.org/videos/.

Goldenberg, M. (2007). A arte de Pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Brasil: Record.

GPIMEM. (sf). Acessado em 04 de setembro de 2012 de http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpimem.html.

Moran, J. M. (1995). *O vídeo na sala de Aula. Brasil: Comunicação* e *Educação,* (2) , 27-35). Disponível em: <http://www.revistas.univerciencia.org /index.php/comeduc/ article/viewArticle/3927>

Moran, J. M. (2005). *Atividades & Experiências: as múltiplas formas do aprender*. Brasil: São Paulo.

Powell, A. B., Francisco, J. M. e Maher, C. A. (2004). *Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes.* Brasil: *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 17(*21), 81-140

Santagata, R. e Guarino, J. (2010). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM Mathematics Education*, *43*(1), 133-145.

Teixeira, A. (1963). Mestres de amanhã. Brasil: Rio de Janeiro.

Walsh, M. (2011). Multimodal Literacy: researching classroom practice. Australia: Primary English Teaching Association.

Youtube. (sf). Acessado em 04 de setembro de 2012 de http://www.youtube.com.

ESTUDOS GRÁFICOS DAS VARIAÇÕES DOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

José Milton Lopes Pinheiro, Marger da Conceição Ventura Viana, Nilson de Matos Silva
Universidade Federal de Juiz de Fora e Universidade Federal de Ouro Preto Brasil
jmilton.ufjf@gmail.com, margerv@terra.com.br, nilson.ufop@gmail.com

Resumo. Pretendemos, neste trabalho, observar como os estudantes estudam a variação dos coeficientes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$), com a utilização do software GeoGebra e verificar se isto facilita a compreensão do desenho gráfico desta função. Para isto elaboramos e aplicamos um teste em uma turma de alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática e, em seguida, ministramos um minicurso sobre o GeoGebra para os mesmos. Após a realização do minicurso, reaplicamos o teste. No primeiro teste, os estudantes tiveram facilidade de compreensão em relação ao sinal do coeficiente *a*, porém, a variação modular foi um desafio e constatamos um alto índice de erros relacionados ao coeficiente *b*. Quanto ao coeficiente *c*, houve facilidade. Após a intervenção com o software GeoGebra, houve uma evolução no entendimento da conseqüência da variação do coeficiente b no gráfico da função..

Palavras chave: função quadrática, coeficientes, GeoGebra

Abstract. Using the software GeoGebra, in this work we observed how students come to understand variation in the quadratic function coefficients $f(x) = ax^2 + bx + c$. In this study, we made us of a pre/post test strategy of pre-service teachers. Durign the study, the students were provided with an introduction to GeoGebra. Upon completation of the workshop the test was reapplied and the results of the two tests were compared. In the first test it was easy for the students to compare the coefficients *a*, nevertheless, the modular variation was a challenge. No difficulties were noted in using the coefficient *b*, however we found a high rate of errors related to the coefficient *b*. However, after the introduction of the GeoGebra software, there was an evolution in the understanding of coefficient variations.

Key words: quadratic function, coefficients, GeoGebra

Introdução

O estudo variacional dos coeficientes da função quadrática não é uma proposta inédita, trata-se de um assunto já discutido por alguns autores na área da Matemática e da Educação Matemática. No entanto, o presente estudo foi motivado por nossas inquietações com a compreensão dos estudantes sobre a variação dos coeficientes da função quadrática, durante a realização de um estágio supervisionado curricular em duas turmas do primeiro ano do Ensino Médio, em escolas das redes particular e pública do Estado de Minas Gerais, Brasil.

Embora os professores das referidas turmas explicassem com rigor os detalhes das variações dos coeficientes da função quadrática, principalmente os coeficientes *b* e *c*, e, sobretudo as implicações destas variações em seus desenhos gráficos, os estudantes percebiam muito pouco.

Tendo conhecimento das possibilidades de serem utilizados outros meios de ensino, decidimos pelo uso de um software de geometria dinâmica. Por razões técnicas e econômicas, elegemos o GeoGebra, por ser um software livre e rodar na Plataforma Linux que é usada na rede pública de ensino de Minas Gerais. Assim, o que realizamos foi um estudo para verificar como os estudantes compreendem as variações dos coeficientes da função quadrática com o auxílio de uma ferramenta computacional, o software GeoGebra. Com isso o objetivo de nosso estudo consistiu em verificar se com o auxílio com o auxílio do software os estudantes aumentam a compreensão das alterações que o desenho gráfico apresenta ao variar os coeficientes *a*, *b* e c da função quadrática.

Para viabilizar a consecução do objetivo foi necessário apresentar e esclarecer (aos estudantes) como utilizar o software GeoGebra no estudo gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx+c$.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, partimos de uma busca bibliográfica. A pesquisa a princípio de natureza qualitativa, necessitou de técnicas que envolveram aplicação de testes e análise quantitativa das respostas dos sujeitos da pesquisa.

Nossas observações e explorações conduziram a uma discussão das implicações destas mesmas variações sobre os movimentos da parábola, que é o desenho gráfico representativo da função quadrática.

Neste artigo, os resultados das respostas dos alunos aos testes que indagavam quanto às variações dos coeficientes *a*, *b* e *c,* serão revelados em gráficos com enfoque maior para o coeficiente *b,* que nos pareceu menos explorado em pesquisas com esse viés.

Segundo Jacubo, Lelis e Centurión (2001), no desenho gráfico da função quadrática, que é uma parábola, a variação modular do coeficiente *a* implica em uma parábola mais aberta ou mais fechada. Já a condição $a > 0$ (positivo) ou $a < 0$ (negativo), resulta na orientação, para cima/para baixo, da concavidade da parábola. De acordo com Dante (2000), relacionando os sinais dos coeficientes *a* e *b*, é possível determinar a localização do vértice da parábola, quando os sinais de *a* e *b* são os mesmos, o vértice da parábola se localizará à esquerda do eixo das ordenadas, quando os sinais forem diferentes, o vértice se portará a direita.O coeficiente *c* é representado graficamente pela ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo y.

O uso das ferramentas computacionais na educação matemática

As ferramentas computacionais podem favorecer o aprendizado da Matemática ao possibilitar aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos. Permitem trabalhar com a Matemática intuitivamente ao proporcionar meios que auxiliam na construção e visualização de gráficos e figuras e na resolução de problemas cujas soluções exigem cálculos algébricos extensos que demandam tempo para a sua realização e verificação (Viana, 2004).

Assim, o processo de construção do conhecimento de objetos matemáticos, com contextos complementares que envolvam gráficos, interpretação algébrica e numérica, pode ser favorecido pela utilização das tecnologias computacionais; porém, deve-se ressaltar que a qualidade do ensino depende, em grande parte, da qualidade das tarefas propostas aos estudantes e não apenas da disponibilidade ou emprego de tecnologias computacionais (Freitas, 2009; Albuquerque, 2008).

Com isso, o processo de ensino e aprendizagem pode ocorrer de forma diferente, pois com ferramentas computacionais existe a necessidade de conjugação de cálculos exatos com cálculos aproximados o que pode contrapor objetivos algébricos e numéricos.

Apesar dos inúmeros benefícios proporcionados pela Informática (Borba e Penteado, 2001) fazem algumas considerações apontando dificuldades para sua implantação nas escolas, embora não sejam obstáculos. O Laboratório de Informática exige um eficiente suporte técnico, que às vezes é precário e para muitos professores existe dificuldade em desenvolver atividades dentro do laboratório, o que pode mudar ou interromper a dinâmica da sala de aula.

Mas após adquirir conhecimento suficiente e estar familiarizado com o uso da tecnologia, o professor consegue desenvolver e aperfeiçoar técnicas para ensinar determinado conteúdo e a tecnologia abre um leque de opções a serem aplicadas dentro ou fora da sala de aula (Frota e Borges, 2004).

Por outro lado, conforme Bicudo (2000, p.7), "em situação de aprendizagem, o conhecimento se constrói sob novas configurações estruturadas de maneiras específicas quando os sujeitos atuam em sistemas seres humanos-mídia". E, portanto é necessário assumir as ferramentas computacionais como componentes do ambiente em que ocorre a aprendizagem e não como meros instrumentos.

Em alguns cursos de formação de professores já existe uma disciplina denominada Ambientes Informatizados.

Caracterização do campo de pesquisa

Foram convidados a participar dessa pesquisa dez alunos de uma turma do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Pública de Ensino Superior, situada em uma cidade da região metropolitana de Belo Horizonte, Minas Gerais. Os alunos ainda não possuíam conhecimentos relativos ao software GeoGebra e concordaram em participar da pesquisa.

Construção da pesquisa

Para realizar este estudo, tomamos como norteadores a Tendência da Informática na Educação Matemática, apoiados em Borba e Penteado (2001) e em Penteado (2000) e o conhecimento específico sobre representação gráfica da função quadrática em Dante (2000). Com o suporte desses teóricos, preparamos um primeiro teste, composto por 15 questões, que envolviam as variações modular e de sinal dos coeficientes *a, b* e *c* da função quadrática.

Após a realização do primeiro teste, colhemos todos os dados para uma análise futura. Em seguida os alunos participaram de um minicurso com o GeoGebra. Após sua realização aplicamos um segundo teste. Assim, foi possível efetuar comparações dos resultados dos dois testes realizados (antes e após a realização do minicurso).

Análise dos resultados

Variação modular do coeficiente a

Na primeira atividade – Teste 01 e Teste 01a – definimos como referência o gráfico da função quadrática *f*(*x*) = kx^2, em que k ≠ 0, k $\in \mathbb{R}$ e é uma constante. No teste T01, apresentamos um gráfico representado por uma parábola mais fechada que é o gráfico referência. Já no teste T01a, esboçamos outro gráfico com a parábola mais aberta em relação à referência. As perguntas consistiam em saber o que ocorre graficamente com o aumento ou diminuição do valor de *k* e em assinalar uma das opções dadas.

Conforme o Gráfico 1 mostrado a seguir, é possível observar um considerável aumento no número de acertos dos alunos no teste T01a em comparação com os do teste T01 realizado antes da participação no minicurso sobre o GeoGebra.

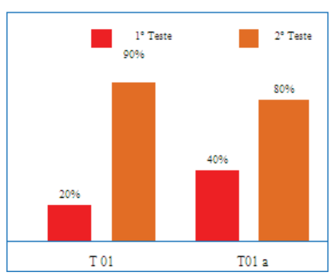


Gráfico 1– Acertos T01/T01a. Fonte: Dados da pesquisa.

O progresso dos resultados apresentados para os testes T01 e T01a, em sua segunda aplicação, aponta para a influência das atividades desenvolvidas com o software Geogebra, sob nossa orientação, nas quais tomamos como referência a função *f*(*x*) = kx^2. Sugerimos aos alunos que variassem os valores de ***k***, alternando números inteiros e fracionários.

Testes envolvendo a variação do sinal do coeficiente a

No primeiro teste, como mostra o Gráfico 2, a seguir, 99% dos participantes acertaram as questões relativas à representação gráfica das variações do coeficiente *a*. Já para o segundo teste, o índice de acerto das questões referentes ao mesmo coeficiente alcançou os 100%, conforme mostra o Gráfico 3, o que pode evidenciar ênfase dada ao coeficiente *a* no ensino da função quadrática.

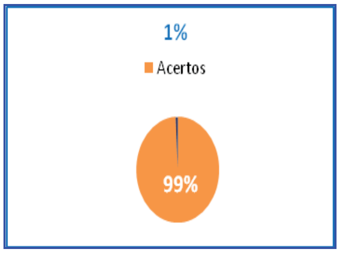


Gráfico 2 – Coeficiente **a** - 1° teste

Gráfico 3– Coeficiente **a** - 2° teste.

Testes envolvendo a variação de sinal do coeficiente b

Gráfico 4 – Coeficiente ***b*** - 1° teste

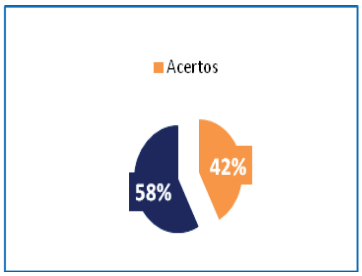


Gráfico 5 - Coeficiente ***b*** - 2° teste

A análise dos Gráficos 04 e 05 aponta para uma possível deficiência no estudo e compreensão relacionados ao coeficiente *b* da função quadrática, o que nos remete a uma reflexão mais detalhada sobre o entendimento da variação desse coeficiente, pelos alunos participantes da pesquisa. Fazendo uma breve comparação dos resultados do estudo das variações do coeficiente *a* com o estudo do coeficiente *b*, verificamos que os graduandos apresentaram um domínio muito superior ao das variações relacionadas ao coeficiente *a*, o que corrobora nossas expectativas do início da pesquisa.

Testes envolvendo a variação de sinal do coeficiente c

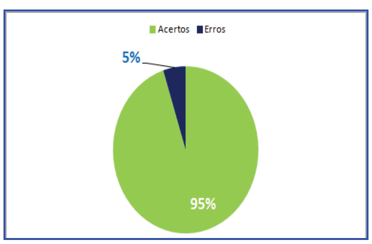


Gráfico 6 - Coeficiente ***c*** – 1° teste

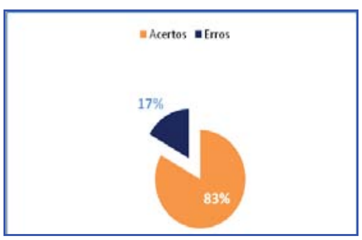


Gráfico 7 - Coeficiente ***c*** – 2° teste

Tomando como base as respostas para o estudo das variações relacionadas com o coeficiente ***c***, percebemos pelos gráficos 6 e 7 que os alunos apresentaram bom conhecimento ao interpretar esse coeficiente e a representação gráfica de suas variações.

Representação dos acertos/erros das questões completas – variação de a, b e c

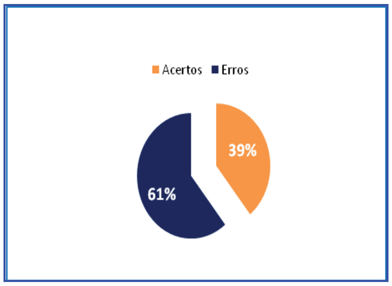


Gráfico 8 - Questões completas-1° Teste

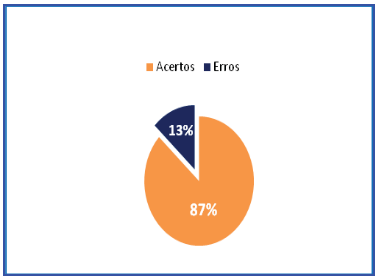


Gráfico 9 - Questões completas – 2ºTeste

No primeiro teste, somente 39% dos pesquisados acertaram as questões completas.

Após a intervenção com a apresentação e utilização do GeoGebra, obtivemos uma elevação do índice de acertos para 87%.

Os Gráficos 8 e 9 apresentam a culminância da nossa pesquisa, apontando para a veracidade da influência positiva do uso do GeoGebra para os estudos gráficos das variações dos coeficientes da função quadrática.

Considerações finais

Verificamos que a percepção gráfica dos alunos foi aprimorada. No entanto, entendemos que um software de geometria dinâmica, por si só, não é suficiente para o ensino e aprendizagem, mas é uma ferramenta auxiliar do professor, cujo papel como mediador é de grande importância.

E que o GeoGebra foi um importante recurso computacional utilizado para trazer mais clareza e entendimento para os alunos acerca do estudo das variações dos coeficientes da função quadrática e seu gráfico, pois verificamos, em nossos registros, que os alunos participantes da pesquisa apresentaram uma evolução considerável em suas respostas relativas às variações dos coeficientes, após a intervenção com o GeoGebra.

Assim, o uso do GeoGebra foi relevante para estudar graficamente as funções quadráticas.

Dessa forma, consideramos que os resultados de nossa pesquisa tenham sido importantes, pois após o uso do *software* GeoGebra conseguimos diminuir algumas das dificuldades dos alunos participantes da pesquisa quanto ao estudo das variações dos coeficientes da função quadrática e seu gráfico.

Esperamos que estes resultados possam servir de subsídio para a realização de outras pesquisas que também contribuam para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática no entendimento das conseqüências das variações dos coeficientes da função quadrática em seu gráfico.

Referências bibliográficas

Albuquerque, L. (2008). *O uso do programa Geogebra no ensino de Geometria Plana de 5ª a 8ª séries do ensino fundamental das escolas públicas estaduais do Paraná.* Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Federal do Paraná. Brasil.

Bicudo, M. A. V.(2000). Prefácio. Em: Miriam G. Penteado e Marcelo C. Borba (orgs.). *A informática em ação: Formação de Professores, Pesquisas* e *Extensão,* (pp. 05-08). São Paulo, Brasil: Olho d'Água.

Borba, M. C. e Penteado, M. G. (2001). *Informática* e *Educação Matemática*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Dante, L. R. (2000). *Matemática*: Contexto e Aplicações, 1° ano do ensino médio. 4 ed. São Paulo, Brasil: Ática.

Freitas, A. D. (2009). *A Utilização do Geogebra no Ensino de Matemática:* Recurso para os Registros de Representação e Interação. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Cruzeiro do Sul. Brasil.

Frota, M. C. R.e Borges. O. (2004). Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na Educação Matemática. Em: B. L. Ramalho e O. Fávero (Eds.), *Anais da 27ª reunião anual da Anped*,(s/p.). Caxambu, Brasil: Anped.

Jacubo, J.; Lellis, M. e Centurion, M. (2001). *Matemática na medida certa*: 8ª série – ensino fundamental. 5. ed. São Paulo, Brasil: Scipione.

Penteado, M. G. (2000). Possibilidades para a formação de professores de matemática. Em: Miriam G. Penteado e Marcelo C. Borba (orgs.). *A informática em ação: Formação de Professores, Pesquisas* e *Extensão,* (pp. 23-34). São Paulo, Brasil: Olho d'Água. São Paulo, Brasil: Olho d'Água.

Viana, M. C. V. (2004). Vale utilizar softwares no ensino de Cálculo? Em: L. M. Carvalho e C. A. Moura (Eds.), *História* e *Tecnologia no Ensino de Matemática 1,* (pp. 131-138). Rio de Janeiro, Brasil: UERJ e UFRJ.

ACERCAMIENTO TABULAR Y GRÁFICO PARA LAS DISTRIBUCIONES NORMAL Y BINOMIAL CON WINSTATS EN CIENCIAS DE LA SALUD

Alicia López-Betancourt, Martha Leticia García Rodríguez
Universidad Juárez del Estado de Durango México
ablopez@ujed.mx, marthagarcia@gmail.com

Resumen. La enseñanza de la estadística se ha caracterizado por enfatizar los procesos algorítmicos. La incorporación de la tecnología para la enseñanza de la estadística permite trabajar la representación gráfica y tabular para la reflexión de problemas de probabilidad y estadística. El *Winstats* es un software de acceso libre que presenta estas características. Este software se aplicó en la maestría en ciencias médicas de la Universidad Juárez del Estado de Durango al trabajar de forma colaborativa. El propósito se centró en que los estudiantes resuelvan problemas en su contexto. Los resultados muestran que los estudiantes con el apoyo del *Winstats* incorporaron para la solución de sus problemas la representación tabular y gráfica lo que evitó los procesos algorítmicos.

Palabras clave: distribución, probabilidad, gráfica, tabular, winstats

Abstract. The teaching of statistics has been characterized by emphasizing algorithmic processes. The incorporation of technology in the teaching of statistics to work graphical and tabular representation for the reflection on problems in probability and statistics. The Winstats is free access software such characteristics. This software was applied in medical mastery at Juarez University of Durango State to work collaboratively. The purpose focused on students to solve problems in context. The results show that the students with Winstats incorporated support for solving their problems tabular and graphical representation, which prevented algorithmic processes.

Key words: probability, distribution, graphic, tabular, winstats

Antecedentes

En los últimos años las exigencias de organismos internacionales en el ámbito educativo han impulsado a que los profesores e investigadores en los diferentes niveles incursionen en la acelerada era digital. Los perfiles de los estudiantes distan mucho de los que ingresaban a las aulas hace apenas una década o menos. Los profesores deben ser facilitadores, comunicólogos, tener competencias en las tecnologías de información y comunicación y actualizarse continuamente en su ámbito.

Los profesionales de la ciencia de la salud no son la excepción. Anteriormente, sólo un grupo reducido que laboraban en hospitales se dedicaban también a investigar. Sin embargo, ahora es necesario que la mayoría se involucre en estos procesos. Tanto dentro de las universidades como en los hospitales.

El perfil de los estudiantes en los grupos de posgrado en ciencias de la salud con los que se ha trabajado alrededor de los últimos ocho años se pueden describir de la siguiente manera: en su mayoría los participantes rebasan los 30 años, están activos en su profesión y desean aprender estadística para aplicarla en sus proyectos de investigación. También asisten jóvenes médicos recién egresados que realizan su servicio social o su internado o bien estudian alguna especialidad. Pero el propósito es el mismo: aplicar la estadística a un tema en particular que generalmente ya lo tienen preciso.

Dentro de este perfil también resalta el escaso dominio en temas básicos de matemáticas como son: números reales, intervalos, localización de números en la recta, graficas simples, entre otros. Además, no todos, pero sí se presenta una especie de barrera la cual les impide reconocer sus conocimientos matemáticos básicos.

La actitud, en general, con los grupos que se ha trabajado es similar: poco interés en la explicación teórica y énfasis en cómo se aplica en el *software*.

Es cierto que la profundidad del contenido estadístico debe ser acorde a los propósitos de aplicación de la estadística en la salud, sin embargo ¿cómo equilibrar el sustento teórico de la estadística con la aplicación, sin caer en un exceso de apoyo en el *software*?

Al enseñar estadística a los estudiantes de la Maestría en Ciencias Médicas de la Facultad de Medicina de la Universidad Juárez del Estado de Durango como se mencionó anteriormente conlleva algunas dificultades. Una es que el perfil de los estudiantes carece de un sustento matemático. Asimismo los estudiantes enfatizan los procesos algoritmos y presentan dificultades para la interpretación de los resultados. Esto último también se observó al aplicar *software* como *SPSS* y *Epidat*. Por ejemplo los estudiantes presentan dificultades para identificar tipo y escala de variable así como la prueba estadística para aplicar en una prueba de hipótesis.

Para precisar lo anterior se aplicó una prueba pre-test a estudiantes del tercer semestre. Enseguida algunos resultados: el 70% de los estudiantes contestaron de forma incorrecta el tipo de variable y entre el 80% y 100% no identificó la escala de la variable. En la asociación de la prueba estadística adecuada el 35.7% respondió de forma correcta, el 21.4% incorrecta y el 42.9% no contestó. De los que respondieron de forma correcta no proporcionaron la lectura de los datos y por lo tanto no relacionan el contexto del problema a la solución.

Fundamentación teórica

El principal eje teórico de la investigación se centró en las representaciones semióticas Duval (1993) que son fundamentales en la actividad matemática para la aprehensión de conceptos. En este sentido un objeto matemático a través de sus representaciones semióticas y la interacción de cada una de ellas pueden permitir la aprehensión del objeto matemático.

El segundo eje es la recomendación que marca Hitt (2003) de promover el uso por parte de los estudiantes de los apoyos visuales para la resolución de problemas matemáticos y evitar la escasa articulación de las diferentes representaciones de los conceptos.

Se considera que la estadística se ha caracterizado por enfatizar las representaciones tabulares, sobre todo antes del desarrollo de los diferentes recursos tecnológicos para matemáticas. Pero en la actualidad también es factible contar con las representaciones gráficas. En este sentido se puede promover el uso por parte de los estudiantes de los apoyos visuales para relacionar las representaciones gráficas y tabulares.

Por lo anterior, los profesores debemos tener presente en nuestra práctica docente la incorporación de diferentes representaciones para la resolución de ejercicios y problemas. A la par de estimular su uso por parte de los estudiantes. Si los profesores sólo trabajamos los algoritmos eso mismo harán nuestros estudiantes.

Sin embargo, aún cuando dentro del currículo se ha contemplado el uso y análisis de datos, no se ha dado a la enseñanza de la estadística la importancia debida en los diferentes niveles de educación. En su mayoría se reduce sólo a la aplicación de fórmulas. Sin perder de vista que la investigación en la enseñanza de la estadística y la probabilidad es un campo relativamente joven que inició en la década de los ochenta.

El tercer eje para esta investigación fue el ambiente con tecnología. La incorporación de ésta en el aula de matemáticas tiene alrededor de veinte años. El avance vertiginoso de la tecnología no ha ido a la par de la incorporación en el aula, de este modo la presencia de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, "demanda un mayor esfuerzo de parte de los profesores para: elaborar secuencias didácticas adecuadas para algunos temas, cambiar la forma de evaluar, aprender a utilizar la tecnología educativa, detectar resultados equivocados producidos al utilizar la tecnología". (De Faria, 1999, p. 4)

A poco más de diez años que De Faria (1999) escribiera lo anterior se puede observar que los profesores ahora tenemos más retos. El alcanzar al jinete de la tecnología es casi imposible. Sin embargo los profesores debemos estar lo más cerca que se pueda para poder responder a las necesidades de los estudiantes.

De este modo el enseñar estadística con tecnología es generalmente recurrir a un *software* que apoye los procesos algorítmicos involucrados en los diferentes tópicos de la estadística. No obstante esto tiene algunos riesgos. Uno de estos es que los estudiantes sólo apliquen el *software* como una caja negra. Lo cual implica que los procesos no queden claros para los estudiantes y otro riesgo es que la interpretación de los resultados esté muy alejada de la solución real.

Los investigadores Godino (1995) y Ledesma (2002) recomiendan la integración de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de la estadística. El segundo autor recomienda el uso de imágenes computarizadas e interactivas, diseñadas para ser didácticamente manipuladas ya sea cambiando o transformando una determinada representación gráfica de los datos con la finalidad de generar analogías visuales y comprobar gráficamente conceptos estadísticos. En este sentido la investigación retoma la parte visual proporcionada por *Winstats* para las representaciones gráficas y tabulares.

Los investigadores Hochsztain, Ramírez y Álvarez (1999) presentaron los resultados obtenidos tras haber experimentado la aplicación de la computadora en la enseñanza de la estadística, según su experiencia invita a que las tareas docentes deben estar acompañadas de los diferentes recursos tecnológicos.

Los autores reconocen que aún se está muy lejos de obtener una respuesta unánime sobre el modo de usar estratégica y didácticamente la computadora. Además, enfatizan en los errores, en que se puede incurrir al generar modelos simulados, conceptualmente erróneos, por lo que afirman categóricamente que no es posible separar la estadística y sus aplicaciones computacionales del conocimiento de la disciplina a la que se está aplicando, situación presente en los estudiantes de posgrado de Ciencias de la Salud.

Existen en el mercado un buen número de *software* estadístico tales como: *Statgraphics, Statistica, SAS, SPSS, Epidat,* entre otros. Estos procesan cantidades de datos considerables y arrojan los resultados en cuestión de segundos.

El software *Winstats* es acceso libre y está disponible en: http://math.exeter.edu/rparris/. Además de esta bondad es de manejo fácil y permite graficar lo cual facilita la interacción entre representaciones tabulares y gráficas.

Con base en lo anterior esta propuesta se centró en aplicar el software *Winstats* de forma reflexiva; para analizar las representaciones tabulares y gráficas de las distribuciones de probabilidad Normal y Binomial. Así, el Cuerpo Académico de Matemática Educativa se formuló desarrollar el proyecto: "Representaciones semióticas para probabilidad y estadística en el contexto de Ciencias de la Salud". Se diseñaron dos secuencias didácticas (SD). SD1: Probabilidades de la Distribución Normal y SD2: Probabilidades de la Distribución Binomial. Los elementos de las secuencias didácticas fueron: tecnología a utilizar, expectativa de aprendizaje, conocimientos previos de la tecnología.

Objetivo

El objetivo de la investigación se centró en: diseñar, explorar y evaluar secuencias didácticas con estudiantes de posgrado en Ciencias de la Salud.

Método

Para el diseño de las secuencias didácticas se trabajaron colaborativamente dos profesores y un tesista. El análisis se trabajó con un modelo mixto Creswell y Plano (2007). El aspecto cualitativo incluyó las hojas de trabajo por parte de los estudiantes de las SD. El análisis de los datos se realizó a través de las representaciones de los estudiantes registrados en las hojas de trabajo de las SD.

Resultados

Se les proporcionó el siguiente ejemplo: *Para examinar la variación de la presión arterial los investigadores encontraron la media y desviación estándar en un grupo de personas sanas. Se asume que la presión arterial sistólica en los individuos sanos está normalmente distribuida con μ=120 y σ = 10 mm Hg. Realizar las transformaciones apropiadas para contestar las siguientes preguntas* apóyese en *Winstats.*

Realizar una lectura de los resultados y un boceto de la distribución que precise el área encontrada.

a) ¿Qué área de la curva está arriba de 130 mm Hg? Realiza una lectura del bosquejo del área en la distribución.

Enseguida la respuesta del equipo 1:

Equipo 1. Podemos observar en la gráfica y por medio de los cálculos obtenidos que un 15.86% del área está por arriba de los 130mm Hg.

A continuación su bosquejo de la gráfica a partir de la obtenida en *Winstats* (ver figura 1)

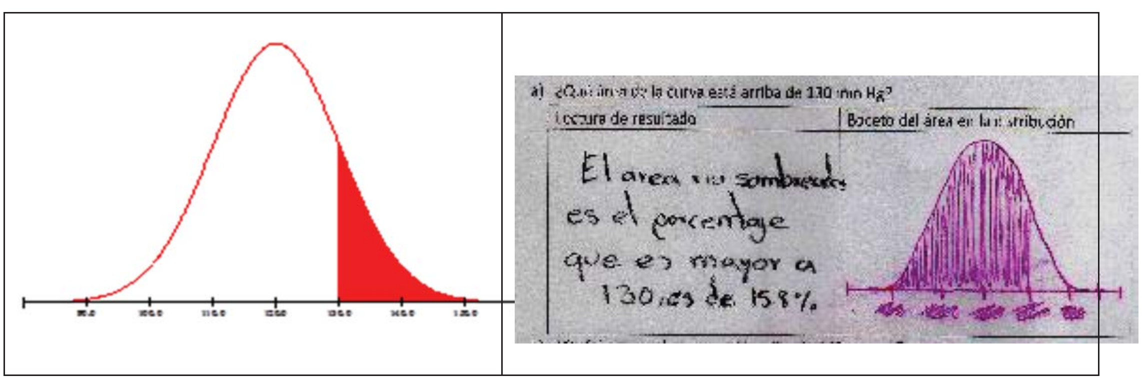


Figura 1. Producción individual equipo 1.

Veamos ahora una producción correspondiente a un estudiante (Ver figura 2), se puede observar que el estudiante puede realizar el bosquejo porque lo grafico en *Winstats*. Realiza las tres gráficas y escribe su conclusión relaciona el comportamiento de la gráfica con la variación en los parámetros.

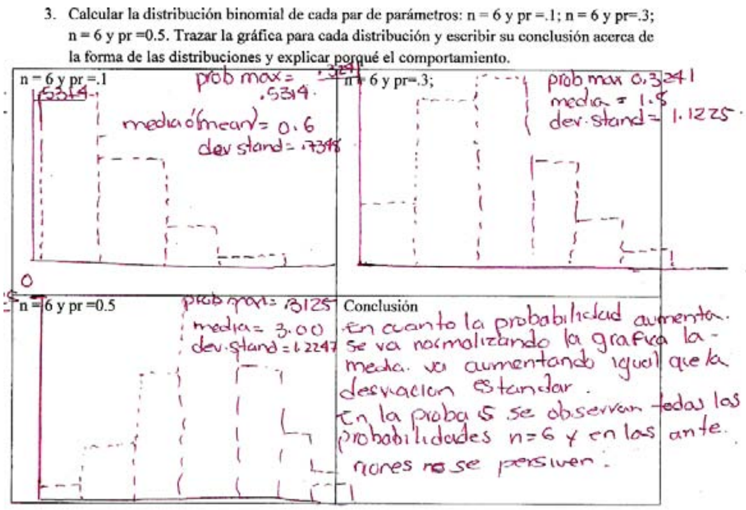


Figura 2. Producción individual del alumno 1

X = binomial success [15 trials, 0.30000 prob]

File Edit Help Close

x	prob[X=x]	prob[X<x]	prob[X>=x]
0	0.00475	0.00000	1.00000
1	0.03052	0.00475	0.99525
2	0.09156	0.03527	0.96473
3	0.17004	0.12683	0.87317

Figura 3. Probabilidades de la función binomial

En la figura 3 se muestra una tabla generada para uno de los ejercicios con las diferentes variantes. Lo cual apoyo a los estudiantes para responder con base en estos datos de probabilidades y con el apoyo de la gráfica.

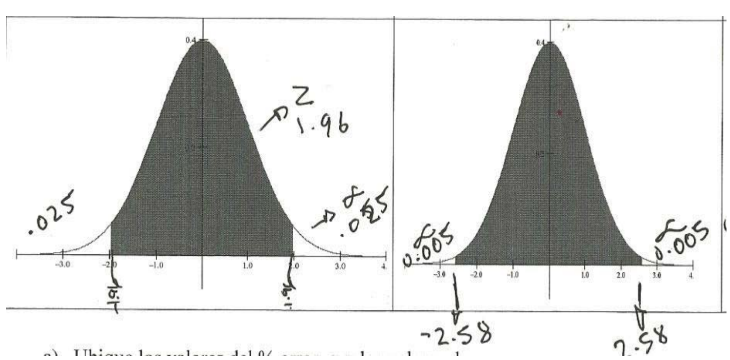


Figura 4. Producción de un estudiante al ubicar z y α en la curva Normal

La figura 4 muestra como algunos estudiantes a pesar de haber trabajado en ambiente tabular y gráfico al ubicar z lo ubica sobre el eje *x*, pero también en el área sombreada de la curva, pocos estudiantes lograron la ubicación correcta y la mayoría no lo contestó.

Conclusiones

El software *Winstats* apoyó las representaciones tabulares y gráficas lo cual permitió que los estudiantes relacionaran estas dos representaciones en términos de probabilidades. Se evitó que los estudiantes se enfoquen sólo en algoritmos asimismo el *software* ayuda a que los estudiantes vayan siguiendo paso a paso los procesos. El *software* permitió también conectar la información del área bajo la curva en términos de probabilidades debido a que actualiza la gráfica para cada una de ellas.

El recuperar sus producciones individuales en papel y lápiz también benefició el proceso de enseñanza y esto permitió analizar cómo los estudiantes graficaron en *Winstats* para posteriormente bosquejar su gráfica.

Como indica los párrafos anteriores la incorporación del *Winstats* favoreció las representaciones tabulares y gráficas, sin embargo todavía hay mucho trabajo por realizar en la enseñanza de la estadística sobre todo cuando son grupos como los mencionados en este trabajo que no tienen una base de conocimientos matemáticos que les permita avanzar en la conceptualización.

Referencias bibliográficas

Creswell, J.W. y Plano, C.V. (2007). *Mixed methods research*. Estados Unidos. Sage Publication.

De Faria, C. (1999). Polinomios de Taylor. *Cuadernos Didácticos* 7(2). Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo de pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp. 188-231). Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Godino, J.D. (1995). Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y aprendizaje de la estadística. *Uno* (5), (pp. 45-56). España.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. Recuperado el 24 de septiembre del 2006 de http://matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc

Hochsztain, E., Ramírez, R. y Álvarez, R. (1999). La computadora en la enseñanza de la estadística. *Conferencia Internacional: Excpetativas do ensino de estadística. Desafíos para el siglo XXI*. Santa Catarina, Brasil.

Ledesma, R. (2002). Gráficos dinámicos: una herramienta para la enseñanza de la estadística. *Revista digital de educación y nuevas tecnologías* 22. Documento Web. http://contexto-educativo.com.ar/2002/2/nota-07.htm. Recuperado el cuatro de junio del 2006.

AS REPRESENTAÇÕES EMPREGADAS POR CEGOS E SURDOS NUM AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM

Carlos Eduardo Rocha dos Santos, Cristiano Bezerra, Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
carlao_santos@yahoo.com.br, sgtcristiano2003@yahoo.com.br, solangehf@gmail.com

Resumo. O objetivo deste artigo é discutir as representações utilizadas por aprendizes cegos e por aprendizes surdos envolvidos na resolução de problemas matemáticos. Motivados pela possibilidade de explora o potencial da Educação a Distância como modalidade educacional de inclusão para pessoas com necessidades educacionais especiais, em particular, para deficientes auditivos e visuais, utilizamos a ferramenta fórum de discussão do ambiente virtual de aprendizagem *Moodle.* Em nossas análises, identificamos aspectos que indicam alguma autonomia dos participantes, assim como o uso de representações visuais na tentativa de comunicar suas soluções.

Palavras chave: mathematical problems, distance education, inclusion, discussion forum

Abstract. The aim of this paper is to discuss the representations used by blind learners and deaf learners involved in solving mathematical problems. Motivated by the possibility of exploring the potential of distance education as a modality of educational inclusion for people with special needs, and more specifically for those with visual or hearing impairments, we used the discussion forum tool of the virtual learning environment Moodle. In our analyses, we identified some aspects that indicated autonomy on the part of the participants, as well as the use of visual representations in their attempts to communicate their solutions.

Key words: problemas matemáticos, educação a distância, inclusão, fórum de discussão

Introdução

De acordo com dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o Brasil apresentava, em 2010, ano em que foi realizado o último Censo, cerca de 45 milhões de pessoas com algum tipo de deficiência permanente: visual, auditiva, motora, mental ou intelectual. Baseado nisso, oferecer alternativas de estudos, capacitação e qualificação para esse público, através da EaD, se configura como uma importante ação.

Tivemos como fator motivador a possibilidade de explorar o potencial da Educação a Distância (EaD) como modalidade educacional de inclusão para pessoas com necessidades educacionais especiais, em particular, para deficientes auditivos e visuais, pois uma das características da tecnologia é promover a inclusão das pessoas que possuem algum fator de limitação, facilitando sua integração à sociedade.

O objetivo deste artigo é discutir as representações utilizadas por aprendizes cegos e por aprendizes surdos envolvidos na resolução de problemas matemáticos. Para alcançar esse objetivo utilizamos a ferramenta fórum de discussão do ambiente virtual de aprendizagem (AVA) *Moodle* onde propusemos problemas matemáticos para participantes surdos, cegos e para aqueles sem limitações sensoriais.

Neste artigo discutiremos a resolução apresentada por participantes cegos e participantes surdos para os problemas matemáticos propostos durante o desenvolvimento dos nossos estudos. De acordo com Pozo (1998), a solução de problemas é um dos mecanismos "mais acessíveis de fazer o educando aprender a aprender", potencializando sua aprendizagem como um todo.

Optamos por trabalhar com a ferramenta fórum de discussão do AVA *Moodle*, pois entendemos que ela consiste em um instrumento virtual de aprendizagem que permite a interação entre os participantes contribuindo para a construção coletiva e colaborativa do conhecimento (Batista & Gobara, 2011). Segundo Oliveira (2011, pp. 3,10), o fórum serve como um "espaço mediador das reflexões coletivas e de ocorrência de interações que tivessem como base leituras, experiências e pesquisas".

As fases do projeto

Nossas pesquisas caracterizam-se como qualitativa, mais especificamente um estudo de caso segundo Lüdke e André (1986, p. 17), visto ser nosso interesse pesquisar uma situação singular – as representações utilizadas por aprendizes cegos e por aprendizes surdos envolvidos na resolução de problemas matemáticos, quando utilizam a ferramenta fórum de discussão de um ambiente virtual de aprendizagem estruturados para atender suas necessidades específicas.

De modo geral um estudo de caso apresenta basicamente três etapas em seu desenvolvimento: a exploratória; a delimitação do estudo e a coleta de dados; e a análise sistemática desses dados (NISBET e WATT, apud LÜDKE e ANDRÉ, 1986). No caso específico do estudo aqui apresentado, por se tratar de um estudo desenvolvido em um ambiente virtual iniciamos nossas pesquisas com a necessidade de desenvolver um ambiente de aprendizagem acessível que pudesse, também, ser um instrumento facilitador no acesso a conteúdos matemáticos, podendo ser utilizado tanto para a instrução como para a complementação na formação regular ou continuada. Planejamos então algumas fases para desenvolver os estudos. Naturalmente, cada uma dessas fases foi esboçada a partir de objetivos parciais a que nos propomos, tendo em vista as metas a serem atingidas no futuro.

Fase I – Nesta fase, procuramos encontrar uma plataforma que nos permitisse disponibilizar meios de acesso ao nosso público alvo, ou seja, que nos permitisse oferecer estímulos sonoros (para atender aos participantes cegos) e visuais (para atender aos surdos e regulares). Analisamos diversas plataformas e decidimos utilizar o ambiente de aprendizagem *Moodle* que nos ofereceu a possibilidade de inserir imagens, sons, vídeos (para apresentação em LIBRAS), leitores de telas, ampliando assim, as diferentes formas de comunicação, além de permitir aos usuários fazerem uso das mesmas ferramentas.

Fase II – Com a plataforma escolhida, passamos efetivamente a adaptar o AVA. Nossas pesquisas mostraram a existência de avaliadores de acessibilidade como, por exemplo, DaSilva. Além dos parâmetros oferecidos por esses avaliadores, foi preciso também realizar uma série de testes com usuários cegos e usuários surdos para garantir ampla acessibilidade ao nosso público alvo.

Fase III – Constatamos que as atividades aplicadas na fase de testes deveriam ser mudadas para a fase de coleta de dados. Nesta fase concentramos nossa atenção no planejamento e seleção das novas atividades matemáticas que fariam parte da implementação do ambiente.

Fase IV – A esta fase coube a seleção dos participantes do processo de coleta de dados que se realizaria através do fórum do ambiente. Foi uma tarefa árdua. Os participantes cegos foram cadastrados a partir da divulgação do endereço eletrônico do ambiente em duas listas de colaboradores da ADEVA (Associação dos Deficientes Visuais e Amigos). Os participantes surdos (alunos do Ensino Médio) foram cadastrados em uma Escola Especial SELI (Instituto de Educação Especial para Surdos) e os alunos regulares foram cadastrados em uma escola regular do Ensino Médio. Nosso interesse era selecionar participantes do Ensino Médio e/ou adultos, já que o foco do estudo era analisar o nível de acessibilidade e interatividade oferecido pelo AVA.

Fase V – Com os participantes devidamente cadastrados, iniciamos a participação no fórum de discussão do AVA. Os dados coletados foram arquivados para que pudéssemos fazer nossas análises.

Fase VI – Esta fase foi destinada às análises dos dados coletados. Alguns resultados serão apresentados nas seções 4 e 5.

Fórum de discussão

A utilização da ferramenta fórum de discussão tem assumido grande importância na realização de cursos à distância, caracterizando-se principalmente por ser uma ferramenta de comunicação assíncrona, o que permite a comunicação dos participantes em momentos diferentes.

Optamos por trabalhar com a ferramenta fórum de discussão do AVA *Moodle*, pois entendemos que ela consiste em um instrumento virtual de aprendizagem que permite a interação entre os participantes e contribui para a construção coletiva e colaborativa do conhecimento (Batista & Gobara, 2010).

Para Bairral (2007, p.80),

> O Fórum é um espaço de socialização contínua de práticas nas quais os interlocutores podem utilizar e integrar, diferentemente, informações do próprio cenário ou de fora dele. Além de ser um local com possibilidade temporal flexível, é também um espaço de imersão colaborativa na discussão, que pressupõe uma confiabilidade no coletivo virtual e exige dos profissionais sensibilidade e aceitação para propor e discutir perspectivas educacionais variadas.

Oliveira (2010, pp. 3,10) aponta o Fórum como um "espaço mediador das reflexões coletivas e de ocorrência de interações que tivessem como base leituras, experiências e pesquisas", neste aspecto,

> [...] o processo de construção proporcionado por tais interações aprender e colaborar – e colaborar aprendendo, ou, ainda, aprender colaborando – torna-se um desafio agradável para os participantes, os quais passam a buscar em fontes diversas (Internet, livros, revistas, etc) textos que sejam complementares em relação ao proposto inicialmente ou que sirvam de suporte para suas intervenções. (Oliveira, 2010, p. 8)

Nesse espaço, todas as contribuições e colaborações, que ocorrem de forma textual e assíncrona são submetidas às críticas de todos os participantes, promovendo uma forte interação, o que pode gerar um novo conhecimento sobre o assunto em discussão (Oliveira, 2010).

Deste modo, entendemos o fórum de discussão como sendo um espaço onde é possível mediar reflexões de um grupo e onde podem e devem ocorrer interações entre os participantes, tendo como base leituras, pesquisas e experiências próprias. Portanto, "o Fórum é um dos espaços democráticos do ambiente virtual, onde a hierarquia se dilui e os usuários se transformam de professores, monitores e alunos em, simplesmente, pessoas" (Kenski, 2001 como citado em Oliveira, 2010, p. 11).

Resoluções apresentadas por participantes cegos

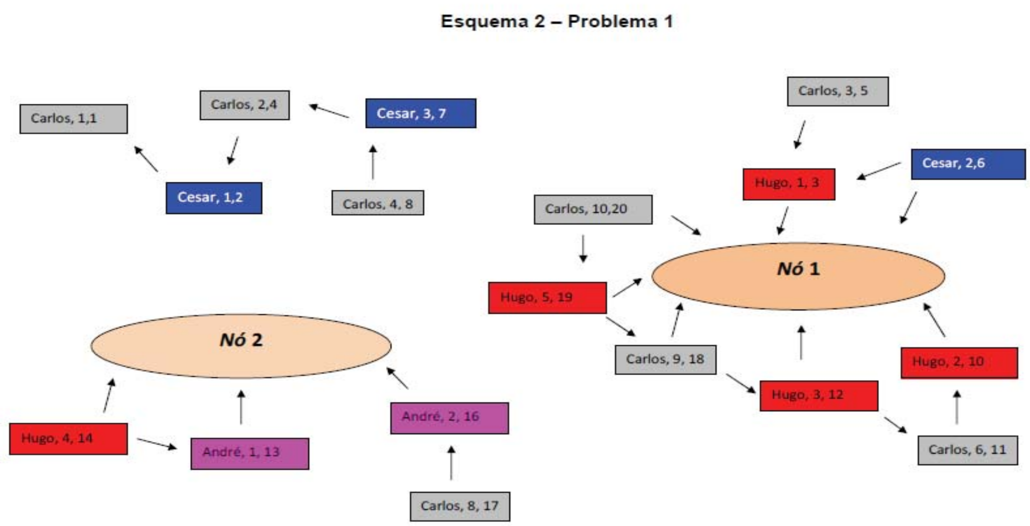
Nesta pesquisa a utilização do fórum de discussão promoveu um número significativo de intervenções, algumas dessas com características interacionistas, mas nem todas de cunho argumentativo.

No quadro a seguir (Figura 1) apresentamos o número de intervenções que ocorreram em cada um dos fóruns.

		Intervenções		
Problemas	**Fórum**	**Participantes**	**Pesquisador**	**Total**
1	1	10	8	18
2	2	14	10	24
3	3	11	13	24
4	4	3	7	10
	Avaliação	3	0	3

Figura 1 – Quantidade de intervenções nos Fóruns de discussão dos participantes cegos

Verificamos no quadro (Figura 1) que o número de intervenções ligadas ao problema 1 foi relativamente menor que o número de intervenções conectadas aos problemas 2 e 3.



Adaptado de Bairral, 2002, p. 184.

Figura 2 – Esquema 2 do problema 1: intervenções e interações entre os participantes

Analisando o esquema 2 (Figura 2) que representa as intervenções ocorridas no fórum do problema 1, destacamos que as dezoito intervenções têm características interacionistas e dessas, treze são de caráter argumentativo.

Apesar do número significativo de intervenções ocorridas principalmente nos fóruns dos problemas 2 e 3, nossas análises não nos trouxeram indícios da formação de redes argumentativas.

Notamos que somente a quantidade de intervenções, não caracteriza o surgimento de uma rede argumentativa, como por exemplo, no fórum 3. Nesse fórum identificamos uma grande quantidade de intervenções, porém, em sua maioria eram ações do pesquisador para trazer os participantes para colaborar no fórum. Outras foram respostas pontuais ao problema apresentado, não contribuindo para que pudesse originar redes argumentativas.

Resoluções apresentadas por participantes surdos

Nos fóruns de discussão utilizados pelos participantes surdos, também obtivemos um número significativo de intervenções, como podemos ver no Quadro a seguir (Figura 3).

		Intervenções		
Problema	**Fórum**	**Participantes**	**Pesquisador**	**Total**
1	1	15	17	32
2	2	06	08	14
3	3	10	12	22
4	4	05	06	11

Figura 3 – Quantidade de intervenções nos Fóruns de discussão dos participantes surdos

Após essa visão geral dada pelos números de intervenções em cada fórum, analisamos as intervenções de acordo com as tipologias de discurso encontradas, tendo como base um modelo adaptado do original de Bairral (2002), conforme Figura 4.

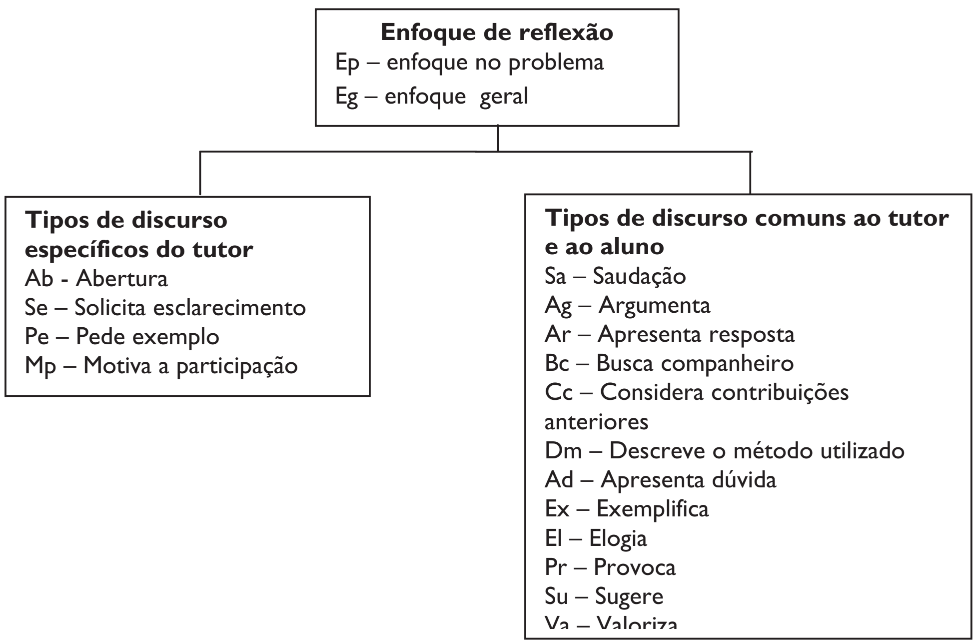


Figura 4: Tipologias de discurso

Em seguida, construímos um quadro para as contribuições de cada fórum, numerando as intervenções, identificando os participantes, identificando os tipos de discurso em cada intervenção, identificando o direcionamento da mensagem (para quem?) e um resumo interpretativo baseado nas tipologias, o que nos permitiu analisar de forma mais particular cada intervenção e observar a relação entre elas, também passamos a identificar cada participante com uma cor diferente no texto para facilitar a visualização e análise das interações, conforme podemos observar na Figura 5.

Nº ordem	Participante Data/hora	Intervenção na íntegra	Tipologia de discurso	Direcionamento da intervenção	Resumo
3	**CRISTIANO** 31 mai 11 20:43 h	(Oi pessoal!) (Cadê vocês? Estou aguardando as contribuições). Abraços.	Eg (Sa, Mo)	Para o grupo	Fez saudação e motivou o grupo
7	**KÁTIA** 18 jun 11 17:46 h	(Oi Boa tarde!) eu opinião qual é responder (1,5,10,10,5,1) (certo ou errado?) nao sei vc me coselho... bjo ate mais	Ep (Sa, Ar, Sc)	Não houve (implicitamente para o tutor)	Fez saudação, apresentou resposta da 6ª linha e solicitou confirmação

Figura 5: Resumo das intervenções considerando as tipologias

Dessa forma, conseguimos identificar algumas relações entre as tipologias e as suas influências na interação e condução dos fóruns de discussão, como por exemplo, o enfoque do discurso. Discursos com enfoque nos problemas propostos geravam outras intervenções diretas (como questionamentos, correções, sugestões, esclarecimentos), principalmente do tutor.

Percebemos também uma ênfase nas contribuições individuais, ou seja, os participantes não procuravam discutir a solução e apenas apresentavam "a sua resposta" e também uma tendência a cultura de sala de aula presencial, como acreditar que apenas o professor pode ajudar na resolução do problema, direcionando os questionamentos sempre ao tutor.

Algumas considerações

Em nossas análises foi possível reconhecer aspectos que mostraram alguma autonomia dos participantes na tentativa da resolução dos problemas nos fóruns de discussão. Pudemos observar que a interação entre os participantes surdos e o professor ocorreu de maneira muito tímida. Percebemos também que eles utilizaram discursos na maioria das vezes que representavam um pouco da cultura escolar presencial, como a insegurança nas respostas solicitando uma confirmação do tutor/professor.

Em contrapartida, notamos que para os participantes cegos as discussões giraram em torno de dois pontos destacados ao longo das intervenções do fórum. Dois participantes perceberam aspectos complementares referentes ao problema e cada um deles resultou num grande número de intervenções, o que enriqueceu muito as discussões do fórum.

O desenvolvimento desta pesquisa nos proporcionou a reflexão sobre a importância de estar e se sentir preparado para o trabalho com pessoas que tem limitações visuais e auditivas, evidenciando que não há impeditivo para que essas pessoas fiquem afastadas do que a EaD pode proporcionar.

Referências bibliográficas

Bairral, M. A. (2002) *Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de Formación a Distancia*. Tese de doutorado, Programa de Doctorado en Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universitat de Barcelona, Barcelona, Espanha.

Bairral, M. A. (2007). *Discurso, interação e aprendizagem matemática em ambientes virtuais a distância*. Seropédica: Edur.

Batista, E. M. & Gobara, S. T. (2011). *O Fórum on-line e a interação em um curso a distância.* Disponível em http://www.cinted.ufrgs.br/ciclo9/artigos/8cErlinda.pdf.

Ibge. (2012) *Censo Demográfico de 2010*. Disponível em: http://www.ibge.gov.br/home/.

Lüdke, M. & André, M. E. D. (1986). *A. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU,

Oliveira, G. P. (2011). *O Fórum em um ambiente virtual de aprendizado colaborativo.* Disponível em http://www.slideshare.net/demartini/o-frum-em-um-ambiente-virtual-de-aprendizado-colaborativo-presentation-667608.

Pozo, J. I. (1998). *A solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* Porto Alegre: Artmed.

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa