ARTE PREHISPANICO Y MATEMATICAS (*) (**)

Víctor S. Albis

1. Desde hace ya algún tiempo iniciamos en la Universidad Nacional de Colombia un programa de investigación en la historia de la matemática en nuestro país, convencidos de que esta historia nacional, por pobre que pareciera comparada con la de otros países, es parte integral de nuestra cultura, y de que, además, su conocimiento provee importantes puntos de partida o premisas para planes y programas que tengan que ver con el desarrollo de la investigación interdisciplinaria y la enseñanza de la matemática. Una presentación de este programa, con la esperanza de inducir acciones similares en otros países latinoamericanos, la hicimos hace un año en la *Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología: Quipu* (ALBIS 1984); a esta presentación remitimos para los detalles de los subprogramas de nuestra investigación que no tocaremos aquí. Hoy sólo conversaremos sobre el subprograma que allí denominamos "Arte y geometría precolombinos", para indicar de qué manera es posible aprovechar estos resultados en la enseñanza de la matemática, y de matemática que podrán usar luego con provecho, por ejemplo, los antropólogos.

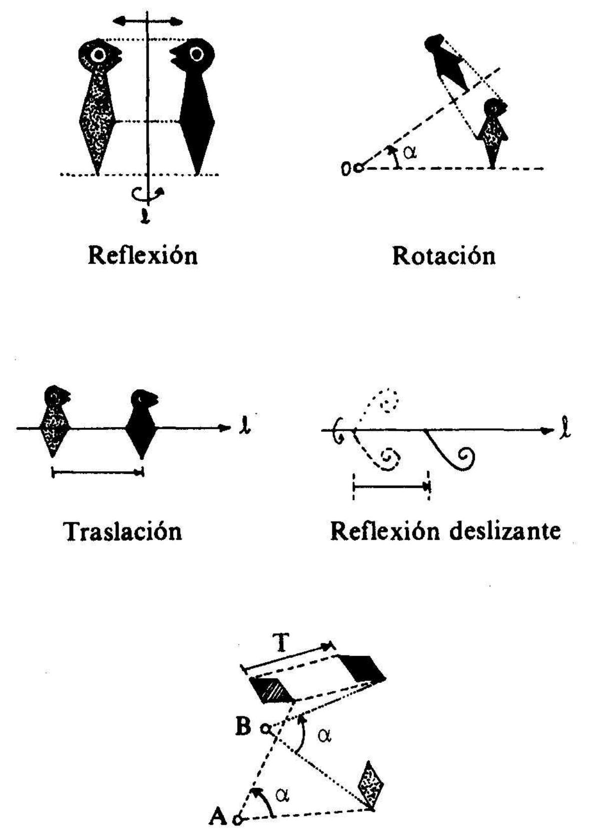
2. Cuando de relatar la historia de la matemática de uno de nuestros países se trata, hay que tomar una primera e importante decisión: la de si incluir o no la historia de la "matemática de sus culturas prehispánicas". Por supuesto hay que precisar qué se va a entender por la "matemática" de estas culturas, que entonces, es claro, no podrá colocarse en la misma *dimensión logocéntrica* a la que nos ha acostumbrado el *pensamiento racionalista griego* (*euclídeo*, dirían algunos). Por fortuna, nuestro conocimiento actual del pensamiento arcaico y la información etnológica, arqueológica e histórica, han permitido, en la segunda mitad de este siglo, historiar la *matemática pre-euclídea* de una manera coherente, dentro del marco de teorías —reconstrucciones conjeturales— estrechamente relacionadas con el *origen de la matemática* (SEIDENBERG 1962a, 1962b, 1981; van der WAERDEN 1983; FETTWEIS 1956 y otros). De modo que manifestaciones culturales como los distintos tipos de ornamentación de objetos y utensilios no sólo pueden considerarse, como dice BOURBAKI (1972, 368), "con todo derecho como una parte de las matemáticas desarrolladas por estas civilizaciones", sino que deben aceptarse como tales. Concedido lo anterior, tenemos ya el tema de una parte de la historia de la matemática de nuestras culturas aborígenes. Con razones semejantes, podemos argüir que los sistemas de numeración, los calendarios, la etnoastronomía, por ejemplo, son otros temas válidos para la historia de la matemática prehispánica.

3. ¿Pero cuál es la matemática subyacente en esta ornamentación? Pues nada más ni nada menos que los *grupos generados por reflexiones en el plano* (asociados, sabemos hoy, con álgebras de Lie simples complejas). En efecto, en cada *diseño ornamental* subyace un grupo de simetrías planas que le caracteriza y del cual el diseño no es otra cosa que una *realización geométrica concreta*. Este grupo se llama *el grupo de simetrías del diseño* y está conformado por los *movimientos rígidos o isometrías* que lo dejan incambiado.

Ya hemos sugerido que todas las isometrías del plano en sí mismo son generadas por reflexiones o, como se llaman también, *simetrías bilaterales*. Por otra parte, es un hecho geométrico que las isometrías del plano, necesarias para describir completamente a los grupos de simetrías de un diseño, pueden reducirse a cuatro tipos fundamentales: *reflexión respecto de una recta* (simetría bilateral), *traslación*, *rotación alrededor de un punto* y *reflexión deslizante* (es decir, una reflexión respecto de una recta, seguida de una traslación en la dirección de la misma recta). (Véase la figura 1). No debe, pues, sorprendernos que los movimientos rígidos o isometrías que dejan incambiado un diseño se llamen sus simetrías y que el grupo que ellos conforman sea generado por sólo unas cuantas combinaciones de los cuatro tipos de movimientos que hemos indicado antes.

(*) Conferencia invitada, Sexta Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

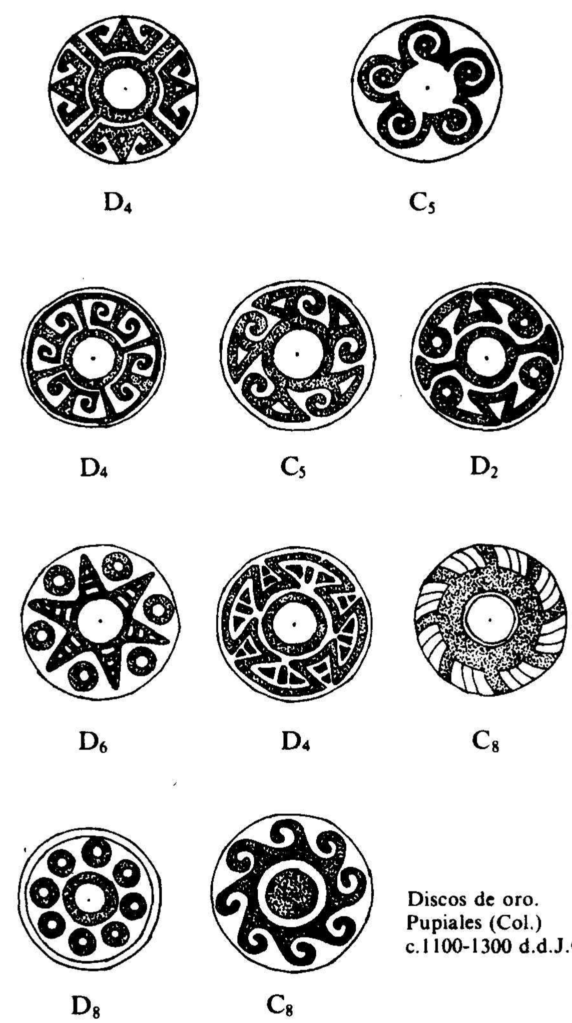
(**) Este trabajo se realizó dentro del Proyecto de Historia de la Matemática en Colombia de la Sociedad Colombiana de Matemáticas, auspiciado parcialmente por COLCIENCIAS (202-1-01-74).



La composición de una rotación de ángulo α alrededor de A y una traslación T, produce una rotación alrededor del punto B del ángulo α.

Figura 1

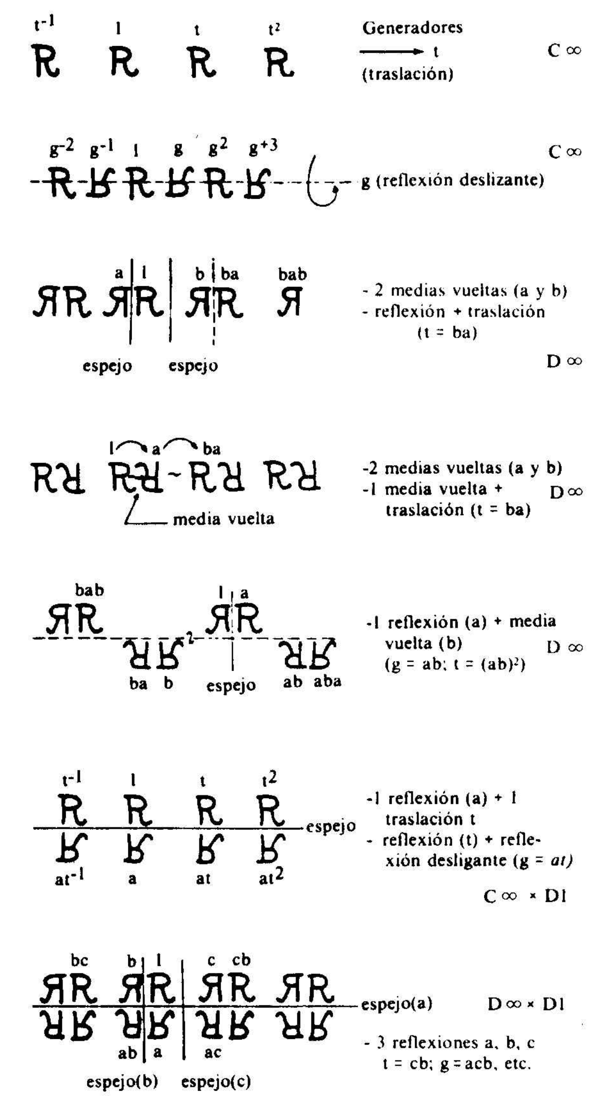
En las siguientes figuras aparecen divisiones de la circunferencia para n = 2,4,5,6,8



Discos de oro.
Pupiales (Col.)
c.1100-1300 d.d.J.C.

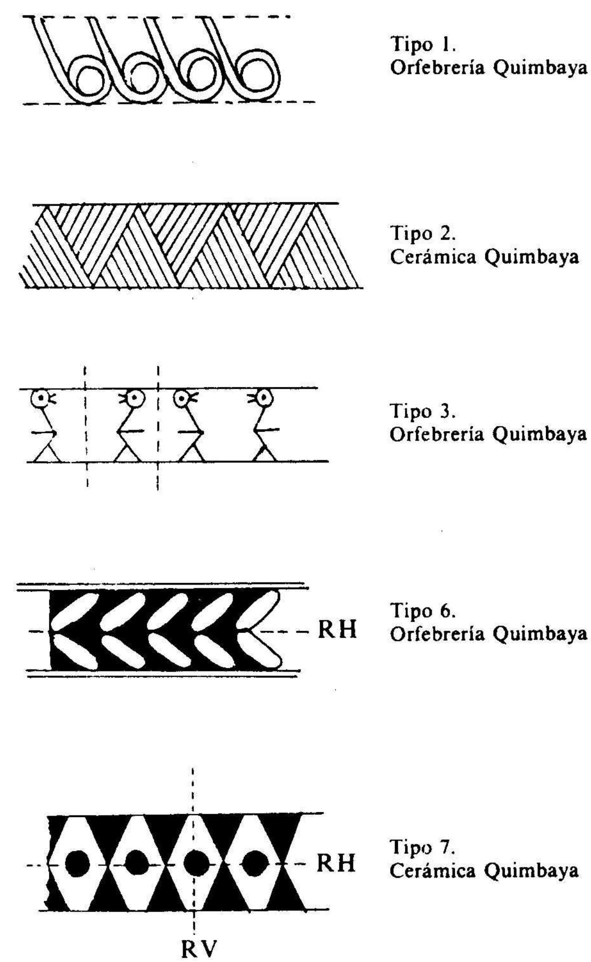
Figura 2

Un diseño se dirá *finito* si su grupo de simetrías no admite traslaciones; en este caso puede demostrarse que el grupo de simetrías del diseño es un grupo finito, isomorfo bien sea a C_n (grupo cíclico de n elementos) o bien sea a D_n (n-ésimo grupo diédrico), n = 1,2,3 ...; estos grupos se suelen llamar también grupos de LEONARDO DA VINCI, por el uso que éste quiso darles en el diseño arquitectónico de capillas. Es claro que existe una íntima conexión entre estos diseños y la división de la circunferencia en n partes iguales, o, equivalentemente, la construcción de un polígono regular de n lados: C_n *es el grupo de simetrías de un tal polígono.* Si mencionamos que dentro de la reconstrucción conjetural de la que hemos hablado anteriormente. los *ritualistas de las cuerdas y las estacas* representaban un papel fundamental (SEIDENBERG 1962a), no sería aventurado conjeturar que las divisiones, con regla y compás (léase, cuerdas y estacas), de la circunferencia conocidas por los griegos: n = 2^k (k entero positivo), 3 y 5 y combinaciones de éstas, formasen parte de una ciencia matemática existente en el neolítico europeo (c. 3000-2500 a.d.J.C.), y que además hayan sido incorporadas, desde época temprana, a la ornamentación ritual. Por ejemplo, LIETZMANN (1934) señala que estadísticamente esto ocurre así en Europa. En América, en la ornamentación de la cerámica y la orfebrería muiscas (figura 2) los diseños finitos o circulares también obedecen esta-



Los siete diseños de tipo friso

Figura 3.

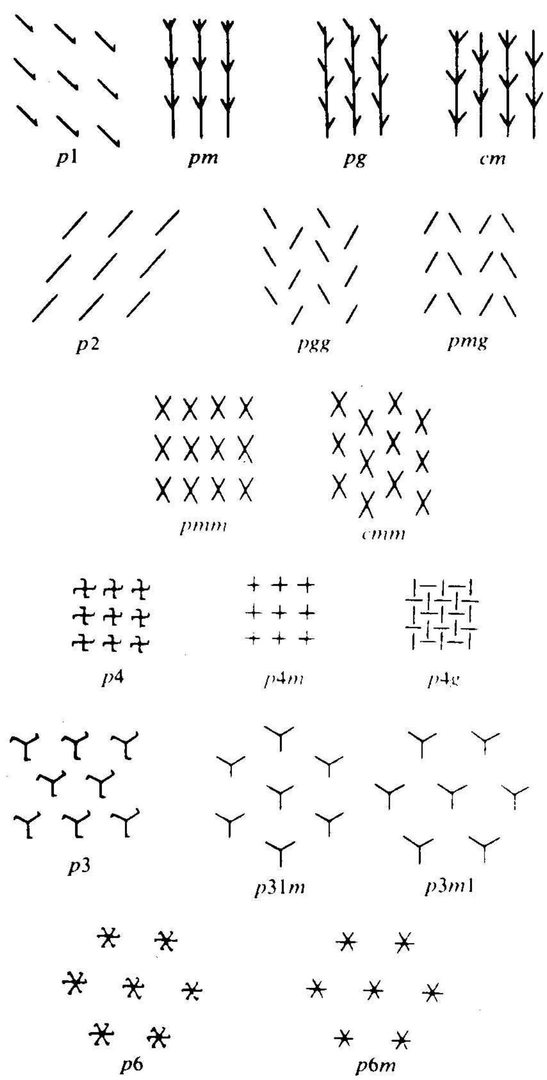


Ejemplos de frisos de la cultura Quimbaya

Figura 4.

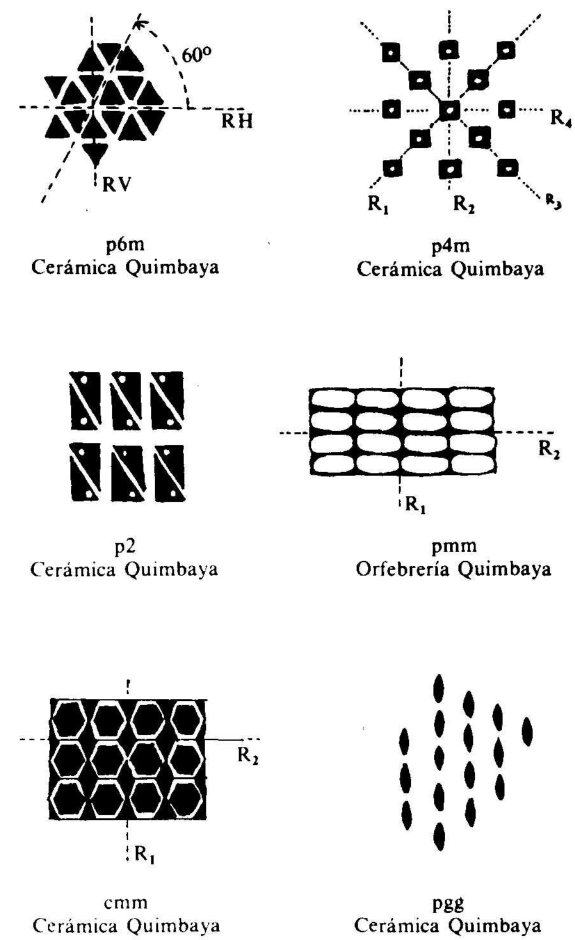
dísticamente a las divisiones con regla y compás (ALBIS, 1985), y los estudios preliminares en otras culturas prehispánicas colombianas parecen indicar lo mismo. ¿Invención independiente o transmisión cultural de allende el continente americano?

Cuando el grupo de simetrías del diseño admite traslaciones, éste se dice *infinito*, y aparecen dos tipos. Los *unidimensionales*, que admite una sola traslación; en ellos, llamados también de *tipo friso*, el *motivo fundamental* se repite a lo largo de una banda. Para ellos sólo hay siete grupos de simetrías posibles (véanse las figuras 3 y 4), abstractamente isomorfos a C_∞, D_∞, $C_\infty \times D_1$, $D_\infty \times D_1$ (donde C_∞ y D_∞ designan, respectivamente, al grupo cíclico y al grupo diédrico infinito). El otro tipo de diseños, admite, en sus grupos de simetrías, dos traslaciones en dos direcciones diferentes, por lo que hablamos de *diseños bidimensionales*; en éstos el motivo fundamental se repite simétricamente buscando llenar el plano. Para ellos existen 17 grupos de simetrías posibles (véanse las figuras 5 y 6), correspondientes a los 17 *grupos cristalográficos planos*. Objetos y utensilios adornados con estos diseños, en especial de frisos, se encuentran ya en el paleolítico europeo y antiguas muestras prehistóricas colombianas (1320 a.d.J.C.) (CORREAL 1983) y son también característicos en las culturas campaniformes del neolítico europeo (véase la figura 7).



Los diecisiete diseños bidimensionales

Figura 5.



Algunos ejemplos de diseños bidimensionales
Cultura Quimbaya (Col.)

Figura 6.

5. En la sección anterior fue nuestro propósito mostrar que términos como *geometría, isometría, grupo* (finito o infinito), *generador, diseño simétrico, arte, ornamentación, paleolítico, neolítico, arqueología, historia, cultura, rito* y otros más pueden convivir en un discurso en el que aparecen estrechamente relacionados. Es decir, ésta es una situación que se ajusta al requerimiento señalado por SANTALO (19??) de que *para enseñar la matemática debemos hacer que ésta interese al alumno.* De hecho, ella contiene *ingredientes estéticos y humanísticos llamativos* para un amplio círculo de personas. Si a ello añadimos su aplicabilidad, su interés se hace mayor. En efecto, los grupos de simetrías de los diseños proporcionan un *criterio de clasificación arqueológica*, independiente de los motivos figurativos y otros criterios morfológicos o descriptivos usados comúnmente por los arqueólogos e historiadores del arte prehistórico; creemos que en conjunción con éstos, contribuirá a poner en evidencia una serie de constantes, nunca antes utilizadas en Colombia, que abre, nuestro juicio, fructíferas perspectivas en la *investigación arqueológica comparada.* Por ejemplo, un estudio reciente en este sentido analiza la propagación de las técnicas cerámicas de Mesoamérica al Suroeste de los Estados Unidos de Norteamérica (ZASLOW 1981). El uso de los grupos de simetrías como criterio de clasificación arqueológica se facilita aún más con la existencia, para los

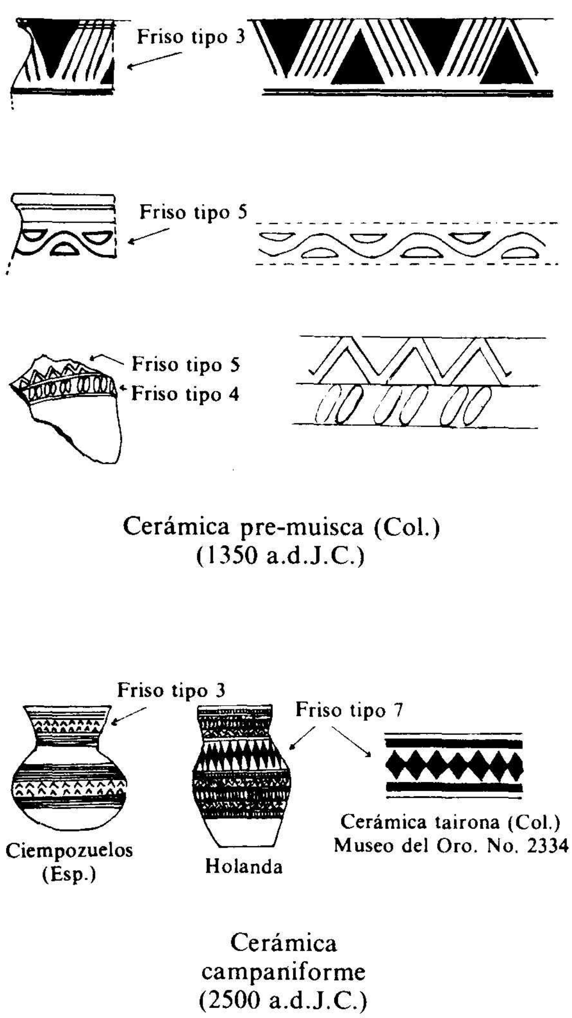


Figura 7.

diseños infinitos, de *diagramas de flujo* que pueden ser utilizados, segura y fácilmente, por quien tenga una idea clara de lo que son en el plano las rotaciones, las reflexiones, las traslaciones y las reflexiones deslizantes.

Ahora bien, construir estos grupos y trabajar con ellos es algo que está al alcance de los estudiantes de secundaria, partiendo de la noción de reflexión, para llegar a las de rotación y traslación y, finalmente, a la noción de grupo, usando como modelos o realizaciones los diseños prehispánicos, o cualquier otro tipo de ornamentación que interese a los estudiantes. Naturalmente, el uso de los diseños prehispánicos tiene la ventaja, muy importante, por cierto, de alimentar nuestra identidad cultural, incorporando a la historia de la matemática la contribución de nuestros ancestrales ceramistas, orfebres, etc., cualquiera que sea la teoría que usemos para explicar la invención o transmisión de este hecho cultural en nuestro continente. De modo que, si en los *curricula* de secundaria de nuestros países están incluidos los temas de los movimientos rígidos y las construcciones con regla y compás, la ornamentación prehispánica nos proporciona la oportunidad de enseñar estos temas bajo una *perspectiva más humanista*, interpretados y avaluados en un contexto cultural más amplio. A nivel universitario, por otra parte, es posible diseñar cursos para antropólogos, arquitectos, diseñadores gráficos e inclusive sociólogos, basados en las interrelaciones que hemos mencionado entre arte y geometría, ritos y juegos matemáticos, por ejemplo. A continuación presentamos una propuesta que hemos hecho en la Universidad Nacional de Colombia, de un curso inspirado en estas premisas para la carrera de antropología.

6. Matemáticas especiales para antropología.

6.1. *Justificación.* Fuera de las técnicas de tipo estadístico, los antropólogos y los arqueólogos han encontrado la necesidad de trabajar con otras herramientas matemáticas; más específicamente, las estructuras ordenadas y de grupo, la teoría de grafos y la de juegos, permiten atacar con éxito y novedad problemas de clasificación arqueológica, del parentesco y de análisis lúdico de mitos y ritos, entre otros. Este curso intentará presentar estas herramientas haciéndolas nacer, en lo posible, de los problemas que pretenden resolver.

6.2. *Objetivos.* Al finalizar el curso el estudiante debe estar en capacidad de:

a) Entender y aceptar la importancia de la matemática en el estudio de situaciones que interesan al antropólogo.

b) Reconocer y manejar la estructura de grupo abstracto.

c) Reconocer y manejar las relaciones binarias, los grafos y los juegos.

d) Resolver problemas elementales de optimización.

e) Clasificar la ornamentación lineal y plana de objetos y utensilios de origen arqueológico.

f) Establecer modelos lúdicos para mitos y ritos.

g) Entender la relación entre rito y el origen de la matemática.

6.3. *Contenido.* Simetrías, grupos de simetría y ornamentación. Movimientos rígidos en el plano. El grupo de simetrías de un diseño. Diagramas de flujo para clasificar la ornamentación. Ejemplos del uso de los grupos de simetrías en el estudio de la difusión de la ornamentación en culturas emparentadas o geográficamente cercanas; en las seriaciones arqueológicas.

Las tesis de Seidenberg sobre el origen ritual de la geometría. El teorema de Pitágoras. Triplas pitagóricas y construcciones megalíticas. Uso ritual de las triplas pitagóricas y la construcción de altares. Construcciones con regla y compás.

Grafos. Propiedades. Juegos sobre un grafo. Juegos de información completa. Las jerarquías, las genealogías, etc., como grafos. Los ritos y los mitos como juegos de información completa.

Relación de parentesco. Reglas matrimoniales en las sociedades primitivas.

6.4. *Bibliografía.* Además de algunos de los items que aparecen en la bibliografía general de esta charla queremos mencionar algunos más: J.G. KEMENY, J.L. SNELL & G.L. THOMPSON *Algèbre moderne et activités humaines.* París, Dunod (1965); C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications.* París, Dunod (1960); S.J. BRAMS, *Biblical Games.* Cambridge, MIT Press (1980); una serie de artículos en el *Journal of Math. Psychology* sobre los mismos temas.

Referencias

1. ALBIS, V. 1984 Un programa de investigación en la historia de la matemática en un país latinoamericano. *Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología: Quipu 1*, 391-400.

2. ALBIS, V. 1985 La división ritual de la circunferencia en el arte ornamental prehispánico colombiano I. Zona arqueológica muisca. MS presentado al 45 Congreso Internacional de Americanistas. Bogotá.

3. BOURBAKI, N. 1972 *Historia de las Matemáticas. Madrid (Alianza).*

4. CORREAL URREGO, G. & M. PINTO-NOLLA 1983 *Investigación arqueológica en el municipio de Zipacón (Cundinamarca).* Bogotá (Fundación de Investigaciones Arqueológicas Nacionales. Banco de la República).

5. FETTWEIS, E. 1956 Die Mathematik des Megalithkulturkreises und ihre Entwicklung. *Scientia 91, 1-15.*

6. LIETZMANN, W. 1934 Geometrie und Urgeschichte. *Zeit. f. math. u. naturwissens. Unterricht aller Schulgattungen 65*, 313-319.

7. SANTALO, L.A. 19?? La matemática y su enseñanza en los niveles elemental, medio y superior. MS.

8. SEIDENBERG, A. 1962a The ritual origin of counting. *Arch. f. History of Exact Scie. 1, 488-527.*

9. SEIDENBERG, A. 1962b The ritual origin of geometry. *Arch. f. History of Exact Scie. 2*, 1-488-527.

10. SEIDENBERG, A. 1981 The ritual origin of the circle and square. *Arch. f. History of Exact Scie. 25*, 269-327.

11. van der WAERDEN, B.L. 1983 *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Berlin (Springer-Verlag).

12. ZASLOW, B. 1981 Pattern dissemination in the prehistoric Southwest and Mesoamérica. *Arizona State University Anthropological Papers No. 25.* Tempe.

Hernández Manuel (1928 —)

"Signo y Variantes No. 3"
Acrílico pastel/papel durex
35 x 25 Cmts.
49/73